

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SİĞINAK ETKİSİ İÇEREN LOTKA-VOLTERRA TİPİ BİR AYRIK AV-AVCI
MODELİNİN LOKAL KARARLILIK VE ÇATALLANMA ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Şevval YILDIZ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Ağustos 2021



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Şevval YILDIZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SIĞINAK ETKİSİ İÇEREN LOTKA-VOLTERRA TİPİ BİR AYRIK AV-AVCI MODELİNİN LOKAL KARARLILIK VE ÇATALLANMA ANALİZİ

Şevval YILDIZ

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Tarih: Ağustos 2021

Bu tezde sığınak etkisi içeren Lotka-Volterra tipi bir ayrik av-avcı modeli ele alınmıştır. Çalışılan model, sürekli zamanlı bir popülasyon modelinden Euler metodu ile elde edilmiştir. Analize daha az parametreyle devam edebilmek için öncelikle sistem boyutsuzlaştırılmış, devamında boyutsuz sistemin denge noktaları bulunmuştur. Her bir denge noktası için lokal kararlılık analizi yapılarak sistemin dinamiği incelenmiştir. Ayrıca pozitif denge noktasında flip ve Neimark-Sacker çatallanmanın varlığı analitik olarak gösterilmiştir. Tüm bu analizler sığınak etkisini incelemek için önce sığınak etkisi içermeyen model, sonrasında sığınak etkisi içeren model için yapılmış ve elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır. Bu teorik sonuçlar nümerik simülasyonlarla desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lotka-Volterra tipi av-avcı modeli, Sığınak etkisi, Kararlılık analizi, Flip çatallanma, Neimark-Sacker çatallanma.

ABSTRACT

Master of Science

LOCAL STABILITY AND BIFURCATION ANALYSIS OF A DISCRETE LOTKA-VOLTERRA TYPE PREDATOR-PREY SYSTEM WITH REFUGE EFFECT

Şevval YILDIZ

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Date: August 2021

In this thesis, a discrete Lotka-Volterra type predator-prey model with refuge effect is discussed. The studied model was obtained from a continuous-time population model by utilizing the Euler method. In order to continue the analysis with fewer parameters, first of all, the system was nondimensionalized, and then the equilibrium points of the dimensionless system were found. The dynamics of the system was investigated by performing local stability analysis for each equilibrium point. In addition, the presence of flip and Neimark-Sacker bifurcation at the positive equilibrium point has been analytically demonstrated. All these analyzes were made and compared for the models with and without the refuge effect in order to examine the refuge effect on the dynamics. Obtained results supported by numerical simulations.

Keywords: Lotka-Volterra type predator-prey system, Refuge effect, Stability analysis, Flip bifurcation, Neimark-Sacker bifurcation.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocalarım Prof. Dr. Hüseyin MERDAN ve Dr. Őeyma BİLZEROĞLU'na, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
KISALTMALAR	xi
SEMBOL LİSTESİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Fark Denklemleri	3
1.1.1 Temel tanımlar	3
2. AYRIK DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇATALLANMA ANALİZİ	11
2.1 Flip Çatallanma	11
2.2 Neimark-Sacker Çatallanma	18
3. MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ	37
4. BİR AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNİN ÇATALLANMA ANALİZİ	39
4.1 Tez Problemi ve Tezin Amacı	39
4.2 Sığınak Etkisi İçermeyen Modelin Analizi	40
4.2.1 Modelin elde edilmesi	40
4.2.2 Denge noktaları ve lokal kararlılık analizi	42
4.2.3 Flip çatallanma analizi	48
4.2.4 Neimark-Sacker çatallanma analizi	59
4.3 Sığınak Etkisi İçeren Modelin Analizi	67
4.3.1 Modelin elde edilmesi	67
4.3.2 Denge noktaları ve lokal kararlılık analizi	68
4.3.3 Flip çatallanma analizi	74
4.3.4 Neimark-Sacker çatallanma analizi	83
5. NÜMERİK ÇALIŞMALAR	91
5.1 Flip Çatallanma için Nümerik Çalışmalar	91
5.1.1 Sığınak etkisi içermeyen model	91
5.1.2 Sığınak etkisi içeren model	94
5.2 Neimark-Sacker Çatallanma için Nümerik Çalışmalar	96
5.2.1 Sığınak etkisi içermeyen model	96
5.2.2 Sığınak etkisi içeren model	99
5.3 (1,0) Denge Noktası İçin Sığınak Etkisi	102
5.4 Pozitif Denge Noktası İçin Sığınak Etkisi	104
6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	107
KAYNAKLAR	109
EKLER	112
ÖZGEÇMİŞ	120

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Bitki popülasyonu $x(t)$ ve otobur popülasyonu $y(t)$ fonksiyonlarının salınımı (Bacaër, 2011)	2
Şekil 2.1: İkinci iterasyon fonksiyonu (Kuznetsov, 1998)	12
Şekil 2.2: Flip çatallanma (Kuznetsov, 1998)	12
Şekil 2.3: (x, δ) düzleminde flip çatallanma (Kuznetsov, 1998)	13
Şekil 2.4: Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)	22
Şekil 2.5: Subkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)	22
Şekil 5.1: $u(0) = 0.6, v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5$ ve $\delta = 0.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	92
Şekil 5.2: $u(0) = 0.6, v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5$ ve $\delta = 0.95$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	92
Şekil 5.3: $u(0) = 0.6, v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5$ ve $\delta = 1.34$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	93
Şekil 5.4: $1.2 \leq \delta \leq 2$ aralığında değişen δ değerleri için $u(0) = 0.6, v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5$ parametreleriyle oluşturduğu δ 'ya bağlı flip çatallanma diyagramı	93
Şekil 5.5: $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ ve $\delta = 0.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	94
Şekil 5.6: $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ ve $\delta = 0.7$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	94

Şekil 5.7: $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ ve $\delta = 0.89$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	95
Şekil 5.8: $0 \leq \delta \leq 3$ aralığında değişen δ değerleri için $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ parametreleriyle oluşturduğu δ 'ya bağlı flip çatallanma diyagramı	96
Şekil 5.9: $u(0) = 0.6614, v(0) = 0.1747$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 0.5$ ve $\delta = 3.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	97
Şekil 5.10: $u(0) = 0.6614, v(0) = 0.1747$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 0.5$ ve $\delta = 5.6$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	97
Şekil 5.11: $u(0) = 0.6614, v(0) = 0.1747$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 0.5$ ve $\delta = 5.9$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	98
Şekil 5.12: $u(0) = 0.6614, v(0) = 0.1747$ başlangıç değerlerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\delta = 6.05$ iken oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	98
Şekil 5.13: $u(0) = 0.6614, v(0) = 0.1747$ başlangıç değerlerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\gamma = 1/3, \beta = 0.5, r = 0.5$ parametreleriyle sırasıyla $\delta = 6.04, \delta = 6.08, \delta = 6.1, \delta = 6.2$ için oluşturduğu av-avcı ilişkisi gösterilmiştir	99
Şekil 5.14: $u(0) = 0.7713, v(0) = 0.1334$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3, \beta = 0.5, r = 0.5, \alpha = 0.1$ ve $\delta = 6.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	100
Şekil 5.15: $u(0) = 0.7713, v(0) = 0.1334$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3, \beta = 0.5, r = 0.5, \alpha = 0.1$ ve $\delta = 8.6$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	100
Şekil 5.16: $u(0) = 0.7713, v(0) = 0.1334$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3, \beta = 0.5, r = 0.5, \alpha = 0.1$ ve $\delta = 8.85$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.	101

- Şekil 5.17: $u(0) = 0.7713$, $v(0) = 0.1334$ başlangıç değerlerine ve $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.1$ parametrelerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\delta = 8.9627$ iken oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 101
- Şekil 5.18: $u(0) = 0.7713$, $v(0) = 0.1334$ başlangıç değerlerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.1$ parametreleriyle sırasıyla $\delta = 8.96$, $\delta = 8.97$, $\delta = 8.98$, $\delta = 8.99$ için oluşturduğu av-avcı ilişkisi gösterilmiştir. 102
- Şekil 5.19: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 102
- Şekil 5.20: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.2$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 103
- Şekil 5.21: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.5$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 103
- Şekil 5.22: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.8$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 104
- Şekil 5.23: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 104
- Şekil 5.24: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0.1$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 105
- Şekil 5.25: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0.2$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 105
- Şekil 5.26: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0.3$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir. 106

KISALTMALAR

Y.M.T. : Yüksek mertebeden terimler



SEMBOL LİSTESİ

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda yer almaktadır.

Simgeler	Açıklama
C^k	k-kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı
T^{-1}	T matris dönüşümünün tersi
$O(\cdot)$	Büyük-O notasyonu
$(x_1, \dots, x_2)^T$	(x_1, \dots, x_2) vektörünün devriği
A	Sistemin denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi
λ	Özdeğer
$\text{Re}(\lambda)$	λ kompleks özdeğerinin reel kısmı
$\text{Im}(\lambda)$	λ kompleks özdeğerinin sanal kısmı
\approx	Yaklaşık olarak eşit
$Df(x, y)$	f fonksiyonunun x ve y ye göre türevi

1. GİRİŞ

Biyolojik sistemlerin matematiksel modellemesinde üç temel adım vardır. Bu adımlar,

1. sistemi doğru bir şekilde temsil etmek için matematiksel modelin formülasyonunu oluşturmak
2. modelin davranışını anlamak için matematiksel teknikler uygulamak ve
3. elde edilen sonuçların biyolojik olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek için bu sonuçları yorumlamak

şeklinde ifade edilebilir.

Bir sistemin matematiksel modeli, sistemin yapısına göre genellikle fark veya diferensiyel denklemler ile ifade edilir. Bu tür modellerin kullanılmasının nedeni bu süreçlerin dinamik olması, yani zamana, mekana göre değişmesidir. Örneğin sürekli üreme ve ölümlerin olduğu durumlarda sürekli değişiklikler meydana geldiğinden diferensiyel denklemler kullanılır (Allen, 2007). Bugüne kadar diferensiyel denklemler kullanılarak pek çok biyolojik model oluşturulmuştur. Örneğin, Brauer (2001), Chi (1998), Murray (2002) popülasyon modellerini; Hethcote (2000), Zhu (2008), Balarezo (2021), Kozusho (2003) salgın hastalık modellerini; Das (2014), Gopalsamy (1996) fizyolojik sistemleri çalışmıştır.

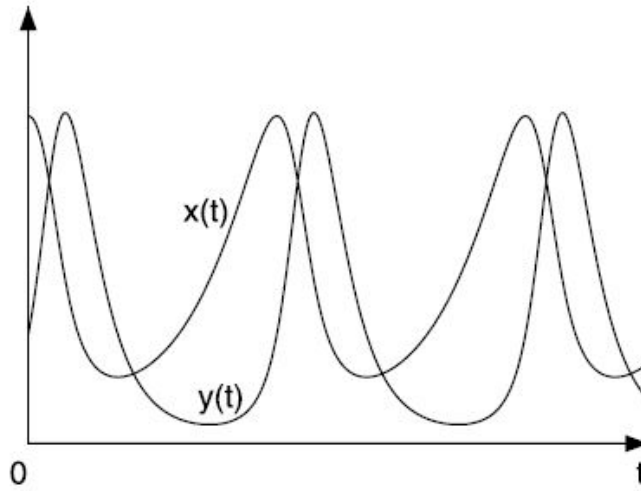
Bunun yanı sıra doğada nesilleri örtüşmeyen yani ardışık iki popülasyonun çakışmadığı, her yıl sadece bir jenerasyonun yaşadığı böcek veya bitki türleri de mevcuttur. Yaşam döngüsü bu şekilde kesik zamanlı dönemlerle ifade edilen türler için oluşturulan modellerde ise fark denklemleri kullanılır. Bir nesil ölüp yerine yeni nesil geldiğinde, x_t den x_{t+1} popülasyon büyüklüğüne geçiş fark denklemleri ile ifade edilir. Ayırık zaman aralığı ise bu geçişin gerçekleşmesi için gereken süreyi temsil eder. Yani, ardışık iki nesil arasındaki süreyi belirtir (Allen, 2007).

Fark denklemleri sadece biyolojik sistemlerde değil, birçok modelleme çeşidinde kullanılmaktadır. Örneğin, verilerin belirli bir aralıkta (saatlik, günlük, haftalık vb.) toplandığı durumlar göz önüne alındığında çok çeşitli alanlarda kullanılabilir (Bakınız: Ogata, 1987; Elaydi, 1996; Liu, 2007; Hu, 2011; Gao, 2005). Diğer yandan skalar bir fark denkleminde çatalanma, kaos veya farklı dinamik davranışlar gözlemlenmek mümkündür. Fark denklemleri, bu kullanım alanının genişliği ve diferensiyel denklemlere göre daha zengin bir dinamik yapı sergiliyor olması nedeni ile bilim adamlarının dikkatini çekmekte ve çalışmalarının temelini oluşturmaktadır (Baydemir, 2020). Bunun yanı sıra, diferensiyel denklemler için yapılan nümerik çalışmalarda, sistemin analitik çözümü çoğu zaman bulunamadığından veriler ayrıştırılarak elde edilir. Bu, fark denklemleri ile nümerik çalışmalarda daha doğru sonuçlara ulaşıldığını göstermektedir (Hu, 2011).

Popülasyon modelleri bir türü inceleyen tek bir denklemden oluşabileceği gibi, etkileşim halinde bulunan iki veya daha fazla türü inceleyen denklem sisteminden de oluşabilir. Bu sistemlerden yaygın olarak kullanılanlardan bir tanesi iki boyutlu av-avcı sistemleridir. 1920 yılında Alfred James Lotka, "Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems" başlıklı bir makale yayınlamıştır. Lotka, zaten birkaç yıldır laboratuvar deneylerinde geçici salınımlar sergileyen kimyasal reaksiyonlar ile ilgilenmekteydi. Makalesinin amacı, iki biyolojik türden oluşan ve sürekli olarak salınabilir bir sistem önermektir. Düşündüğü örnek ise bitkilerle beslenen bir otobur popülasyonuydu. t anındaki bitki yoğunluğunu $x(t)$, otobur yoğunluğunu $y(t)$ ile göstererek

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{1.1}$$

diferensiyel denklem sistemini model olarak kullanmıştır. Burada tüm parametreler pozitiftir. Ayrıca Lotka, makalesinde ispatsız olarak $(0,0)$ ve $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ denge noktaları dışında seçilen başlangıç değeri ile birlikte sistemde periyodik salınımların meydana geldiğini göstermiştir (Bacaër, 2011) (Bakınız: Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Bitki popülasyonu $x(t)$ ve otobur popülasyonu $y(t)$ fonksiyonlarının salınımı (Bacaër, 2011)

Şekil (1.1)'de otçul popülasyonun bulunduğu çevrede yeterli besinin olması durumunda popülasyonun arttığı görülmektedir. Bu artış bitki popülasyonunda bir azalmaya neden olur ve otçulları beslemek için yetersiz kaldığında, bazı hayvanlar açlıktan ölür. Sonrasında ise bitkiler, başlangıç değerine eşit bir düzeye gelene kadar yeniden büyümeye başlar. Bu durum kendini sürekli tekrar eder (Bacaër, 2011).

Ünlü matematikçi Vito Volterra bir balıkçılık problemini incelerken Lotka'dan bağımsız olarak aynı modeli kısa bir süre sonra yeniden keşfetmiştir.

Av-avcı modeli balıkçılık verilerini doğru açıklıyor gibi görünse de, ekolojide basitleştirilmiş modellerin gerçekçiliğine ilişkin tartışma o zamanlar yeni başlıyordu ve bu hâlâ bilimsel bir tartışma konusudur. Günümüzde bu av-avcı modeli aynı zamanda Lotka-Volterra modeli olarak da bilinir ve en çok atıfta bulunulan modellerden biridir (Bakınız: May, 1974)

1.1 Fark Denklemleri

Fark denklemlerinde, bir sistemdeki değişiklikler ayrık aralıklar üzerinden modellenir. Çoğu durumda, ayrık aralıklar zaman aralıklarını temsil eder ve bu nedenle zaman değişkenini belirtmek için t harfi kullanılır. Genel olarak ayrık zaman aralığı bir gün, bir hafta vb. gibi sabit bir uzunluktur (Allen, 2007).

1.1.1 Temel tanımlar

Tanım 1.1. $f : \mathbb{R}^{k+2} \mapsto \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere k -yinci mertebeden bir fark denklemi

$$f(x_{t+k}, x_{t+k-1}, \dots, x_t, t) = 0 \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

formundadır. Burada f , x_{t+k} ve x_t ye bağlı olmalıdır. Diğer türlü denklemin mertebesi k den farklı olur (Allen, 2007).

(1.2) ile verilen fark denklemindeki f fonksiyonu t yi açıkça içermiyorsa denkleme **otonom**, içeriyorsa **otonom olmayan** denklem denir.

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \dots + a_k x_t = b_t \quad (1.3)$$

en sık karşılaşılan fark denklemi formudur. Bu denklemin mertebesinin k olması $a_k \neq 0$ olmasını gerektirir (Allen, 2007).

Tanım 1.2. (1.3) ile verilen fark denklemindeki $a_j, j = 1, \dots, k$ katsayıları ve b_t birer sabitse veya x_t ye bağlı olmayacak şekilde t nin bir fonksiyonu ise bu denkleme k -yinci mertebeden **lineer**, aksi taktirde **lineer olmayan** fark denklemi denir. Ek olarak, eğer denklem lineer ve $b_t = 0$ ise denkleme **homojen**, $b_t \neq 0$ ise **homojen olmayan** denklem denir (Allen, 2007).

Bu terminoloji aynı şekilde fark denklem sistemlerine de uygulanabilir. k tane birinci mertebeden fark denkleminde oluşan sistem

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1.4)$$

formunda gösterilebilir.

Tanım 1.3. (1.4) denkleminde verilen f_i fonksiyonu t yi açıkça içermiyorsa verilen birinci mertebeden sisteme **otonom**, aksi halde **otonom olmayan** sistem denir (Allen, 2007).

(1.4) sistemini

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t) \quad (1.5)$$

ile gösterelim. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere a_{ij} , katsayıları ve b_i , x_i den bağımsız ise sisteme **lineer**, aksi halde **lineer olmayan** denir. Eğer sistem lineer ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $b_i \equiv 0$ ise **homojen** sistem, en az bir i için $b_i \neq 0$ ise **homojen olmayan** sistem adı verilir (Allen, 2007).

Ayrıca

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = [a_{ij}(t)], \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

olmak üzere (1.4) sistemi

$$X_{t+1} = A(t)X_t + B(t)$$

matris gösterimiyle yazılabilir.

Tanım 1.4. (1.2) fark denkleminin **çözümü**, denklemi özdeş olarak sağlayan $x(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$ fonksiyonudur. (1.5) sisteminin çözümü ise, her bir bileşeni bir fonksiyon olan ve denklemi sağlayan vektör değerli $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ fonksiyonudur (Allen, 2007).

Şimdi, $x_{t+1} = ax_t$ denklemini inceleyelim.

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 \\ x_2 &= ax_1 = a^2x_0 \\ x_3 &= ax_2 = a^3x_0 \\ &\vdots \\ x_t &= a^t x_0 \end{aligned}$$

olup $x_t = a^t x_0$ ilgili denklemin çözümüdür ve x_0 başlangıç değeri biliniyorsa bu çözüm tektir. Açıkça görülmektedir ki $0 < a < 1$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 0$, $a = 1$ ise her t için $x_t = x_0$ ve $a > 1$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \infty$ dur.

Şimdi,

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

formunda verilen lineer, homojen ve ikinci mertebeden fark denklemlerinin çözümlerini inceleyeceğiz. Bu tür denklemlerde çözüm adayı $\lambda \neq 0$ olmak üzere $x_t = x(t) = \lambda^t$ şeklindedir. Bu adayı denkleme yerine yazdığımızda

$$\lambda^{t+2} + \lambda^{t+1} + b\lambda^t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^t (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

elde edilir.

Tanım 1.5. $\lambda^2 + a\lambda + b$ ifadesine (1.6) denkleminin karakteristik polinomu denilirken $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ise karakterisitk denklemi olarak adlandırılır. Karakteristik denklemin λ_1 ve λ_2 köklerine ise özdeğer denir (Allen, 2007).

Çözümlerin şekli özdeğerlere bağlıdır ve üç ayrı durumda incelenir.

1. $\lambda_{1,2}$ reel ve birbirinden farklı ise çözüm

$$x(t) = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$$

formunda yazılır.

2. $\lambda_{1,2}$ reel ve çakışık ise çözüm

$$x(t) = c_1\lambda^t + c_2t\lambda^t$$

formunda yazılır.

3. $\lambda_{1,2} = a \mp ib$ olacak şekilde kompleks ise $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve $\theta = \text{Arctan}(b/a)$ olmak üzere çözüm

$$x(t) = c_1r^t \cos(t\theta) + c_2r^t \sin(t\theta)$$

formunda yazılır.

Bu üç durumda da elde edilen genel çözümün lineer bağımsız iki çözümün toplamı olduğu gösterilebilir. Lineer bağımsızlık için başka bir kontrol yöntemi de Casoratiandır. $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin Casoratianı

$$C[y_1(t), y_2(t)] = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(t+1) & y_2(t+1) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır ve en az bir $t > 0$ için $C[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümleri lineer bağımsızdır (Allen, 2007).

Birinci Mertebeden Lineer Sistemler

Öncelikle $k - yinci$ mertebeden

$$x(t+k) + a_1x(t+k-1) + \dots + a_kx(t) = b(t) \quad (1.7)$$

denklemini ele alalım. Burada

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) \\ y_2(t) &= x(t+1) \\ &\vdots \\ y_k(t) &= x(t+k) \end{aligned}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= y_2(t) \\ y_2(t+1) &= y_3(t) \\ &\vdots \\ y_k(t+1) &= x(t+k) = -a_1x(t+k-1) - \dots - a_kx(t) + b(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 1 \\ -a_k & \dots & & & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

olmak üzere (1.7) denklemi

$$Y(t+1) = AY(t) + B(t)$$

sistemine dönüşür (Allen, 2007).

Kararlılık Analizi

Tanım 1.6. Birinci mertebeden $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denkleminin denge noktası

$$\tilde{x} = f(\tilde{x})$$

eşitliğini sağlayan \tilde{x} dir. Aynı şekilde, $X_{t+1} = F(X_t)$ birinci mertebeden fark denklem sisteminin denge noktası

$$\tilde{X} = F(\tilde{X})$$

eşitliğini sağlayan \tilde{X} vektörüdür (Allen, 2007).

Tanım 1.7. $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denkleminde $m > 1$ olmak üzere m – periyotlu bir periyodik çözüm

$$f^m(\tilde{x}) = \tilde{x} \ni f^i(\tilde{x}) \neq \tilde{x}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad m > 1$$

koşulunu sağlayan reel değerli \tilde{x} çözümdür.

$k = 1, \dots, m$ olmak üzere her biri $m -$ periyotlu olan \tilde{x}_k çözümlerinden oluşan $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m\}$ kümesine ***m-döngü*** adı verilir.

\tilde{x}_1 , $m -$ periyotlu bir çözümler olmak üzere $\{\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1), \dots, f^{m-1}(\tilde{x}_1)\}$ kümesine ise \tilde{x}_1 çözümünün ***periyodik yörüngesi*** denir (Allen, 2007).

Bu tanımların aynısı $X_{t+1} = F(X_t)$ sistemi için de yapılabilir.

Tanım 1.8. \tilde{x} , $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denkleminin denge noktası olsun.

- Her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_0 - \tilde{x}| < \delta \quad \text{iken} \quad |x_t - \tilde{x}| < \varepsilon, \quad (\forall t \geq 0)$$

koşulunu sağlayacak en az bir $\delta > 0$ mevcut ise \tilde{x} çözümüne ***lokal kararlı***, aksi halde ***kararsız*** denir.

- Her x_0 için $|x_0 - \tilde{x}| < \gamma$ koşulunu sağlayan en az bir $\gamma > 0$ mevcut ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_t = \lim_{x \rightarrow \infty} f^t(x_0) = \tilde{x}$$

ise \tilde{x} denge noktasına ***lokal çekici*** denir.

- Hem ***lokal kararlı*** hem de ***lokal çekici*** \tilde{x} denge çözümüne ***lokal asimptotik kararlı*** denir (Allen, 2007).

Lineerleştirme

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{1.8}$$

fark denkleminin denge noktası \tilde{x} olsun. Bu denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını belirlemek için bir $\tilde{x} \in I$ aralığında $f \in C^2(I)$ kabul edilerek kalan terimli Taylor Teoremi'nden f fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$f(x_t) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x_t - \tilde{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \tilde{x})^2 \quad \ni \quad \xi \in I.$$

Buradan,

$$x_{t+1} = \tilde{x} + f'(\tilde{x})(x_t - \tilde{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \tilde{x})^2$$

ve dolayısıyla

$$x_{t+1} - \tilde{x} = f'(\tilde{x})(x_t - \tilde{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \tilde{x})^2$$

eşitliği bulunur. Denge noktasını orijine taşımak için $u_t = x_t - \tilde{x}$ dönüşümü yapılırsa

$$u_{t+1} = f'(\tilde{x})u_t + \frac{f''(\xi)}{2}u_t^2$$

olup yeterince küçük u_t değerleri için

$$u_{t+1} \approx f'(\tilde{x})u_t$$

elde edilir. Bu lineer yaklaşım yöntemiyle bulunan

$$u_{t+1} = f'(\tilde{x})u_t$$

denklemine (1.8) denkleminin \tilde{x} civarında lineerleştirmesi adı verilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} u_1 &= f'(\tilde{x})u_0 \\ u_2 &= f'(\tilde{x})u_1 = [f'(\tilde{x})]^2 u_0 \\ &\vdots \\ u_t &= [f'(\tilde{x})]^t u_0 \end{aligned}$$

çözümü elde edilir. Buradan kararlılık yapısının $f'(\tilde{x})$ değerine bağlı olduğu görülür (Allen, 2007).

Teorem 1.1. *Kabul edelim ki \tilde{x} , $x_{t+1} = f(x_t)$ denkleminin denge noktası ve $\tilde{x} \in I = (a, b)$ olmak üzere $f \in C(I)$ olsun. Bu durumda $|f'(\tilde{x})| < 1$ ise \tilde{x} denge noktası lokal asimptotik kararlı, $|f'(\tilde{x})| > 1$ ise \tilde{x} denge noktası kararsızdır (Allen, 2007).*

Tanım 1.9. \tilde{x} , $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denkleminin denge noktası olsun. Bu denge noktasına $|f'(\tilde{x})| \neq 1$ ise **hiperbolik**, $|f'(\tilde{x})| = 1$ ise **hiperbolik olmayan** denge noktası denir (Allen, 2007).

Denge noktasının hiperbolik olduğu durumda orjinal sistem ile lineerleştirmesi lokal topolojik olarak denktir. Hiperbolik olmayan denge noktalarının kararlılığı için ise aşağıdaki teoremler kullanılabilir.

Teorem 1.2. $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denklemini verilsin. \tilde{x} , bu denklemin $f'(\tilde{x}) = 1$ eşitliğini sağlayan hiperbolik olmayan denge noktası olmak üzere f''' fonksiyonu \tilde{x} noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olsun. Bu durumda,

- i. $f''(\tilde{x}) \neq 0$ ise \tilde{x} denge noktası kararsızdır.
- ii. $f''(\tilde{x}) = 0$ ve $f'''(\tilde{x}) > 0$ ise \tilde{x} denge noktası kararsızdır.
- iii. $f''(\tilde{x}) = 0$ ve $f'''(\tilde{x}) < 0$ ise \tilde{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Allen, 2007).

Tanım 1.10. f fonksiyonunun Schwarzian türevi $(Sf)(x)$ ile gösterilir ve

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

olarak tanımlanır (Allen, 2007).

Teorem 1.3. $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denklemi verilsin. \tilde{x} , bu denklemin $f'(\tilde{x}) = -1$ eşitliğini sağlayan hiperbolik olmayan denge noktası olmak üzere f''' fonksiyonu \tilde{x} noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olsun. Bu durumda,

i. $(Sf)(\tilde{x}) > 0$ ise \tilde{x} denge noktası kararsızdır.

ii. $(Sf)(\tilde{x}) < 0$ ise \tilde{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Allen, 2007).

Şimdi iki boyutlu birinci mertebeden

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \quad (1.9)$$

sisteminin (\tilde{x}, \tilde{y}) denge noktasının lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gerekli koşullar belirlenecektir.

Öncelikle sistem denge noktası civarında lineerleştirilecektir. Kabul edelim ki f ve g fonksiyonlarının ikinci mertebeden kısmi türevleri, (\tilde{x}, \tilde{y}) denge noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olsun. f fonksiyonunu bu denge noktası civarında Taylor serisine açarsak

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} (x - \tilde{x}) + \frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} (y - \tilde{y}) + \frac{\partial^2 f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x^2} \frac{(x - \tilde{x})^2}{2!} \\ &+ \frac{\partial^2 f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y^2} \frac{(y - \tilde{y})^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u = x - \tilde{x}$, $v = y - \tilde{y}$ dönüşümü yapılırsa

$$f(x, y) \approx \tilde{x} + \frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} u + \frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} v$$

bulunur. Aynı şekilde

$$g(x, y) \approx \tilde{y} + \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} u + \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} v$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak

$$X_t = (u_t, v_t)^T, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} & \frac{\partial f(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} \end{pmatrix}$$

gösterimi ile (1.9) sisteminin (\tilde{x}, \tilde{y}) denge noktası civarındaki lineerleştirilmesi

$$X_{t+1} = JX_t \quad (1.10)$$

ile ifade edilir. Buradaki J matrisine f ve g fonksiyonlarının (\tilde{x}, \tilde{y}) denge noktasındaki **Jakobiyen matrisi** adı verilir.

(\tilde{x}, \tilde{y}) denge noktasının asimptotik kararlılığının analizi için f ve g fonksiyonlarının, x ve y bağımsız değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli olması yeterlidir (Hale ve Koçak, 1991). Jakobiyen matrisin özdeğerleri, lineer olmayan sistemin lokal kararlılığını belirlemektedir. Eğer özdeğerler $|\lambda_i| < 1$ koşulunu sağlıyorsa (\tilde{x}, \tilde{y}) denge noktası lokal asimptotik karardır (Allen, 2007).



2. AYRIK DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇATALLANMA ANALİZİ

2.1 Flip Çatallanma

Tek bir parametreye bağlı bir boyutlu

$$x \mapsto -(1 + \delta)x + x^3 \equiv f(x, \delta) \quad (2.1)$$

denklemini ele alalım. f fonksiyonunun yeterince küçük $|\delta|$ değerleri için orijinin bir komşuluğunda tersi mevcuttur ve dolayısıyla bu komşulukta başka denge noktası yoktur. Ayrıca

$$-(1 + \delta)x + x^3 = x \quad \Rightarrow \quad x^3 - (2 + \delta)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - \delta - 2) = 0$$

olup $x_0 = 0$ ve $x_{1,2} = \mp\sqrt{\delta + 2}$ sistemin denge noktaları olarak bulunur. Buradan da yeterince küçük $|\delta|$ değerleri için $x_0 = 0$ in tek denge noktası olduğu görülür. Şimdi bu denge noktasının kararlılık yapısını inceleyelim:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 - (1 + \delta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(0)}{\partial x} = -(1 + \delta)$$

olduğundan

$$\left| \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right| = |-(1 + \delta)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \delta < 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

- $-2 < \delta < 0$ ise $x_0 = 0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- $\delta > 0$ ise $x_0 = 0$ denge noktası kararsızdır.
- $\delta = 0$ ise $\left| \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right| = 1$ olup $x_0 = 0$ denge noktası hiperbolik değildir. Lineerleştirme kararlılık yapısı için bilgi vermez. Teorem 1.3 bu durumu karşılamaktadır ve denge noktası lineer olmayan kararlı yapıdadır.

Şimdi (2.1)'in ikinci iterasyonu olan $f^2(x)$ fonksiyonunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= -(1 + \delta)[-(1 + \delta)x + x^3] + [-(1 + \delta)x + x^3]^3 \\ &= (1 + \delta)^2x - (1 + \delta)x^3 + x^9 - 3x^6(1 + \delta)x + 3x^3(1 + \delta)^2x^2 - (1 + \delta)^3x^3 \\ &= (1 + \delta)^2x - [(1 + \delta)(2 + 2\delta + \delta^2)]x^3 + O(x^5) \end{aligned}$$

Açıkça görülmektedir ki $x_0 = 0$, $f^2(x)$ fonksiyonunun aşıkâr denge noktasıdır. Ayrıca yeterince küçük $\delta > 0$ değerleri için

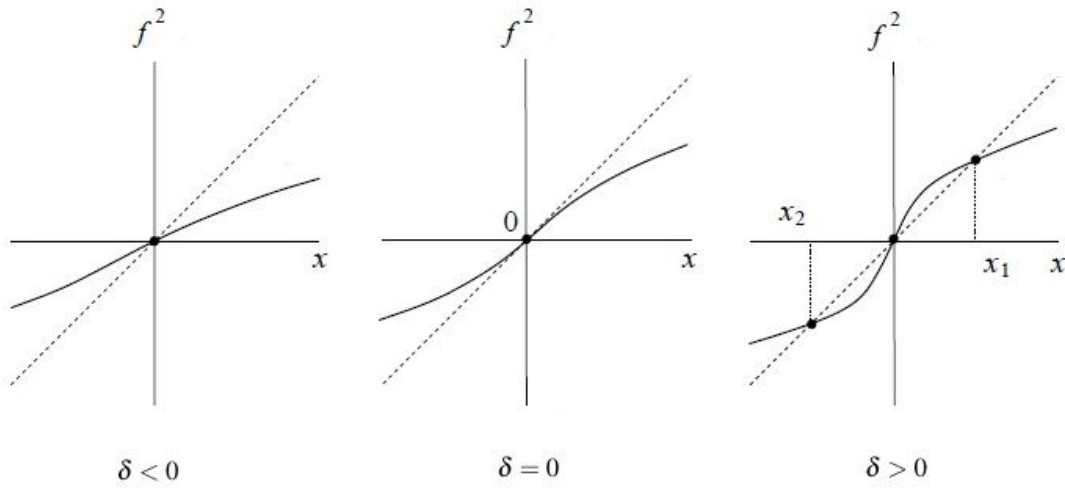
$$x_{1,2} = \mp \left(\sqrt{\delta} + O(\delta) \right)$$

olmak üzere iki tane aşıkâr olmayan denge noktası mevcuttur (Şekil 2.1). Bu denge noktaları kararlıdır ve

$$f(x_1) = -(1 + \delta)(\sqrt{\delta} + O(\delta)) + (\sqrt{\delta} + O(\delta))^3 = -(\sqrt{\delta} + O(\delta)) = x_2,$$

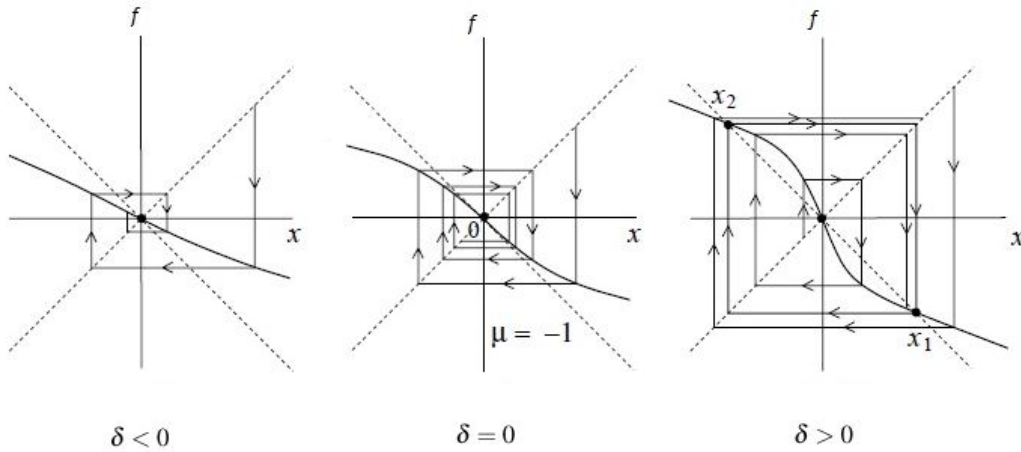
$$f(x_2) = (1 + \delta)(\sqrt{\delta} + O(\delta)) - (\sqrt{\delta} + O(\delta))^3 = \sqrt{\delta} + O(\delta) = x_1$$

sağlandığından $f(x)$ fonksiyonu için 2-döngü oluşur ($x_1 \neq x_2$) (Kuznetsov, 1998).



Şekil 2.1: İkinci iterasyon fonksiyonu (Kuznetsov, 1998)

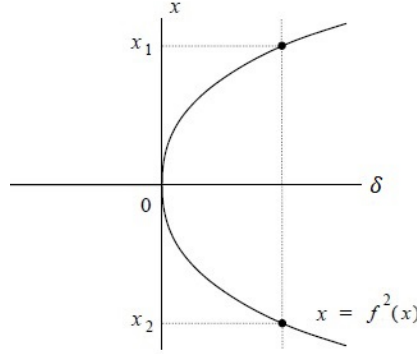
Cobwebbing metodu kullanılarak (2.1) sisteminin tam çatallanma diyagramı aşağıdaki gibi elde edilir:



Şekil 2.2: Flip çatallanma (Kuznetsov, 1998)

Şekil (2.2)'de görüldüğü üzere $x = 0$ denge noktası, $\delta < 0$ iken kararlı, $\delta = 0$ iken lineer olmayan kararlı ve $\delta > 0$ iken kararsızdır. Burada δ değerleri sıfıra sağdan yaklaştıkça iki döngü kaybolmaktadır. Bu durum flip çatallanma olarak tanımlanır.

Flip çatallanmayı göstermenin bir diğer yolu da (x, δ) düzlemini kullanmaktır (Şekil (2.3)).



Şekil 2.3: (x, δ) düzleminde flip çatallanma (Kuznetsov, 1998)

Bu şekilde yatay eksen sistemin denge noktalarını göstermektedir. Parabol ise $\delta > 0$ durumunda meydana gelen iki periyotlu kararlı $\{x_1, x_2\}$ döngülerini temsil etmektedir.

Aşağıdaki lemma, (2.1) sistemine yüksek mertebeden terimlerin etkisini ele almaktadır.

Lemma 2.1.

$$x \mapsto -(1 + \delta)x + x^3 + O(x^4)$$

sistemi, orijin civarında

$$x \mapsto -(1 + \delta)x + x^3$$

sistemine lokal topolojik olarak denktir (Kuznetsov, 1998).

Flip çatallanmanın ikinci kanonik formu

$$x \mapsto -(1 + \delta)x - x^3 \quad (2.2)$$

aynı şekilde analiz edilir. $\delta \neq 0$ için $x_0 = 0$ denge noktası (2.1) sisteminin $x_0 = 0$ denge noktası ile aynı kararlılık yapısına sahiptir. $\delta = 0$ kritik değerinde denge noktası kararsızdır. (2.2) sisteminin ikinci iterasyonunun analizinde $\delta < 0$ iken kararsız 2-döngü oluşurken $\delta = 0$ da bu döngü kaybolmaktadır. Yüksek mertebeden terimler çatallanma diyagramını etkilememektedir.

Çatallanma türü denge noktasının kritik parametre değerindeki kararlılığı ile belirlenir. Denge noktası (2.1) sisteminde olduğu gibi kritik parametre değerinde kararlı ise “süperkritik” çatallanma, (2.2) sisteminde olduğu gibi kararsız ise “subkritik” çatallanma denir.

Teorem 2.1.

$$x_{t+1} = f(x_t, \delta) \quad x_t, \delta \in \mathbb{R}$$

denklemini ele alalım. $f \in C^k$ ve $\delta = 0$ iken $\tilde{x} = 0$ in $f(x, \delta)$ fonksiyonunun sabit noktası olduğunu kabul edelim ve $f_x(0,0) = -1$ olsun. Ayrıca,

$$\mathbf{F1)} \quad \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0,0) \neq 0$$

$$\mathbf{F2)} \quad f_{x\delta}(0,0) \neq 0$$

sağlansın. Öyleyse $x_{t+1} = f(x_t, \delta)$ denklemini

$$\eta_{t+1} = -(1 + \beta)\eta_t \mp \eta_t^3 + O(\eta_t^4)$$

denklemine dönüştüren düzgün koordinat ve parametre dönüşümleri vardır ve bu dönüşümlerin tersi mevcuttur (Kuznetsov, 1998).

İspat: $f_x(0,0) = -1$ olduğu için Kapalı Fonksiyon Teoremi'nden sistem yeterince küçük $|\delta|$ değerleri için orijinin yeterince küçük bir komşuluğunda tek denge noktasına sahiptir. Bu denge noktasını orijine taşıyabileceğimizden, genellikle bir şey kaybetmeksizin, yeterince küçük $|\delta|$ değerleri için $x = 0$ noktasını sistemin denge noktası olarak kabul edebiliriz. Şimdi $f(x, \delta)$ yı $(0,0)$ noktası civarında Taylor serisine açalım:

$$\begin{aligned} f(x, \delta) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_\delta(0,0)\delta + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{x\delta}(0,0)x\delta + f_{\delta\delta}(0,0)\delta^2] \\ &\quad + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xx\delta}(0,0)x^2\delta + 3f_{x\delta\delta}(0,0)x\delta^2 + f_{\delta\delta\delta}(0,0)\delta^3] + \dots \\ &= x \left[-1 + f_{x\delta}(0,0)\delta + \frac{f_{x\delta\delta}(0,0)}{2}\delta^2 + \frac{f_{x\delta\delta\delta}(0,0)}{6}\delta^3 \right] \\ &\quad + x^2 \left[\frac{f_{xx}(0,0)}{2} + \frac{f_{xx\delta}(0,0)}{2}\delta + \frac{f_{xx\delta\delta}(0,0)}{4}\delta^2 \right] + x^3 \left[\frac{f_{xxx}(0,0)}{6} + \frac{f_{xxx\delta}(0,0)}{6}\delta \right] + O(x^4) \end{aligned}$$

olup burada

$$f_1(\delta) = -1 + f_{x\delta}(0,0)\delta + \frac{f_{x\delta\delta}(0,0)}{2}\delta^2 + \frac{f_{x\delta\delta\delta}(0,0)}{6}\delta^3,$$

$$f_2(\delta) = \frac{f_{xx}(0,0)}{2} + \frac{f_{xx\delta}(0,0)}{2}\delta + \frac{f_{xx\delta\delta}(0,0)}{4}\delta^2,$$

$$f_3(\delta) = \frac{f_{xxx}(0,0)}{6} + \frac{f_{xxx\delta}(0,0)}{6}\delta.$$

olmak üzere

$$f(x, \delta) = f_1(\delta)x + f_2(\delta)x^2 + f_3(\delta)x^3 + O(x^4) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$g(\delta) = -f_{x\delta}(0,0)\delta - \frac{f_{x\delta\delta}(0,0)}{2}\delta^2 - \frac{f_{x\delta\delta\delta}(0,0)}{6}\delta^3, \quad g \in C^k$$

alınırsa $f_1(\delta) = -(1 + g(\delta))$ olarak ifade edilebilir. $g(0) = 0$ dir ve

$$g'(\delta) = -f_{x\delta}(0,0) - \frac{f_{x\delta\delta}(0,0)}{2}\delta - \frac{f_{x\delta\delta\delta}(0,0)}{2}\delta^2$$

olmak üzere $g'(0) = -f_{x\delta}(0,0)$ ifadesi **F2)** kabulünden dolayı sıfırdan farklıdır. Sonuç olarak g fonksiyonu Ters Dönüşüm Teoremi'nden (Bakınız EK-1) lokal olarak tersinirdir ve yeni bir parametre tanımlamak için kullanılabilir:

$$\beta = g(\delta).$$

Bu durumda (2.3) eşitliğini aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz:

$$\tilde{x} = \mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3 + O(x^4)$$

Burada, $\mu(\beta) = -(1 + \beta)$ ve $a(\beta), b(\beta) \in C^k$ dir. Şimdi, $a(0)$ ve $b(0)$ ifadelerini hesaplayalım:

$$\beta = g(\delta) \Rightarrow \delta = g^{-1}(\beta) \Rightarrow a(\beta) = f_2(\delta) = f_2(g^{-1}(\beta))$$

olur ve

$$a(0) = f_2(g^{-1}(0)) = f_2(0) = \frac{f_{xx}(0,0)}{2}$$

bulunur. Aynı şekilde

$$b(\beta) = f_3(\delta) = f_3(g^{-1}(\beta)) \Rightarrow b(0) = f_3(g^{-1}(0)) = f_3(0) = \frac{f_{xxx}(0,0)}{6}$$

elde edilir. Şimdi $\delta = \delta(\beta) \in C^k$ daha sonra tanımlanacak bir fonksiyon olmak üzere

$$x = y + \delta y^2 \tag{2.4}$$

koordinat dönüşümü yapalım. $x(0) = 0$ ve $x'(y) = 1 + 2\delta y \Rightarrow x'(0) = 1 \neq 0$ olduğundan (2.4) ile verilen dönüşüm orijinin bir komşuluğunda tersinirdir ve tersi belirsiz katsayılar metoduyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4)$$

eşitliği (2.4)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
x &= (ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4)) + \delta (ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4))^2 \\
&= ax + bx^2 + cx^3 + O(x^4) + \delta [a^2x^2 + 2abx^3 + O(x^4)]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a = 1, \quad b + \delta a^2 = 0 \Rightarrow b = -\delta, \quad c + 2ab\delta = 0 \Rightarrow c = 2\delta^2$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$y = x - \delta x^2 + 2\delta^2 x^3 + O(x^4) \quad (2.5)$$

bulunur.

$$x_{t+1} = f(x_t, \delta) \rightarrow x_{t+1} = \tilde{f}(x_t, \beta) \rightarrow y_{t+1} = \tilde{f}(y_t, \beta)$$

ile gösterelim.

$$\begin{aligned}
y_{t+1} &= x_{t+1} - \delta x_{t+1}^2 + 2\delta^2 x_{t+1}^3 + O(x_{t+1}^4) \\
&= \tilde{f}(x_t, \beta) - \delta \tilde{f}^2(x_t, \beta) + 2\delta^2 \tilde{f}^3(x_t, \beta) + O(\tilde{f}^4(x_t, \beta)) \\
&= \tilde{f}(y_t + \delta y_t^2, \beta) - \delta \tilde{f}^2(y_t + \delta y_t^2, \beta) + 2\delta^2 \tilde{f}^3(y_t + \delta y_t^2, \beta) + O(\tilde{f}^4(y_t + \delta y_t^2, \beta)) \\
&= \mu(\beta)x_t + x_t^2 [a(\beta) - \delta\mu^2(\beta)] + x_t^3 [b(\beta) - 2\delta\mu(\beta)a(\beta) + 2\delta^2\mu^3(\beta)] + O(x_t^4) \\
&= \mu(\beta) [y_t + \delta y_t^2] + [y_t + \delta y_t^2]^2 [a(\beta) - \delta\mu^2(\beta)] \\
&\quad + [y_t + \delta y_t^2]^3 [b(\beta) - 2\delta\mu(\beta)a(\beta) + 2\delta^2\mu^3(\beta)] + O(y_t^4) \\
&= y_t\mu(\beta) + y_t^2 [\mu(\beta)\delta + a(\beta) - \delta\mu^2(\beta)] \\
&\quad + y_t^3 [2\delta a(\beta) - 2\delta^2\mu^2(\beta) + b(\beta) - 2\delta\mu(\beta)a(\beta) + 2\delta^2\mu^3(\beta)] + O(y_t^4)
\end{aligned}$$

olup kanonik formda kuadratik terim olmadığı için kuadratik terimin katsayısını sıfır yapacak δ fonksiyonu

$$a(\beta) - \delta [\mu^2(\beta) - \mu(\beta)] = 0 \Rightarrow a(\beta) = \delta [\mu^2(\beta) - \mu(\beta)] \Rightarrow \delta = \frac{a(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\mu(\beta) = -(1 + \beta), \quad \mu^2(\beta) = 1 + 2\beta + \beta^2$$

eşitliklerinden

$$\mu^2(\beta) - \mu(\beta) = 2 + 3\beta + \beta^2 \Rightarrow \mu^2(0) - \mu(0) = 2 \neq 0$$

olduğu için $\beta = 0$ ın bir komşuluğunda δ yukarıdaki şekilde tanımlanabilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} c(\beta) &= 2\delta a(\beta) - 2\delta^2 \mu^2(\beta) + b(\beta) - 2\delta \mu(\beta) a(\beta) + 2\delta^2 \mu^3(\beta) \\ &= b(\beta) + \frac{2a^2(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)} - \frac{2a^2(\beta)\mu^2(\beta)}{(\mu^2(\beta) - \mu(\beta))^2} - \frac{2a^2(\beta)\mu(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)} + \frac{2a^2(\beta)\mu^3(\beta)}{(\mu^2(\beta) - \mu(\beta))^2} \\ &= b(\beta) + \frac{2a^2(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$y_{t+1} = -(1 + \beta)y_t + c(\beta)y_t^3 + O(y_t^4)$$

elde edilir. Şimdi $y_t = A\eta_t$ dönüşümü ile

$$A\eta_{t+1} = -(1 + \beta)A\eta_t + c(\beta)A^3\eta_t^3 + O(\eta_t^4),$$

ve dolayısıyla

$$\eta_{t+1} = -(1 + \beta)\eta_t + c(\beta)A^2\eta_t^3 + O(\eta_t^4).$$

elde edilir. Kanonik forma indirgemek için

$$A^2 = \frac{1}{|c(\beta)|} \Rightarrow A = \mp \frac{1}{\sqrt{|c(\beta)|}}$$

seçilmelidir. Buradan

$$\eta_{t+1} = -(1 + \beta)\eta_t + \frac{1}{|c(\beta)|} \cdot c(\beta)\eta_t^3 + O(\eta_t^4)$$

bulunur. Ayrıca **F1** koşulundan

$$c(0) = b(0) + a^2(0) = \frac{1}{6}f_{xxx}^2(0,0) + \frac{1}{4}f_{xx}^2(0,0) \neq 0$$

olup sıfırın komşuluğunda çalıştığımızdan (2.1) sistemi

$$\eta_{t+1} = -(1 + \beta)\eta_t + s\eta_t^3 + O(\eta_t^4)$$

olarak yazılır. Burada $s = \text{sign}(c(0)) = \mp 1$ dir.

Teorem 2.2. Bir parametrelî, skalar

$$x_{t+1} = f(x_t, \delta) \tag{2.6}$$

sistemini ele alalım. $x_0 = 0$ denge noktası olmak üzere $\delta = 0$ durumunda $f_x(0,0) = -1$ olduğunu ve Teorem (2.1) ile verilen **F1** ve **F2** koşullarının sağlandığını kabul

edelim. Bu durumda (2.6) sistemi orijinin bir komşuluğunda

$$\eta_{t+1} = -(1 + \beta)\eta_t \mp \eta_t^3$$

normal formlarından birine topolojik olarak denktir (Kuznetsov, 1998).

2.2 Neimark-Sacker Çatallanma

Aşağıdaki iki boyutlu ayrık zamanlı sistemi göz önünde bulunduralım:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \delta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Burada sistem sadece δ parametresine bağlı olup $\theta = \theta(\delta)$, $a = a(\delta)$, $b = b(\delta) \in C^k$ olmak üzere $0 < \theta(0) < \pi$, $a(0) \neq 0$ kabul edelim. $x_1 = x_2 = 0$ tüm δ parametreleri için sistemin denge noktası olup bu denge noktasındaki Jakobiyen matris

$$J(0,0) = (1 + \delta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu matrisin özdeğerlerini bulalım:

Burada $iz(J) = 2(1 + \delta)\cos\theta$ ve $\det(J) = (1 + \delta)^2$ olmak üzere

$$F(\lambda) = \lambda^2 - iz(J)\lambda + \det(J) = \lambda^2 - 2((1 + \delta)\cos\theta)\lambda + (1 + \delta)^2$$

karakteristik polinom olup kökleri

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{2(1 + \delta)\cos\theta \mp \sqrt{4(1 + \delta)^2\cos^2\theta - 4(1 + \delta)^2}}{2} \\ &= (1 + \delta)e^{\mp i\theta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde hesaplanır. Özdeğerler sıfırdan farklı olduğu için (2.7) dönüşümünün tersi mevcuttur.

Görüldüğü üzere $\delta = 0$ ve $0 < \theta(0) < \pi$ iken $\lambda_{1,2} = e^{i\theta(0)}$, $|\lambda_{1,2}(0)| = 1$ olduğu için $x_1 = x_2 = 0$ hiperbolik olmayan denge noktasıdır. Bu duruma karşılık gelen çatallanmayı analiz edebilmek için

$$z(t) = x_1(t) + ix_2(t) \quad (2.9)$$

kompleks değişkenini tanımlayalım. Burada $\bar{z}(t) = x_1(t) - ix_2(t)$ ve $|z|^2 = x_1^2 + x_2^2$ dir.

(2.7) sistemi açık şekilde aşığıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1 + \delta)(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) + \cos \theta (x_1^2 + x_2^2)(ax_1 - bx_2) \\ &\quad - \sin \theta (x_1^2 + x_2^2)(bx_1 + ax_2) \\ x_2(t+1) &= (1 + \delta)(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) + \sin \theta (x_1^2 + x_2^2)(ax_1 - bx_2) \\ &\quad + \cos \theta (x_1^2 + x_2^2)(bx_1 + ax_2). \end{aligned}$$

Şimdi $d(\delta) = a(\delta) + ib(\delta)$ olarak tanımlayalım ve yukarıda elde edilen eşitlikleri (2.9) ile verilen dönüşümde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} z(t+1) &= x_1(t+1) + ix_2(t+1) \\ &= (1 + \delta)(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) + \cos \theta (x_1^2 + x_2^2)(ax_1 - bx_2) - \sin \theta (x_1^2 + x_2^2)(bx_1 + ax_2) \\ &\quad + i [(1 + \delta)(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) + \sin \theta (x_1^2 + x_2^2)(ax_1 - bx_2) + \cos \theta (x_1^2 + x_2^2)(bx_1 + ax_2)] \\ &= (1 + \delta)(x_1 + ix_2)(\cos \theta + i \sin \theta) + (x_1^2 + x_2^2)(\cos \theta + i \sin \theta) [a(x_1 + ix_2) + ib(x_1 + ix_2)] \end{aligned}$$

olup

$$z(t+1) = (1 + \delta)ze^{i\theta} + |z|^2 e^{i\theta}(az + ibz) = [z((1 + \delta) + d|z|^2)] e^{i\theta} = \mu z + cz|z|^2$$

elde edilir. Burada $\lambda = \lambda(\delta) = (1 + \delta)e^{i\theta(\delta)}$ ve $c = c(\delta) = e^{i\theta(\delta)}d(\delta)$ olup δ ya bağlı kompleks fonksiyonlardır. Sonuç olarak iki boyutlu (2.7) sistemi, (2.9) dönüşümü ile bir boyutlu

$$z_{t+1} = e^{i\theta(\delta)} z_t (1 + \delta + d(\delta)|z_t|^2) \quad (2.10)$$

denkleme dönüşür.

Şimdi, $\rho = |z|$ olmak üzere, (2.7) sistemini kutupsal formda yazmak için $z_t = \rho_t e^{i\varphi_t}$ dönüşümünü yapalım. Denklem (2.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \rho_{t+1} e^{i\varphi_{t+1}} \\ &= e^{i\theta(\delta)} \rho_t e^{i\varphi_t} (1 + \delta + d(\delta)|\rho_t e^{i\varphi_t}|^2) \\ &= e^{i(\theta(\delta) + \varphi_t)} \rho_t (1 + \delta + d(\delta)\rho_t^2) \\ &= e^{i(\theta(\delta) + \varphi_t)} \rho_t (1 + \delta + (a(\delta) + ib(\delta))\rho_t^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\rho_{t+1} e^{i\varphi_{t+1}} = e^{i(\theta(\delta) + \varphi_t)} \rho_t (1 + \delta + (a(\delta) + ib(\delta))\rho_t^2) \quad (2.11)$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafının modülünü alalım:

$$\begin{aligned}
|\rho_{t+1}e^{i\varphi_{t+1}}| &= |\rho_{t+1}| = |e^{i(\theta(\delta)+\varphi_t)}\rho_t(1+\delta+(a(\delta)+ib(\delta))\rho_t^2)| \\
&= |\rho_t(1+\delta+(a(\delta)+ib(\delta))\rho_t^2)| \\
&= |\rho_t|(1+\delta+(a(\delta)+ib(\delta))\rho_t^2)|.
\end{aligned}$$

ρ_t pozitif olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho_{t+1} &= \rho_t|(1+\delta+(a(\delta)+ib(\delta))\rho_t^2)| \\
&= \rho_t\sqrt{(1+\delta+a(\delta)\rho_t^2)^2+b^2(\delta)\rho_t^4} \\
&= \rho_t\sqrt{(1+\delta)^2\left(1+\frac{2a(\delta)}{1+\delta}\rho_t^2+\frac{|d(\delta)|^2}{(1+\delta)^2}\rho_t^4\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$u := \frac{2a(\delta)}{1+\delta}\rho_t^2 + \frac{a^2(\delta)}{(1+\delta)^2}\rho_t^4 + \frac{b^2(\delta)}{(1+\delta)^2}\rho_t^4$$

olarak tanımlayalım ve $\sqrt{1+u}$ fonksiyonunu, $u=0$ da Taylor serisine açalım:

$$\begin{aligned}
\rho_{t+1} &= (1+\delta)\rho_t \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2a(\delta)}{1+\delta}\rho_t^2 + \frac{|d(\delta)|^2}{(1+\delta)^2}\rho_t^4 \right) + O(u^2) \right] \\
&= \rho_t \left[(1+\delta) + a(\delta)\rho_t^2 + \frac{|d(\delta)|^2}{2(1+\delta)}\rho_t^4 + O(u^2) \right] \\
&= \rho_t \left[(1+\delta) + a(\delta)\rho_t^2 + \rho_t^4 R(\rho_t, \delta) \right], \quad R \in C^k.
\end{aligned}$$

Dikkat edilirse (2.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\rho_{t+1}e^{\varphi_{t+1}} &= \rho_t e^{i(\theta(\delta)+\varphi_t)}(1+\delta+d(\delta)\rho_t^2) \\
&= \rho_t e^{i(\theta(\delta)+\varphi_t)} y \\
&= \rho_t e^{i(\theta(\delta)+\varphi_t)} |1+\delta+d(\delta)\rho_t^2| e^{iQ(\rho_t, \delta)}
\end{aligned}$$

bulunur ve üstel ifadelerden

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t + \theta(\delta) + Q(\rho_t, \delta)$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.7) sistemi kutupsal formda

$$\begin{cases} \rho_{t+1} = \rho_t (1 + \delta + a(\delta)\rho_t^2 + \rho_t^4 R(\rho_t, \delta)) \\ \varphi_{t+1} = \varphi_t + \theta(\delta) + Q(\rho_t, \delta) \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir. Görüldüğü üzere (2.12) sisteminde ρ , φ den bağımsızdır. Dolayısıyla δ değerleri sıfırdan geçerken oluşacak çatallanmanın analizini yaparken (2.12) sistemini kullanmak, (2.7) sistemini kullanmaya göre kolaylık sağlayacaktır. Burada (2.12) sistemi kutupsal formda olduğu için denge noktasını bulurken ρ içeren denklemi kullanacağız. φ içeren denklem sadece dönme açısını belirlemektedir. Sonuç olarak tüm δ değerleri için $\rho = 0$ denge noktasıdır.

$\rho_{t+1} = f(\rho_t, \delta)$ olmak üzere $f_{\rho_t}(0) = 1 + \delta$ olarak hesaplanır. Bu durumda

$$|f_{\rho_t}(0)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + \delta < 1 \Leftrightarrow -2 < \delta < 0$$

gerçeklenir. Buradan $\delta < 0$ iken denge noktası kararlı, $\delta > 0$ iken denge noktası kararsızdır. $\delta = 0$ durumunda ise denge noktasının kararlılığı $a(0)$ ile belirlenmektedir.

Kabul edelim ki $a(0) < 0$ olsun. $\delta = 0$ iken orijin lineer olmayan kararlı yapıdadır. Ayrıca (2.12) sisteminin diğer denge noktası

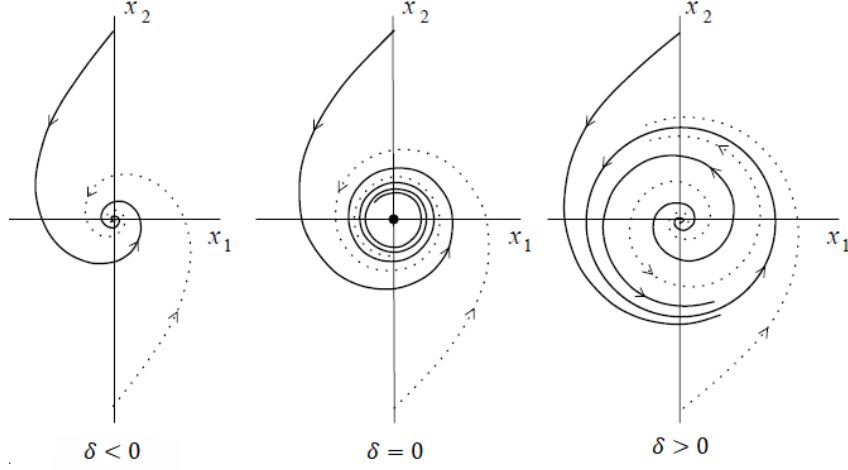
$$\bar{\rho} = \bar{\rho} (1 + \delta + a(\delta)\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4 R(\bar{\rho}, \delta)) \Rightarrow 0 = \delta + a(\delta)\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4 R(\bar{\rho}, \delta) \approx \delta + a(\delta)\bar{\rho}^2$$

yaklaşımından

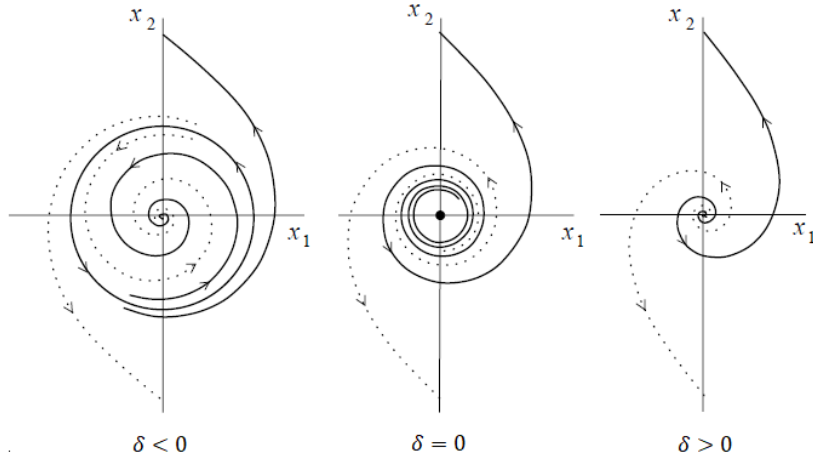
$$\rho_0 = \sqrt{-\frac{\delta}{a(\delta)}} + O(\delta)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, sistemdeki φ dönüşümü ρ ve δ ya bağlı olarak dönme açısını tanımlar ve yaklaşık olarak $\theta(\delta)$ ya eşittir. Böylece (2.12) de tanımlanan dönüşümler kullanılarak orjinal (2.7) sistemine karşılık gelen çatallanma diyagramı Şekil (2.4) deki gibi elde edilir. Bu şekilde görüldüğü üzere orijin tüm δ değerleri için sistemin denge noktası olup $\delta < 0$ iken kararlı, $\delta = 0$ iken lineer olmayan kararlı, $\delta > 0$ iken kararsız yapıya sahiptir. Ayrıca $\delta > 0$ durumunda orijinin etrafında kapalı bir yörünge meydana gelmektedir. Bu yörünge seçilecek her pozitif δ değeri için tektir ve yarıçapı $\rho_0(\delta)$ ile hesaplanır. (2.12) iterasyonları altında orijin dışındaki bu kapalı eğrinin içinden veya dışından başlayan tüm yörüngeler bu kapalı eğriye yaklaşmaktadır. Bu dinamik yapı Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır.

Bölüm 2.1'de olduğu gibi, Neimark-Sacker çatallanmada da çatallanmanın türü denge noktasının kritik parametre değerindeki kararlılık durumu ile belirlenir. $a(0) < 0$ iken orijin $\delta = 0$ da lineer olmayan kararlı yapıya sahip olduğundan bu çatallanma "Süperkritik" Neimark-Sacker çatallanmadır.



Şekil 2.4: Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)



Şekil 2.5: Subkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)

$a(0) > 0$ durumunu benzer şekilde analiz etmek mümkündür. Şekil (2.5)'de de görüldüğü üzere (2.12) sisteminin orijin dengesinde $\delta = 0$ iken Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar. $a(0) < 0$ durumunda yapılan analizin aksine, $\delta < 0$ iken orijinin etrafında kararsız bir kapalı yörünge meydana gelmektedir ve bu yörünge δ değerleri pozitif olurken kaybolmaktadır. Ayrıca orijin $\delta = 0$ da kararsız olduğu için bu çatallanma "Subkritik" Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır.

Şimdi (2.7) sistemine yüksek mertebeden terimler eklenerek elde edilen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \delta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4) \quad (2.13)$$

sistemini ele alalım. Burada $O(\|x^4\|)$, δ ya bağlı düzgün bir fonksiyon olmakla

beraber (2.13) sistemi, (2.7) sistemi ile lokal topolojik olarak denk değildir. Bu sebeple yüksek mertebeden terimler sistemin çatallanma davranışını etkilemektedir. (2.13) sistemi kutupsal formda yazılırsa ρ dönüşümü φ açısına bağlı olarak bulunacaktır. Sistem (2.12) gösterimine benzer şekilde yazılır fakat burada R ve Q fonksiyonları 2π -periyotlu olacaktır. Yine de (2.7) ve (2.13) sistemlerinin faz portreleri önemli benzer özelliklere sahiptir. Buradan aşağıdaki Lemma elde edilir:

Lemma 2.2. $O(\|x\|^4)$ terimleri (2.13) sistemindeki değişmez kapalı eğrinin çatallanmasını etkilemez. Yani, tek bir tane lokal değişmez kapalı eğri, (2.7) sistemindeki gibi aynı yönde ve aynı kararlılık yapısı ile orijinden çatallanır (Kuznetsov, 1998).

Analizin devamında Neimark-Sacker çatallanmaya sahip olan herhangi bir iki boyutlu dinamik sistemin, (2.13) kanonik formuna indirgenebileceğini ispatlayacağız. Şimdi

$$x \mapsto f(x, \delta), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \delta \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

sistemini ele alalım. Burada $f \in C^k$ olmak üzere $x = 0$ sistemin denge noktası ve $\delta = 0$ iken bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = e^{\mp i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ olsun.

(2.14) sisteminin denge noktaları $\tilde{x} = f(\tilde{x}, \delta)$ eşitliğini sağlayan \tilde{x} değerleridir. Kabul edelim ki $G(x, \delta) = f(\tilde{x}, \delta) - \tilde{x}$ ve $G = (g_1, g_2)^T$, $V \in \mathbb{R}^3$ (V açık ve orijini içerir) üzerinde C^k fonksiyonu olsun. Bu durumda $G(0, 0) = 0$ gerçeklenir. Ayrıca

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - 1 \end{pmatrix} = J - I$$

olup $\lambda = 1$ özdeğer olmadığı için ($\theta_0 \neq 0$)

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0, \delta=0} = |J(0, 0, 0) - I| \neq 0$$

sağlanır. Sonuç olarak Kapalı Fonksiyon Teoremi'nin (Bakınız EK-1) şartları sağlanmış olup

$$g : W \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \delta \longrightarrow g(\delta) = (x_1(\delta), x_2(\delta))$$

olarak tanımlanan tek bir g fonksiyonu vardır ve sistem küçük $|\delta|$ değerleri için orijin civarında tek denge noktasına sahiptir. Bu denge noktasını $\tilde{x}(\delta)$ ile gösterebiliriz. Eğer bu denge noktası orijinden farklı ise gerekli dönüşümler yapılarak orijine

taşınabileceğinden analizin devamında küçük $|\delta|$ değerleri için genellikle bir şey kaybetmeksizin $x = 0$ ' ı sistemin denge noktası kabul ederek ilerleyeceğiz.

$f(x_t, \delta)$ fonksiyonunu orijin civarında Taylor serisine açarsak

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1(0,0,\delta) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0,\delta)x_1(t) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0,\delta)x_2(t) + \dots \\ x_2(t+1) &= f_2(0,0,\delta) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0,\delta)x_1(t) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0,\delta)x_2(t) + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Burada küçük $|\delta|$ değerleri için $f_1(0,0,\delta) = f_2(0,0,\delta) = 0$ olduğundan sistem

$$x_{t+1} = A(\delta)x_t + F(x_t, \delta), \quad F \in C^k \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. $F := \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ olarak ifade edilirse $F(0, \delta) = 0$ olduğu için F_1 ve F_2 en az kuadratik terimler içerir.

$r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$ olmak üzere $A(\delta)$ Jakobiyen matrisi

$$\lambda_{1,2}(\delta) = r(\delta)e^{\mp i\varphi(\delta)}$$

özdeğerlerine sahiptir. Burada $\beta \in C^k$, $\beta(0) = 0$ olmak üzere $r(\delta) = 1 + \beta(\delta)$ olarak yazılabilir. Kabul edelim ki $\beta'(0) \neq 0$ olsun. Böylelikle β , Kapalı Fonksiyon Teoremi'nden δ ya bağlı olarak yeniden yazılabilir ve yeni parametre olarak seçilebilir. Bu durumda özdeğerler

$$\lambda(\beta) = (1 + \beta(\delta))e^{i\theta(\beta)}$$

olarak ifade edilir. Burada $\theta \in C^k$ ve $\theta(0) = \theta_0$ dır.

Lemma 2.3. *Bir kompleks değişken ve yeni bir parametre tanımlayarak yeterince küçük $|\beta|$ değerleri için (2.15) sistemi*

$$z_{t+1} = \lambda(\beta)z_t + g(z_t, \bar{z}_t, \beta)$$

sistemine dönüştürülebilir. Burada $\beta \in \mathbb{R}$, $z_t \in \mathbb{C}$, $\lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ olup g fonksiyonu z_t, \bar{z}_t ve β nin kompleks değerli C^k sınıfından bir fonksiyondur. Ayrıca fonksiyonun (z_t, \bar{z}_t) 'a göre Taylor seri açılımı mevcut olup kuadratik ve daha yüksek kuvvetten terimler içerir ve fonksiyon aşağıdaki şekilde ifade edilir (Kuznetsov, 1998)

$$g(z_t, \bar{z}_t, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z_t^k (\bar{z}_t)^l, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

İspat. (2.15) sistemindeki A matrisi reel ise transpozu olan A^T matrisi de reel olup aynı karakteristik polinoma sahip olduklarından özdeğerleri de aynıdır. Buna karşılık farklı özvektörlere sahip olabilirler.

Kabul edelim ki $A(\delta)$ nın $\lambda(\delta)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü $q(\delta)$ olsun. Bu durumda

$$A(\delta)q(\delta) = \lambda(\delta)q(\delta) \quad [A(\delta)\bar{q}(\delta) = \bar{\lambda}(\delta)\bar{q}(\delta)]$$

sağlanır. Ayrıca $A^T(\delta)$ nın $\bar{\lambda}(\delta)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörünü $p(\delta)$ olarak seçersek

$$A^T(\delta)p(\delta) = \bar{\lambda}(\delta)p(\delta) \quad [A^T(\delta)\bar{p}(\delta) = \lambda(\delta)\bar{p}(\delta)]$$

eşitlikleri de sağlanır. $q(\delta)$ ve $p(\delta)$ özvektör olduğu için $C^2 : \langle p, q \rangle = \bar{p}_1q_1 + \bar{p}_2q_2$ şeklinde tanımlanan iç çarpıma göre $\langle p(\delta), q(\delta) \rangle = 1$ eşitliğini sağlayacak $q(\delta)$ ve $p(\delta)$ vektörlerini bulmak her zaman mümkündür.

$q(\delta)$ ve $\bar{q}(\delta)$ lineer bağımsız olup bu vektörler ile bir baz oluşturabilir. Böylelikle $\forall x \in \mathbb{R}^2$ ve küçük δ değerleri için

$$x = k_1q(\delta) + k_2\bar{q}(\delta) \quad (2.16)$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir. Şimdi k_1 ve k_2 katsayılarının ne olması gerektiğini bulacağız. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere (2.16)'dan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a_1 + ia_2) \begin{pmatrix} q_{11} + iq_{12} \\ q_{21} + iq_{22} \end{pmatrix} + (b_1 + ib_2) \begin{pmatrix} q_{11} - iq_{12} \\ q_{21} - iq_{22} \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$x_1 = (a_1q_{11} - a_2q_{12} + b_1q_{11} + b_2q_{12}) + i(a_1q_{12} + a_2q_{11} - b_1q_{12} + b_2q_{11})$$

elde edilir. $x_1 \in \mathbb{R}$ olduğundan, $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_2$ seçilerek imajiner kısım sıfıra eşitlenir. Bu durumda $k_1 = z = a_1 + ia_2$ olarak alınırsa $k_2 = \bar{z} = a_1 - ia_2$ bulunur. Sonuç olarak

$$x = zq(\delta) + \bar{z}\bar{q}(\delta) \quad (2.17)$$

elde edilir. Burada (2.17) dönüşümünü kullanarak $x_{t+1} = A(\delta)x_t$ sistemini $z_{t+1} = \lambda(\beta)z_t$ formuna dönüştürmeye çalışacağız.

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= A(\delta)x_t \\
&= A(\delta)[z_t q(\delta) + \bar{z}_t \bar{q}(\delta)] \\
&= z_t A(\delta)q(\delta) + \bar{z}_t A(\delta)\bar{q}(\delta) \\
&= z_t \lambda(\delta)q(\delta) + \bar{z}_t A(\delta)\bar{q}(\delta)
\end{aligned}$$

olup

$$x_{t+1} = z_t \lambda(\delta)q(\delta) + \bar{z}_t A(\delta)\bar{q}(\delta) \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.17) ile verilen eşitlikten

$$\begin{aligned}
\langle p, x_{t+1} \rangle &= \langle p, z_{t+1}q + \bar{z}_{t+1}\bar{q} \rangle \\
&= z_{t+1} \langle p, q \rangle + \bar{z}_{t+1} \langle p, \bar{q} \rangle
\end{aligned} \quad (2.19)$$

olur. Ayrıca (2.18)'den

$$\begin{aligned}
\langle p, x_{t+1} \rangle &= \langle p, z_t \lambda q + \bar{z}_t A \bar{q} \rangle \\
&= z_t \lambda \langle p, q \rangle + \bar{z}_t \langle p, A \bar{q} \rangle \\
&= z_t \lambda \langle p, q \rangle + \bar{z}_t \langle p, \bar{\lambda} \bar{q} \rangle \\
&= z_t \lambda \langle p, q \rangle + \bar{z}_t \bar{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle
\end{aligned} \quad (2.20)$$

bulunur. (2.19) ve (2.20) eşitlenirse

$$z_{t+1} \langle p, q \rangle + \bar{z}_{t+1} \langle p, \bar{q} \rangle = z \lambda \langle p, q \rangle + \bar{z} \bar{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \quad (2.21)$$

elde edilir. Burada $\langle p, q \rangle = 1$ olduğunu biliyoruz. Şimdi denklemde verilen $\langle p, \bar{q} \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım:

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{\lambda} \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\bar{\lambda}} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}} \langle p, A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \langle p, \bar{q} \rangle$$

olup $\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0$ dan $\bar{\lambda} \neq \lambda$ olduğu için $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ bulunur. Sonuç olarak (2.21)'den

$$z_{t+1} = \lambda(\beta)z_t$$

elde edilir. Şimdi $x_{t+1} = A(\beta)x_t$ sistemine lineer olmayan terimlerin eklenmesiyle elde edilen

$$x_{t+1} = A(\beta)x_t + F(x_t, \beta)$$

sistemini ele alalım.

$$\begin{aligned}\langle p, x_{t+1} \rangle &= \langle p, A(\beta)x_t \rangle + \langle p, F(x_t, \beta) \rangle \\ z_{t+1} &= \lambda(\beta)z_t + \langle p, F(z_t q(\beta) + \bar{z}_t \bar{q}(\beta)) \rangle\end{aligned}$$

olur ve $g(z_t, \bar{z}_t, \beta) = \langle p, F(z_t q(\beta) + \bar{z}_t \bar{q}(\beta)) \rangle$ olarak tanımlanan g fonksiyonu Taylor serisine açılırsa

$$g(z_t, \bar{z}_t, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z_t^k (\bar{z}_t)^l, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

elde edilir. Burada

$$g_{kl}(\beta) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial \bar{z}^l} \langle p, F((zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta)), \beta) \rangle |_{z=0}, \quad k, l = 0, 1, \dots \quad \text{ve} \quad k+l \geq 2$$

ile verilir.

Lemma 2.4. $\lambda = \lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$ olmak üzere

$$z_{t+1} = \lambda z_t + \frac{g_{20}}{2} z_t^2 + \frac{g_{11}}{2} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 + \frac{g_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 + O(|z_t|^3) \quad (2.22)$$

denklemi, $e^{i\theta(0)} \neq 1$ ve $e^{3i\theta(0)} \neq 1$ ise yeterince küçük β değerleri için aşağıdaki parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$z_t = v_t + \frac{h_{20}}{2} v_t^2 + h_{11} v_t \bar{v}_t + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}_t^2$$

dönüşümü ile

$$v_{t+1} = \lambda v_t + O(|v_t|^3) \quad (2.23)$$

kuadratik terimleri olmayan denkleme dönüştürülebilir (Kuznetsov, 1998).

İspat.

$$v_t = Az_t + Bz_t^2 + Cz_t \bar{z}_t + D\bar{z}_t^2 + O(|z_t|^3)$$

formunda olup belirsiz katsayılar yöntemiyle

$$\begin{aligned}z_t &= Az_t + Bz_t^2 + Cz_t \bar{z}_t + D\bar{z}_t^2 + \frac{h_{20}}{2} A^2 z_t^2 + h_{11} A^2 z_t \bar{z}_t + \frac{h_{02}}{2} A^2 \bar{z}_t^2 + \dots \\ &= Az_t + \left(B + \frac{h_{20}}{2} A^2 \right) z_t^2 + (C + h_{11} A^2) z_t \bar{z}_t + \left(D + \frac{h_{02}}{2} A^2 \right) \bar{z}_t^2 + \dots\end{aligned}$$

eşitliğinden $A = 1$, $B = -\frac{h_{20}}{2}$, $C = -h_{11}$, $D = -\frac{h_{02}}{2}$ bulunur. Sonuç olarak

$$v_t = z_t - \frac{h_{20}}{2} z_t^2 - h_{11} z_t \bar{z}_t - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}_t^2 + O(|z_t|^3)$$

elde edilir. Şimdi v_{t+1} ifadesinde (2.22) ile verilen eşitliği yerine yazalım:

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= z_{t+1} - \frac{h_{20}}{2} z_{t+1}^2 - h_{11} z_{t+1} \bar{z}_{t+1} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}_{t+1}^2 + O(|z_{t+1}|^3) \\ &= \left[\lambda z_t + \frac{g_{20}}{2} z_t^2 + g_{11} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 \right] - \frac{h_{20}}{2} \left[\lambda z_t + \frac{g_{20}}{2} z_t^2 + g_{11} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 \right] \\ &\quad - h_{11} \left[\lambda z_t + \frac{g_{20}}{2} z_t^2 + g_{11} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 \right] \left[\bar{\lambda} \bar{z}_t + \frac{g_{20}}{2} \bar{z}_t^2 + g_{11} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 \right] \\ &\quad - \frac{h_{02}}{2} \left[\bar{\lambda} \bar{z}_t + \frac{g_{20}}{2} \bar{z}_t^2 + g_{11} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 \right]^2 + O(|z_t|^3) \\ &= \lambda z_t + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda^2 \frac{h_{20}}{2} \right) z_t^2 + (g_{11} - \lambda \bar{\lambda} h_{11}) z_t \bar{z}_t + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}^2 \frac{h_{02}}{2} \right) \bar{z}_t^2 + O(|z_t|^3) \\ &= \lambda \left[v_t + \frac{h_{20}}{2} v_t^2 + h_{11} v_t \bar{v}_t + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}_t^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda^2 \frac{h_{20}}{2} \right) \left[v_t + \frac{h_{20}}{2} v_t^2 + h_{11} v_t \bar{v}_t + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}_t^2 \right]^2 \\ &\quad + (g_{11} - \lambda \bar{\lambda} h_{11}) \left[v_t + \frac{h_{20}}{2} v_t^2 + h_{11} v_t \bar{v}_t + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}_t^2 \right] \left[\bar{v}_t + \frac{h_{20}}{2} \bar{v}_t^2 + h_{11} v_t \bar{v}_t + \frac{h_{02}}{2} v_t^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}^2 \frac{h_{02}}{2} \right) \left[\bar{v}_t + \frac{h_{20}}{2} \bar{v}_t^2 + h_{11} v_t \bar{v}_t + \frac{h_{02}}{2} v_t^2 \right]^2 + O(|v_t|^3) \\ &= \lambda v_t + \left(\frac{g_{20}}{2} + \lambda \frac{h_{20}}{2} - \lambda^2 \frac{h_{20}}{2} \right) v_t^2 + (g_{11} - \lambda \bar{\lambda} h_{11} + \lambda h_{11}) v_t \bar{v}_t \\ &\quad + \left(\frac{g_{02}}{2} + \bar{\lambda} \frac{h_{02}}{2} - \bar{\lambda}^2 \frac{h_{02}}{2} \right) \bar{v}_t^2 + O(|v_t|^3). \end{aligned}$$

Bu eşitlikte

$$\begin{aligned} \frac{g_{20}}{2} + \lambda \frac{h_{20}}{2} - \lambda^2 \frac{h_{20}}{2} = 0 &\Leftrightarrow h_{20} = -\frac{g_{20}}{\lambda(1-\lambda)}, \\ g_{11} - \lambda \bar{\lambda} h_{11} + \lambda h_{11} = 0 &\Leftrightarrow h_{11} = -\frac{g_{11}}{\lambda(1-\bar{\lambda})} \end{aligned}$$

ve

$$\frac{g_{02}}{2} + \bar{\lambda} \frac{h_{02}}{2} - \bar{\lambda}^2 \frac{h_{02}}{2} \Leftrightarrow h_{02} = -\frac{g_{02}}{\lambda - \bar{\lambda}^2}$$

seçilirse kuadratik terimlerin katsayıları sıfır olur. (Burada $e^{i\theta(0)} \neq 1$ olduğundan h_{20} ve h_{11} , $e^{3i\theta(0)} \neq 1$ olduğundan h_{02} tanımlıdır.) Sonuç olarak

$$v_{t+1} = \lambda v_t + O(|v_t|^3) \quad (2.24)$$

elde edilir.

Şimdi kuadratik terimleri elediğimiz gibi kübik terimleri elemeye çalışacağız.

Lemma 2.5. $\lambda = \lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$ olmak üzere

$$z_{t+1} = \lambda z_t + \frac{g_{30}}{6} z_t^3 + \frac{g_{21}}{2} z_t^2 \bar{z}_t + \frac{g_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}_t^3 + O(|z_t|^4) \quad (2.25)$$

denklemini, $e^{2i\theta(0)} \neq 1$ ve $e^{4i\theta(0)} \neq 1$ ise yeterince küçük β değerleri için aşağıdaki parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$z_t = v_t + \frac{h_{30}}{6} v_t^3 + \frac{h_{21}}{2} v_t^2 \tilde{v}_t + \frac{h_{12}}{2} v_t \tilde{v}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \tilde{v}_t^3$$

dönüşümü ile sadece bir kübik terim içeren

$$v_{t+1} = \lambda v_t + c_1 v_t^2 \tilde{v} + O(|v_t|^4) \quad (2.26)$$

denkleme dönüştürülebilir (Kuznetsov, 1998).

İspat.

$$v_t = Az_t + Bz_t^3 + Cz_t^2 \bar{z}_t + Dz_t \bar{z}_t^2 + E\bar{z}^3$$

formunda olup belirsiz katsayılar yöntemiyle

$$\begin{aligned} z_t &= v_t + \frac{h_{30}}{6} v_t^3 + \frac{h_{21}}{2} v_t^2 \tilde{v}_t + \frac{h_{12}}{2} v_t \tilde{v}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \tilde{v}_t^3 \\ &= Az_t + Bz_t^3 + Cz_t^2 \bar{z}_t + Dz_t \bar{z}_t^2 + E\bar{z}^3 + \frac{h_{30}}{6} (A^3 z_t^3 + \dots) + \frac{h_{21}}{2} (A^3 z_t^2 \bar{z}_t + \dots) \\ &\quad + \frac{h_{12}}{2} (A^3 z_t \bar{z}_t^2 + \dots) + \frac{h_{03}}{6} (A^3 \bar{z}^3 + \dots) \\ &= Az_t + \left(B + A^3 \frac{h_{30}}{6} \right) z_t^3 + \left(C + A^3 \frac{h_{21}}{2} \right) z_t^2 \bar{z}_t + \left(D + A^3 \frac{h_{12}}{2} \right) z_t \bar{z}_t^2 \\ &\quad + \left(E + A^3 \frac{h_{03}}{6} \right) \bar{z}_{t+1}^3 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$A = 1, \quad B = -\frac{h_{30}}{6}, \quad C = -\frac{h_{21}}{2}, \quad D = -\frac{h_{12}}{2}, \quad E = -\frac{h_{03}}{6}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$v_t = z_t - \frac{h_{30}}{6} z_t^3 - \frac{h_{21}}{2} z_t^2 \bar{z}_t - \frac{h_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}_{t+1}^3$$

elde edilir. Şimdi v_{t+1} ifadesinde (2.25) ile verilen eşitliği yerine yazalım:

$$\begin{aligned}
v_{t+1} &= z_{t+1} - \frac{h_{30}}{6} z_{t+1}^3 - \frac{h_{21}}{2} z_{t+1}^2 \bar{z}_{t+1} - \frac{h_{12}}{2} z_{t+1} \bar{z}_{t+1}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}_{t+1}^3 + O(|z_{t+1}|^4) \\
&= \lambda z_t + \frac{g_{30}}{6} z_t^3 + \frac{g_{21}}{2} z_t^2 \bar{z}_t + \frac{g_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}_t^3 - \frac{h_{30}}{6} (\lambda^3 z_t^3 + \dots) - \frac{h_{21}}{2} (\lambda^2 \bar{\lambda} z_t^2 \bar{z}_t + \dots) \\
&\quad - \frac{h_{12}}{2} (\lambda \bar{\lambda}^2 z_t \bar{z}_t^2 + \dots) - \frac{h_{03}}{6} (\bar{\lambda}^3 \bar{z}_t^3 + \dots) + O(|z_{t+1}|^4) \\
&= \lambda z_t + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{h_{30}}{6} \lambda^3 \right) z_t^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \frac{h_{21}}{2} \lambda^2 \bar{\lambda} \right) z_t^2 \bar{z}_t + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{h_{12}}{2} \lambda \bar{\lambda}^2 \right) z_t \bar{z}_t^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{h_{03}}{6} \bar{\lambda}^3 \right) \bar{z}_t^3 + O(|z_t|^4) \\
&= \lambda \left[v_t + \frac{h_{30}}{6} v_t^3 + \frac{h_{21}}{2} v_t^2 \tilde{v}_t + \frac{h_{12}}{2} v_t \tilde{v}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \tilde{v}_t^3 \right] + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{h_{30}}{6} \lambda^3 \right) v_t^3 \\
&\quad + \left(\frac{g_{21}}{2} - \frac{h_{21}}{2} \lambda^2 \bar{\lambda} \right) v_t^2 \tilde{v}_t + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{h_{12}}{2} \lambda \bar{\lambda}^2 \right) v_t \tilde{v}_t^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{h_{03}}{6} \bar{\lambda}^3 \right) \tilde{v}_t^3 + O(|w_t|^4) \\
&= \lambda v_t + \left(\lambda \frac{h_{30}}{6} + \frac{g_{30}}{6} - \frac{h_{30}}{6} \lambda^3 \right) v_t^3 + \left(\lambda \frac{h_{21}}{2} + \frac{g_{21}}{2} - \frac{h_{21}}{2} \lambda^2 \bar{\lambda} \right) v_t^2 \tilde{v}_t \\
&\quad + \left(\frac{h_{12}}{2} \lambda + \frac{g_{12}}{2} - \frac{h_{12}}{2} \lambda \bar{\lambda}^2 \right) v_t \tilde{v}_t^2 + \left(\lambda \frac{h_{03}}{6} + \frac{g_{03}}{6} - \frac{h_{03}}{6} \bar{\lambda}^3 \right) \tilde{v}_t^3.
\end{aligned}$$

Bu eşitlikte

$$\lambda \frac{h_{30}}{6} + \frac{g_{30}}{6} - \frac{h_{30}}{6} \lambda^3 = \frac{1}{6} (h_{30}(\lambda - \lambda^3) + g_{30}) = 0 \Leftrightarrow h_{30} = \frac{g_{30}}{\lambda^3 - \lambda},$$

$$\frac{h_{12}}{2} \lambda + \frac{g_{12}}{2} - \frac{h_{12}}{2} \lambda \bar{\lambda}^2 = \frac{1}{2} (h_{12}(\lambda - \lambda \bar{\lambda}^2) + g_{12}) = 0 \Leftrightarrow h_{12} = \frac{g_{12}}{\bar{\lambda}|\lambda|^2 - \lambda}$$

ve

$$\lambda \frac{h_{03}}{6} + \frac{g_{03}}{6} - \frac{h_{03}}{6} \bar{\lambda}^3 = \frac{1}{6} (h_{03}(\lambda - \bar{\lambda}^3)) = 0 \Leftrightarrow h_{03} = \frac{g_{03}}{\bar{\lambda}^3 - \lambda}$$

olarak seçilirse $v_t^2 \tilde{v}_t$ li terim haricindeki kübik terimler, katsayısı sıfır olacağından yok olur. Hipotezden $e^{2i\theta(0)} \neq 1$ olduğu için h_{30} ve h_{12} , $e^{4i\theta(0)} \neq 1$ olduğu için h_{03} tanımlıdır.

Burada

$$\lambda \frac{h_{21}}{2} + \frac{g_{21}}{2} - \frac{h_{21}}{2} \lambda^2 \bar{\lambda} = \frac{1}{2} (h_{21}(\lambda - \lambda^2 \bar{\lambda}) + g_{21}) = 0 \Leftrightarrow h_{21} = -\frac{g_{21}}{\lambda(1 - |\lambda|^2)}$$

alınsaydı $\beta = 0$ iken $\lambda(0)(1 - |\lambda(0)|^2) = 0$ olacağı için h_{21} tanımlanamazdı. Bu sebeple $h_{21} = 0$ seçilebilir. Sonuç olarak $c_1 = \frac{g_{21}}{2}$ olmak üzere

$$v_{t+1} = \lambda v_t + c_1 v_t^2 \tilde{v} + O(|v_t|^4) \quad (2.27)$$

elde edilir.

Lemma (2.4) ve (2.5) i birleştirerek aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

Lemma 2.6. $\lambda = \lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$ olmak üzere

$$z_{t+1} = \lambda z_t + \frac{g_{20}}{2} z_t^2 + \frac{g_{11}}{2} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 + \frac{g_{30}}{6} z_t^3 + \frac{g_{21}}{2} z_t^2 \bar{z}_t + \frac{g_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}_t^3$$

denklemi, $e^{ik\theta(0)} \neq 1$, $k = 1, 2, 3, 4$ şartı sağlanıyor ise yeterince küçük β değerleri için aşağıdaki parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$z_t = v_t + \frac{h_{20}}{2} v_t^2 + h_{11} v_t \tilde{v}_t + \frac{h_{02}}{2} \tilde{v}_t^2 + \frac{h_{30}}{6} v_t^3 + \frac{h_{21}}{2} v_t^2 \tilde{v}_t + \frac{h_{12}}{2} v_t \tilde{v}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \tilde{v}_t^3 \quad (2.28)$$

dönüşümü ile

$$v_{t+1} = \lambda v_t + c_1 v_t^2 \tilde{v}_t + O(|v_t|^4) \quad (2.29)$$

denklemine dönüştürülebilir (Kuznetsov, 1998).

İspat.

Lemma (2.4) ve (2.5) arka arkaya uygulanarak ispat tamamlanır. Lemma (2.4)'den

$$v_t = z_t - \frac{h_{20}}{2} z_t^2 - h_{11} z_t \bar{z}_t - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}_t^2 - \frac{h_{30}}{6} z_t^3 - \frac{h_{21}}{2} z_t^2 \bar{z}_t - \frac{h_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}_t^3 + O(|z_t|^4)$$

elde edilir. Verilen dönüşümü v_{t+1} de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= z_{t+1} - \frac{h_{20}}{2} z_{t+1}^2 - h_{11} z_{t+1} \bar{z}_{t+1} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}_{t+1}^2 - \frac{h_{30}}{6} z_{t+1}^3 - \frac{h_{21}}{2} z_{t+1}^2 \bar{z}_{t+1} \\ &\quad - \frac{h_{12}}{2} z_{t+1} \bar{z}_{t+1}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}_{t+1}^3 + O(|z_{t+1}|^4) \\ &= \left(\lambda z_t + \frac{g_{20}}{2} z_t^2 + \frac{g_{11}}{2} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 + \frac{g_{30}}{6} z_t^3 + \frac{g_{21}}{2} z_t^2 \bar{z}_t + \frac{g_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}_t^3 \right) \\ &\quad - \frac{h_{20}}{2} (\lambda^2 z_t^2 + \lambda g_{20} z_t^3 + 2\lambda g_{11} z_t^2 \bar{z}_t + \lambda g_{02} z_t \bar{z}_t^2 + \dots) \\ &\quad - h_{11} \left(\lambda \bar{\lambda} z_t \bar{z}_t + \lambda \frac{\bar{g}_{20}}{2} z_t \bar{z}_t^2 + \lambda \bar{g}_{11} z_t^2 \bar{z}_t + \lambda \frac{\bar{g}_{02}}{2} \bar{z}_t^3 + \bar{\lambda} \frac{g_{20}}{2} z_t^2 \bar{z}_t + \bar{\lambda} g_{11} z_t \bar{z}_t^2 + \bar{\lambda} \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^3 + \dots \right) \\ &\quad - \frac{h_{02}}{2} (\bar{\lambda}^2 \bar{z}_t^2 + \bar{\lambda} \bar{g}_{20} \bar{z}_t^3 + 2\bar{\lambda} \bar{g}_{11} z_t \bar{z}_t^2 + \bar{\lambda} \bar{g}_{02} z_t^2 \bar{z}_t + \dots) - \frac{h_{30}}{6} (\lambda^3 z_t^3 + \dots) \\ &\quad - \frac{h_{21}}{2} (\lambda^2 \bar{\lambda} z_t^2 \bar{z}_t + \dots) - \frac{h_{12}}{2} (\lambda \bar{\lambda}^2 z_t \bar{z}_t^2 + \dots) - \frac{h_{03}}{6} (\bar{\lambda}^3 \bar{z}_t^3 + \dots) \\ &= \lambda z_t + k_1 z_t^2 + k_2 z_t \bar{z}_t + k_3 \bar{z}_t^2 + k_4 z_t^3 + k_5 z_t^2 \bar{z}_t + k_6 z_t \bar{z}_t^2 + k_7 \bar{z}_t^3 \end{aligned}$$

bulunur ve burada $k_i, i = 1, \dots, 7$ katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$k_1 = \frac{g_{20}}{2} - \lambda^2 \frac{h_{20}}{2},$$

$$k_2 = g_{11} - h_{11} \lambda \bar{\lambda},$$

$$k_3 = \frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}^2 \frac{h_{02}}{2},$$

$$k_4 = \frac{g_{30}}{6} - \lambda h_{20} \frac{g_{20}}{2} - h_{11} \lambda \frac{\bar{g}_{02}}{2} - \lambda^3 \frac{h_{30}}{6},$$

$$k_5 = \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{20} g_{11} - h_{11} \lambda \bar{g}_{11} - h_{11} \bar{\lambda} \frac{g_{20}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \frac{\bar{g}_{02}}{2} - \frac{h_{21}}{2} \lambda^2 \bar{\lambda},$$

$$k_6 = \frac{g_{12}}{2} - \frac{h_{20}}{2} \lambda g_{02} - h_{11} \lambda \frac{\bar{g}_{20}}{2} - h_{11} \bar{\lambda} g_{11} - h_{02} \bar{\lambda} \bar{g}_{11} - \frac{h_{12}}{2} \lambda \bar{\lambda}^2,$$

$$k_7 = \frac{g_{03}}{6} - h_{11} \bar{\lambda} \frac{g_{02}}{2} - \frac{h_{02}}{2} \bar{\lambda} \bar{g}_{20} - \frac{h_{03}}{6} \bar{\lambda}^3.$$

Şimdi (2.28) ile verilen ifadeyi bulduğumuz eşitlikte yerine yazalım:

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= \lambda z_t + k_1 z_t^2 + k_2 z_t \bar{z}_t + k_3 \bar{z}_t^2 + k_4 z_t^3 + k_5 z_t^2 \bar{z}_t + k_6 z_t \bar{z}_t^2 + k_7 \bar{z}_t^3 \\ &= \lambda v_t + v_t^2 \left(\lambda \frac{h_{20}}{2} + k_1 \right) + v_t \tilde{v}_t (\lambda h_{11} + k_2) + \tilde{v}_t^2 \left(\lambda \frac{h_{02}}{2} + k_3 \right) \\ &\quad + v_t^3 \left(\lambda \frac{h_{30}}{6} + k_2 \frac{h_{20}}{2} + k_4 + k_1 h_{20} \right) \\ &\quad + v_t^2 \tilde{v}_t \left(\lambda \frac{h_{21}}{2} + 2k_1 h_{11} + k_2 \left(h_{11} + \frac{h_{20}}{2} \right) + k_3 h_{02} + k_5 \right) \\ &\quad + v_t \tilde{v}_t^2 \left(\lambda \frac{h_{12}}{2} + k_1 h_{02} + k_2 \left(\frac{h_{20}}{2} + h_{11} \right) + 2k_3 h_{11} + k_6 \right) \\ &\quad + \tilde{v}_t^3 \left(\lambda \frac{h_{03}}{6} + k_2 \frac{h_{02}}{2} + k_3 h_{20} + k_7 \right). \end{aligned}$$

Burada

$$\frac{\tilde{g}_{20}}{2} = \lambda \frac{h_{20}}{2} + k_1,$$

$$\tilde{g}_{11} = \lambda h_{11} + k_2$$

$$\frac{\tilde{g}_{02}}{2} = \lambda \frac{h_{02}}{2} + k_3,$$

$$\frac{\tilde{g}_{30}}{6} = \lambda \frac{h_{30}}{6} + k_2 \frac{h_{20}}{2} + k_4 + k_1 h_{20},$$

$$\frac{\tilde{g}_{21}}{2} = \lambda \frac{h_{21}}{2} + 2k_1 h_{11} + k_2 \left(h_{11} + \frac{h_{20}}{2} \right) + k_3 h_{02} + k_5,$$

$$\frac{\tilde{g}_{12}}{2} = \lambda \frac{h_{12}}{2} + k_1 h_{02} + k_2 \left(\frac{h_{20}}{2} + h_{11} \right) + 2k_3 h_{11} + k_6,$$

$$\frac{\tilde{g}_{03}}{6} = \lambda \frac{h_{03}}{6} + k_2 \frac{h_{02}}{2} + k_3 h_{20} + k_7$$

olmak üzere

$$v_{t+1} = \lambda v_t + \frac{\tilde{g}_{20}}{2} v_t^2 + \tilde{g}_{11} v_t \tilde{v}_t + \frac{\tilde{g}_{02}}{2} \tilde{v}_t^2 + \frac{\tilde{g}_{30}}{6} v_t^3 + \frac{\tilde{g}_{21}}{2} v_t^2 \tilde{v}_t + \frac{\tilde{g}_{12}}{2} v_t \tilde{v}_t^2 + \frac{\tilde{g}_{03}}{6} \tilde{v}_t^3$$

olarak yazılır. Ayrıca,

$$h_{20} = -\frac{g_{20}}{\lambda(1-\lambda)},$$

$$h_{11} = -\frac{g_{11}}{\lambda(1-\bar{\lambda})},$$

$$h_{02} = -\frac{g_{02}}{\lambda - \bar{\lambda}^2},$$

$$h_{30} = \frac{6}{(\lambda - \lambda^3)} \left[\frac{g_{20}}{\lambda(1-\lambda)} \left(\frac{g_{11}}{1-\bar{\lambda}} + g_{20}(1-\lambda) + \frac{\lambda g_{20}}{1-\lambda} \right) - \frac{g_{11}\bar{g}_{02}}{2(1-\bar{\lambda})} - \frac{g_{30}}{6} \right],$$

$$h_{12} = \frac{2}{(\lambda - \lambda\bar{\lambda}^2)} \left[\frac{g_{02}}{\lambda - \bar{\lambda}^2} \left(\frac{g_{20}}{2(1-\lambda)} - \bar{\lambda}\bar{g}_{11} \right) \right]$$

$$+ \frac{2}{(\lambda - \lambda\bar{\lambda}^2)} \left[\frac{g_{11}}{\lambda(1-\bar{\lambda})} \left(\frac{g_{11}}{1-\bar{\lambda}} + \frac{\lambda g_{02}}{\lambda - \bar{\lambda}^2} - \frac{\lambda\bar{g}_{20}}{2} - \bar{\lambda}g_{11} \right) \right]$$

$$+ \frac{2}{(\lambda - \lambda\bar{\lambda}^2)} \left[\frac{g_{20}}{2\lambda(1-\lambda)} \left(\frac{g_{11}}{1-\bar{\lambda}} - \lambda g_{02} \right) - \frac{g_{12}}{2} \right],$$

$$h_{03} = \frac{6}{(\lambda - \bar{\lambda}^3)} \left[-\frac{g_{03}}{6} + \frac{g_{02}}{2(\lambda - \bar{\lambda}^2)} \left(\frac{g_{11}}{(1-\bar{\lambda})} - \bar{\lambda}\bar{g}_{20} \right) \right]$$

$$+ \frac{6}{(\lambda - \bar{\lambda}^3)} \left[\frac{g_{20}}{2\lambda(1-\lambda)} \left(g_{02} + \frac{\bar{\lambda}^2 g_{02}}{(\lambda - \bar{\lambda}^2)} \right) - \frac{\bar{\lambda} g_{11} g_{02}}{2\lambda(1-\bar{\lambda})} \right]$$

seçilmesiyle

$$\frac{\tilde{g}_{20}}{2} = \tilde{g}_{11} = \frac{\tilde{g}_{02}}{2} = \frac{\tilde{g}_{30}}{6} = \frac{\tilde{g}_{12}}{2} = \frac{\tilde{g}_{03}}{6} = 0$$

olur. Diğer yandan Lemma (2.5)'in ispatında verilene benzer şekilde $\frac{\tilde{g}_{21}}{2} = 0$ eşitliğini sağlayacak h_{21} tanımlı olmadığından $h_{21} = 0$ seçilebilir. Sonuç olarak (2.29) formuna ulaşılır. Burada $c_1 = \frac{\tilde{g}_{21}}{2}$ olmak üzere ilgili katsayılar yerine yazılırsa c_1 daha sade formda

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\tilde{g}_{21}}{2} = \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{20} g_{11} - h_{11} \lambda \bar{g}_{11} - h_{11} \bar{\lambda} \frac{g_{20}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \frac{\bar{g}_{02}}{2} \\ &= \frac{g_{21}}{2} - \frac{g_{11} g_{20}}{\lambda - 1} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\lambda}} - g_{11} g_{20} \left(\frac{\bar{\lambda}}{2\lambda(\bar{\lambda} - 1)} \right) + \frac{|g_{02}|^2}{2(\lambda^2 - \bar{\lambda})} \\ &= \frac{g_{20} g_{11} (\bar{\lambda} - 3 + 2\lambda)}{2(\lambda^2 - \lambda)(\bar{\lambda} - 1)} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\lambda}} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\lambda^2 - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $c_1(0)$, $|\lambda| = 1$ olduğu için

$$\begin{aligned}
c_1(0) &= \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(\bar{\lambda}(0) - 3 + 2\lambda(0))}{2(\lambda^2(0) - \lambda(0))(\bar{\lambda}(0) - 1)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\lambda}(0)} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\lambda^2(0) - \bar{\lambda}(0))} + \frac{g_{21}(0)}{2} \\
&= \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)}{2(\lambda^2(0) - \lambda(0))} \left(\frac{\lambda(0)\bar{\lambda}(0) - 3\lambda(0) + 2\lambda^2(0)}{\lambda(0)\bar{\lambda}(0) - \lambda(0)} \right) + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\lambda}(0)} \\
&\quad + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\lambda^2(0) - \bar{\lambda}(0))} + \frac{g_{21}(0)}{2} \\
&= \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)}{2(\lambda^2(0) - \lambda(0))} \left(\frac{1 - 3\lambda(0) + 2\lambda^2(0)}{1 - \lambda(0)} \right) + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\lambda}(0)} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\lambda^2(0) - \bar{\lambda}(0))} \\
&\quad + \frac{g_{21}(0)}{2} \\
&= \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1 - 2\lambda(0))}{2(\lambda^2(0) - \lambda(0))} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\lambda}(0)} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\lambda^2(0) - \bar{\lambda}(0))} + \frac{g_{21}(0)}{2}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.3. $x_t \in \mathbb{R}^2$, $\delta \in \mathbb{R}$ ve $f \in C^k$ olmak üzere

$$x_{t+1} = f(x_t, \delta) \tag{2.31}$$

sistemi yeterince küçük $|\delta|$ değerleri için $\bar{x} = 0$ denge noktasına sahip olsun. Bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisinin özdeğerleri ise

$$\lambda_{1,2} = r(\delta)e^{\mp i\varphi(\delta)} \ni r(0) = 1, \varphi(0) = \theta_0$$

olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

NS1) $r'(0) \neq 0$

NS2) $e^{ik\theta_0} \neq 1$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Öyleyse, $y = (y_1, y_2)^T$ olmak üzere (2.31) sistemini

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{pmatrix} &\mapsto (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

sistemine dönüşüren tersi mevcut olan parametre ve koordinat dönüşümleri mevcuttur. Burada $\theta(0) = \theta_0$ ve $a(0) = \text{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0))$ olup $c_1(0)$ katsayısı (2.30) denkleminde verildiği gibidir (Kuznetov, 1998).

İspat. Lemma (2.4), (2.5) ve (2.6) dan (2.31) sistemi $\lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ olmak üzere

$$w_{t+1} = \lambda(\beta)w_t + c_1(\beta)w_t|w_t|^2 + O(|w_t|^4)$$

normal formuna dönüştürülebilir. Özdeğeri bu eşitlikte yerine yazalım:

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}w_t + c_1(\beta)w_t|w_t|^2 + O(|w_t|^4) \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[(1 + \beta)w_t + e^{-i\theta(\beta)}c_1(\beta)w_t|w_t|^2 \right] + O(|w_t|^4). \end{aligned}$$

Eğer $d(\beta) = e^{-i\theta(\beta)}c_1(\beta)$ olarak seçersek

$$w_{t+1} = e^{i\theta(\beta)} [1 + \beta + d(\beta)|w_t|^2] w_t + O(|w_t|^4)$$

bulunur. Burada $d(\beta) = a(\beta) + ib(\beta) = \cos\theta(\beta)c_1 - i\sin\theta(\beta)c_1(\beta)$ olarak yazarsak

$$w_{t+1} = e^{i\theta(\beta)} [1 + \beta + (a(\beta) + ib(\beta))|w_t|^2] w_t + O(|w_t|^4)$$

elde edilir. Şimdi reel koordinatlara geçmek için $w_t = y_1(t) + iy_2(t)$ dönüşümünü yapalım:

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= e^{i\theta(\beta)} [1 + \beta + (a(\beta) + ib(\beta))(y_1^2(t) + y_2^2(t))] (y_1(t) + iy_2(t)) + Y.M.T. \\ &= e^{i\theta(\beta)} (1 + \beta)(y_1(t) + iy_2(t)) \\ &\quad + e^{i\theta(\beta)} [(a(\beta)y_1(t) + ia(\beta)y_2(t) + ib(\beta)y_1(t) - b(\beta)y_2(t))(y_1^2(t) + y_2^2(t))] \\ &\quad + Y.M.T. \\ &= (1 + \beta) (\cos\theta y_1(t) - \sin\theta y_2(t)) + i(1 + \beta) (\cos\theta y_2(t) + \sin\theta y_1(t)) \\ &\quad + [\cos\theta(a(\beta)y_1(t) - b(\beta)y_2(t)) - \sin\theta(a(\beta)y_2(t) + b(\beta)y_1(t))] (y_1^2(t) + y_2^2(t)) \\ &\quad + i[\cos\theta(a(\beta)y_2(t) + b(\beta)y_1(t)) + \sin\theta(a(\beta)y_1(t) - b(\beta)y_2(t))] (y_1^2(t) + y_2^2(t)) \\ &\quad + Y.M.T. \\ &= y_1(t+1) + iy_2(t+1). \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= (1 + \beta) (\cos\theta y_1(t) - \sin\theta y_2(t)) \\ &\quad + [\cos\theta(a(\beta)y_1(t) - b(\beta)y_2(t)) - \sin\theta(a(\beta)y_2(t) + b(\beta)y_1(t))] (y_1^2(t) + y_2^2(t)) \\ &\quad + Y.M.T. \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y_2(t+1) = & (1 + \beta) (\cos\theta y_2(t) + \sin\theta y_1(t)) \\ & + [\cos\theta (a(\beta)y_2(t) + b(\beta)y_1(t)) + \sin\theta (a(\beta)y_1(t) - b(\beta)y_2(t))] (y_1^2(t) + y_2^2(t)) \\ & + Y.M.T. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2.32) formuna ulaşılmış olur.

Teorem 2.4. $x_t \in \mathbb{R}^2$, $\delta \in \mathbb{R}$ ve $f \in C^k$ olmak üzere

$$x_{t+1} = f(x_t, \delta)$$

sistemi $\delta = 0$ iken $\tilde{x} = 0$ denge noktasına sahip olsun. Bu denge noktasına karşılık gelen özdeğerler ise $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ olsun. Ayrıca sistem, Teorem 2.3'deki hipotezleri ve *NS1*), *NS2*) şartlarını sağlasın. Buna ek olarak $a(0) \neq 0$ olsun. Öyleyse, δ soldan sağa $\delta = 0$ noktasından geçerken orijinin komşuluğunda tek bir kapalı yörüngenin ortaya çıkar. Burada $a(0)$,

$$a(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{-i\theta_0}) e^{-2i\theta_0} g_{20} g_{11}}{2(1 - e^{-i\theta_0})} \right) - \frac{|g_{11}|^2}{2} - \frac{|g_{02}|^2}{4} \quad (2.33)$$

ile hesaplanır (Kuznetsov, 1998).

3. MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ

Çok boyutlu sistemlerin analizini basitleştirmek için kullanılan yöntemlerden biri sistemin boyutunun azaltıldığı Merkez Manifold Teorisidir (Kayan, 2018).

Bu bölümde flip çatallanma için gereken merkez manifold teorisi anlatılacaktır.

$$X(t+1) = AX(t) \quad (3.1)$$

sistemini ele alalım. Burada $X \in \mathbb{R}^n$ ve $A_{n \times n}$ tipinde reel bir matristir. Kabul edelim ki $\bar{X} = 0$ sistemin hiperbolik olmayan denge noktası olsun. Bu durumda A matrisinin özdeğerlerini birim çemberin içinde, dışında ve üzerinde olacak şekilde üç gruba ayırmak mümkündür.

Birim çemberin içinde kalan (mutlak değeri 1 den küçük) özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ olmak üzere

$$E^s = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$$

uzayına (3.1) sisteminin **Kararlı Altuzayı**, birim çemberin dışında kalan (mutlak değeri 1 den büyük) özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\{e_{s+1}, e_{s+2}, \dots, e_{s+u}\}$ olmak üzere

$$E^u = \text{span}\{e_{s+1}, e_{s+2}, \dots, e_{s+u}\}$$

uzayına (3.1) sisteminin **Kararsız Altuzayı**, birim çemberin üzerinde bulunan (mutlak değeri 1 e eşit) özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\{e_{s+u+1}, e_{s+u+2}, \dots, e_{s+u+c}\}$ olmak üzere

$$E^c = \text{span}\{e_{s+u+1}, e_{s+u+2}, \dots, e_{s+u+c}\}$$

uzayına (3.1) sisteminin **Merkez Altuzayı** adı verilir (Wiggins, 2003).

$t \rightarrow \infty$ iken E^s uzayında başlayan çözümler denge noktasına yaklaşırken E^u uzayında başlayan çözümler denge noktasından uzaklaşır. E^c uzayında başlayan çözümler ise denge noktasına ne yaklaşır ne de uzaklaşır.

$E^u = \emptyset$ ise (3.1) sisteminin tüm çözümleri E^c uzayına yakınsar ve dolayısıyla sistemin dinamiğini E^c uzayı belirler (Wiggins, 2003).

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= By_t + g(x_t, y_t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

sistemini ele alalım. Burada $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ ve orijinin bir komşuluğunda $r \geq 2$

olmak üzere $f, g \in C^r$ dir. Ayrıca A , $c \times c$ boyutlu, özdeğerlerinin mutlak değeri bire eşit olan ve B , $s \times s$ boyutlu, özdeğerlerinin mutlak değeri birden küçük olan matristir. $f(0,0) = g(0,0) = Df(0,0) = Dg(0,0) = 0$ in sağlandığını kabul edelim.

$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$ denge noktası komşuluğundaki (3.2) sisteminin lineerleştirmesinin sonuç vermeyeceği açıktır. Bu durumda aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 3.1 (Varlık (Wiggins, 2003)). *Yeterince küçük δ değerleri için*

$$W^c(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

(3.2) sistemin bir C^r merkez manifoldudur. Ayrıca, yeterince küçük u_t değerleri için

(3.2) sistemi

$$u_{t+1} = Au_t + f(u_t, h(u_t)), \quad u \in \mathbb{R}^c \quad (3.3)$$

sistemine lokal topolojik olarak denktir. Bir başka ifadeyle, sistemler aynı nitel yapıya sahiptir.

İspat. Bakınız Carr (1981).

$h(0) = 0$ ve $Dh(0) = 0$ koşulları manifoldun E^c Merkez Altuzayına teğet olduğunu söylemektedir.

Şimdi, (3.2) sistemin merkez manifoldunu hesaplayalım. Sistem

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = By_t + g(x_t, y_t). \end{cases}$$

şeklinde ifade edilip $y_t = h(x_t)$ olarak alınırsa

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + f(x_t, h(x_t)) \\ y_{t+1} = h(x_{t+1}) = Bh(x_t) + g(x_t, h(x_t)) \end{cases}$$

elde edilir. İkinci deklemden, $h(x_{t+1}) = h(Ax_t + f(x_t, h(x_t))) = Bh(x_t) + g(x_t, h(x_t))$ olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$N(h(x_t)) = h(Ax_t + f(x_t, h(x_t))) - Bh(x_t) + g(x_t, h(x_t)) = 0.$$

Bu fonksiyon sistemin indirgendiği merkez manifoldun katsayılarının hesabında kullanılmakta ve flip çatallanma analizine bu katsayılar kullanılarak devam edilmektedir.

4. BİR AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNİN ÇATALLANMA ANALİZİ

4.1 Tez Problemi ve Tezin Amacı

Literatürde sürekli zamanlı av-avcı sistemlerinin lineer olmayan dinamik yapısı üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda kararlılık yapısı, çatallanma, limit döngüleri, Allee etkisi ile ilgili analizler bulmak mümkündür. Diğer yandan, son otuz yılda ayrik zamanlı av-avcı sistemleri üzerine yapılan çalışmalar daha dikkat çekmektedir. Bu çalışmaların çoğu, denge noktalarının varlığı ve kararlılığı, Allee etkisi, rezonans ve çatallanma analizi, kompleks ve kaotik yapıya odaklanmıştır. Ayrik zamanlı av-avcı modelleri genellikle sürekli zamanlı muadillerinden değişen veya sabit ayriklaştırma adımı ile Euler metodu kullanılarak elde edilmektedir (Baydemir, 2020).

Bu tezde,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - c(x-R)y \\ \frac{dy}{dt} = e(x-R)y - dy \end{cases} \quad (4.1)$$

diferensiyel denklem sistemi ile verilmiş sığınak etkisi içeren Lotka-Volterra tipi av-avcı popülasyon modeli Euler metodu ile fark denklem sistemine dönüştürülecek, elde edilen modelin lokal kararlılık ve çatallanma analizi yapılacaktır.

Sığınak etkisinin sistemin dinamiğini nasıl etkilediğini araştırmak için ilk olarak sığınak etkisi içermeyen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - cxy \\ \frac{dy}{dt} = exy - dy \end{cases} \quad (4.2)$$

modeli ile başlanıp, (4.1) modeli ile devam edilecektir. Bu iki modelden elde edilen fark denklem sistemlerinin analizi yapıldıktan sonra sonuçlar kıyaslanacaktır.

(4.1) modelinde r, c, e, d, K ve R katsayıları pozitif olmak üzere

$x(t)$: t anındaki av popülasyonunu

$y(t)$: t anındaki avcı popülasyonunu

r : av popülasyonunun büyüme oranını

- c : kiři bařına dūřen avlanma oranını
- e : avlanmanın avcı popūlasyonuna getirisini
- d : avcı popūlasyonunun ölüm oranını
- K : av için ortamın taşıma kapasitesini
- R : sabit av sığınağını

göstermektedir.

Ma (2010), doktora tezinde (4.1) ile verilen modelin dinamik yapısını araştırmış, Chen ve arkadaşları (2012) pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir. Yang (2013) ise modelin difūzyon terimi eklenmiş halinin kararlılık analizini vermiştir. Karşılıklı müdahalenin eklendiği alışma, Chen ve arkadaşları (2013) tarafından yapılmış iken Chow ve arkadaşları (2018) modele hasat etkisi ekleyerek analiz yapmıştır.

Modeldeki ilk denklem av türü popūlasyonundaki deđiřim oranını ifade etmektedir. Görüldüđu üzere lojistik parçada avcı türünün bir etkisi yoktur, yani ortamda avcının olmadığı durumda av popūlasyonu belirli bir süre sonra dengeye ulařacaktır.

Sığınak, avın avlanma olasılığının normale oranla daha düşük olduğu yer olarak tanımlanır. Bu modelde R , sabit av sığınağı olarak alınmıştır. $(x - R)$, av popūlasyonundan sığınağa saklanmış olanların çıkarılmasıyla elde edilen avlanmaya açık kısım olarak ifade edilir. Bir karşılaşma olması ve avlanmanın gerçekleşmesini temsil etmek için bu ifade y ile çarpılmıştır. Modeldeki c sabiti karşılaşmanın başarı oranıdır çünkü herhangi bir karşılaşmada avcı avı avlamada başarılı olamayabilir. Örneđin, av kaçabilir veya avcı ölebilir. Böyle bir durum söz konusu olduğundan buradaki c avcı başına dūřen avlanma oranıdır ve türe göre değişebilir.

İkinci denklem, avcı türü popūlasyonundaki değişim oranını vermektedir. Avcı türünde avlanmaya müsait olan avlarla karşılaşıp onları avlayan, yani beslenen grubun üremeye bir katkısı olabilir. Peki buradaki e bize ne anlatıyor? Avcı hastalanması, eř bulamaması gibi nedenlerden dolayı her beslendiğinde direkt çoğalmaz. Beslenen grubun içinden bir kısım belirli bir oranda çoğalacaktır. Bu oranı e temsil etmektedir. Bu sabiti avlanmanın avcı popūlasyonuna getirisi olarak görebiliriz.

d yukarıda da belirttiğimiz gibi ölüm oranını temsil etmektedir. Bu oran popūlasyondaki her bir bireyi etkilediği için y ile çarpılır ve ölümler popūlasyondaki birey sayısını azalttığından değişim oranını negatif etkilemektedir.

4.2 Sığınak Etkisi İçermeyen Modelin Analizi

4.2.1 Modelin elde edilmesi

Öncelikle Euler metodunu kullanarak (4.2) diferensiyel denklem sistemini fark denklem sistemine dönüştüreceğiz.

Bir $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun t_0 noktasındaki türevi

$$x'(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki ifadeyi t_0 'a yakın t_1 değerleri için

$$x'(t_0) \approx \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

olarak yazabiliriz. Özel olarak $t_1 - t_0 = \delta$ seçilirse fonksiyonun $t = t_1$ noktasındaki değeri yaklaşık olarak

$$x(t_1) \approx x(t_0) + \delta x'(t_0)$$

ile hesaplanabilir. Öyleyse, (4.2) modelinde

$$x'(t_0) = rx(t_0) \left(1 - \frac{x(t_0)}{K}\right) - cx(t_0)y(t_0)$$

olduğu için $x(t_1)$ yaklaşık olarak

$$x(t_1) \approx x(t_0) + r\delta x(t_0) \left(1 - \frac{x(t_0)}{K}\right) - c\delta x(t_0)y(t_0)$$

şeklinde ifade edilir. Burada x_{t+1} , x_t den sonraki iterasyon olmak üzere

$$x_{t+1} = x_t + r\delta x_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right) - c\delta x_t y_t$$

denklemini elde edilir. Aynı işlemler ikinci denklem için tekrar edilirse (4.2) modelinde

$$y'(t_0) = ex(t_0)y(t_0) - dy(t_0)$$

olduğu için

$$y_{t+1} = y_t + \delta y_t (ex_t - d)$$

bulunur. Sonuç olarak Euler metodu kullanılarak (4.2) sistemine karşılık gelen ayrık av-avcı sistemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t + r\delta x_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right) - c\delta x_t y_t \\ y_t + \delta y_t (ex_t - d) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Hesaplamaların daha kolay yapılması için (4.3) sistemi boyutsuzlaştırılacaktır. Bunun için

$$x_t = Au_t$$

$$y_t = Bv_t$$

dönüşümünü yapıp (4.3) sisteminde yerine yazarak ve uygun A, B katsayıları seçerek parametre sayısı düşürülecektir. Yukarıdaki dönüşümler uygulanırsa

$$\begin{cases} Au_{t+1} = Au_t + r\delta Au_t \left(1 - \frac{Au_t}{K}\right) - c\delta Au_t Bv_t \\ Bv_{t+1} = Bv_t + \delta Bv_t (eAu_t - d) \end{cases}$$

ve ilk denklem A 'ya, ikinci denklem B 'ye bölünürse

$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t + r\delta u_t \left(1 - \frac{Au_t}{K}\right) - c\delta u_t Bv_t \\ v_{t+1} = v_t + \delta v_t (eAu_t - d) \end{cases}$$

elde edilir. Burada $A = K, B = \frac{1}{c}, \beta = eK, \gamma = d$ seçilirse

$$\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t + r\delta u_t (1 - u_t) - \delta u_t v_t \\ v_t (1 - \delta\gamma) + \delta\beta u_t v_t \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

sistemi bulunur. Dikkat edilirse (4.3) sisteminde 6 parametre var iken boyutsuzlaştırdığımız (4.4) sisteminde 4 parametre bulunmaktadır.

4.2.2 Denge noktaları ve lokal kararlılık analizi

(4.4) sisteminin denge noktaları aşağıdaki denklemleri sağlayan (\tilde{u}, \tilde{v}) değerleridir:

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u} + r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) - \delta\tilde{u}\tilde{v}, \\ \tilde{v} = \tilde{v}(1 - \delta\gamma) + \delta\beta\tilde{u}\tilde{v}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Öyleyse, (4.5)'deki ikinci eşitlikten

$$\tilde{v}(1 - \delta\gamma) + \delta\beta\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{v} = 0 \Rightarrow \delta\tilde{v}(\beta\tilde{u} - \gamma) = 0$$

olup

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{veya} \quad \tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta}$$

olarak elde edilir. $\tilde{v} = 0$ ise (4.5)'deki birinci eşitlikten

$$\tilde{u} = \tilde{u} + r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) \Rightarrow \tilde{u} + r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) - \tilde{u} = 0 \Rightarrow r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) = 0$$

olduğu için

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{veya} \quad \tilde{u} = 1$$

bulunur. $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta}$ ise (4.5)'deki birinci eşitlikten

$$\tilde{u} + r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) - \delta\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u} = 0 \Rightarrow \delta\tilde{u}(r(1 - \tilde{u}) - \tilde{v}) = 0$$

olup $\tilde{u} \neq 0$ olduğu için

$$\tilde{v} = r(1 - \tilde{u})$$

bulunur. Bu durumda (4.4) sisteminin $(0,0), (1,0)$ ve $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta}$ olmak üzere $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, r(1 - \tilde{u}))$ olacak şekilde 3 tane denge noktası vardır.

Şimdi çalışmalarımızın biyolojik olarak anlamlı olması için üçüncü denge noktası olan (\tilde{u}, \tilde{v}) 'in pozitif olduğu koşulları belirleyeceğiz. $\gamma > 0$ ve $\beta > 0$ olduğu için $\tilde{u} > 0$ dır. Diğer taraftan

$$\tilde{v} = r(1 - \tilde{u}) > 0 \Leftrightarrow \tilde{u} < 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\beta} < 1$$

olmalıdır. Sonuç olarak (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasının pozitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\gamma < \beta$ koşulunun sağlanmasıdır.

Şimdi bu denge noktalarının lokal kararlılık analizini yapacağız. (4.4) sisteminin sağ tarafındaki fonksiyonları

$$\begin{cases} f(u_t, v_t) = u_t + r\delta u_t(1 - u_t) - \delta u_t v_t \\ g(u_t, v_t) = v_t(1 - \delta\gamma) + \delta\beta u_t v_t \end{cases}$$

ile gösterelim. Öyleyse, (4.4) sistemine karşılık gelen Jakobiyen matrisi

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} f_u(u, v) & f_v(u, v) \\ g_u(u, v) & g_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r\delta - 2r\delta u - \delta v & -\delta u \\ \delta\beta v & 1 - \delta\gamma + \delta\beta u \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

olarak hesaplanır. Birinci bölümdeki analizden hareketle kararlılık koşulları belirlenirken bu Jakobiyen matrisi kullanılacaktır.

(0,0) Denge Noktasının Kararlılık Analizi

(4.4) sisteminin $(0,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi (4.6)'dan

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 + r\delta & 0 \\ 0 & 1 - \delta\gamma \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 1 + r\delta$ ve $\lambda_2 = 1 - \delta\gamma$ dır. Denge noktasının kararlı olabilmesi için bu iki özdeğerin mutlak değerinin 1 den küçük olması gerekmektedir. Öyleyse

$$|1 + r\delta| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + r\delta < 1 \Leftrightarrow -2 < r\delta < 0$$

$$|1 - \delta\gamma| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \delta\gamma < 1 \Leftrightarrow -2 < -\delta\gamma < 0 \Leftrightarrow 0 < \delta\gamma < 2$$

olup r ve δ pozitif olduğu için $\lambda_1 = 1 + r\delta$ özdeğerinin mutlak değeri 1 den küçük değildir. Bu durumda aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Teorem 4.1. (4.4) sisteminin $(0,0)$ denge noktası kararsızdır.

(1,0) Denge Noktasının Kararlılık Analizi

(4.4) sisteminin $(1,0)$ denge noktasındaki Jakobiyen matrisi (4.6)'dan

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 1 - r\delta & -\delta \\ 0 & 1 + \delta(\beta - \gamma) \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 1 - r\delta$ ve $\lambda_2 = 1 + \delta(\beta - \gamma)$ dır. Burada

$$|1 - r\delta| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - r\delta < 1 \Leftrightarrow -2 < -r\delta < 0 \Leftrightarrow 0 < r\delta < 2$$

$$|1 + \delta(\beta - \gamma)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + \delta(\beta - \gamma) < 1 \Leftrightarrow -2 < \delta(\beta - \gamma) < 0$$

olup (\tilde{u}, \tilde{v}) in pozitif denge noktası olabilmesi için $\beta - \gamma > 0$ olması gerektiğini biliyoruz. Diğer yandan $\delta > 0$ dır. Bu nedenlerle $\lambda_2 = 1 + \delta(\beta - \gamma)$ nın mutlak değeri 1 den küçük değildir. Böylece aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Teorem 4.2. (4.4) sisteminin $(1,0)$ denge noktası kararsızdır.

$(1,0)$ denge noktası, pozitif denge noktası ile ilişkisi bakımından ilgi çekici bir özelliğe sahiptir. Bunu iki durumda inceleyeceğiz.

1. Durum: $\gamma \geq \beta$ olması hâli

$\gamma \geq \beta$ olduğu için $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta} \geq 1$ olur fakat $\tilde{v} = r(1 - \tilde{u})$ olduğundan $\tilde{v} \leq 0$ gerçekleşir.

Dolayısıyla pozitif denge noktası yoktur. Bu durumda $\beta - \gamma < 0$ iken $\delta > 0$ olduğu için $(1,0)$ denge noktası için kararlı bir bölge bulunabilir.

Sonuç: $\gamma \geq \beta$ iken pozitif denge noktası mevcut değildir ve $(1,0)$ denge noktasının kararlı olduğu bir bölge bulmak mümkündür. Pozitif olmayan denge noktası biyolojik olarak anlamlı olmayıp model iki türün birden var olmasının mümkün olmadığı durumda en azından av türünün var olmasını sağlayacak koşulları belirlemeye imkan vermektedir.

2. Durum: $\gamma < \beta$ olması hâli

$\gamma < \beta$ olduğu için $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta} < 1$ olur. Ayrıca $\tilde{v} = r(1 - \tilde{u})$ olduğundan $\tilde{v} > 0$ olup pozitif denge noktası mevcuttur. Bu durumda $\gamma < \beta$ olduğundan $\beta - \gamma > 0$ olur ki $(1,0)$ denge noktası kararsız olur. Pozitif denge noktası için kararlılık bölgesi bulmak mümkündür.

Sonuç: Pozitif denge noktasının var olması durumunda $(1,0)$ denge noktası kararsızdır, yani model iki türün birden var olmasını sağlayacak koşulları belirlemeye imkan vermektedir. γ yı ölüm oranı olarak alır, β yı bir anlamda avcı türü için büyüme oranı olarak düşünürsek $\gamma < \beta$ iken avcı türünün varlığını koruması beklenir.

(\tilde{u}, \tilde{v}) Denge Noktasının Kararlılık Analizi

(4.4) sisteminin $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, r(1 - \tilde{u}))$ denge noktasındaki Jakobiyeen matrisi (4.6)'dan

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} 1 - r\delta\tilde{u} & -\delta\tilde{u} \\ \delta\beta\tilde{v} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

olarak bulunur. Burada

$$\det(J) = 1 - r\delta\tilde{u} + \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v}$$

$$iz(J) = 2 - r\delta\tilde{u}$$

olarak hesaplanır. Jakobiyeen matrise karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - iz(J)\lambda + \det(J) = \lambda^2 - (2 - r\delta\tilde{u})\lambda + (\delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} - r\delta\tilde{u} + 1) \quad (4.8)$$

şeklinde ifade edilir ve bu polinomun kökleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\lambda_1 = \frac{2 - r\delta\tilde{u} - \sqrt{\delta^2(r^2\tilde{u}^2 - 4\beta\tilde{u}\tilde{v})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - r\delta\tilde{u} + \sqrt{\delta^2(r^2\tilde{u}^2 - 4\beta\tilde{u}\tilde{v})}}{2}.$$

Burada $A = \frac{r\gamma}{\beta} \left(\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \right)$ olmak üzere

$$\lambda_1 = 1 - \frac{r\gamma}{2\beta}\delta - \frac{\delta}{2}\sqrt{A}, \quad (4.9a)$$

$$\lambda_2 = 1 - \frac{r\gamma}{2\beta}\delta + \frac{\delta}{2}\sqrt{A} \quad (4.9b)$$

olarak yazılabilir.

Bu özdeğerlerin mutlak değerinin 1'den küçük kalmasını istiyoruz fakat bu analiz diğer denge noktalarında yapılan analizlere göre daha kompleks olduğundan EK-1 de verilen Lemma (6.1)'in in birinci maddesindeki

$$|\lambda_1| < 1 \text{ ve } |\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow F(1) > 0, F(-1) > 0 \text{ ve } C < 1$$

koşulunu kullanarak analize devam edeceğiz.

F(1) > 0 Koşulu:

$$F(1) = 1 - iz(J) + \det(J) = 1 - 2 + r\delta\tilde{u} + 1 - r\delta\tilde{u} + \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} = \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v}$$

olarak hesaplanır. Burada $\delta, \beta, \tilde{u}, \tilde{v}$ pozitif olduğu için $F(1) > 0$ koşulu her δ için sağlanır ($\gamma < \beta$).

F(-1) > 0 Koşulu:

$$\begin{aligned} F(-1) &= 1 + iz(J) + \det(J) = 1 + 2 - r\delta\tilde{u} + 1 - r\delta\tilde{u} + \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} \\ &= (\beta\tilde{u}\tilde{v})\delta^2 - (2r\tilde{u})\delta + 4 \end{aligned} \quad (4.10)$$

olup bu ifade δ 'ya bağlı ikinci dereceden bir polinom olduğundan pozitif olduğu aralığı belirlemek için kök analizi yapacağız. İlk olarak,

$$\begin{aligned} \Delta_{F(-1)} &= (-2r\tilde{u})^2 - 16\beta\tilde{u}\tilde{v} \\ &= 4r\tilde{u}(r\tilde{u} - 4\beta(1 - \tilde{u})) \\ &= \frac{4r\gamma}{\beta} \left(\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{4r\gamma}{\beta} > 0$ olduğu için $\left(\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \right)$ 'nin işaretine göre $\Delta_{F(-1)}$ 'in işareti değişmekte ve dolayısıyla $F(-1)$ 'in kök sayısı ve işareti belirlenmektedir.

i) $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) > 0$ ise $\Delta_{F(-1)} > 0$ olup $F(-1)$ 'in iki farklı reel kökü vardır:

$$\delta_{1,2} = \frac{2r\tilde{u} \mp \sqrt{\Delta_{F(-1)}}}{2\beta\tilde{u}\tilde{v}}$$

olduğu için

$$\delta_1 = \frac{1}{\beta - \gamma} - \frac{\sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \right)}}{\frac{r\gamma}{\beta}(\beta - \gamma)} < \frac{1}{\beta - \gamma}, \quad (4.11)$$

ve

$$\delta_2 = \frac{1}{\beta - \gamma} + \frac{\sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \right)}}{\frac{r\gamma}{\beta}(\beta - \gamma)} > \frac{1}{\beta - \gamma} \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. $0 < \delta_1 < \frac{1}{\beta - \gamma} < \delta_2$ sıralaması açıktır. Şimdi

bulduğumuz kökleri işaret tablosuna yerleştirerek $F(-1)$ 'in pozitif olduğu yerleri belirleyelim:

	δ_1	δ_2	
$F(-1)$	+	-	+

$\therefore 0 < \delta < \delta_1$ veya $\delta > \delta_2$ iken $F(-1) > 0$ koşulu sağlanır.

ii) $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) = 0$ ise $\Delta_{F(-1)} = 0$ olup $F(-1)$ 'in çakışık iki reel kökü vardır:

$$\delta_{3,4} = \frac{2r\tilde{u}}{2\beta\tilde{u}\tilde{v}} = \frac{1}{\beta - \gamma} > 0. \quad (4.13)$$

İşaret tablosu ise aşağıdaki gibidir:

	$\delta_{3,4}$	
$F(-1)$	+	+

$\therefore \delta \neq \frac{1}{\beta - \gamma}$ iken $F(-1) > 0$ koşulu sağlanır.

iii) $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) < 0$ ise $\Delta_{F(-1)} < 0$ olup δ^2 li terimin katsayısı $\beta\tilde{u}\tilde{v} > 0$ olduğundan $F(-1) > 0$ koşulu her δ için sağlanır.

Det(J) < 1 Koşulu:

$$Det(J) = 1 - r\delta\tilde{u} + \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} < 1 \Leftrightarrow \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} - r\delta\tilde{u} < 0 \Leftrightarrow \delta\tilde{u}(\delta\beta\tilde{v} - r) < 0$$

ve $\delta, \tilde{u} > 0$ olduğu için

$$\delta\tilde{u}(\delta\beta\tilde{v} - r) < 0 \Leftrightarrow \delta\beta\tilde{v} - r < 0 \Leftrightarrow \delta < \frac{r}{\beta\tilde{v}} \Leftrightarrow \delta < \frac{r}{\beta r \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)} \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{\beta - \gamma}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $\delta < \frac{1}{\beta - \gamma}$ iken $Det(J) < 1$ koşulu sağlanır.

(4.4) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktası için bütün bu koşulları içeren kararlılık teoremi aşağıdaki gibi elde edilir:

Teorem 4.3. *Eğer*

$$HI) \frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \leq 0 \text{ iken } \delta < \frac{1}{\beta - \gamma}$$

veya

$$\mathbf{H2)} \quad \frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) > 0 \text{ iken } \delta < \delta_1$$

koşullarından biri sağlanıyorsa (4.4) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktası lokal asimptotik karardır. Burada

$$\delta_1 = \frac{\frac{r\gamma}{\beta} - \sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \right)}}{\frac{r\gamma}{\beta} (\beta - \gamma)} \quad (4.14)$$

dır.

4.2.3 Flip çatallanma analizi

Bu kısımda (2.1) bölümünde anlatılan flip çatallanma analizi (4.4) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasına uygulanarak sistemin dinamiğinin δ parametresine göre nasıl değiştiği incelenecektir.

$F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C \ni B, C \in \mathbb{R}$ sistemin denge noktasındaki Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom olmak üzere EK-1 de verilen Teorem (6.1)'in ikinci maddesinden $B \neq 0, 2$ ve $F(-1) = 0$ ise flip çatallanma ortaya çıkabileceğini biliyoruz. Burada $B = -iz(J)$, $C = \det(J)$ olmakla birlikte flip çatallanma analizine, çatallanmanın meydana gelebileceği bu gerek koşulları belirleyerek başlayacağız.

F(-1)=0 Koşulu:

Bölüm 4.2'deki (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasının kararlılık analizi yapılırken denklem (4.10) da verildiği gibi $F(-1)$, δ 'ya bağlı ikinci dereceden bir polinom olarak bulunmuş ve pozitif olduğu aralıkları belirlemek için kök analizi yapılmıştır. Buradan hareketle

$$F(-1) = (\beta\tilde{u}\tilde{v})\delta^2 - (2r\tilde{u})\delta + 4 \quad (4.15)$$

polinomunda $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma)$ ifadesinin durumuna göre δ , (4.11) veya (4.13) olarak seçilirse $F(-1) = 0$ koşulu sağlanır.

i) $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) > 0$ ise $\delta = \delta_1$ iken $F(-1) = 0$ koşulu sağlanır.

ii) $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) = 0$ ise $\delta = \frac{1}{\beta - \gamma}$ iken $F(-1) = 0$ koşulu sağlanır.

iii) $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) < 0$ ise $F(-1) \neq 0$ dir.

B≠0 Koşulu:

$B = -iz(J) = -(2 - r\delta\tilde{u})$ olup $-iz(J) \neq 0 \Leftrightarrow \delta \neq \frac{2}{r\tilde{u}}$ dir.

B≠2 Koşulu:

Benzer şekilde $\delta \neq \frac{4}{r\tilde{u}}$ ise $B = -iz(J) \neq 2$ dir.

Burada $\delta = \delta_1$ seçilecektir çünkü $\delta = \frac{1}{\beta - \gamma}$ seçilirse

$$\frac{1}{\beta - \gamma} \neq \frac{4}{r\tilde{u}} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta - \gamma} \neq \frac{4\beta}{r\tilde{\gamma}} \Leftrightarrow r\tilde{\gamma} \neq 4\beta(\beta - \gamma) \Leftrightarrow \frac{r\tilde{\gamma}}{\beta} \neq 4(\beta - \gamma) \Leftrightarrow \frac{r\tilde{\gamma}}{\beta} - 4(\beta - \gamma) \neq 0$$

olur ki bu $\delta = \frac{1}{\beta - \gamma}$ olması ile çelişir. Sonuç olarak, (4.4) sisteminin parametreleri δ_1 (4.14) ile verilmek üzere

$$\frac{r\tilde{\gamma}}{\beta} - 4(\beta - \gamma) > 0 \text{ ve } \delta = \delta_1 \quad \ni \quad \delta \neq \frac{2}{r\tilde{u}}, \frac{4}{r\tilde{u}} \quad (4.16)$$

şartlarını sağlıyorsa (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında flip çatallanma ortaya çıkabilir.

Şimdi, Bölüm (2.1)'deki analizleri uygulayarak flip çatallanmanın varlığını analitik olarak göstereceğiz. Bu bölümde analiz $(\tilde{x}, \tilde{\delta}) = (0, 0)$ denge noktası baz alınarak yapıldığından çalışmaların bu teorik altyapı ile örtüşmesi ve işlemlerin kolaylaşması için (4.4) sisteminin denge noktasını orijine, çatallanma değerini sıfıra taşıyacağız. Bunun için öncelikle Taylor seri açılımını kullanacağız.

$$\begin{cases} f(u, v) = u + r\delta u(1 - u) - \delta uv \\ g(u, v) = v(1 - \delta\gamma) + \delta\beta uv \end{cases} \quad (4.17)$$

olmak üzere $f(u, v)$ ve $g(u, v)$ fonksiyonlarını (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında Taylor serisine açalım:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(\tilde{u}, \tilde{v}) + f_u(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u}) + f_v(\tilde{u}, \tilde{v})(v_t - \tilde{v}) \\ &+ \frac{1}{2}[f_{uu}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})^2 + 2f_{uv}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) + f_{vv}(\tilde{u}, \tilde{v})(v_t - \tilde{v})^2] \\ &+ \frac{1}{6}[f_{uuu}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})^3 + 3f_{uuv}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})^2(v_t - \tilde{v}) \\ &+ 3f_{uvv}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v})^2 + f_{vvv}(\tilde{u}, \tilde{v})(v_t - \tilde{v})^3] + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(u, v) &= g(\tilde{u}, \tilde{v}) + g_u(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u}) + g_v(\tilde{u}, \tilde{v})(v_t - \tilde{v}) \\ &+ \frac{1}{2}[g_{uu}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})^2 + 2g_{uv}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) + g_{vv}(\tilde{u}, \tilde{v})(v_t - \tilde{v})^2] \\ &+ \frac{1}{6}[g_{uuu}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})^3 + 3g_{uuv}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})^2(v_t - \tilde{v}) \\ &+ 3g_{uvv}(\tilde{u}, \tilde{v})(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v})^2 + g_{vvv}(\tilde{u}, \tilde{v})(v_t - \tilde{v})^3] + \dots \end{aligned}$$

olup burada $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta}$ ve $\tilde{v} = r \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)$ olmak üzere

- $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{u}$ ve $g(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}$
- $f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1 - r\delta\tilde{u}$
- $f_v(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\delta\tilde{u}$
- $f_{uu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = -2r\delta$, $f_{uv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\delta$ ve $f_{vv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$
- $f_{uuu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = f_{uuv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = f_{uvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = f_{vvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$
- Diğer yüksek mertebeden terimler sıfıra eşittir.
- $g_u(\tilde{u}, \tilde{v}) = \delta\beta\tilde{v}$
- $g_v(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1$
- $g_{uu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$, $g_{uv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \delta\beta$, $g_{vv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$
- $g_{uuu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_{uuv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_{uvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_{vvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$
- Diğer yüksek mertebeden terimler sıfıra eşittir.

Sonuç olarak f ve g fonksiyonlarının Taylor seri açılımlarını kullanarak (4.4) sistemini aşağıdaki şekilde ifade ederiz:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= \tilde{u} + (1 - r\delta\tilde{u})(u_t - \tilde{u}) - \delta\tilde{u}(v_t - \tilde{v}) - r\delta(u_t - \tilde{u})^2 - \delta(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) \\ v_{t+1} &= \tilde{v} + \delta\beta\tilde{v}(u_t - \tilde{u}) + (v_t - \tilde{v}) + \delta\beta(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Analize devam ederken çatallanma parametresi olarak δ seçilecek ve kararlılık yapısının değiştiği çatallanma değeri ise $\bar{\delta}$ ile gösterilecektir.

Şimdi denge noktasını ve çatallanma değerini aşağıdaki dönüşümleri tanımlayarak orijine taşıyalım:

$$\begin{cases} w_t = u_t - \tilde{u}, \\ z_t = v_t - \tilde{v}, \\ \tilde{\delta} = \delta - \bar{\delta}. \end{cases}$$

Öyleyse (4.18)'den

$$\begin{aligned}
w_{t+1} &= u_{t+1} - \tilde{u} \\
&= \tilde{u} + (1 - r(\tilde{\delta} + \bar{\delta})\tilde{u})(u_t - \tilde{u}) - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})\tilde{u}(v_t - \tilde{v}) - r(\tilde{\delta} + \bar{\delta})(u_t - \tilde{u})^2 \\
&\quad - (\tilde{\delta} + \bar{\delta})(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) - \tilde{u} \\
&= (1 - r\bar{\delta}\tilde{u})w_t - \bar{\delta}\tilde{u}z_t - r\tilde{u}\tilde{\delta}w_t - \tilde{u}\tilde{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\tilde{\delta}w_t^2 - \tilde{\delta}w_tz_t \\
z_{t+1} &= v_{t+1} - \tilde{v} \\
&= \tilde{v} + (\tilde{\delta} + \bar{\delta})\beta\tilde{v}(u_t - \tilde{u}) + (v_t - \tilde{v}) + (\tilde{\delta} + \bar{\delta})\beta(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) - \tilde{v} \\
&= \bar{\delta}\beta\tilde{v}w_t + z_t + \beta\tilde{v}\tilde{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\tilde{\delta}w_tz_t
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
f_1(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= -r\tilde{u}\tilde{\delta}w_t - \tilde{u}\tilde{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\tilde{\delta}w_t^2 - \tilde{\delta}w_tz_t, \\
f_2(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= \beta\tilde{v}\tilde{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\tilde{\delta}w_tz_t.
\end{aligned}$$

olmak üzere (4.18) sistemi yeni değişkenler ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{pmatrix} w_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\tilde{u} & -\bar{\delta}\tilde{u} \\ \bar{\delta}\beta\tilde{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Burada, (4.16) koşullarının sağlandığı göz önüne alınarak $\bar{\delta} = \delta_1$ seçilecek ve analizin devamında

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

formuna ulaşmak için (4.19) sisteminin Jakobiyen matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri sütun kabul eden T dönüşüm matrisi inşa edilecektir. Dikkat edilirse $\delta = \bar{\delta}$ iken (4.4) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) daki Jakobiyen matrisi (4.7) ile (4.19) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) daki Jakobiyen matrisi aynıdır. Dolayısıyla (4.9a) ve (4.9b) ile verilen özdeğerlerde $\delta = \bar{\delta}$ seçilirse (4.16) koşulları altında $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3 - r\bar{\delta}\tilde{u} \ni |\lambda_2| \neq 1$ bulunur. Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri hesaplayacağız.

$$J = \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\tilde{u} & -\bar{\delta}\tilde{u} \\ \bar{\delta}\beta\tilde{v} & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\lambda_1 = -1$ özdeğeri için $(J - \lambda_1 I)u = 0$ eşitliğini sağlayan u vektörünü bulacağız. Öyleyse

$$\begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\bar{u} - (-1) & -\bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sisteminden

$$(2 - r\bar{\delta}\bar{u})u_1 + (-\bar{\delta}\bar{u})u_2 = 0$$

$$(\bar{\delta}\beta\bar{v})u_1 + 2u_2 = 0$$

elde edilir. Burada ikinci denklemden

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

seçilebilir. İlk denklemden yerine yazılırsa ($\bar{\delta} = \delta_1$ için bakınız denklemin (4.14))

$$\begin{aligned} (2 - r\bar{\delta}\bar{u})(-2) + (-\bar{\delta}\bar{u})\bar{\delta}\beta\bar{v} &= -4 + 2r\bar{\delta}\bar{u} - \bar{\delta}^2\beta\bar{u}\bar{v} \\ &= -4 + \bar{\delta}\frac{2r\gamma}{\beta} - \bar{\delta}\left(\frac{r\gamma - \beta\sqrt{A}}{\beta}\right) \\ &= -4 + \frac{r^2\gamma^2 - r^2\gamma^2 + 4r\gamma\beta(\beta - \gamma)}{r\gamma\beta(\beta - \gamma)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.21), $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Ayrıca (4.22) den

$$\bar{\delta}^2\beta\bar{u}\bar{v} = 2r\bar{\delta}\bar{u} - 4 \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde $\lambda_2 = 3 - r\bar{\delta}\bar{u}$ için $(J - \lambda_2 I)v = 0$ eşitliğini sağlayan v vektörünü bulacağız. Benzer şekilde

$$\begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\bar{u} - (3 - r\bar{\delta}\bar{u}) & -\bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 - (3 - r\bar{\delta}\bar{u}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sisteminden

$$-2v_1 - \bar{\delta}\bar{u}v_2 = 0$$

$$(\bar{\delta}\beta\bar{v})v_1 + (-2 + r\bar{\delta}\bar{u})v_2 = 0$$

denklemleri elde edilir. İlk denklemden

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta}\bar{u} \\ -2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

seçilebilir. İkinci denklemden yerine yazarsak ve (4.23) eşitliğini kullanırsak

$$(\bar{\delta}\beta\bar{v})(\bar{\delta}\bar{u}) + (-2 + r\bar{\delta}\bar{u})(-2) = \bar{\delta}^2\beta\bar{u}\bar{v} + 4 - 2r\bar{\delta}\bar{u} = 2r\bar{\delta}\bar{u} - 4 + 4 - 2r\bar{\delta}\bar{u} = 0$$

elde edilir ve dolayısıyla (4.24), $\lambda_2 = 3 - r\bar{\delta}\bar{u}$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

Bu özvektörleri sütun kabul eden matris

$$T = \begin{pmatrix} -2 & \bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & -2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

dönüşümünü yaparak hedeflenen forma ulaşacağız:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} w_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = T^{-1} \left[J \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= T^{-1} J \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + T^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = T^{-1} J T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + T^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Burada T matrisinin tersi

$$\det(T) = 4 - \bar{\delta}^2\beta\bar{u}\bar{v} = 4 - (2r\bar{\delta}\bar{u} - 4) = 8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}$$

olmak üzere

$$T^{-1} = \frac{1}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} \begin{pmatrix} -2 & -\bar{\delta}\bar{u} \\ -\bar{\delta}\beta\bar{v} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} & \frac{-\bar{\delta}\bar{u}}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} \\ \frac{-\bar{\delta}\beta\bar{v}}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} & \frac{-2}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} T^{-1}JT &= \begin{pmatrix} \frac{-2}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} & \frac{-\bar{\delta}\bar{u}}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} \\ \frac{-\bar{\delta}\beta\bar{v}}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} & \frac{-2}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\bar{u} & -\bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 - r\bar{\delta}\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğu için (4.26) aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Burada

$$\begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t) \\ f_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix}$$

ile hesaplanır. Daha kolay işlem yapabilmek için

$$a_1 = \frac{-2}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}}, \quad a_2 = \frac{-\bar{\delta}\bar{u}}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}}, \quad a_3 = \frac{-\bar{\delta}\beta\bar{v}}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}}, \quad a_4 = \frac{-2}{8 - 2r\bar{\delta}\bar{u}}$$

olmak üzere

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

olarak alınacaktır. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\bar{u}\bar{\delta}w_t - \bar{u}\bar{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t \\ \beta\bar{v}\bar{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\bar{\delta}w_tz_t \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

fonksiyonlarını X_t, Y_t cinsinden elde edebilmek için w_t^2, w_tz_t ifadelerini X_t, Y_t cinsinden yazalım. (4.25) den

$$\begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\bar{u} & -\bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X_t + \bar{\delta}\bar{u}Y_t \\ \bar{\delta}\beta\bar{v}X_t - 2Y_t \end{pmatrix}$$

olduğu için

$$w_t^2 = (-2X_t + \bar{\delta}\bar{u}Y_t)^2 = 4X_t^2 - 4\bar{\delta}\bar{u}X_tY_t + \bar{\delta}^2\bar{u}^2Y_t^2$$

$$w_tz_t = (-2X_t + \bar{\delta}\bar{u}Y_t)(\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t - 2Y_t) = -2\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t^2 + 2r\bar{\delta}\bar{u}X_tY_t - 2\bar{\delta}\bar{u}Y_t^2$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler (4.28)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g_1 &= (-a_1r\bar{u} + a_2\beta\bar{v})\bar{\delta}w_t - a_1\bar{u}\bar{\delta}z_t - a_1r\bar{\delta}w_t^2 + (-a_1\bar{\delta} + a_2\bar{\delta}\beta)w_tz_t - a_1r\bar{\delta}w_t^2 \\ &\quad + (-a_1 + a_2\beta)\bar{\delta}w_tz_t \\ &= (-a_1r\bar{u} + a_2\beta\bar{v})\bar{\delta}(-2X_t + \bar{\delta}\bar{u}Y_t) - a_1\bar{u}\bar{\delta}(\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t - 2Y_t) - a_1r\bar{\delta}(4X_t^2 - 4\bar{\delta}\bar{u}X_tY_t + \bar{\delta}^2\bar{u}^2Y_t^2) \\ &\quad + (-a_1\bar{\delta} + a_2\bar{\delta}\beta) - 2\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t^2 + 2r\bar{\delta}\bar{u}X_tY_t - 2\bar{\delta}\bar{u}Y_t^2 - a_1r\bar{\delta}(4X_t^2 - 4\bar{\delta}\bar{u}X_tY_t + \bar{\delta}^2\bar{u}^2Y_t^2) \\ &\quad + (-a_1 + a_2\beta)\bar{\delta} - 2\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t^2 + 2r\bar{\delta}\bar{u}X_tY_t - 2\bar{\delta}\bar{u}Y_t^2 \\ &= X_t\bar{\delta}[-2(-a_1r\bar{u} + a_2\beta\bar{v}) - a_1\bar{\delta}\beta\bar{u}\bar{v}] + Y_t\bar{\delta}[\bar{\delta}\bar{u}(-a_1r\bar{u} + a_2\beta\bar{v}) + 2a_1\bar{u}] \\ &\quad + X_t^2[-4a_1r\bar{\delta} - 2\bar{\delta}\beta\bar{v}(-a_1\bar{\delta} + a_2\bar{\delta}\beta)] + X_tY_t[4a_1r\bar{\delta}^2\bar{u} + 2r\bar{\delta}\bar{u}(-a_1\bar{\delta} + a_2\bar{\delta}\beta)] \\ &\quad + Y_t^2[-a_1r\bar{\delta}^3\bar{u}^2 - 2\bar{\delta}\bar{u}(-a_1\bar{\delta} + a_2\bar{\delta}\beta)] + X_t^2\bar{\delta}[-4a_1r - 2\bar{\delta}\beta\bar{v}(-a_1 + a_2\beta)] \\ &\quad + X_tY_t\bar{\delta}[4a_1r\bar{\delta}\bar{u} + 2r\bar{\delta}\bar{u}(-a_1 + a_2\beta)] + Y_t^2\bar{\delta}[-a_1r\bar{\delta}^2\bar{u}^2 - 2\bar{\delta}\bar{u}(-a_1 + a_2\beta)] \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
t_1 &= -4a_1 r \bar{\delta} - 2\bar{\delta} \beta \bar{v} (-a_1 \bar{\delta} + a_2 \bar{\delta} \beta) \\
t_2 &= 4\bar{\delta}^2 \bar{u} a_1 r + 2r \bar{\delta} \bar{u} (-a_1 \bar{\delta} + a_2 \bar{\delta} \beta) \\
t_3 &= -a_1 r \bar{\delta}^3 \bar{u}^2 - 2\bar{\delta} \bar{u} (-a_1 \bar{\delta} + a_2 \bar{\delta} \beta) \\
t_4 &= -2(-a_1 r \bar{u} + a_2 \beta \bar{v}) - a_1 \bar{\delta} \beta \bar{u} \bar{v} \\
t_5 &= \bar{\delta} \bar{u} (-a_1 r \bar{u} + a_2 \beta \bar{v}) + 2a_1 \bar{u} \\
t_6 &= -4a_1 r - 2\bar{\delta} \beta \bar{v} (-a_1 + a_2 \beta) \\
t_7 &= 4a_1 r \bar{\delta} \bar{u} + 2r \bar{\delta} \bar{u} (-a_1 + a_2 \beta) \\
t_8 &= -a_1 r \bar{\delta}^2 \bar{u}^2 - 2\bar{\delta} \bar{u} (-a_1 + a_2 \beta)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$g_1 = t_1 X_t^2 + t_2 X_t Y_t + t_3 Y_t^2 + t_4 X_t \bar{\delta} + t_5 Y_t \bar{\delta} + t_6 X_t^2 \bar{\delta} + t_7 X_t Y_t \bar{\delta} + t_8 Y_t^2 \bar{\delta} \quad (4.29)$$

şeklinde ifade edilebilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
g_2 &= (-a_3 r \bar{u} + a_4 \beta \bar{v}) \bar{\delta} w_t - a_3 \bar{u} \bar{\delta} z_t - a_3 r \bar{\delta} w_t^2 + (-a_3 \bar{\delta} + a_4 \bar{\delta} \beta) w_t z_t - a_3 r \bar{\delta} w_t^2 \\
&\quad + (-a_3 + a_4 \beta) \bar{\delta} w_t z_t \\
&= X_t \bar{\delta} [-2(-a_3 r \bar{u} + a_4 \beta \bar{v}) - a_3 \bar{\delta} \beta \bar{u} \bar{v}] + Y_t \bar{\delta} [\bar{\delta} \bar{u} (-a_3 r \bar{u} + a_4 \beta \bar{v}) + 2a_3 \bar{u}] \\
&\quad + X_t^2 [-4a_3 r \bar{\delta} - 2\bar{\delta} \beta \bar{v} (-a_3 \bar{\delta} + a_4 \bar{\delta} \beta)] + X_t Y_t [4a_3 r \bar{\delta}^2 \bar{u} + 2r \bar{\delta} \bar{u} (-a_3 \bar{\delta} + a_4 \bar{\delta} \beta)] \\
&\quad + Y_t^2 [-a_3 r \bar{\delta}^3 \bar{u}^2 - 2\bar{\delta} \bar{u} (-a_3 \bar{\delta} + a_4 \bar{\delta} \beta)] + X_t^2 \bar{\delta} [-4a_3 r - 2\bar{\delta} \beta \bar{v} (-a_3 + a_4 \beta)] \\
&\quad + X_t Y_t \bar{\delta} [4a_3 r \bar{\delta} \bar{u} + 2r \bar{\delta} \bar{u} (-a_3 + a_4 \beta)] + Y_t^2 \bar{\delta} [-a_3 r \bar{\delta}^2 \bar{u}^2 - 2\bar{\delta} \bar{u} (-a_3 + a_4 \beta)]
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
m_1 &= -4a_3 r \bar{\delta} - 2\bar{\delta} \beta \bar{v} (-a_3 \bar{\delta} + a_4 \bar{\delta} \beta) \\
m_2 &= 4\bar{\delta}^2 \bar{u} a_3 r + 2r \bar{\delta} \bar{u} (-a_3 \bar{\delta} + a_4 \bar{\delta} \beta) \\
m_3 &= -a_3 r \bar{\delta}^3 \bar{u}^2 - 2\bar{\delta} \bar{u} (-a_3 \bar{\delta} + a_4 \bar{\delta} \beta) \\
m_4 &= -2(-a_3 r \bar{u} + a_4 \beta \bar{v}) - a_3 \bar{\delta} \beta \bar{u} \bar{v} \\
m_5 &= \bar{\delta} \bar{u} (-a_3 r \bar{u} + a_4 \beta \bar{v}) + 2a_3 \bar{u} \\
m_6 &= -4a_3 r - 2\bar{\delta} \beta \bar{v} (-a_3 + a_4 \beta) \\
m_7 &= 4a_3 r \bar{\delta} \bar{u} + 2r \bar{\delta} \bar{u} (-a_3 + a_4 \beta) \\
m_8 &= -a_3 r \bar{\delta}^2 \bar{u}^2 - 2\bar{\delta} \bar{u} (-a_3 + a_4 \beta)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$g_2 = m_1 X_t^2 + m_2 X_t Y_t + m_3 Y_t^2 + m_4 X_t \tilde{\delta} + m_5 Y_t \tilde{\delta} + m_6 X_t^2 \tilde{\delta} + m_7 X_t Y_t \tilde{\delta} + m_8 Y_t^2 \tilde{\delta} \quad (4.30)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Flip çatallanma analizine devam ederken (4.4) sistemini istenen forma dönüştürdüğümüz için artık Merkez Manifold Teoremi'ni kullanarak boyut indirgeyebiliriz. Öncelikle (4.27) sistemine karşılık gelen merkez manifold

$$W^c(0,0,0) = \{(X_t, Y_t, \tilde{\delta}) \in \mathbb{R}^3 : Y_t = h(X_t) = h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta} + h_3 \tilde{\delta}^2\} \quad (4.31)$$

olarak tanımlanmak üzere h_1, h_2, h_3 katsayılarını hesaplayalım.

$$X_{t+1} = \lambda_1 X_t + g_1(X_t, Y_t)$$

$$Y_{t+1} = \lambda_2 Y_t + g_2(X_t, Y_t)$$

olduğu için

$$h(X_{t+1}) = Y_{t+1} = \lambda_2 Y_t + g_2(X_t, Y_t) \Rightarrow h(X_{t+1}) = \lambda_2 h(X_t) + g_2(X_t, h(X_t))$$

olarak yazılır. Buradan $\lambda_1 = -1$ olduğu için

$$h(\lambda_1 X_t + g_1(X_t, Y_t)) = \lambda_2 h(X_t) + g_2(X_t, h(X_t))$$

ve buradan

$$h(-X_t + g_1(X_t, h(X_t))) = \lambda_2 h(X_t) + g_2(X_t, h(X_t))$$

elde edilir. Bu eşitlikten N fonksiyonu

$$N(h(X_t)) = h(-X_t + g_1(X_t, h(X_t))) - \lambda_2 h(X_t) - g_2(X_t, h(X_t)) = 0 \quad (4.32)$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} N(h(X_t)) &= h_1(-X_t + g_1(X_t, h(X_t)))^2 + h_2(-X_t + g_1(X_t, h(X_t)))\tilde{\delta} + h_3\tilde{\delta}^2 \\ &\quad - \lambda_2 h(X_t) - g_2(X_t, h(X_t)) \\ &= h_1(X_t^2 - 2X_t g_1(X_t, h(X_t)) + g_1^2(X_t, h(X_t))) \\ &\quad + h_2(-X_t + g_1(X_t, h(X_t)))\tilde{\delta} + h_3\tilde{\delta}^2 - \lambda_2(h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta} + h_3 \tilde{\delta}^2) \\ &\quad - g_2(X_t, h(X_t)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

olur. Yukarıdaki eşitlik, (4.29) ve (4.30) ile verilen g_1 ve g_2 fonksiyonları kullanılarak h_1, h_2, h_3 aşağıdaki gibi hesaplanır:

X_t^2 li terimlerin katsayılarının toplamı sıfıra eşitlenirse

$$h_1 X_t^2 - \lambda_2 h_1 X_t^2 - m_1 X_t^2 = X_t^2 (h_1 - \lambda_2 h_1 - m_1) = X_t^2 [h_1(1 - \lambda_2) - m_1] = 0$$

elde edilir ve

$$h_1 = \frac{m_1}{1 - \lambda_2}$$

olarak bulunur. Aynı işlemi $X_t \tilde{\delta}$ lı terimler için yaptığımızda

$$-h_2 X_t \tilde{\delta} - \lambda_2 h_2 X_t \tilde{\delta} - m_4 X_t \tilde{\delta} = X_t \tilde{\delta} (-h_2 - \lambda_2 h_2 - m_4) = X_t \tilde{\delta} [-h_2(1 + \lambda_2) - m_4] = 0$$

elde edilir ve

$$h_2 = \frac{-m_4}{1 + \lambda_2}$$

olur. $\tilde{\delta}^2$ lı terimler için ise

$$h_3 \tilde{\delta}^2 - \lambda_2 h_3 \tilde{\delta}^2 = \tilde{\delta}^2 h_3 (1 - \lambda_2) = 0$$

olduğundan

$$h_3 = 0$$

bulunur. Burada $Y_t = h(X_t) = h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta}$ elde edilir ve (4.27) sistemi

$$X_{t+1} = -X_t + g_1(X_t, h(X_t)) \quad (4.34)$$

bir boyutlu sistemine indirgenir. $g_1(X_t, h(X_t))$ fonksiyonu ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} g_1(X_t, h(X_t)) &= t_1 X_t^2 + t_2 X_t h(X_t) + t_3 h^2(X_t) + t_4 X_t \tilde{\delta} + t_5 h(X_t) \tilde{\delta} + t_6 X_t^2 \tilde{\delta} \\ &\quad + t_7 X_t h(X_t) \tilde{\delta} + t_8 h^2(X_t) \tilde{\delta} \\ &= t_1 X_t^2 + t_2 X_t (h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta}) + t_3 (h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta})^2 + t_4 X_t \tilde{\delta} \\ &\quad + t_5 (h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta}) \tilde{\delta} + t_6 X_t^2 \tilde{\delta} + t_7 X_t (h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta}) \tilde{\delta} \\ &\quad + t_8 (h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta})^2 \tilde{\delta} \\ &= t_1 X_t^2 + t_2 h_1 X_t^3 + (t_2 h_2 + t_5 h_1 + t_6) X_t^2 \tilde{\delta} + t_3 h_1^2 X_t^4 + t_4 X_t \tilde{\delta} + t_5 h_2 X_t \tilde{\delta}^2 \\ &\quad + (t_3 h_2^2 + t_7 h_2) X_t^2 \tilde{\delta}^2 + (2t_3 h_1 h_2 + t_7 h_1) X_t^3 \tilde{\delta} + t_8 h_1^2 X_t^4 \tilde{\delta} + 2t_8 h_1 h_2 X_t^3 \tilde{\delta}^2 \\ &\quad + t_8 h_2^2 X_t^2 \tilde{\delta}^3. \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
X_{t+1} &= f(X_t, \tilde{\delta}) \\
&= -X_t + g_1(X_t, h(X_t)) \\
&= -X_t + t_1 X_t^2 + t_2 h_1 X_t^3 + (t_2 h_2 + t_5 h_1 + t_6) X_t^2 \tilde{\delta} + t_3 h_1^2 X_t^4 + t_4 X_t \tilde{\delta} + t_5 h_2 X_t \tilde{\delta}^2 \\
&\quad + (t_3 h_2^2 + t_7 h_2) X_t^2 \tilde{\delta}^2 + (2t_3 h_1 h_2 + t_7 h_1) X_t^3 \tilde{\delta} + t_8 h_1^2 X_t^4 \tilde{\delta} + 2t_8 h_1 h_2 X_t^3 \tilde{\delta}^2 \\
&\quad + t_8 h_2^2 X_t^2 \tilde{\delta}^3
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Şimdi flip çatallanma teoremini kullanabilmek için gerekli türevleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
f_X &= -1 + 2t_1 X_t + 3t_2 h_1 X_t^2 + 2(t_2 h_2 + t_5 h_1 + t_6) X_t \tilde{\delta} + 4t_3 h_1^2 X_t^3 + t_4 \tilde{\delta} + t_5 h_2 \tilde{\delta}^2 \\
&\quad + 2(t_3 h_2^2 + t_7 h_2) X_t \tilde{\delta}^2 + 3(2t_3 h_1 h_2 + t_7 h_1) X_t^2 \tilde{\delta} + 4t_8 h_1^2 X_t^3 \tilde{\delta} + 6t_8 h_1 h_2 X_t^2 \tilde{\delta}^2 \\
&\quad + 2t_8 h_2^2 X_t \tilde{\delta}^3 \\
f_{XX} &= 2t_1 + 6t_2 h_1 X_t + 2(t_2 h_2 + t_5 h_1 + t_6) \tilde{\delta} + 12t_3 h_1^2 X_t^2 + 2(t_3 h_2^2 + t_7 h_2) \tilde{\delta}^2 \\
&\quad + 6(2t_3 h_1 h_2 + t_7 h_1) X_t \tilde{\delta} + 12t_8 h_1^2 X_t^2 \tilde{\delta} + 12t_8 h_1 h_2 X_t \tilde{\delta}^2 + 2t_8 h_2^2 \tilde{\delta}^3 \\
f_{XXX} &= 6t_2 h_1 + 24t_3 h_1^2 X_t + 6(2t_3 h_1 h_2 + t_7 h_1) \tilde{\delta} + 24t_8 h_1^2 X_t \tilde{\delta} + 12t_8 h_1 h_2 \tilde{\delta}^2 \\
f_{X\tilde{\delta}} &= 2(t_2 h_2 + t_5 h_1 + t_6) X_t + t_4 + 2t_5 h_2 \tilde{\delta} + 4(t_3 h_2^2 + t_7 h_2) X_t \tilde{\delta} \\
&\quad + 3(2t_3 h_1 h_2 + t_7 h_1) X_t^2 + 4t_8 h_1^2 X_t^3 + 12t_8 h_1 h_2 X_t^2 \tilde{\delta} + 6t_8 h_2^2 X_t \tilde{\delta}^2.
\end{aligned}$$

Bu türevlerin $X_t = 0$ ve $\tilde{\delta} = 0$ iken ki değerleri

- $f_X(0,0) = -1$
- $f_{XX}(0,0) = 2t_1$
- $f_{XXX}(0,0) = 6t_2 h_1$
- $f_{X\tilde{\delta}}(0,0) = t_4$

olduğundan

$$\frac{1}{2}(f_{XX}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0,0) = \frac{1}{2}(2t_1)^2 + \frac{1}{3}(6t_2 h_1) = 2t_1^2 + 2t_2 h_1 = 2(t_1^2 + t_2 h_1)$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamalardan sonra aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4. *Eğer*

$$F0) \frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) > 0 \text{ ve } \delta = \delta_1 \Rightarrow \delta \neq \frac{2}{r\tilde{u}}, \frac{4}{r\tilde{u}}$$

$$F1) 2(t_1^2 + t_2 h_1) \neq 0 \text{ ve}$$

$$F2) t_4 \neq 0$$

şartları sağlanıyorsa (4.4) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında $\delta = \delta_1$ iken (Bakınız: denklem (4.14)) Flip çatallanma meydana gelir.

4.2.4 Neimark-Sacker çatallanma analizi

$F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C \ni B, C \in \mathbb{R}$, sistemin denge noktasındaki Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinomu olmak üzere Teorem (6.1)'in üçüncü maddesinden

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, |\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = 1 \Leftrightarrow B^2 - 4C < 0 \text{ ve } C = 1$$

ise Neimark-Sacker tipi çatallanmanın ortaya çıkabileceğini biliyoruz. Burada $B = -iz(J)$, $C = \det(J)$ dir. Çatallanma analizine, çatallanmanın meydana gelebileceği bu koşulları belirleyerek başlayacağız.

$B^2 - 4C < 0$ Koşulu:

Burada

$$\begin{aligned} B^2 - 4C &= (2 - r\delta\tilde{u})^2 - 4(1 - r\delta\tilde{u} + \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v}) \\ &= 4 - 4r\delta\tilde{u} + \delta^2 r^2 \tilde{u}^2 - 4 + 4r\delta\tilde{u} - 4\delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} \\ &= \delta^2 r^2 \tilde{u}^2 - 4\delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} \end{aligned}$$

olur ve

$$\delta^2 r^2 \tilde{u}^2 - 4\delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} < 0 \Leftrightarrow \delta^2 (r^2 \tilde{u}^2 - 4\beta\tilde{u}\tilde{v}) < 0 \Leftrightarrow \frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) < 0$$

elde edilir.

$C = 1$ Koşulu:

$$C = \det(J) = 1 - r\delta\tilde{u} + \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} = 1 \Leftrightarrow \delta^2\beta\tilde{u}\tilde{v} = r\delta\tilde{u} \Leftrightarrow \delta = \frac{r}{\beta\tilde{v}} = \frac{1}{\beta - \gamma}$$

olarak hesaplanır.

Sonuç olarak eğer

$$\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) < 0 \quad \text{ve} \quad \delta = \frac{1}{\beta - \gamma} \quad (4.35)$$

ise (4.4) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkabilir. Şimdi bu denge noktasına Bölüm (2.2)'de yapılan analizler uygulanarak Neimark-Sacker çatallanmanın varlığı analitik olarak incelenecektir.

Eğer (4.35) koşulları sağlanıyorsa (4.9a) ve (4.9b) deki özdeğerler $\bar{\delta} = \frac{1}{\beta - \gamma}$ olduğu için

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \underbrace{\left(1 - \frac{r\gamma}{2\beta(\beta - \gamma)}\right)}_{\mu} \mp i \underbrace{\left(\frac{1}{2(\beta - \gamma)} \sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(4(\beta - \gamma) - \frac{r\gamma}{\beta}\right)}\right)}_{\omega} \\ &= \mu \mp i\omega \end{aligned} \quad (4.36)$$

olup $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &= \sqrt{\left(1 - \frac{r\gamma}{2\beta(\beta - \gamma)}\right)^2 + \left(\frac{1}{2(\beta - \gamma)} \sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(4(\beta - \gamma) - \frac{r\gamma}{\beta}\right)}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sağlanır. Şimdi Neimark-Sacker çatallanma teoreminin şartlarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol edeceğiz.

Özdeğerlerin boyu

$$\begin{aligned} r(\delta) &= \sqrt{\mu(\delta)^2 + \omega(\delta)^2} \\ &= \left(1 - \frac{r\gamma}{\beta}\delta + \frac{\delta^2 r\gamma}{\beta}(\beta - \gamma)\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

olup δ ya göre türevi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$r'(\delta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r\gamma}{\beta}\delta + \frac{\delta^2 r\gamma}{\beta}(\beta - \gamma)\right)^{-1/2} \left(-\frac{r\gamma}{\beta} + \frac{2\delta r\gamma}{\beta}(\beta - \gamma)\right). \quad (4.38)$$

Buradan

$$r'(\bar{\delta}) = r'\left(\frac{1}{\beta - \gamma}\right) = \frac{r\gamma}{2\beta} \quad (4.39)$$

bulunur. $r, \gamma, \beta > 0$ olduğu için $r'\left(\frac{1}{\beta - \gamma}\right) \neq 0$ olur ve Bölüm (2.2)'deki Teorem (2.3)'den *NSI* koşulu sağlanır.

NS2) koşulunu kontrol edelim:

$$\theta(r(\bar{\delta})) = \text{Arctan} \left(\frac{\omega(r(\bar{\delta}))}{\mu(r(\bar{\delta}))} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{\frac{\bar{\delta}}{2} \sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(4(\beta - \gamma) - \frac{r\gamma}{\beta} \right)}}{1 - \frac{r\gamma}{2\beta} \bar{\delta}} \right)$$

ve

$$\theta \left(\frac{1}{\beta - \gamma} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{\frac{1}{2(\beta - \gamma)} \sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(4(\beta - \gamma) - \frac{r\gamma}{\beta} \right)}}{1 - \frac{r\gamma}{2\beta} \frac{1}{\beta - \gamma}} \right) = \theta_0$$

olup orijin komşuluğunda çalıştığımızdan $k = 1, 2, 3, 4$ için

$$[\lambda_{1,2}(\bar{\delta})]^k = e^{\mp ik\theta_0} \neq 1 \Leftrightarrow \theta_0 \neq 0 \quad (4.40)$$

olup $\theta_0 \neq 0$ olduğundan *NS2*) şartı sağlanır. Sonuç olarak Neimark-Sacker çatallanma mevcuttur.

Şimdi çatallanmanın yön analizini yapacağız. Bölüm (2.2)'deki analizden hareketle denge noktası ve çatallanma değerini orijine taşıdığımızda (4.19) ile verilen

$$\begin{pmatrix} w_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\bar{u} & -\bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

sistemi elde edilir ve yukarıdaki ifadede

$$f_1(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) = -r\bar{u}\bar{\delta}w_t - \bar{u}\bar{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t$$

$$f_2(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) = \beta\bar{v}\bar{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\bar{\delta}w_tz_t.$$

dir. Burada

$$\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) < 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\delta} = \frac{1}{\beta - \gamma}$$

seçilmesiyle

$$J(\bar{\delta}) = \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\bar{u} & -\bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

matrisinin özdeğerlerinin $\lambda_{1,2} = \mu \mp i\omega$ olduğunu göstermiştik.

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

dönüşümünü yaparak sistemi

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

formuna indirgeyebilmek için $\lambda_1 = \mu - i\omega$ özdeğerine karşılık gelen özvektörün reel ve imajiner kısımlarını sütun kabul eden T dönüşüm matrisini inşa edeceğiz. Bunun için $(J - \lambda_1 I)u = 0$ eşitliğini sağlayan u vektörünü bulacağız.

$$\begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\tilde{u} - (\mu - i\omega) & -\bar{\delta}\tilde{u} \\ \bar{\delta}\beta\tilde{v} & 1 - (\mu - i\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + ib \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemdeki ikinci denklemden

$$ra + irb + 1 - \mu + i\omega = 0 \Leftrightarrow ra + 1 - \mu = 0 \quad \text{ve} \quad rb + \omega = 0$$

olur ve

$$a = \frac{\mu - 1}{r}, \quad b = -\frac{\omega}{r}$$

seçilebilir. İlk denklemde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} & (1 - r\bar{\delta}\tilde{u} - \mu + i\omega) \left(\frac{\mu - 1}{r} - i\frac{\omega}{r} \right) - \bar{\delta}\tilde{u} \\ &= \left[\left(-\frac{r\gamma}{2\beta(\beta - \gamma)} \right) \left(-\frac{\gamma}{2\beta(\beta - \gamma)} \right) - \frac{r\gamma^2}{4\beta^2(\beta - \gamma)^2} \right] + i\frac{\omega}{r} \left[\frac{r\gamma}{2\beta(\beta - \gamma)} - \frac{r\gamma}{2\beta(\beta - \gamma)} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\begin{pmatrix} \frac{\mu - 1}{r} - i\frac{\omega}{r} \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektördür ve T dönüşüm matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\mu - 1}{r} & -\frac{\omega}{r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4.43) dönüşümü kullanıldığında X_t ve Y_t ye bağlı sistem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} w_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = T^{-1} \left[J \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= T^{-1} J \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + T^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = T^{-1} J T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + T^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

olarak elde edilir. T matrisinin tersi

$$\det(T) = \frac{\omega}{r}$$

olmak üzere

$$T^{-1} = \frac{r}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{r} \\ -1 & \frac{\mu-1}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-r}{\omega} & \frac{\mu-1}{\omega} \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$T^{-1}JT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-r}{\omega} & \frac{\mu-1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-r\bar{\delta}\bar{u} & -\bar{\delta}\bar{u} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{r} & -\frac{\omega}{r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

olup (4.41) sistemine denk olan

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t) \end{pmatrix}$$

sistemini elde ederiz. Burada

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t) \\ f_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-r}{\omega} & \frac{\mu-1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t) \\ f_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix}$$

ile hesaplanır. Bu fonksiyonları X_t, Y_t cinsinden elde edebilmek için w_t, z_t ifadelerini X_t, Y_t cinsinden yazalım. (4.43)'den

$$\begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{r} & -\frac{\omega}{r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{r}X_t - \frac{\omega}{r}Y_t \\ X_t \end{pmatrix}$$

dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f_2(X_t, Y_t) \\ &= \bar{\delta}\beta w_t z_t \\ &= \bar{\delta}\beta \left(\frac{\mu-1}{r}X_t - \frac{\omega}{r}Y_t \right) X_t \\ &= c_1 X_t^2 + c_2 X_t Y_t \end{aligned} \tag{4.46}$$

şeklinde ifade edilebilir ve bu ifadede

$$c_1 = \frac{\bar{\delta}\beta(\mu-1)}{r} \quad (4.47a)$$

$$c_2 = \frac{-\bar{\delta}\beta\omega}{r} \quad (4.47b)$$

dir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \frac{-r}{\omega} f_1(X_t, Y_t) + \frac{(\mu-1)}{\omega} f_2(X_t, Y_t) \\ &= \frac{-r}{\omega} (-r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_t z_t) + \frac{(\mu-1)}{\omega} (\bar{\delta}\beta w_t z_t) \\ &= \left(\frac{r^2\bar{\delta}}{\omega}\right) w_t^2 + \left(\frac{r\bar{\delta} + (\mu-1)\bar{\delta}\beta}{\omega}\right) w_t z_t \\ &= \left(\frac{r^2\bar{\delta}}{\omega}\right) \left(\frac{\mu-1}{r}X_t - \frac{\omega}{r}Y_t\right)^2 + \left(\frac{r\bar{\delta} + (\mu-1)\bar{\delta}\beta}{\omega}\right) \left(\frac{\mu-1}{r}X_t - \frac{\omega}{r}Y_t\right) X_t \quad (4.48) \\ &= \left(\frac{(\mu-1)^2\bar{\delta}}{\omega} + \left(\frac{\mu-1}{r}\right) \left(\frac{r\bar{\delta} + (\mu-1)\bar{\delta}\beta}{\omega}\right)\right) X_t^2 \\ &\quad + \left(-2(\mu-1)\bar{\delta} - \frac{\omega}{r} \left(\frac{r\bar{\delta} + (\mu-1)\bar{\delta}\beta}{\omega}\right)\right) X_t Y_t + \omega\bar{\delta}Y_t^2 \\ &= c_3 X_t^2 + c_4 X_t Y_t + c_5 Y_t^2 \end{aligned}$$

olarak yazılır ve burada

$$c_3 = \frac{(\mu-1)^2\bar{\delta}}{\omega} + \left(\frac{\mu-1}{r}\right) \left(\frac{r\bar{\delta} + (\mu-1)\bar{\delta}\beta}{\omega}\right) \quad (4.49a)$$

$$c_4 = -2(\mu-1)\bar{\delta} - \frac{\omega}{r} \left(\frac{r\bar{\delta} + (\mu-1)\bar{\delta}\beta}{\omega}\right) \quad (4.49b)$$

$$c_5 = \omega\bar{\delta} \quad (4.49c)$$

ile verilir. Bölüm (2.2)'de yapılan Neimark-Sacker çatallanma analizine göre sıradaki

amacımız p ve q özvektörlerini bulmaktır. Burada $A = \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\tilde{u} & -\bar{\delta}\tilde{u} \\ r & 1 \end{pmatrix}$

Jakobiyen matris olmak üzere $\lambda_1 = \mu + i\omega$ özdeğerine karşılık gelen özvektör, daha

önce T matrisi hesaplanırken bulunan $\begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{r} - i\frac{\omega}{r} \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörünün eşleniği olan

$$q = \begin{pmatrix} \frac{(\mu-1)}{r} + i\frac{\omega}{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} + i\frac{\omega}{r} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olarak alınabilir.}$$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\tilde{u} & r \\ -\bar{\delta}\tilde{u} & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\lambda_2 = \mu - i\omega$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için $(A^T - \lambda_2 I)p = 0$ eşitliğini sağlayan p vektörünü bulmamız gerekmektedir. Öyleyse

$$\begin{pmatrix} 1 - r\bar{\delta}\tilde{u} - \mu + i\omega & r \\ -\bar{\delta}\tilde{u} & 1 - \mu + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c + id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$1 - r\bar{\delta}\tilde{u} - \mu + i\omega + rc + ird = 0$$

$$-\bar{\delta}\tilde{u} + (1 - \mu + i\omega)(c + id)$$

denklemleri elde edilir. Burada ilk denklemden $1 - r\bar{\delta}\tilde{u} - \mu + rc = 0$, $\omega + rd = 0$ bulunur ve $c = \frac{\mu - 1 + r\bar{\delta}\tilde{u}}{r} = \frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}}$, $d = \frac{-\omega}{r}$ olarak seçilir. Dikkat edilirse $\mu = 1 - \frac{r^2\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}}$, $\omega = \frac{r}{2\beta\tilde{v}}\sqrt{4\beta\tilde{u}\tilde{v} - r^2\tilde{u}^2}$, $\bar{\delta} = \frac{r}{\beta\tilde{v}}$ olarak yazılabilir. Bu eşitlikleri ikinci denklemden yerine yazalım:

$$\begin{aligned} & -\bar{\delta}\tilde{u} + (1 - \mu + i\omega)(c + id) \\ &= \left(-\bar{\delta}\tilde{u} + (1 - \mu)\frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} - \omega\left(\frac{-\omega}{r}\right) \right) + i\left((1 - \mu)\left(\frac{-\omega}{r}\right) + \omega\left(\frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}}\right) \right) \\ &= \left(-\frac{r\tilde{u}}{\beta\tilde{v}} + \frac{r^2\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} \cdot \frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} + \frac{r\tilde{u}}{\beta\tilde{v}} - \frac{r^3\tilde{u}^2}{4\beta^2\tilde{v}^2} \right) + i\omega\left(-\frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} + \frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Buradan $p = s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} - i\frac{\omega}{r} \end{pmatrix}$ seçilebilir. Şimdi $C^2 : \langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 = 1$ eşitliğini sağlayacak $s \in \mathbb{C}$ sayısını bulalım:

$$\langle p, q \rangle = \bar{s} \left(\frac{-r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} + i\frac{\omega}{r} \right) + \bar{s} \left(\frac{r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} + i\frac{\omega}{r} \right) = \bar{s} \left(i\frac{2\omega}{r} \right) = 1 \Rightarrow \bar{s} = -i\frac{r}{2\omega} \Rightarrow s = i\frac{r}{2\omega}.$$

Sonuç olarak $p = \begin{pmatrix} i\frac{r}{2\omega} \\ \frac{1}{2} + i\left(\frac{r^2\tilde{u}}{4\beta\tilde{v}\omega}\right) \end{pmatrix}$ bulunur. Analize aşağıdaki kompleks değişken dönüşümünü yaparak devam edeceğiz:

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{-r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} + i\frac{\omega}{r} \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{z} \begin{pmatrix} \frac{-r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} - i\frac{\omega}{r} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hesaplamalarda kolaylık sağlanması için $a = \frac{-r\tilde{u}}{2\beta\tilde{v}} + i\frac{\omega}{r}$ olarak alalım. Dikkat edilirse $a + \bar{a} = \frac{-r\tilde{u}}{\beta\tilde{v}} = -\bar{\delta}\tilde{u}$ olur. Ayrıca $|a|^2 = a.\bar{a}$ dir. Buradan

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + \bar{a}\bar{z} \\ z + \bar{z} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yaptığımız bu dönüşümü (4.46) ve (4.48) denklemleri ile verilen \tilde{f} ve \tilde{g} fonksiyonlarında yerine yazalım:

$$\begin{aligned} F(x, r) &= \begin{pmatrix} \tilde{f}(x_1, x_2) \\ \tilde{g}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(az + \bar{a}\bar{z})^2 + c_2(az + \bar{a}\bar{z})(z + \bar{z}) \\ c_3(az + \bar{a}\bar{z})^2 + c_4(az + \bar{a}\bar{z})(z + \bar{z}) + c_5(z + \bar{z})^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z^2(c_1a^2 + c_2a) + z\bar{z}(2c_1|a|^2 - c_2\bar{\delta}\tilde{u}) + \bar{z}^2(c_1\bar{a}^2 + c_2\bar{a}) \\ z^2(c_3a^2 + c_4a + c_5) + z\bar{z}(2c_3|a|^2 - c_4\bar{\delta}\tilde{u} + 2c_5) + \bar{z}^2(c_3\bar{a}^2 + c_4\bar{a} + c_5) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Burada

$$\begin{aligned} \psi_1 &= c_1a^2 + c_2a \\ \psi_2 &= 2c_1|a|^2 - c_2\bar{\delta}\tilde{u} \\ \psi_3 &= c_1\bar{a}^2 + c_2\bar{a} \\ \psi_4 &= c_3a^2 + c_4a + c_5 \\ \psi_5 &= 2c_3|a|^2 - c_4\bar{\delta}\tilde{u} + 2c_5 \\ \psi_6 &= c_3\bar{a}^2 + c_4\bar{a} + c_5 \end{aligned} \quad (4.51)$$

olmak üzere

$$F(x, r) = \begin{pmatrix} \psi_1z^2 + \psi_2z\bar{z} + \psi_3\bar{z}^2 \\ \psi_4z^2 + \psi_5z\bar{z} + \psi_6\bar{z}^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Son olarak g_{ij} katsayılarını veren $\langle p, F \rangle$ iç çarpımını hesaplayacak ve (2.33) ile verilen $a(0)$ formülünde yerine yazacağız.

$$\begin{aligned} \langle p, F \rangle &= \bar{p}_1\tilde{f} + \bar{p}_2\tilde{g} \\ &= -i\frac{r}{2w}(\psi_1z^2 + \psi_2z\bar{z} + \psi_3\bar{z}^2) + \left(\frac{1}{2} - i\left(\frac{r^2\tilde{u}}{4\beta\tilde{v}\omega}\right)\right)(\psi_4z^2 + \psi_5z\bar{z} + \psi_6\bar{z}^2) \\ &= \frac{g_{20}}{2}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2 \end{aligned}$$

olup buradan

$$g_{20} = \psi_4 - i \left(\frac{\psi_1 r}{\omega} + \frac{\psi_4 r^2 \tilde{u}}{2\beta \tilde{v} \omega} \right),$$

$$g_{11} = \frac{\psi_5}{2} - i \left(\frac{\psi_2 r}{2\omega} + \frac{\psi_5 r^2 \tilde{u}}{4\beta \tilde{v} \omega} \right),$$

$$g_{02} = \psi_6 - i \left(\frac{\psi_3 r}{\omega} + \frac{\psi_6 r^2 \tilde{u}}{2\beta \tilde{v} \omega} \right)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1-2\lambda(0))}{2(\lambda^2(0)-\lambda(0))} + \frac{|g_{11}|^2}{1-\bar{\lambda}(0)} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\lambda^2-\bar{\lambda})} + \frac{g_{21}(0)}{2}$$

olmak üzere

$$a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} c_1(0)) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}(0) c_1(0)) \quad (4.52)$$

ın işareti çatallanmanın subkritik veya süperkritik olduğunu belirler.

Teorem 4.5. *Eğer*

$$\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) < 0 \quad \text{ve} \quad \delta = \frac{1}{\beta - \gamma}$$

ise (4.4) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında Neimark-Sacker çatallanma meydana gelir. Burada $a(0) < 0$, (4.52) ile verilmek üzere

- $a(0) < 0$ ise Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma
- $a(0) > 0$ ise Subkritik Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar.

4.3 Sığınak Etkisi İçeren Modelin Analizi

4.3.1 Modelin elde edilmesi

Daha önce sığınak etkisi içermeyen model için uyguladığımız Euler metodunu şimdi (4.1) sistemi için uygulayacağız.

t_0 'a yakın t_1 değerleri için

$$x'(t_0) \approx \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

yaklaşımı kullanılır ve özel olarak $t_1 - t_0 = \delta$ seçilirse, (4.1) modelindeki

$$x'(t_0) = rx(t_0) \left(1 - \frac{x(t_0)}{K} \right) - c(x(t_0) - R)y(t_0)$$

denklemden

$$x_{t+1} = x_t + r\delta x_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right) - c\delta(x_t - R)y_t$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.1) modelindeki

$$y'(t_0) = e(x(t_0) - R)y(t_0) - dy(t_0)$$

denklemden t_0 'a yakın t_1 değerleri için

$$y_{t+1} = y_t + e\delta(x_t - R)y_t - d\delta y_t$$

bulunur. Buradan (4.1) sistemine karşılık gelen

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t + r\delta x_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right) - c\delta(x_t - R)y_t \\ y_t + e\delta(x_t - R)y_t - d\delta y_t \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

ayrık av-avcı sistemi elde edilir. (4.53) sisteminde $x_t = Au_t$, $y_t = Bv_t$ dönüşümleri yapıp yerine yazılırsa

$$\begin{cases} Au_{t+1} = Au_t + r\delta Au_t \left(1 - \frac{Au_t}{K}\right) - c\delta(Au_t - R)Bv_t \\ Bv_{t+1} = Bv_t + e\delta(Au_t - R)Bv_t - d\delta Bv_t \end{cases}$$

bulunur. Burada denklemlerin sadeleştirilmesi ve $A = K$, $B = \frac{1}{c}$, $\alpha = \frac{R}{K}$, $\beta = eK$, $\gamma = d$ seçilmesiyle

$$\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t + r\delta u_t (1 - u_t) - \delta(u_t - \alpha)v_t \\ v_t (1 - \delta\gamma) + \delta\beta(u_t - \alpha)v_t \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

boyutsuz sistemi elde edilir. Dikkat edilirse (4.53) sisteminde 7 parametre var iken boyutsuzlaştırılan (4.54) sisteminde 5 parametre bulunmaktadır.

4.3.2 Denge noktaları ve lokal kararlılık analizi

(4.54) sisteminin denge noktaları

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u} + r\delta\tilde{u} (1 - \tilde{u}) - \delta(\tilde{u} - \alpha)\tilde{v} \\ \tilde{v} = \tilde{v} (1 - \delta\gamma) + \delta\beta(\tilde{u} - \alpha)\tilde{v} \end{cases} \quad (4.55)$$

denklemlerini sağlayan (\tilde{u}, \tilde{v}) değerleridir. Buradaki ikinci eşitlikten

$$\tilde{v}(1 - \delta\gamma) + \delta\beta(\tilde{u} - \alpha)\tilde{v} - \tilde{v} = 0 \Rightarrow \delta\tilde{v}(\beta(\tilde{u} - \alpha) - \gamma) = 0$$

olup

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{veya} \quad \tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta} + \alpha$$

elde edilir. $\tilde{v} = 0$ ise (4.55)'deki birinci denklemden

$$\tilde{u} = \tilde{u} + r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) \Rightarrow \tilde{u} + r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) - \tilde{u} = 0 \Rightarrow r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) = 0$$

olduğu için

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{veya} \quad \tilde{u} = 1$$

bulunur. $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta} + \alpha$ ise (4.55)'deki birinci eşitlikten

$$\tilde{u} + r\delta\tilde{u}(1 - \tilde{u}) - \delta(\tilde{u} - \alpha)\tilde{v} - \tilde{u} = 0 \Rightarrow \delta(r\tilde{u}(1 - \tilde{u}) - (\tilde{u} - \alpha)\tilde{v}) = 0$$

olup

$$\tilde{v} = \frac{r\tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\tilde{u} - \alpha} = \frac{\beta r\tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\gamma}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.54) sisteminin $(0,0)$, $(1,0)$ ve $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta} + \alpha$ olmak üzere $\left(\tilde{u}, \frac{\beta r\tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\gamma}\right)$ olacak şekilde üç denge noktası vardır. Biyolojik anlam taşıması için (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasının pozitif olması gerekmektedir. $\gamma, \beta, \alpha > 0$ olduğu için $\tilde{u} > 0$ dır. Ayrıca

$$\tilde{v} = \frac{\beta r\tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\gamma} > 0 \Leftrightarrow \tilde{u} < 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\beta} + \alpha < 1$$

olmalıdır. Sonuç olarak (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasının pozitif olması için gerek ve yeter koşul $\gamma - \beta(1 - \alpha) < 0$ koşulunun sağlanmasıdır.

Şimdi elde edilen bu denge noktalarının lokal kararlılık analizi yapılacaktır. (4.54) sisteminin sağ tarafındaki fonksiyonlar

$$\begin{cases} f(u_t, v_t) = u_t + r\delta u_t(1 - u_t) - \delta(u_t - \alpha)v_t \\ g(u_t, v_t) = v_t(1 - \delta\gamma) + \delta\beta(u_t - \alpha)v_t \end{cases}$$

ile gösterilirse (4.54) sistemine karşılık gelen Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + r\delta - 2r\delta u - \delta v & -\delta(u - \alpha) \\ \delta\beta v & 1 - \delta\gamma + \delta\beta(u - \alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

(0,0) Denge Noktasının Kararlılık Analizi

(4.54) sisteminin (0,0) denge noktasındaki Jakobiyen matrisi (4.56)'dan

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1+r\delta & \delta\alpha \\ 0 & 1-\delta(\gamma+\alpha\beta) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 1+r\delta$ ve $\lambda_2 = 1-\delta(\gamma+\alpha\beta)$ dir. Öyleyse

$$|1+r\delta| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1+r\delta < 1 \Leftrightarrow -2 < r\delta < 0$$

$$|1-\delta(\gamma+\alpha\beta)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-\delta(\gamma+\alpha\beta) < 1 \Leftrightarrow 0 < \delta(\gamma+\alpha\beta) < 2$$

olup r ve δ pozitif olduğu için $\lambda_1 = 1+r\delta$ özdeğerinin mutlak değeri 1 den küçük değildir. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.6. (4.54) sisteminin (0,0) denge noktası kararsızdır.

(1,0) Denge Noktasının Kararlılık Analizi

(4.54) sisteminin (1,0) denge noktasındaki Jakobiyen matrisi (4.56)'dan

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 1-r\delta & -\delta(1-\alpha) \\ 0 & 1-\delta\gamma+\delta\beta(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 1-r\delta$ ve $\lambda_2 = 1-\delta\gamma+\delta\beta(1-\alpha)$ dir. Burada

$$|1-r\delta| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-r\delta < 1 \Leftrightarrow 0 < r\delta < 2$$

$$|1-\delta(\gamma-\beta(1-\alpha))| < 1 \Leftrightarrow 0 < \delta(\gamma-\beta(1-\alpha)) < 2$$

olup (\tilde{u}, \tilde{v}) in pozitif denge noktası olabilmesi için $\gamma-\beta(1-\alpha) < 0$ olması gerektiğini biliyoruz. Ayrıca $\delta > 0$ olduğundan $\lambda_2 = 1-\delta(\gamma-\beta(1-\alpha))$ nın mutlak değeri 1 den küçük değildir. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.7. (4.54) sisteminin (1,0) denge noktası kararsızdır.

(1,0) denge noktasının kararlılık yapısının, sığınak etkisi içermeyen modelde olduğu gibi pozitif denge noktası ile ilişkisi vardır.

1. Durum: $\gamma - \beta(1 - \alpha) \geq 0$ olması hâli:

Bu durumda $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta} + \alpha \geq 1$ olur fakat $\tilde{v} = \frac{\beta r \tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\gamma} \leq 0$ gerçekleşir. Dolayısıyla pozitif denge noktası yoktur. Ayrıca $\gamma - \beta(1 - \alpha) > 0$ iken $\delta > 0$ olduğu için $(1, 0)$ denge noktası için kararlı bir bölge bulunabilir.

Sonuç: $\gamma - \beta(1 - \alpha) \geq 0$ iken pozitif denge noktası mevcut değildir fakat $(1, 0)$ denge noktasının kararlı olduğu bir bölge bulmak mümkündür.

2. Durum: $\gamma - \beta(1 - \alpha) < 0$ olması hâli:

Bu durumda $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta} + \alpha < 1$ olur. Ayrıca $\tilde{v} = \frac{\beta r \tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\gamma} > 0$ olup pozitif denge noktası mevcuttur. Diğer yandan $\gamma - \beta(1 - \alpha) < 0$ durumu $(1, 0)$ denge noktasının kararsız olduğunu gösterirken pozitif denge noktası için kararlılık bölgesi bulmak mümkündür.

Sonuç: Pozitif denge noktasının varlığı durumunda $(1, 0)$ denge noktası kararsızdır.

(\tilde{u}, \tilde{v}) Denge Noktasının Kararlılık Analizi

(4.54) sisteminin $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\tilde{u}, \frac{\beta r \tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\gamma} \right)$ denge noktasındaki Jakobiye matrisi (4.56)'dan

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} 1 + r\delta - 2r\delta\tilde{u} - \delta\tilde{v} & \delta(\alpha - \tilde{u}) \\ \delta\beta\tilde{v} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

olarak hesaplanır.

$$\det(J) = 1 + r\delta - 2r\delta\tilde{u} - \delta\tilde{v} - \delta^2\beta\tilde{v}(\alpha - \tilde{u})$$

$$iz(J) = 2 + r\delta - 2r\delta\tilde{u} - \delta\tilde{v}$$

olmak üzere Jakobiye matrisine karşılık gelen karakteristik polinom ise

$$F(\lambda) = \lambda^2 - iz(J)\lambda + \det(J) = \lambda^2 - (2 + \delta A)\lambda + (1 + \delta A + \delta^2\gamma\tilde{v}) \quad (4.58)$$

olup burada $A = r - 2r\tilde{u} - \tilde{v}$ dir. Bu polinomun kökleri

$$\lambda_1 = \frac{2 + \delta A - \delta\sqrt{A^2 - 4\gamma\tilde{v}}}{2} \quad (4.59)$$

$$\lambda_2 = \frac{2 + \delta A + \delta\sqrt{A^2 - 4\gamma\tilde{v}}}{2} \quad (4.60)$$

olarak elde edilir. Denge noktasının kararlılık analizi için bu köklerin mutlak değerinin 1'den küçük kalacağı koşullar belirlenecektir. Bunun için ise Lemma (6.1)'in birinci maddesi kullanılacaktır.

F(1) > 0 Koşulu:

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 - iz(J) + \det(J) \\ &= \delta^2 \beta (\bar{u} - \alpha) \bar{v} = \delta^2 \gamma \bar{v} \end{aligned}$$

olup $\delta, \gamma, \bar{v} > 0$ olduğu için $F(1) > 0$ koşulu her δ için sağlanır.

F(-1) > 0 Koşulu:

$$\begin{aligned} F(-1) &= 1 + iz(J) + \det(J) \\ &= 4 + 2r\delta - 4r\delta\bar{u} - 2\delta\bar{v} - \delta^2\beta\bar{v}(\alpha - \bar{u}) \quad (4.61) \\ &= \gamma\bar{v}\delta^2 + 2A\delta + 4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $F(-1)$, δ 'ya bağlı ikinci dereceden bir polinom olduğundan pozitif olduğu aralığı belirlemek için kök analizi yapılacaktır.

$$\Delta_{F(-1)} = 4A^2 - 16\gamma\bar{v} = 4(A^2 - 4\gamma\bar{v})$$

olarak hesaplanır. Burada $(A^2 - 4\gamma\bar{v})$ 'nin işaretine göre üç ana durum mevcuttur.

i) $A^2 - 4\gamma\bar{v} > 0$ ise $\Delta_{F(-1)} > 0$ olup $F(-1)$ 'in iki farklı reel kökü vardır:

$$\delta_1 = \frac{-A - \sqrt{(A^2 - 4\gamma\bar{v})}}{\gamma\bar{v}}, \quad (4.62)$$

$$\delta_2 = \frac{-A + \sqrt{(A^2 - 4\gamma\bar{v})}}{\gamma\bar{v}} \quad (4.63)$$

ve

$$\delta_1 = \frac{-A - \sqrt{(A^2 - 4\gamma\bar{v})}}{\gamma\bar{v}} < \frac{-A}{\gamma\bar{v}} < \delta_2 = \frac{-A + \sqrt{(A^2 - 4\gamma\bar{v})}}{\gamma\bar{v}}$$

olur. $\delta_1 > 0 \Leftrightarrow A < 0$ olduğu açıktır. Bulunan kökler işaret tablosuna yerleştirilirse

	δ_1	δ_2
F(-1)	+	+

elde edilir.

$\therefore 0 < \delta < \delta_1$ veya $\delta > \delta_2$ iken $F(-1) > 0$ koşulu sağlanır.

ii) $A^2 - 4\gamma\tilde{v} = 0$ ise $\Delta_{F(-1)} = 0$ olup $F(-1)$ 'in çakışık iki reel kökü vardır:

$$\delta_{3,4} = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}} \quad (4.64)$$

İşaret tablosu ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{c|c|c} & \delta_{3,4} & \\ \hline F(-1) & + & + \end{array}$$

$\therefore \delta \neq \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ iken $F(-1) > 0$ koşulu sağlanır.

iii) $A^2 - 4\gamma\tilde{v} < 0$ ise $\Delta_{F(-1)} < 0$ olup δ^2 li terimin katsayısı $\gamma\tilde{v} > 0$ olduğundan $F(-1) > 0$ koşulu her δ için sağlanır.

Det(J)<1 Koşulu:

$$Det(J) = 1 + r\delta - 2r\delta\tilde{u} - \delta\tilde{v} - \delta^2\beta\tilde{v}(\alpha - \tilde{u}) < 1$$

$$\Leftrightarrow A + \delta\beta\tilde{v}(\tilde{u} - \alpha) < 0$$

$$\Leftrightarrow \delta < \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$$

şeklinde hesaplanır ve burada $A < 0$ olmak üzere $\delta < \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ iken $Det(J) < 1$ koşulu sağlanır.

Teorem 4.8. *Eğer*

$$**H1)** $A < 0$ ve $A^2 - 4\gamma\tilde{v} \leq 0$ iken $\delta < \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ ise$$

veya

$$**H2)** $A < 0$ ve $A^2 - 4\gamma\tilde{v} > 0$ iken $\delta < \delta_1$ ise$$

koşullarından biri sağlanıyorsa (4.54) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktası lokal asimptotik karardır. Burada $A = r - 2r\tilde{u} - \tilde{v}$ olup δ_1 , (4.62) ile verilmiştir.

4.3.3 Flip çatallanma analizi

Bu kısımda (4.54) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında flip çatallanmanın varlığı incelenecektir.

Teorem (6.1)'den, $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C \ni B, C \in \mathbb{R}$ sistemin denge noktasındaki Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom olmak üzere $B \neq 0, 2$ ve $F(-1) = 0$ ise flip çatallanma ortaya çıkabilir. Analize bu koşullar belirlenerek başlanacaktır.

F(-1)=0 Koşulu:

Bölüm 4.3.2 de (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasının kararlılık analizi yapılırken (4.61)'de verildiği gibi $F(-1)$, δ 'ya bağlı ikinci dereceden bir polinom olarak bulunmuştur. Buradan hareketle

$$F(-1) = \gamma\tilde{v}\delta^2 + 2A\delta + 4 \quad (4.65)$$

polinomunda

- i) $A^2 - 4\gamma\tilde{v} > 0$ ise $\delta = \delta_1$ iken $F(-1) = 0$ koşulu sağlanır.
- ii) $A^2 - 4\gamma\tilde{v} = 0$ ise $\delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ iken $F(-1) = 0$ koşulu sağlanır.
- iii) $A^2 - 4\gamma\tilde{v} < 0$ ise $F(-1) \neq 0$ dır.

B≠0 Koşulu:

Burada $B = -iz(J) = -(2 + \delta A)$ dır ve $\delta \neq \frac{-2}{A}$ iken $-iz(J) \neq 0$ koşulu gerçekleşir.

B≠2 Koşulu:

Aynı şekilde $\delta \neq \frac{-4}{A}$ iken $-iz(J) \neq 2$ koşulu sağlanır.

Burada $\delta = \delta_1$ seçilecektir çünkü $\delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ seçilirse

$$\delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}} \neq \frac{-4}{A} \Leftrightarrow -A^2 \neq -4\gamma\tilde{v} \Leftrightarrow A^2 - 4\gamma\tilde{v} \neq 0$$

olur ki bu $\delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ seçmemiz ile çelişir. Sonuç olarak, (4.54) sisteminin parametreleri

$$A^2 - 4\gamma\tilde{v} > 0 \text{ ve } \delta = \delta_1 \ni \delta \neq \frac{-2}{A}, \frac{-4}{A} \quad (4.66)$$

şartlarını sağlıyorsa (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında flip çatallanma ortaya çıkabilir.

Şimdi flip çatallanmanın varlığı analitik olarak gösterilecektir. Sığınak etkisi içermeyen modelin analizinde olduğu gibi (4.54) sisteminin denge noktası orijine, çatallanma değeri sıfıra taşınacaktır. Bunun için

$$\begin{cases} f(u, v) = u + r\delta u(1 - u) - \delta(u - \alpha)v \\ g(u, v) = v(1 - \delta\gamma) + \delta\beta(u - \alpha)v \end{cases} \quad (4.67)$$

olmak üzere $f(u, v)$ ve $g(u, v)$ fonksiyonları (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında Taylor Serisine açılacaktır. $\tilde{u} = \frac{\gamma}{\beta}$ ve $\tilde{v} = \left(\frac{\beta r \tilde{u}(1 - \tilde{u})}{\gamma} \right)$ olmak üzere

- $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{u}$ ve $g(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}$
- $f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1 + r\delta - 2r\delta\tilde{u} - \delta\tilde{v}$
- $f_v(\tilde{u}, \tilde{v}) = \delta(\alpha - \tilde{u})$
- $f_{uu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = -2r\delta$, $f_{uv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\delta$ ve $f_{vv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$
- $f_{uuu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = f_{uuv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = f_{uvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = f_{vvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$
- Diğer yüksek mertebeden terimler sıfıra eşittir.
- $g_u(\tilde{u}, \tilde{v}) = \delta\beta\tilde{v}$
- $g_v(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1$
- $g_{uu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$, $g_{uv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \delta\beta$, $g_{vv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$
- $g_{uuu}(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_{uuv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_{uvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_{vvv}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$ dır.
- Diğer yüksek mertebeden terimler sıfıra eşittir.

Sonuç olarak f ve g fonksiyonlarının Taylor seri açılımlarından (4.54) sistemi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{cases} u_{t+1} = \tilde{u} + (1 + r\delta - 2r\delta\tilde{u} - \delta\tilde{v})(u_t - \tilde{u}) + \delta(\alpha - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) \\ \quad - r\delta(u_t - \tilde{u})^2 - \delta(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) \\ v_{t+1} = \tilde{v} + \delta\beta\tilde{v}(u_t - \tilde{u}) + (v_t - \tilde{v}) + \delta\beta(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}). \end{cases} \quad (4.68)$$

Analizin devamında çatallanma parametresi olarak δ seçilecek ve kararlılık yapısının değiştiği çatallanma değeri ise $\bar{\delta}$ ile gösterilecektir. Şimdi

$$\begin{cases} w_t = u_t - \tilde{u}, \\ z_t = v_t - \tilde{v}, \\ \tilde{\delta} = \delta - \bar{\delta} \end{cases}$$

dönüşümleri ile sistemin denge noktasını orijine ve çatallanma değerini sıfıra taşıyalım. Buradan

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= u_{t+1} - \tilde{u} \\ &= \tilde{u} + (1 + \delta A)(u_t - \tilde{u}) + \delta(\alpha - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) - r\delta(u_t - \tilde{u})^2 - \delta(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) - \tilde{u} \\ &= (1 + \bar{\delta}A)w_t + (\alpha - \tilde{u})\bar{\delta}z_t + A\tilde{\delta}w_t + (\alpha - \tilde{u})\tilde{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\tilde{\delta}w_t^2 - \tilde{\delta}w_tz_t \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= v_{t+1} - \tilde{v} \\ &= \tilde{v} + \delta\beta\tilde{v}(u_t - \tilde{u}) + (v_t - \tilde{v}) + \delta\beta(u_t - \tilde{u})(v_t - \tilde{v}) - \tilde{v} \\ &= \bar{\delta}\beta\tilde{v}w_t + z_t + \beta\tilde{v}\tilde{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\tilde{\delta}w_tz_t \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} f_1(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= A\tilde{\delta}w_t + (\alpha - \tilde{u})\tilde{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\tilde{\delta}w_t^2 - \tilde{\delta}w_tz_t, \\ f_2(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= \beta\tilde{v}\tilde{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\tilde{\delta}w_tz_t \end{aligned}$$

olmak üzere (4.68) sistemi

$$\begin{pmatrix} w_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A & \bar{\delta}(\alpha - \tilde{u}) \\ \bar{\delta}\beta\tilde{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(w_t, z_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

olarak ifade edilir. Burada (4.66) koşullarının sağlandığı göz önüne alınarak $\bar{\delta} = \delta_1$ seçilecek ve (4.20) formuna ulaşmak için T dönüşüm matrisi inşa edilecektir.

$\delta = \bar{\delta}$ iken (4.54) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) daki Jakobiyen matrisi ile (4.69) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) daki Jakobiyen matrisi aynıdır. Sonuç olarak (4.59) ve (4.60) ile verilen özdeğerlerde $\delta = \bar{\delta}$ ($\bar{\delta} = \delta_1$) seçilirse (4.66) koşulları altında $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3 + \bar{\delta}A \ni |\lambda_2| \neq 1$ bulunur. Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri hesaplayacağız.

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A & \bar{\delta}(\alpha - \tilde{u}) \\ \bar{\delta}\beta\tilde{v} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

olmak üzere $\lambda_1 = -1$ özdeğeri için

$$\begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A - (-1) & \bar{\delta}(\alpha - \tilde{u}) \\ \bar{\delta}\beta\tilde{v} & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$(2 + \bar{\delta}A)u_1 + \left(-\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta}\right)u_2 = 0$$

$$(\bar{\delta}\beta\tilde{v})u_1 + 2u_2 = 0$$

olup ikinci denklemden

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\bar{\delta}\beta\tilde{v} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

seçilebilir. İlk denklemde yerine yazılırsa

$$(2 + \bar{\delta}A)2 + \left(-\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta}\right)(-\bar{\delta}\beta\tilde{v}) = 0 \quad (4.72)$$

olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak (4.71), $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Ayrıca (4.72)'den

$$\bar{\delta}^2\gamma\tilde{v} = -2(2 + \bar{\delta}A) \quad (4.73)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde $\lambda_2 = \lambda_2 = 3 + \bar{\delta}A$ için

$$\begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A - (3 + \bar{\delta}A) & \bar{\delta}(\alpha - \tilde{u}) \\ \bar{\delta}\beta\tilde{v} & 1 - (3 + \bar{\delta}A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden elde edilen

$$-2v_1 - \frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta}v_2 = 0$$

$$(\bar{\delta}\beta\tilde{v})v_1 + (-2 - \bar{\delta}A)v_2 = 0$$

sistemindeki ilk denklemden

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

seçilebilir. İkinci denklemde de yerine yazar ve (4.73) eşitliğini kullanırsak

$$(\bar{\delta}\beta\tilde{v})\left(-\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}\right) + (-2 - \bar{\delta}A) = 0$$

elde edilir ve dolayısıyla (4.74), $\lambda_2 = \lambda_2 = 3 + \bar{\delta}A$ özdeğerine karşılık gelen

özvektördür. Elde edilen bu özvektörleri sütun kabul eden

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} \\ -\bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi ile

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

dönüşümü yapılarak (4.26) formuna ulaşılabacaktır.

$$\det(T) = 2 - \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2} = 2 + 2 + \bar{\delta}A = 4 + \bar{\delta}A$$

olmak üzere T matrisinin tersi

$$T^{-1} = \frac{1}{4 + \bar{\delta}A} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4 + \bar{\delta}A} & \frac{\gamma\bar{\delta}}{2\beta(4 + \bar{\delta}A)} \\ \frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}}{4 + \bar{\delta}A} & \frac{2}{4 + \bar{\delta}A} \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} T^{-1}JT &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4 + \bar{\delta}A} & \frac{\gamma\bar{\delta}}{2\beta(4 + \bar{\delta}A)} \\ \frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}}{4 + \bar{\delta}A} & \frac{2}{4 + \bar{\delta}A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A & -\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} \\ -\bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 + \bar{\delta}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

formu elde edilir ve

$$\begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t) \\ f_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix}$$

ile hesaplanır. Burada kolay işlem yapabilmek için

$$b_1 = \frac{1}{4 + \bar{\delta}A}, \quad b_2 = \frac{\bar{\delta}\gamma}{4 + \bar{\delta}A}, \quad b_3 = \frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}}{4 + \bar{\delta}A}, \quad b_4 = \frac{2}{4 + \bar{\delta}A} \quad (4.77)$$

olmak üzere

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

alınacaktır. Şimdi

$$\begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\bar{\delta}w_t + (\alpha - \bar{u})\bar{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t \\ \beta\bar{v}\bar{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\bar{\delta}w_tz_t \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

fonksiyonlarını hesaplayalım. (4.75)'den

$$\begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} \\ -\bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_t - \frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}Y_t \\ -\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t + Y_t \end{pmatrix}$$

olduğu için

$$\begin{aligned} w_t^2 &= \left(2X_t - \frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}Y_t\right)^2 = 4X_t^2 - 2\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta}X_tY_t + \frac{\gamma^2}{4\beta^2}\bar{\delta}^2Y_t^2 \\ w_tz_t &= \left(2X_t - \frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}Y_t\right)(-\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t + Y_t) = -2\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t^2 + 2X_tY_t + \frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}\bar{\delta}\gamma}{2\beta}X_tY_t - \frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}Y_t^2 \\ &= -2\bar{\delta}\beta\bar{v}X_t^2 + \left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right)X_tY_t - \frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}Y_t^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler (4.78)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g_1 &= b_1f_1 + b_2f_2 \\ &= b_1A\bar{\delta}w_t + b_1(\alpha - \bar{u})\bar{\delta}z_t - b_1r\bar{\delta}w_t^2 - b_1\bar{\delta}w_tz_t - b_1r\bar{\delta}w_t^2 - b_1\bar{\delta}w_tz_t + b_2\beta\bar{v}\bar{\delta}w_t \\ &\quad + b_2\bar{\delta}\beta w_tz_t + b_2\beta\bar{\delta}w_tz_t \\ &= X_t^2 [-4b_1r\bar{\delta} + 2b_1\bar{\delta}^2\beta\bar{v} - 2b_2\bar{\delta}^2\beta^2\bar{v}] \\ &\quad + X_tY_t \left[2b_1r\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{\beta} - b_1\bar{\delta} \left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2} \right) + b_2\bar{\delta}\beta \left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2} \right) \right] \\ &\quad + Y_t^2 \left[-b_1r\bar{\delta}^3\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_1\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{2\beta} - b_2\bar{\delta}^2\beta\frac{\gamma}{2\beta} \right] + X_t\bar{\delta} [2b_1A - \bar{\delta}\beta\bar{v}b_1(\alpha - \bar{u}) + 2b_2\beta\bar{v}] \\ &\quad + Y_t\bar{\delta} \left[-b_1A\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} + b_1(\alpha - \bar{u}) - b_2\beta\bar{v}\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} \right] + X_t^2\bar{\delta} [-4b_1r + 2b_1\bar{\delta}\beta\bar{v} - 2b_2\bar{\delta}\beta^2\bar{v}] \\ &\quad + X_tY_t\bar{\delta} \left[2b_1r\bar{\delta}\frac{\gamma}{\beta} - b_1 \left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2} \right) + b_2\beta \left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2} \right) \right] \\ &\quad + Y_t^2\bar{\delta} \left[-b_1r\bar{\delta}^2\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_1\bar{\delta}\frac{\gamma}{2\beta} - b_2\bar{\delta}\beta\frac{\gamma}{2\beta} \right] \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
c_1 &= -4b_1r\bar{\delta} + 2b_1\bar{\delta}^2\beta\bar{v} - 2b_2\bar{\delta}^2\beta^2\bar{v}, \\
c_2 &= 2b_1r\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{\beta} - b_1\bar{\delta}\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) + b_2\bar{\delta}\beta\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right), \\
c_3 &= -b_1r\bar{\delta}^3\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_1\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{2\beta} - b_2\bar{\delta}^2\beta\frac{\gamma}{2\beta}, \\
c_4 &= 2b_1A - \bar{\delta}\beta\bar{v}b_1(\alpha - \bar{u}) + 2b_2\beta\bar{v}, \\
c_5 &= -b_1A\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} + b_1(\alpha - \bar{u}) - b_2\beta\bar{v}\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}, \\
c_6 &= -4b_1r + 2b_1\bar{\delta}\beta\bar{v} - 2b_2\bar{\delta}\beta^2\bar{v}, \\
c_7 &= 2b_1r\bar{\delta}\frac{\gamma}{\beta} - b_1\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) + b_2\beta\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right), \\
c_8 &= -b_1r\bar{\delta}^2\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_1\bar{\delta}\frac{\gamma}{2\beta} - b_2\bar{\delta}\beta\frac{\gamma}{2\beta}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$g_1 = c_1X_t^2 + c_2X_tY_t + c_3Y_t^2 + c_4X_t\bar{\delta} + c_5Y_t\bar{\delta} + c_6X_t^2\bar{\delta} + c_7X_tY_t\bar{\delta} + c_8Y_t^2\bar{\delta} \quad (4.79)$$

şeklinde ifade edilebilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
g_2 &= b_3f_1 + b_4f_2 \\
&= b_3A\bar{\delta}w_t + b_3(\alpha - \bar{u})\bar{\delta}z_t - b_3r\bar{\delta}w_t^2 - b_3\bar{\delta}w_tz_t - b_3r\bar{\delta}w_t^2 - b_3\bar{\delta}w_tz_t + b_4\beta\bar{v}\bar{\delta}w_t \\
&\quad + b_4\bar{\delta}\beta w_tz_t + b_4\beta\bar{\delta}w_tz_t \\
&= X_t^2 [-4b_3r\bar{\delta} + 2b_3\bar{\delta}^2\beta\bar{v} - 2b_4\bar{\delta}^2\beta^2\bar{v}] \\
&\quad + X_tY_t \left[2b_3r\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{\beta} - b_3\bar{\delta}\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) + b_4\bar{\delta}\beta\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) \right] \\
&\quad + Y_t^2 \left[-b_3r\bar{\delta}^3\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_3\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{2\beta} - b_4\bar{\delta}^2\beta\frac{\gamma}{2\beta} \right] + X_t\bar{\delta} [2b_3A - \bar{\delta}\beta\bar{v}b_3(\alpha - \bar{u}) + 2b_4\beta\bar{v}] \\
&\quad + Y_t\bar{\delta} \left[-b_3A\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} + b_3(\alpha - \bar{u}) - b_4\beta\bar{v}\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} \right] + X_t^2\bar{\delta} [-4b_3r + 2b_3\bar{\delta}\beta\bar{v} - 2b_4\bar{\delta}\beta^2\bar{v}] \\
&\quad + X_tY_t\bar{\delta} \left[2b_3r\bar{\delta}\frac{\gamma}{\beta} - b_3\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) + b_4\beta\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) \right] \\
&\quad + Y_t^2\bar{\delta} \left[-b_3r\bar{\delta}^2\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_3\bar{\delta}\frac{\gamma}{2\beta} - b_4\bar{\delta}\beta\frac{\gamma}{2\beta} \right]
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
d_1 &= -4b_3r\bar{\delta} + 2b_3\bar{\delta}^2\beta\bar{v} - 2b_4\bar{\delta}^2\beta^2\bar{v}, \\
d_2 &= 2b_3r\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{\beta} - b_3\bar{\delta}\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) + b_4\bar{\delta}\beta\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right), \\
d_3 &= -b_3r\bar{\delta}^3\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_3\bar{\delta}^2\frac{\gamma}{2\beta} - b_4\bar{\delta}^2\beta\frac{\gamma}{2\beta}, \\
d_4 &= 2b_3A - \bar{\delta}\beta\bar{v}b_3(\alpha - \bar{u}) + 2b_4\beta\bar{v}, \\
d_5 &= -b_3A\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta} + b_3(\alpha - \bar{u}) - b_4\beta\bar{v}\frac{\gamma}{2\beta}\bar{\delta}, \\
d_6 &= -4b_3r + 2b_3\bar{\delta}\beta\bar{v} - 2b_4\bar{\delta}\beta^2\bar{v}, \\
d_7 &= 2b_3r\bar{\delta}\frac{\gamma}{\beta} - b_3\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right) + b_4\beta\left(2 + \frac{\bar{\delta}^2\gamma\bar{v}}{2}\right), \\
d_8 &= -b_3r\bar{\delta}^2\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + b_3\bar{\delta}\frac{\gamma}{2\beta} - b_4\bar{\delta}\beta\frac{\gamma}{2\beta}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$g_2 = d_1X_t^2 + d_2X_tY_t + d_3Y_t^2 + d_4X_t\bar{\delta} + d_5Y_t\bar{\delta} + d_6X_t^2\bar{\delta} + d_7X_tY_t\bar{\delta} + d_8Y_t^2\bar{\delta} \quad (4.80)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Analizin devamında Merkez Manifold Teoremi'ni kullanarak boyut indirgeyeceğiz. (4.76) sistemine karşılık gelen merkez manifold

$$W^c(0,0,0) = \{(X_t, Y_t, \bar{\delta}) \in \mathbb{R}^3 : Y_t = h(X_t) = h_1X_t^2 + h_2X_t\bar{\delta} + h_3\bar{\delta}^2\}. \quad (4.81)$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda_1 = -1$ olduğu için (4.32) ve (4.33) ile verilen eşitlikler aynen geçerlidir. Dolayısıyla (4.33), (4.79) ve (4.80) ile verilen g_1 ve g_2 fonksiyonları kullanılarak h_1, h_2, h_3 aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$h_1 = \frac{d_1}{1 - \lambda_2}$$

$$h_2 = \frac{-d_4}{1 + \lambda_2}$$

$$h_3 = 0.$$

Burada $Y_t = h(X_t) = h_1X_t^2 + h_2X_t\bar{\delta}$ olduğundan ve (4.76) sistemi

$$X_{t+1} = -X_t + g_1(X_t, h(X_t)) \quad (4.82)$$

bir boyutlu sistemine indirgenir ve $g_1(X_t, h(X_t))$ fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
g_1(X_t, h(X_t)) &= c_1X_t^2 + c_2X_th(X_t) + c_3h^2(X_t) + c_4X_t\tilde{\delta} + c_5h(X_t)\tilde{\delta} + c_6X_t^2\tilde{\delta} + c_7X_th(X_t)\tilde{\delta} \\
&\quad + c_8h^2(X_t)\tilde{\delta} \\
&= c_1X_t^2 + c_2X_t(h_1X_t^2 + h_2X_t\tilde{\delta}) + c_3(h_1X_t^2 + h_2X_t\tilde{\delta})^2 + c_4X_t\tilde{\delta} \\
&\quad + c_5(h_1X_t^2 + h_2X_t\tilde{\delta})\tilde{\delta} + c_6X_t^2\tilde{\delta} + c_7X_t(h_1X_t^2 + h_2X_t\tilde{\delta})\tilde{\delta} + c_8(h_1X_t^2 + h_2X_t\tilde{\delta})^2\tilde{\delta} \\
&= c_1X_t^2 + c_2h_1X_t^3 + (c_2h_2 + c_5h_1 + c_6)X_t^2\tilde{\delta} + c_3h_1^2X_t^4 + c_4X_t\tilde{\delta} + c_5h_2X_t\tilde{\delta}^2 \\
&\quad + (c_3h_2^2 + c_7h_2)X_t^2\tilde{\delta}^2 + (2c_3h_1h_2 + c_7h_1)X_t^3\tilde{\delta} + c_8h_1^2X_t^4\tilde{\delta} + 2c_8h_1h_2X_t^3\tilde{\delta}^2 \\
&\quad + c_8h_2^2X_t^2\tilde{\delta}^3
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
X_{t+1} &= f(X_t, \tilde{\delta}) \\
&= -X_t + g_1(X_t, h(X_t)) \\
&= -X_t + c_1X_t^2 + c_2h_1X_t^3 + (c_2h_2 + c_5h_1 + c_6)X_t^2\tilde{\delta} + c_3h_1^2X_t^4 + c_4X_t\tilde{\delta} + c_5h_2X_t\tilde{\delta}^2 \\
&\quad + (c_3h_2^2 + c_7h_2)X_t^2\tilde{\delta}^2 + (2c_3h_1h_2 + c_7h_1)X_t^3\tilde{\delta} + c_8h_1^2X_t^4\tilde{\delta} + 2c_8h_1h_2X_t^3\tilde{\delta}^2 \\
&\quad + c_8h_2^2X_t^2\tilde{\delta}^3
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem (2.1)'i kullanabilmek için gerekli türevleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
f_X &= -1 + 2c_1X_t + 3c_2h_1X_t^2 + 2(c_2h_2 + c_5h_1 + c_6)X_t\tilde{\delta} + 4c_3h_1^2X_t^3 + c_4\tilde{\delta} \\
&\quad + c_5h_2\tilde{\delta}^2 + 2(c_3h_2^2 + c_7h_2)X_t\tilde{\delta}^2 + 3(2c_3h_1h_2 + c_7h_1)X_t^2\tilde{\delta} + 4c_8h_1^2X_t^3\tilde{\delta} \\
&\quad + 6c_8h_1h_2X_t^2\tilde{\delta}^2 + 2c_8h_2^2X_t\tilde{\delta}^3 \\
f_{XX} &= 2c_1 + 6c_2h_1X_t + 2(c_2h_2 + c_5h_1 + c_6)\tilde{\delta} + 12c_3h_1^2X_t^2 + 2(c_3h_2^2 + c_7h_2)\tilde{\delta}^2 \\
&\quad + 6(2c_3h_1h_2 + c_7h_1)X_t\tilde{\delta} + 12c_8h_1^2X_t^2\tilde{\delta} + 12c_8h_1h_2X_t\tilde{\delta}^2 + 2c_8h_2^2\tilde{\delta}^3 \\
f_{XXX} &= 6c_2h_1 + 24c_3h_1^2X_t + 6(2c_3h_1h_2 + c_7h_1)\tilde{\delta} + 24c_8h_1^2X_t\tilde{\delta} + 12c_8h_1h_2\tilde{\delta}^2 \\
f_{X\tilde{\delta}} &= 2(c_2h_2 + c_5h_1 + c_6)X_t + c_4 + 2c_5h_2\tilde{\delta} + 4(c_3h_2^2 + c_7h_2)X_t\tilde{\delta} \\
&\quad + 3(2c_3h_1h_2 + c_7h_1)X_t^2 + 4c_8h_1^2X_t^3 + 12c_8h_1h_2X_t^2\tilde{\delta} + 6c_8h_2^2X_t\tilde{\delta}^2.
\end{aligned}$$

Bu türevlerin $X_t = 0$ ve $\tilde{\delta} = 0$ iken ki değerleri

$$f_X(0,0) = -1, \quad f_{XX}(0,0) = 2c_1, \quad f_{XXX}(0,0) = 6c_2h_1, \quad f_{X\tilde{\delta}}(0,0) = c_4$$

olduğundan

$$\frac{1}{2}(f_{XX}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0,0) = \frac{1}{2}(2c_1)^2 + \frac{1}{3}(6c_2h_1) = 2c_1^2 + 2c_2h_1 = 2(c_1^2 + c_2h_1)$$

olarak hesaplanır. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.9. *Eğer*

$$F0) A^2 - 4\gamma\tilde{v} > 0 \text{ ve } \delta = \delta_1 \Rightarrow \delta \neq \frac{-2}{A}, \frac{-4}{A}$$

$$F1) 2(c_1^2 + c_2h_1) \neq 0 \text{ ve}$$

$$F2) c_4 \neq 0$$

şartları sağlanıyorsa (4.54) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında $\delta = \delta_1$ iken Flip çatallanma meydana gelir.

4.3.4 Neimark-Sacker çatallanma analizi

Sistemin denge noktasındaki Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom $B, C \in \mathbb{R}$ olmak üzere $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$ olsun. Öyleyse, Teorem (6.1)'in üçüncü maddesinden

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, |\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = 1 \Leftrightarrow B^2 - 4C < 0 \text{ ve } C = 1$$

ise Neimark-Sacker tipi çatallanma ortaya çıkabilir. Öncelikle

$$F(\lambda) = \lambda^2 - iz(J)\lambda + \det(J) = \lambda^2 - (2 + \delta A)\lambda + (1 + \delta A + \delta^2\gamma\tilde{v})$$

karakteristik polinomunu kullanarak çatallanmanın meydana geleceği koşulları belirleyeceğiz.

$B^2 - 4C < 0$ Koşulu:

$$\begin{aligned} B^2 - 4C &= (2 + \delta A)^2 - 4(1 + \delta A + \delta^2\gamma\tilde{v}) \\ &= \delta^2(A^2 - 4\gamma\tilde{v}) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan $B^2 - 4C < 0 \Leftrightarrow A^2 - 4\gamma\tilde{v} < 0$ bulunur.

$C=1$ Koşulu:

Burada $C = \det(J) = 1 + \delta A + \delta^2\gamma\tilde{v}$ olup $\det(J) = 1 \Leftrightarrow \delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ elde edilir.

Sonuç olarak eğer

$$A^2 - 4\gamma\tilde{v} < 0 \quad \text{ve} \quad \delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}} \quad (4.83)$$

ise (4.54) sisteminin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasında Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkabilir. Şimdi bu denge noktasında çatallanmanın varlığı analitik olarak incelenecektir.

(4.83) koşullarının sağlanması durumunda (4.59) ve (4.60)'daki özdeğerler $\bar{\delta} = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}}$ olduğu için

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 1 + \frac{\bar{\delta}A}{2} \mp i \frac{\bar{\delta}}{2} \sqrt{4\gamma\tilde{v} - A^2} \\ &= \mu \mp i\omega \end{aligned} \quad (4.84)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda_{1,2}| = 1$ dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} r(\delta) &= \sqrt{\mu(\delta)^2 + \omega(\delta)^2} \\ &= \sqrt{1 + \delta A + \delta^2 \gamma\tilde{v}} \end{aligned}$$

olduğundan δ ya göre türev

$$r'(\delta) = \frac{1}{2} (1 + \delta A + \delta^2 \gamma\tilde{v})^{-1/2} (A + 2\delta \gamma\tilde{v}).$$

olarak hesaplanır ve

$$r'(\bar{\delta}) = r' \left(\frac{-A}{\gamma\tilde{v}} \right) = \frac{-A}{2} \quad (4.85)$$

bulunur. $A \neq 0$ olduğundan $r' \left(\frac{-A}{\gamma\tilde{v}} \right) \neq 0$ olup Teorem (2.3)'den *NS1*) koşulu sağlanır.

$$\theta(\delta) = \text{Arctan} \left(\frac{\omega(\delta)}{\mu(\delta)} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{\frac{\bar{\delta}}{2} \sqrt{4\gamma\tilde{v} - A^2}}{1 + \frac{\bar{\delta}A}{2}} \right)$$

ve

$$\theta \left(\frac{-A}{\gamma\tilde{v}} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{\frac{-A}{2\gamma\tilde{v}} \sqrt{4\gamma\tilde{v} - A^2}}{1 - \frac{A^2}{2\gamma\tilde{v}}} \right) = \theta_0$$

olmak üzere orijin komşuluğunda çalıştığımızdan $k = 1, 2, 3, 4$ için

$$[\lambda_{1,2}(\bar{\delta})]^k = e^{\mp ik\theta_0} \neq 1 \Leftrightarrow \theta_0 \neq 0 \quad (4.86)$$

olur. $\theta_0 \neq 0$ olduğundan *NS2*) şartı sağlanır. Buradan Neimark-Sacker çatallanmanın

mevcut olduğu görülür. Şimdi çatallanmanın yönünü belirleyen ve (2.33) ile verilen $a(0)$ ifadesini hesaplamak için gerekli analiz yapılacaktır . Denge noktasını orijine ve çatallanma değerini sıfıra taşıdığımızda

$$\begin{pmatrix} w_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A & \bar{\delta}(\alpha - \bar{u}) \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

sistemi bulunur ve burada

$$f_1(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) = A\bar{\delta}w_t + (\alpha - \bar{u})\bar{\delta}z_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t - r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_tz_t$$

$$f_2(w_t, z_t, \bar{\delta}, \bar{\delta}) = \beta\bar{v}\bar{\delta}w_t + \bar{\delta}\beta w_tz_t + \beta\bar{\delta}w_tz_t$$

dir.

$$A^2 - 4\gamma\bar{v} < 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\delta} = \frac{-A}{\gamma\bar{v}}$$

seçilmesiyle

$$J(\bar{\delta}) = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A & \bar{\delta}(\alpha - \bar{u}) \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

matrisinin özdeğerlerinin $\lambda_{1,2} = \mu \mp i\omega$ olduğu gösterilmiştir. Şimdi

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

dönüşümünü yaparak sistemi (4.44) formuna indirgemek için T dönüşüm matrisi inşa edilecektir. İlk olarak $\lambda_1 = \mu - i\omega$ özdeğerine karşılık gelen u özvektörü hesaplanacaktır .

$$\begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A - (\mu - i\omega) & \bar{\delta}(\alpha - \bar{u}) \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 - (\mu - i\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + ib \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ifadesinin ikinci denklemden

$$\bar{\delta}\beta\bar{v}a + i\bar{\delta}\beta\bar{v}b + 1 - \mu + i\omega = 0 \Leftrightarrow \bar{\delta}\beta\bar{v}a + 1 - \mu = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{\delta}\beta\bar{v}b + \omega = 0$$

$$a = \frac{\mu - 1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}}, \quad b = \frac{-\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}}$$

seçilebilir. İlk denklemde yerine yazılırsa

$$(1 + \bar{\delta}A - \mu + i\omega)(a + ib) - \frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} - i\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektördür ve T dönüşüm matrisi

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} & -\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturulur. (4.89) dönüşümü kullanıldığında X_t ve Y_t ye bağlı sistem (4.45) formunda elde edilir. T matrisin tersi

$$T^{-1} = \frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ -1 & \frac{\mu-1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}}{\omega} & \frac{\mu-1}{\omega} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur ve

$$T^{-1}JT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}}{\omega} & \frac{\mu-1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\bar{\delta}A & -\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} & -\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

olup (4.54) sistemine denk olan

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t) \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t) \\ f_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{\delta}\beta\bar{v}}{\omega} & \frac{\mu-1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(X_t, Y_t) \\ f_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix}$$

ile hesaplanır. (4.89)'dan

$$\begin{pmatrix} w_t \\ z_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} & -\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}}X_t - \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}}Y_t \\ X_t \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f_2(X_t, Y_t) = \bar{\delta}\beta w_t z_t \\ &= \bar{\delta}\beta \left(\frac{\mu-1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}}X_t - \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}}Y_t \right) X_t = e_1 X_t^2 + e_2 X_t Y_t \end{aligned} \quad (4.90)$$

şeklinde ifade edilebilir ve burada

$$e_1 = \frac{(\mu - 1)}{\bar{v}} \quad (4.91a)$$

$$e_2 = \frac{-\omega}{\bar{v}} \quad (4.91b)$$

dır. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \frac{-\bar{\delta}\beta\bar{v}}{\omega} f_1(X_t, Y_t) + \frac{(\mu - 1)}{\omega} f_2(X_t, Y_t) \\ &= \frac{-\bar{\delta}\beta\bar{v}}{\omega} (-r\bar{\delta}w_t^2 - \bar{\delta}w_t z_t) + \frac{(\mu - 1)}{\omega} (\bar{\delta}\beta w_t z_t) \\ &= \left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v}r}{\omega} \right) \left(\frac{\mu - 1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} X_t - \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} Y_t \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v} + (\mu - 1)\bar{\delta}\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\mu - 1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} X_t - \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} Y_t \right) X_t \\ &= \left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v}r}{\omega} \left(\frac{\mu - 1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v} + (\mu - 1)\bar{\delta}\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\mu - 1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right) \right) X_t^2 \\ &\quad + \left(-2 \left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v}r}{\omega} \right) \left(\frac{\mu - 1}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right) \left(\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right) - \left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v} + (\mu - 1)\bar{\delta}\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right) \right) X_t Y_t \\ &\quad + \left(\left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v}r}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right)^2 \right) Y_t^2 \\ &= e_3 X_t^2 + e_4 X_t Y_t + e_5 Y_t^2 \end{aligned} \quad (4.92)$$

şeklinde ifade edilebilir ve burada

$$e_3 = \frac{(\mu - 1)^2(r + \beta)}{\beta\bar{v}\omega} + \frac{(\mu - 1)\bar{\delta}}{\omega}$$

$$e_4 = -2 \left(\frac{\bar{\delta}r}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right) (\mu - 1) - \left(\frac{\bar{\delta}^2\beta\bar{v} + (\mu - 1)\bar{\delta}\beta}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right)$$

$$e_5 = \bar{\delta}\omega r$$

dir. $A = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A & -\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} \\ \bar{\delta}\beta\bar{v} & 1 \end{pmatrix}$ Jakobiyen matris olmak üzere $\lambda_1 = \mu + i\omega$ özdeğerine

karşılık gelen özvektör $q = \begin{pmatrix} \frac{(\mu - 1)}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} + i\frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak alınabilir.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A & \bar{\delta}\beta\bar{v} \\ -\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\lambda_2 = \mu - i\omega$ özdeğerine karşılık gelen p özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 1 + \bar{\delta}A - \mu + i\omega & \bar{\delta}\beta\bar{v} \\ -\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} & 1 - \mu + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c + id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} 1 + \bar{\delta}A - \mu + i\omega + \bar{\delta}\beta\bar{v}(c + id) &= 0 \\ -\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} + (1 - \mu + i\omega)(c + id) &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Burada ikinci denklemden

$$-\frac{\gamma}{\beta}\bar{\delta} + (1 - \mu)c - \omega d = 0, \quad d(1 - \mu) + \omega c = 0$$

bulunur ve $c = \frac{\gamma\bar{\delta}}{2\beta}, d = \frac{\omega\gamma\bar{\delta}}{2\beta(1 - \mu)}$ seçilir. İlk denklemde yerine yazdığımızda

$$1 + \bar{\delta}A - \mu + i\omega + \bar{\delta}\beta\bar{v} \left(\frac{\gamma\bar{\delta}}{2\beta} + i \frac{\omega\gamma\bar{\delta}}{2\beta(1 - \mu)} \right) = 0$$

elde edilir ve $p = s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma\bar{\delta}}{2\beta} - i \frac{\omega\gamma\bar{\delta}}{2\beta(1 - \mu)} \end{pmatrix}$ olarak hesaplanır. Şimdi $C^2 : \langle p, q \rangle = 1$ eşitliğini sağlayan $s \in \mathbb{C}$ sayısını bulalım:

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \bar{s} \left(\frac{(\mu - 1)}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} + i \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \right) + \bar{s} \left(\frac{\gamma\bar{\delta}}{2\beta} - i \frac{\omega\gamma\bar{\delta}}{2\beta(1 - \mu)} \right) \\ &= \bar{s} \left(-i \frac{2\gamma\omega}{A\beta} \right) = 1. \end{aligned}$$

Buradan $\bar{s} = i \frac{A\beta}{2\gamma\omega} \Rightarrow s = -i \frac{A\beta}{2\gamma\omega}$ bulunur ve $p = \begin{pmatrix} -i \frac{A\beta}{2\gamma\omega} \\ \frac{1}{2} - i \frac{A\bar{\delta}}{4\omega} \end{pmatrix}$ olur.

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{(\mu - 1)}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} + i \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{z} \begin{pmatrix} \frac{(\mu - 1)}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} - i \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

kompleks değişken dönüşümünü yapar ve hesaplamalarda kolaylık sağlaması için

$a = \frac{(\mu - 1)}{\bar{\delta}\beta\bar{v}} + i \frac{\omega}{\bar{\delta}\beta\bar{v}}$ seçilirse

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + \bar{a}\bar{z} \\ z + \bar{z} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu dönüşümü (4.90) ve (4.92) denklemleri ile verilen \tilde{f} ve \tilde{g} fonksiyonlarında yerine yazalım. Buradan

$$\begin{aligned}
F(x, r) &= \begin{pmatrix} \tilde{f}(x_1, x_2) \\ \tilde{g}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1(az + \bar{a}\bar{z})^2 + e_2(az + \bar{a}\bar{z})(z + \bar{z}) \\ e_3(az + \bar{a}\bar{z})^2 + e_4(az + \bar{a}\bar{z})(z + \bar{z}) + e_5(z + \bar{z})^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z^2(e_1a^2 + e_2a) + z\bar{z}(2e_1|a|^2 - e_2\bar{\delta}\bar{u}) + \bar{z}^2(e_1\bar{a}^2 + e_2\bar{a}) \\ z^2(e_3a^2 + e_4a + e_5) + z\bar{z}(2e_3|a|^2 - e_4\bar{\delta}\bar{u} + 2e_5) + \bar{z}^2(e_3\bar{a}^2 + e_4\bar{a} + e_5) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= e_1a^2 + e_2a \\
\phi_2 &= 2e_1|a|^2 - e_2\bar{\delta}\bar{u} \\
\phi_3 &= e_1\bar{a}^2 + e_2\bar{a} \\
\phi_4 &= e_3a^2 + e_4a + e_5 \\
\phi_5 &= 2e_3|a|^2 - e_4\bar{\delta}\bar{u} + 2e_5 \\
\phi_6 &= e_3\bar{a}^2 + e_4\bar{a} + e_5
\end{aligned} \tag{4.93}$$

olmak üzere

$$F(x, r) = \begin{pmatrix} \phi_1z^2 + \phi_2z\bar{z} + \phi_3\bar{z}^2 \\ \phi_4z^2 + \phi_5z\bar{z} + \phi_6\bar{z}^2 \end{pmatrix}$$

olarak daha sade formda ifade edilebilir. Son olarak $\langle p, F \rangle$ iç çarpımını hesaplayacak ve g_{ij} katsayılarını (2.33) ile verilen $a(0)$ formülünde yerine yazacağız.

$$\begin{aligned}
\langle p, F \rangle &= \bar{p}_1\tilde{f} + \bar{p}_2\tilde{g} \\
&= i\frac{A\beta}{2\gamma\omega}(\phi_1z^2 + \phi_2z\bar{z} + \phi_3\bar{z}^2) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{A\bar{\delta}}{4\omega}\right)(\phi_4z^2 + \phi_5z\bar{z} + \phi_6\bar{z}^2) \\
&= z^2\left(\frac{\phi_4}{2} + i\left(\frac{\phi_4A\bar{\delta}}{4\omega} + \frac{\phi_1A\beta}{2\gamma\omega}\right)\right) + z\bar{z}\left(\frac{\phi_5}{2} + i\left(\frac{\phi_5A\bar{\delta}}{4\omega} + \frac{\phi_2A\beta}{2\gamma\omega}\right)\right) \\
&\quad + \bar{z}^2\left(\frac{\phi_6}{2} + i\left(\frac{\phi_6A\bar{\delta}}{4\omega} + \frac{\phi_3A\beta}{2\gamma\omega}\right)\right) \\
&= \frac{g_{20}}{2}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve

$$g_{20} = \phi_4 + i \left(\frac{\phi_4 A \bar{\delta}}{2\omega} + \frac{\phi_1 A \beta}{\gamma\omega} \right),$$

$$g_{11} = \frac{\phi_5}{2} + i \left(\frac{\phi_5 A \bar{\delta}}{4\omega} + \frac{\phi_2 A \beta}{2\gamma\omega} \right),$$

$$g_{02} = \phi_6 + i \left(\frac{\phi_6 A \bar{\delta}}{2\omega} + \frac{\phi_3 A \beta}{\gamma\omega} \right)$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1 - 2\lambda(0))}{2(\lambda^2(0) - \lambda(0))} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\lambda}(0)} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\lambda^2 - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}(0)}{2}$$

olmak üzere

$$a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} c_1(0)) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}(0) c_1(0)) \quad (4.94)$$

ın işareti çatallanmanın yönünü belirler.

Teorem 4.10. *Eğer*

$$A^2 - 4\gamma\tilde{\nu} < 0 \quad \text{ve} \quad \delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{\nu}}$$

ise (4.54) sisteminin $(\tilde{u}, \tilde{\nu})$ denge noktasında $\delta = -\frac{A}{\gamma\tilde{\nu}}$ iken Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar. Burada $a(0) < 0$, (4.94) ile verilmek üzere

- $a(0) < 0$ ise Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma
- $a(0) > 0$ ise Subkritik Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar.

5. NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, (4.4) ve (4.54) sistemlerinin pozitif denge noktaları için analitik olarak elde edilen sonuçları desteklemek amacıyla MATLAB programı kullanılarak nümerik simülasyonlar yapılacaktır.

5.1 Flip Çatallanma için Nümerik Çalışmalar

Flip çatallanma için yapılacak nümerik çalışmalarda sığınak etkisi içeren ve içermeyen modelde parametreler

$$\gamma = \frac{1}{3}, \quad \beta = 0.5, \quad r = 2.5 \quad (5.1)$$

olarak seçilecektir. Bu parametreleri sabit tutarak iki model arasındaki tek farkın α parametresi olması bize modelleri kıyaslama, sığınak etkisinin dinamiği nasıl etkilediğini gözleme imkanı verecektir.

5.1.1 Sığınak etkisi içermeyen model

Sığınak etkisi içermeyen (4.4) sisteminde (5.1) ile verilen parametreler seçilirse

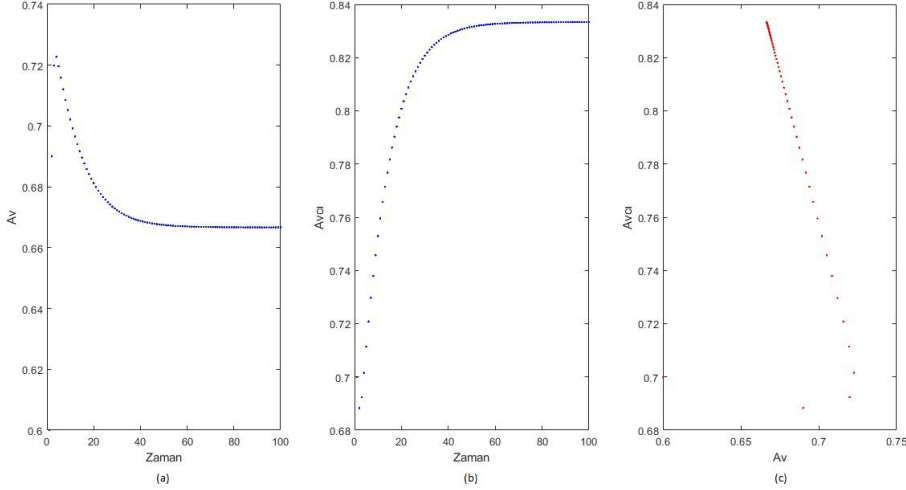
$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t + (2.5)\delta u_t(1 - u_t) - \delta u_t v_t \\ v_{t+1} = v_t \left(1 - \frac{1}{3}\delta\right) + (0.5)\delta u_t v_t \end{cases} \quad (5.2)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0.6667, 0.8333)$ olmak üzere üç denge noktası mevcuttur. Teorem (4.3)'den $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) = 1 > 0$ olduğu için

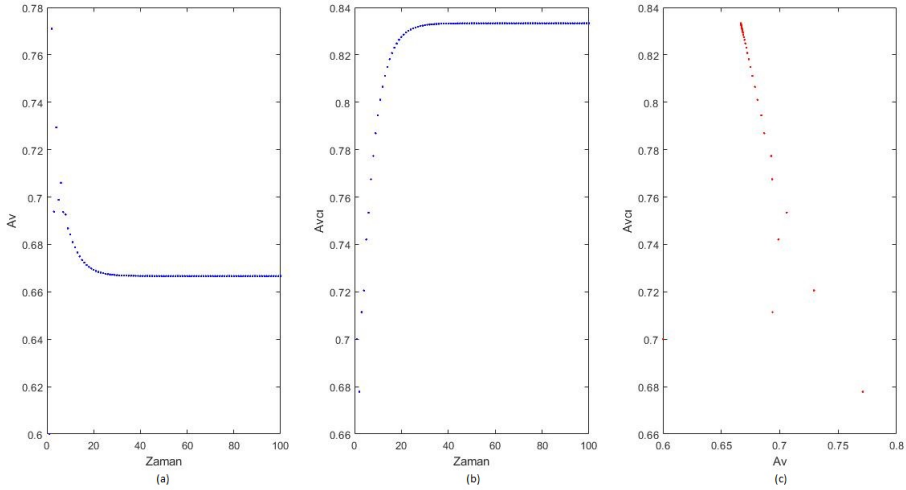
$$\text{çatallanma değeri } \delta_1 = \frac{1}{\beta - \gamma} - \frac{\sqrt{\frac{r\gamma}{\beta} \left(\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma)\right)}}{\frac{r\gamma}{\beta}(\beta - \gamma)} = 1.3524 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Bu teoreme göre (\tilde{u}, \tilde{v}) pozitif denge noktası $\delta < \delta_1$ iken kararlı, $\delta > \delta_1$ iken kararsızdır ve $\delta = \delta_1$ den hemen sonra 2-döngü ortaya çıkmaktadır.

Şekil (5.1)'de, $\delta = 0.5 < \delta_1 = 1.3524$ olarak seçildiğinden pozitif denge noktasına yakın bir başlangıç değeri ile başlandığında çözümler bir süre sonra denge noktasına ulaşmaktadır. Bu denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını nümerik olarak göstermektedir. Benzer dinamik yapı, $\delta = 0.95 < \delta_1 = 1.3524$ olduğu için Şekil (5.2)'de görülmektedir.



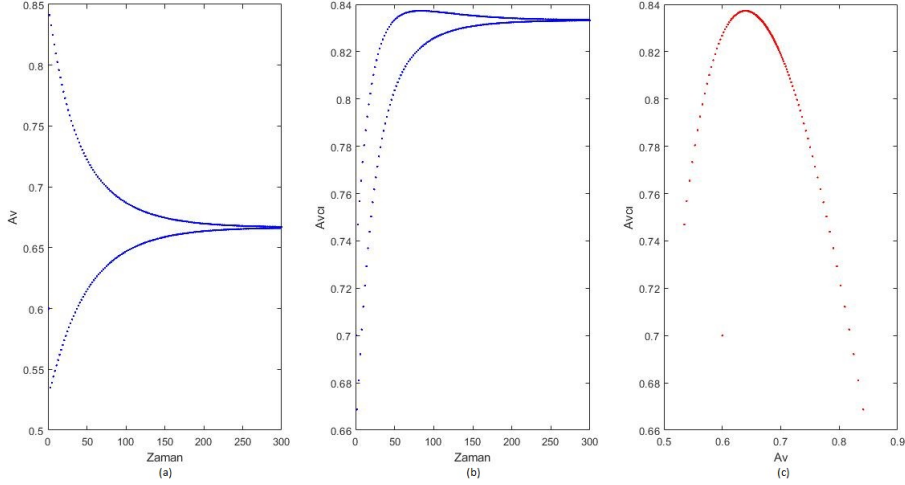
Şekil 5.1: $u(0) = 0.6$, $v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $r = 2.5$ ve $\delta = 0.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.



Şekil 5.2: $u(0) = 0.6$, $v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $r = 2.5$ ve $\delta = 0.95$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şimdi diğer tüm parametreleri sabit tutup δ yı $\delta_1 = 1.3524$ 'e yakın seçerek sistemin dinamiğinin nasıl değiştiğini gözlemleyelim.

$\delta = 1.34$ değeri, sistemin kararlılık yapısının değiştiği $\delta_1 = 1.3524$ 'e çok yakın olduğundan Şekil (5.3)'de görüldüğü üzere çözümler denge noktasına önceki δ değerleri ile elde edilen çözümlerden çok daha yavaş bir şekilde ulaşmaktadır. Bu tür kararlılık yapısına lineer olmayan kararlı yapı denir (Bakınız: Allen, 2007).



Şekil 5.3: $u(0) = 0.6$, $v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $r = 2.5$ ve $\delta = 1.34$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

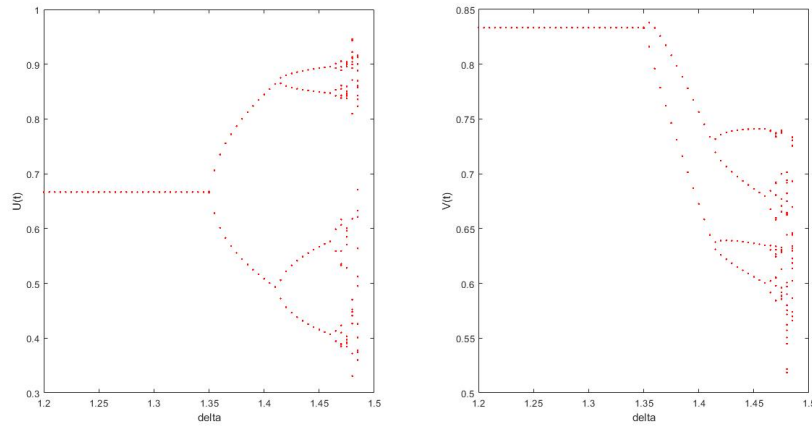
(5.1)'de verilen parametreler ve $\delta = \delta_1 = 1.3524$ seçilmesiyle Bölüm (4.2.7)'deki **F0**, **F1** ve **F2** koşulları

$$\mathbf{F0)} \quad \frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) = 1 > 0 \text{ ve } \delta_1 = 1.3524$$

$$\mathbf{F1)} \quad 2(t_1^2 + t_2 h_1) = 20.0202 \neq 0$$

$$\mathbf{F2)} \quad t_4 = -1.4788 \neq 0$$

olarak hesaplanır. Bu koşullar sağlandığı için sistem (5.2)'nin pozitif denge noktasında flip çatallanma meydana gelir. Şekil (5.4)'de seçilen parametreler ile $\delta_1 = 1.3524$ değerinde flip çatallanma meydana geldiği açıkça görülür.



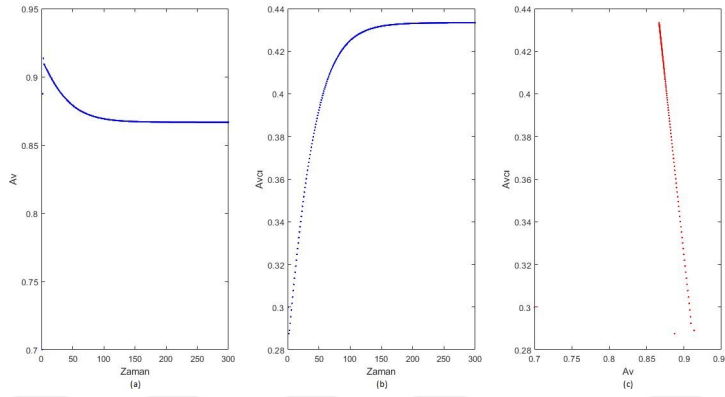
Şekil 5.4: $1.2 \leq \delta \leq 2$ aralığında değişen δ değerleri için $u(0) = 0.6$, $v(0) = 0.7$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $r = 2.5$ parametreleriyle oluşturduğu δ 'ya bağlı flip çatallanma diyagramı

5.1.2 Sığınak etkisi içeren model

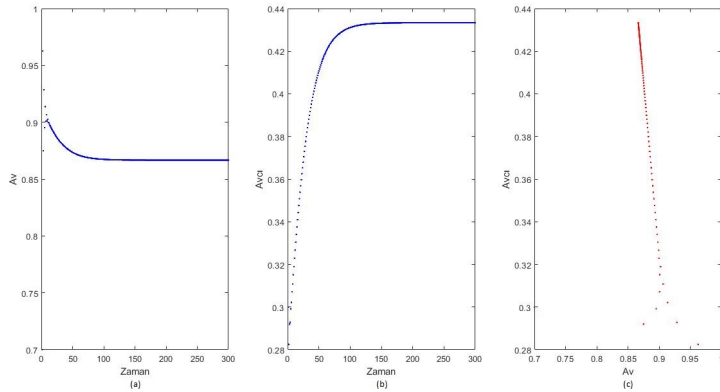
Sığınak etkisi içeren modelde (5.1) ile verilen parametrelere ek olarak $\alpha = 0.2$ seçilirse

$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t + (2.5)\delta u_t(1 - u_t) - \delta(u_t - 0.2)v_t \\ v_{t+1} = v_t \left(1 - \frac{1}{3}\delta\right) + (0.5)\delta(u_t - 0.2)v_t \end{cases} \quad (5.3)$$

elde edilir. Bu sistemin denge noktaları $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0.8667, 0.4333)$ olarak bulunur. Teorem (4.8)'den $A = -2.2667 < 0$ ve $A^2 - 4\gamma\tilde{v} = 4.56 > 0$ olduğu için çatallanma değeri $\delta_1 = 0.9087$ olarak hesaplanır. Sonuç olarak $\delta < \delta_1$ iken pozitif denge noktası kararlı, $\delta > \delta_1$ iken kararsızdır.

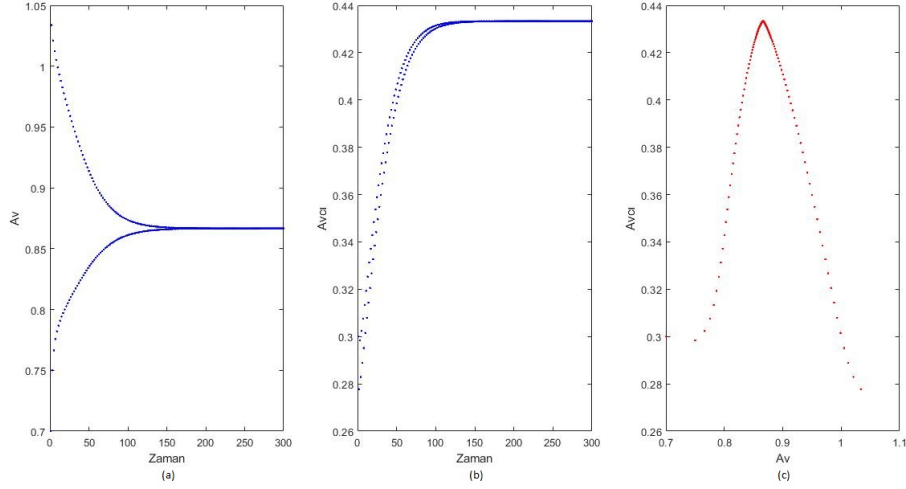


Şekil 5.5: $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ ve $\delta = 0.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.



Şekil 5.6: $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ ve $\delta = 0.7$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şekil (5.5) ve (5.6)'da seçilen δ değerleri $\delta_1 = 0.9087$ den küçük olup pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını göstermektedir.



Şekil 5.7: $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ ve $\delta = 0.89$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şekil (5.7)'de $\delta_1 = 0.9087$ 'e yakın $\delta = 0.89$ değeri için sistemdeki lineer olmayan kararlılık yapısı görülmektedir.

Bölüm (4.3.7)'deki **F0**, **F1** ve **F2** koşulları

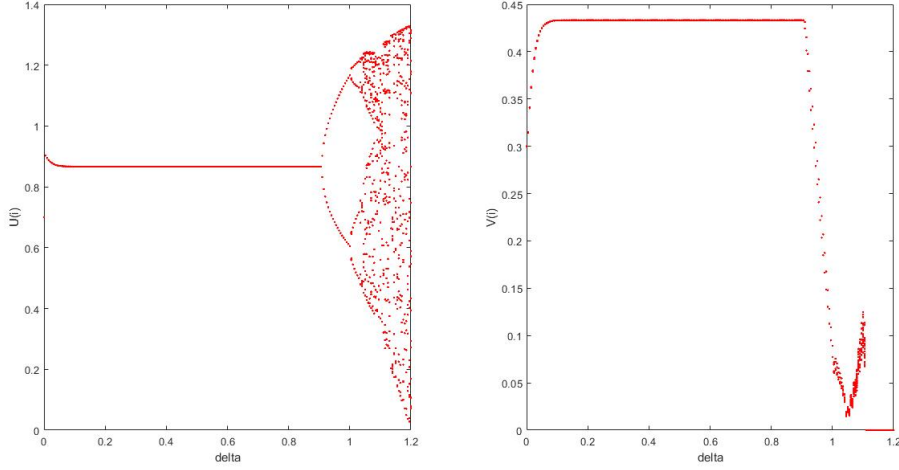
$$\mathbf{F0)} \quad A^2 - 4\gamma\tilde{v} = 4.56 > 0 \quad \text{ve} \quad \delta = \delta_1 = 0.9087 \quad \ni \quad \delta \neq 0,8823, 1,7646$$

$$\mathbf{F1)} \quad 2(t_1^2 + t_2 h_1) = 19.7243 \neq 0$$

$$\mathbf{F2)} \quad t_4 = -2.2050 \neq 0$$

olarak hesaplanır. Bu koşullar sağlandığı için sistem (5.3)'de flip çatallanma meydana gelir ve Şekil (5.4) ile çatallanma nümerik olarak gösterilmiştir.

Dikkat edilirse flip çatallanma için nümerik çalışmalar yaparken sığınak etkisi içeren ve içermeyen modelde r, β, γ parametreleri sabit tutulmuş sığınak etkisi içeren modelde $\alpha = 0.2$ seçilmiştir. Bu farklılıkla birlikte pozitif denge noktalarındaki \tilde{u} değeri artarken \tilde{v} değeri azalmıştır. Ayrıca flip çatallanmanın meydana geldiği δ_1 değeri sığınak etkisi içeren modelde daha küçüktür. Bu bize iki periyotlu döngülerin daha küçük δ değerlerinde başladığını, kararlılık yapısının δ ya göre daha erken bozulduğunu söylemektedir.



Şekil 5.8: $0 \leq \delta \leq 3$ aralığında değişen δ değerleri için $u(0) = 0.7, v(0) = 0.3$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\beta = 0.5, \gamma = 1/3, r = 2.5, \alpha = 0.2$ parametreleriyle oluşturduğu δ 'ya bağlı flip çatallanma diyagramı

5.2 Neimark-Sacker Çatallanma için Nümerik Çalışmalar

Neimark-Sacker çatallanma için yapılacak nümerik çalışmalarda sığınak etkisi içeren ve içermeyen modelde parametreler

$$\gamma = 1/3, \quad \beta = 0.5, \quad r = 0.5 \quad (5.4)$$

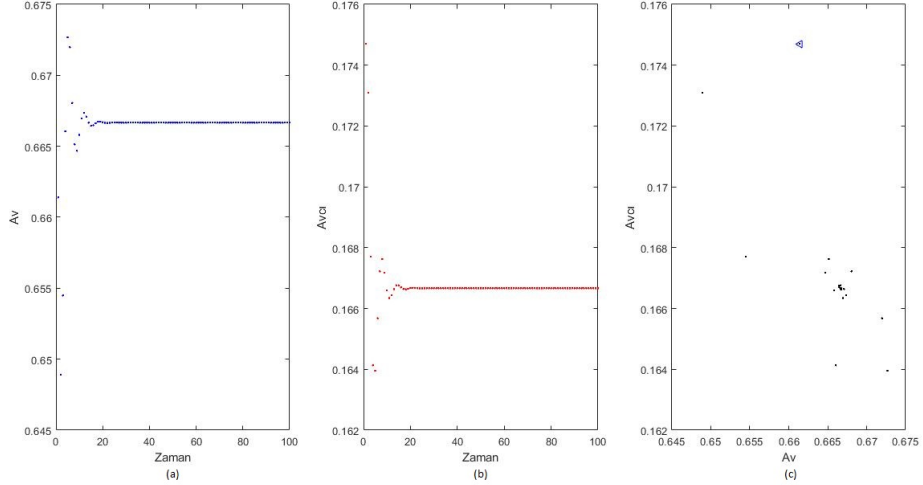
olarak alınacaktır. Bölüm (5.1)'de olduğu gibi, kıyaslama yapabilmek için iki modelin parametreleri arasındaki tek fark α değeri olacaktır.

5.2.1 Sığınak etkisi içermeyen model

Sığınak etkisi içermeyen (4.4) sisteminde (5.4) ile verilen parametreler ile

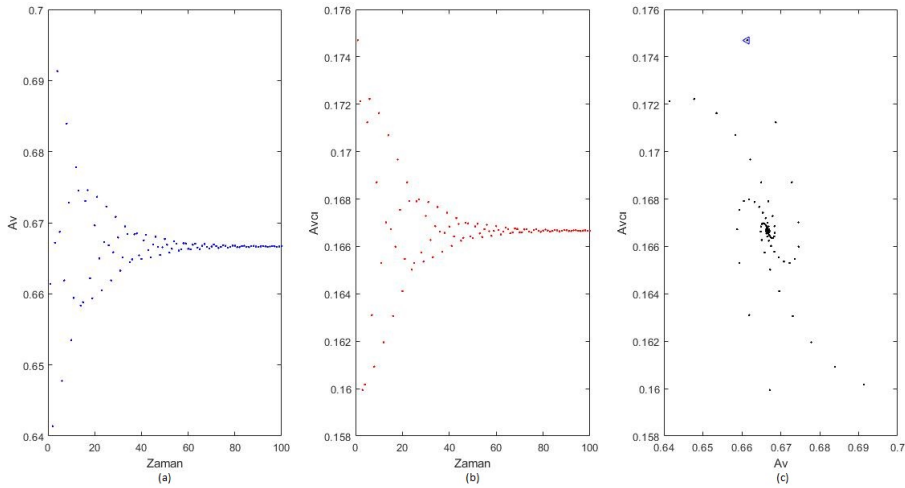
$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t + (0.5)\delta u_t(1 - u_t) - \delta u_t v_t \\ v_{t+1} = v_t \left(1 - \frac{1}{3}\delta\right) + (0.5)\delta u_t v_t \end{cases} \quad (5.5)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin denge noktaları $(0,0), (1,0)$ ve $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0.6667, 0.1667)$ olarak hesaplanır. Teorem (4.3) den $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) = -0.3333 < 0$ olduğu için çatallanma değeri $\frac{1}{\beta - \gamma} = 6$ olarak hesaplanır ve pozitif denge noktası $\delta < 6$ iken kararlı, $\delta > 6$ iken kararsızdır. Ayrıca $\delta = 6$ durumunda periyodik çözümler meydana gelmektedir.



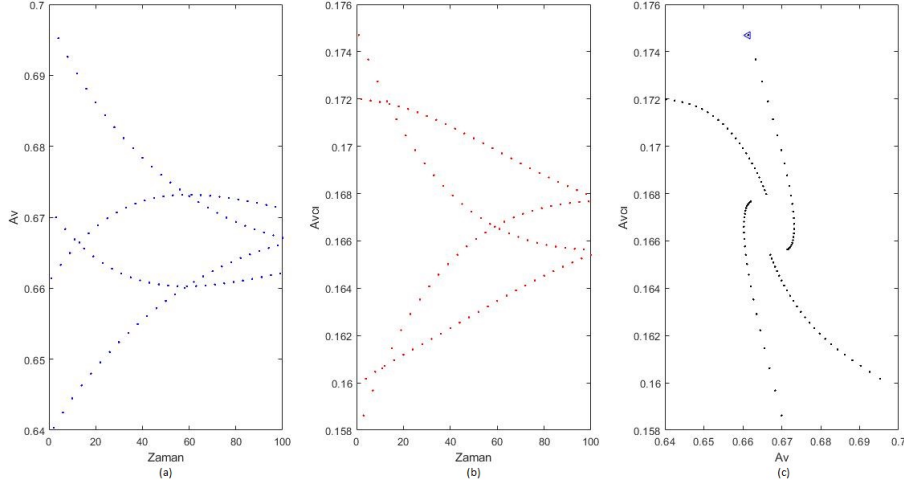
Şekil 5.9: $u(0) = 0.6614$, $v(0) = 0.1747$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $r = 0.5$ ve $\delta = 3.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şekil (5.9)'da $\delta = 3.5 < \frac{1}{\beta - \gamma} = 6$ olduğu için (5.5) sisteminin pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu görülmektedir. Şimdi aynı parametreler ile kararlılık yapısının değiştiği $\delta = 6$ değerine daha yakın δ değerleri seçerek çözümlerin davranışını inceleyelim.



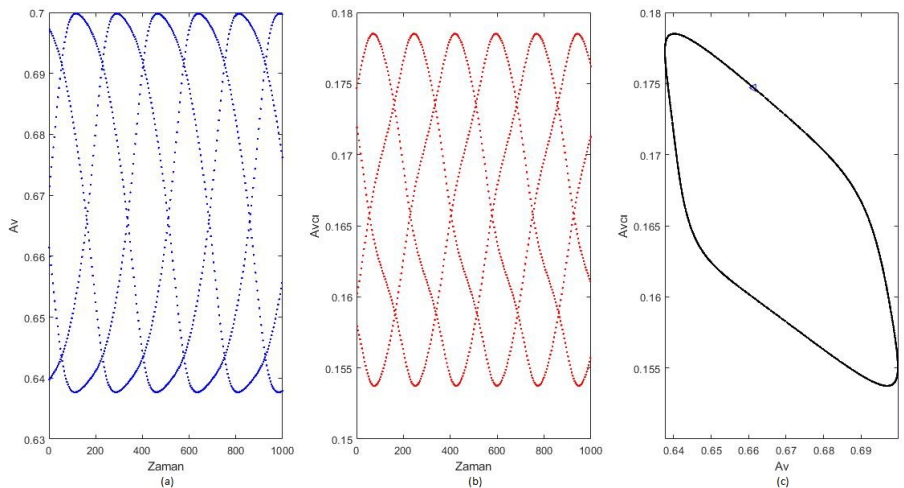
Şekil 5.10: $u(0) = 0.6614$, $v(0) = 0.1747$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $r = 0.5$ ve $\delta = 5.6$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şekil (5.10) ve (5.11)'de $\delta = 6$ değerinden küçük fakat ona yakın değerler için elde edilen çözüm grafikleri mevcuttur. Bu grafikler bize denge noktasının hala kararlı olduğunu fakat bunun linear olmayan bir yapıda olduğunu gösterir.



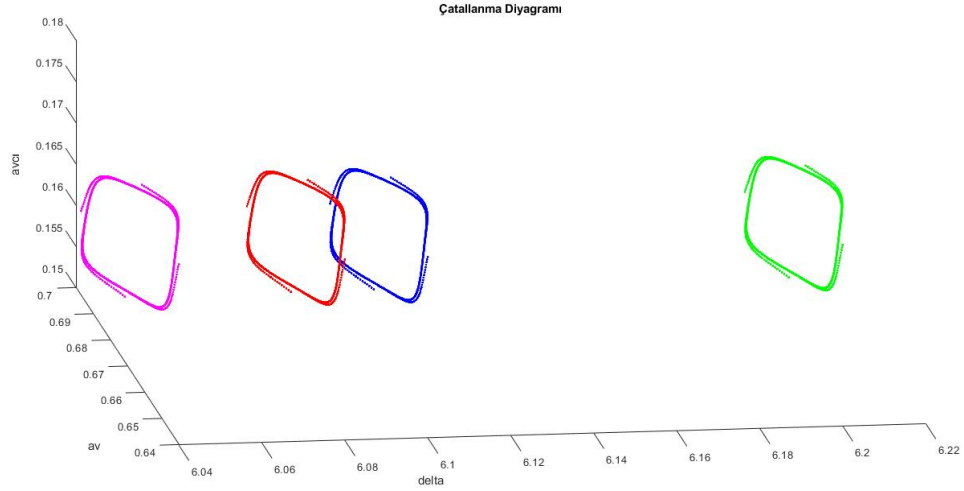
Şekil 5.11: $u(0) = 0.6614$, $v(0) = 0.1747$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $r = 0.5$ ve $\delta = 5.9$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

(5.4) de verilen parametreler ile $\frac{r\gamma}{\beta} - 4(\beta - \gamma) = -0.3333 < 0$ ve $\delta = \frac{1}{\beta - \gamma} = 6$ olduğundan (4.35)'deki koşullar sağlanmakta olup pozitif denge noktasındaki Neimark-Sacker çatallanma analizi için (4.39)'den $r'(\bar{\delta}) = \frac{r\gamma}{2\beta} = \frac{1}{6}$ olarak hesaplanır ve buradan *NS1* şartı sağlanır. (4.40) den ise *NS2* şartının sağlandığı açıktır. Bu iki şartın sağlanması Neimark-Sacker çatallanmanın $\delta = 6$ durumunda varlığını garanti ederken, Bölüm 4.2.9 da hesaplanan $a(0)$ 'ın işareti çatallanmanın yönünü belirlemektedir. (5.4) de verilen parametreler ile $a(0) = -1746$ olarak hesaplanır. Bu çatallanmanın süperkritik olduğunu, periyodik çözümlerin çatallanma değerinden sonra da ortaya çıktığını ve kararlı olduğunu söylemektedir.



Şekil 5.12: $u(0) = 0.6614$, $v(0) = 0.1747$ başlangıç değerlerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\delta = 6.05$ iken oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şekil (5.12)'de, elde edilen analitik sonuçların bir nümerik simülasyonu verilmiştir. Buna göre, verilen parametreler ile $\delta = 6.05$ iken (5.5) sisteminin pozitif denge noktasında periyodik çözümler ortaya çıkar. Şekil (5.13)'de ise periyodik çözümlerin çatallanma değerinin belirli bir komşuluğunda da var olduğu görülmektedir.



Şekil 5.13: $u(0) = 0.6614$, $v(0) = 0.1747$ başlangıç değerlerine sahip sığınak etkisi içermeyen modelin $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$ parametreleriyle sırasıyla $\delta = 6.04$, $\delta = 6.08$, $\delta = 6.1$, $\delta = 6.2$ için oluşturduğu av-avcı ilişkisi gösterilmiştir

5.2.2 Sığınak etkisi içeren model

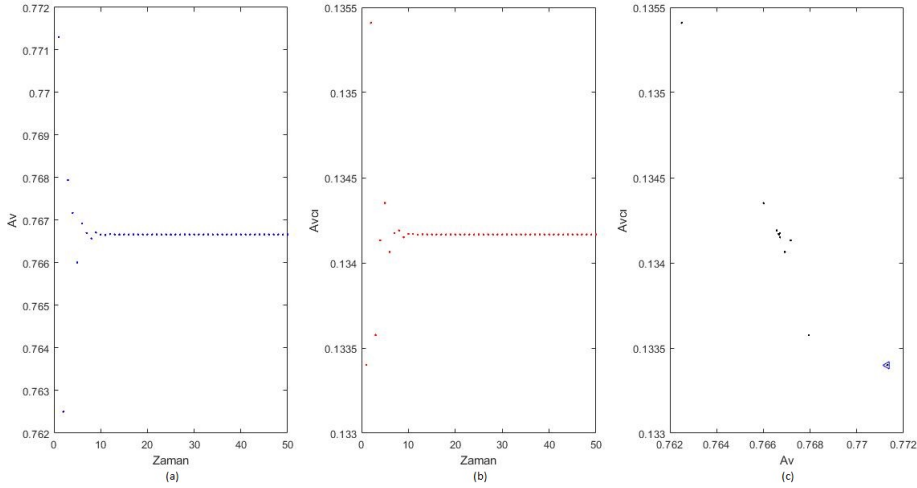
Sığınak etkisi içeren (4.54) sisteminde (5.4) ile verilen parametrelere ek olarak $\alpha = 0.1$ seçilirse

$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t + (0.5)\delta u_t(1 - u_t) - \delta(u_t - 0.1)v_t \\ v_{t+1} = v_t(1 - (0.1)\delta) + (0.5)\delta(u_t - 0.1)v_t \end{cases} \quad (5.6)$$

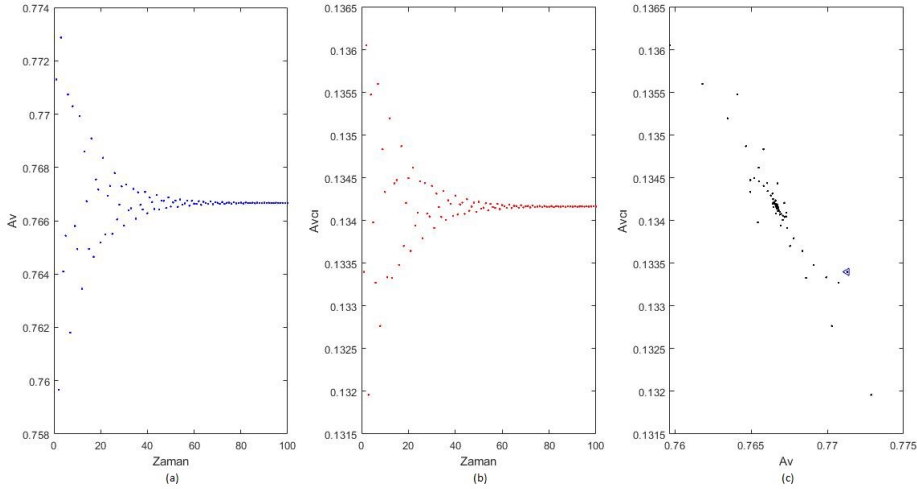
sistemi elde edilir. Bu sistemin $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (0.7667, 0.1342)$ olmak üzere üç denge noktası mevcuttur. Teorem (4.8)'den $A^2 - 4\gamma\tilde{v} = -0.0182 < 0$ olup çatallanma değeri $\delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}} = 8.9627$ olarak hesaplanır. Sonuç olarak (\tilde{u}, \tilde{v}) pozitif denge noktası $\delta < 8.9627$ iken kararlı, $\delta > 8.9627$ iken kararsızdır. $\delta = 8.9627$ de periyodik çözümler meydana gelmektedir.

Şekil (5.14), $\delta = 6.5 < \frac{-A}{\gamma\tilde{v}} = 8.9627$ olduğundan (5.6) sisteminin pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu göstermektedir.

Şekil (5.15) ve (5.16)'da $\delta = 8.9627$ değerinden küçük fakat ona yakın değerler için elde edilen çözüm grafikleri mevcuttur. Bu grafikler denge noktasının lineer olmayan bir kararlı yapıda olduğunu gösterir.

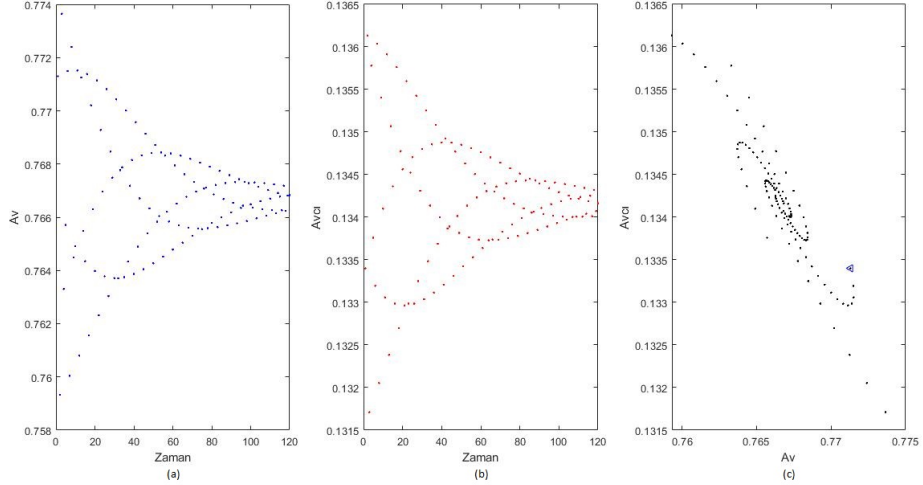


Şekil 5.14: $u(0) = 0.7713$, $v(0) = 0.1334$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.1$ ve $\delta = 6.5$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.



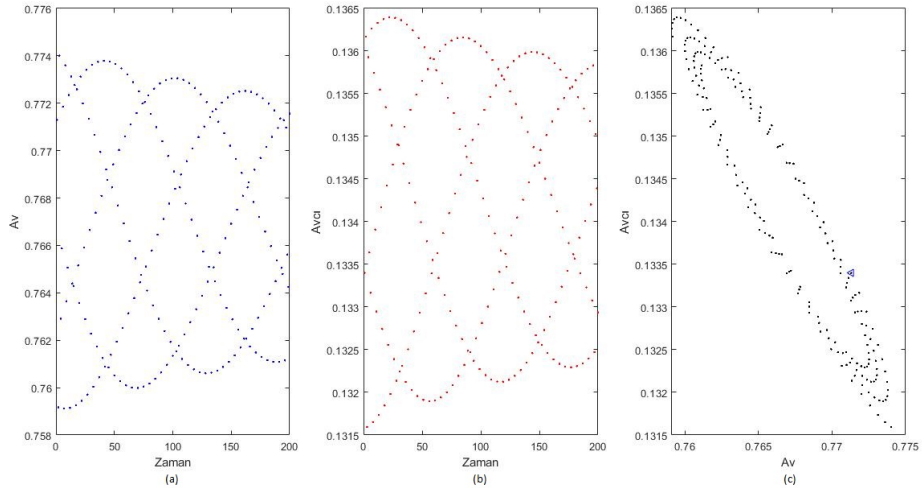
Şekil 5.15: $u(0) = 0.7713$, $v(0) = 0.1334$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.1$ ve $\delta = 8.6$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Verilen parametreler ile $A^2 - 4\gamma\tilde{v} = -0.0182 < 0$ ve $\delta = \frac{-A}{\gamma\tilde{v}} = 8.9627$ olup (4.35)'deki koşullar sağlanmaktadır. Burada $r'(\bar{\delta}) = 0.2004 \neq 0$ olarak hesaplandığından *NS1* şartı sağlanır. Ayrıca (4.86)'den ise *NS2* şartının sağlandığı açıktır. Bu durumda Neimark-Sacker çatallanma mevcuttur. Bölüm 4.3.9'da verilen $a(0)$ formülünden, (5.4) ile verilen parametreler ve $\alpha = 0.1$ ile $a(0) = -687010$ olarak hesaplanır ve bu ise çatallanmanın süperkritik olduğunu gösterir.



Şekil 5.16: $u(0) = 0.7713$, $v(0) = 0.1334$ başlangıç değerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.1$ ve $\delta = 8.85$ parametreleriyle oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

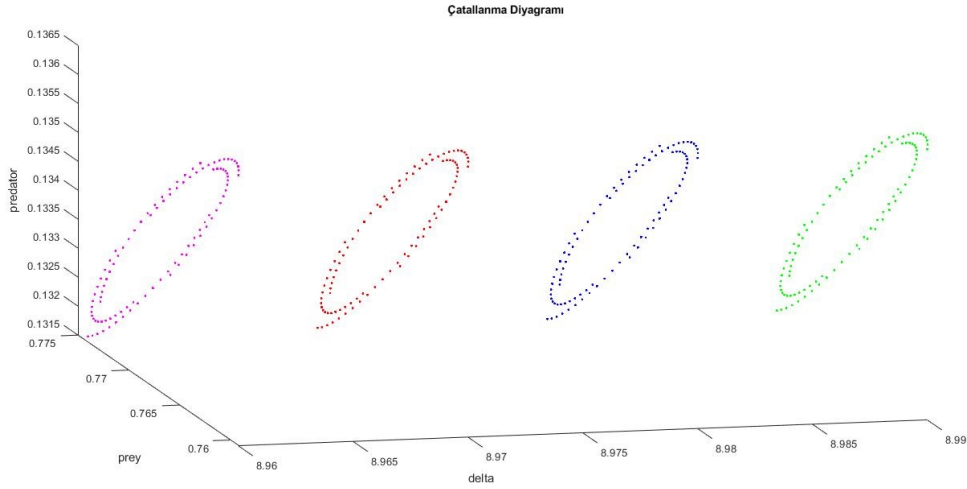
Şekil (5.17)'de çatallanma nümerik olarak görülmektedir. Buna göre, $\delta = 8.9627$ iken (4.54) sisteminin pozitif denge noktası kararlılığını kaybederken periyodik çözümler ortaya çıkar. Şekil (5.18)'de çatallanma değerinin belirli bir komşuluğunda da periyodik çözümlerin varlığı görülmektedir.



Şekil 5.17: $u(0) = 0.7713$, $v(0) = 0.1334$ başlangıç değerlerine ve $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.1$ parametrelerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\delta = 8.9627$ iken oluşturduğu av-zaman ilişkisi şekil (a), avcı-zaman ilişkisi şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Neimark-Sacker çatallanma için nümerik çalışmalar yaparken iki modelde de α hariç diğer parametreler sabit tutulmuş ve sığınak etkisi içeren modelde $\alpha = 0.1$ seçilmiştir. Bu seçimle pozitif denge noktalarındaki \tilde{u} değeri artmış fakat \tilde{v} değeri azalmıştır.

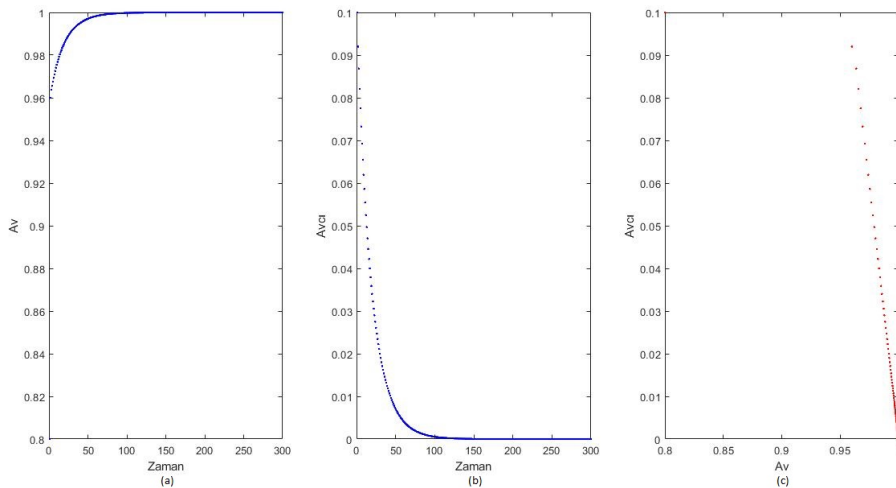
Ayrıca çatallanmanın meydana geldiği δ değeri sığınak etkisi içeren modelde daha büyüktür. Bu sığınak etkisi içeren modelde periyodik çözümlerin daha büyük δ değerlerinde meydana geldiğini göstermektedir.



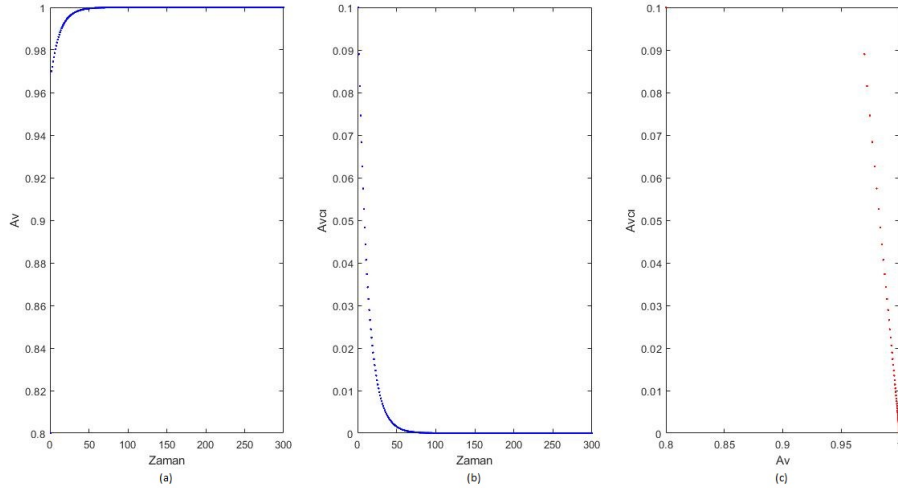
Şekil 5.18: $u(0) = 0.7713$, $v(0) = 0.1334$ başlangıç değerlerine sahip sığınak etkisi içeren modelin $\gamma = 1/3$, $\beta = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.1$ parametreleriyle sırasıyla $\delta = 8.96$, $\delta = 8.97$, $\delta = 8.98$, $\delta = 8.99$ için oluşturduğu av-avcı ilişkisi gösterilmiştir.

5.3 (1,0) Denge Noktası İçin Sığınak Etkisi

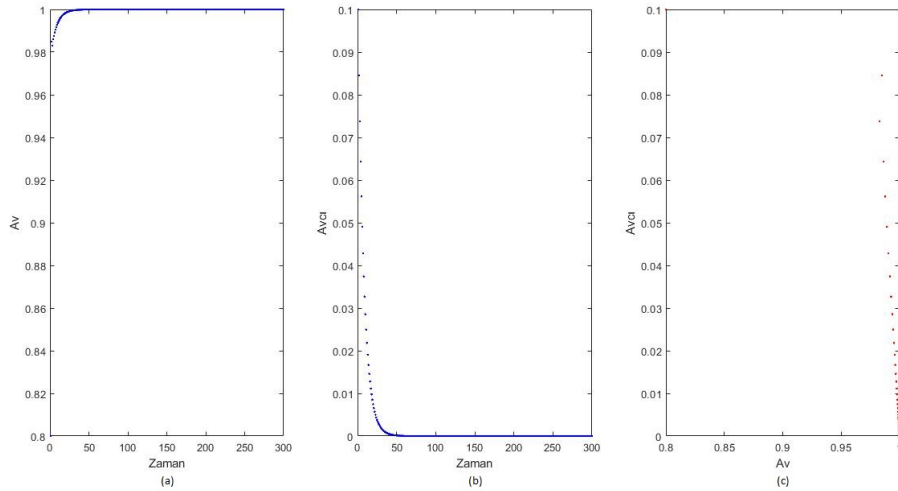
Sığınak etkisi içeren sistem, $\alpha = 0$ durumunda otomatik olarak sığınak etkisi içermeyen sisteme dönüşmektedir. Bu durumda, (1,0) denge noktasının kararlılık yapısını, sığınak etkisinin nasıl değiştirdiğini araştırmak için, r, β, γ, δ ve başlangıç değerleri sabit tutarak artan α değerlerine karşılık oluşan çözümler incelenecektir.



Şekil 5.19: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değeri ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.



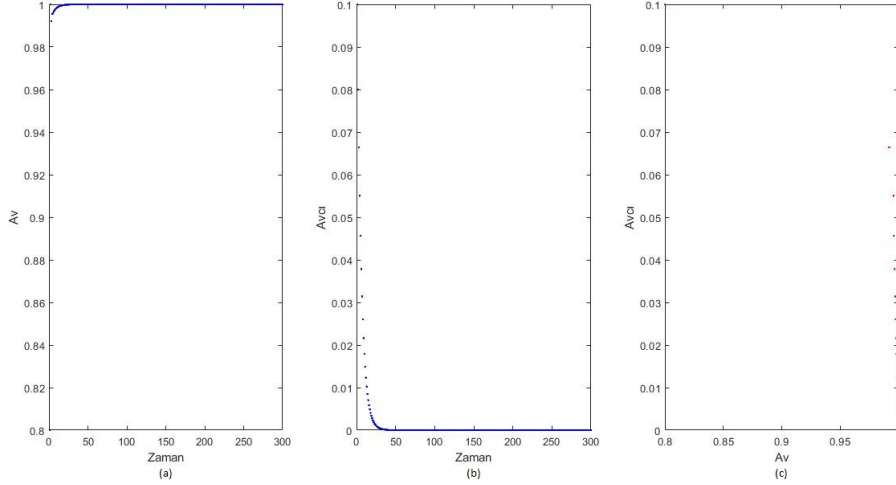
Şekil 5.20: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.2$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.



Şekil 5.21: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.5$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şekil (5.19), (5.20), (5.21) ve (5.22) incelendiğinde, sığınak etkisi arttıkça v değerlerinin daha az iterasyonla $\tilde{v} = 0$ denge noktasına yaklaştığı, dolayısıyla av türünün yok olma hızının da arttığı görülmektedir. Avcı popülasyonundaki bireylerin avlanma oranı, sığınağa yerleşen av türü bireyleri arttıkça azalacak ve avcı popülasyonunu artıran tek durumun da avlanmanın popülasyona getirişi e olduğu düşünüldüğünde sığınak etkisi arttıkça avcı popülasyonu daha hızlı yok olacaktır.

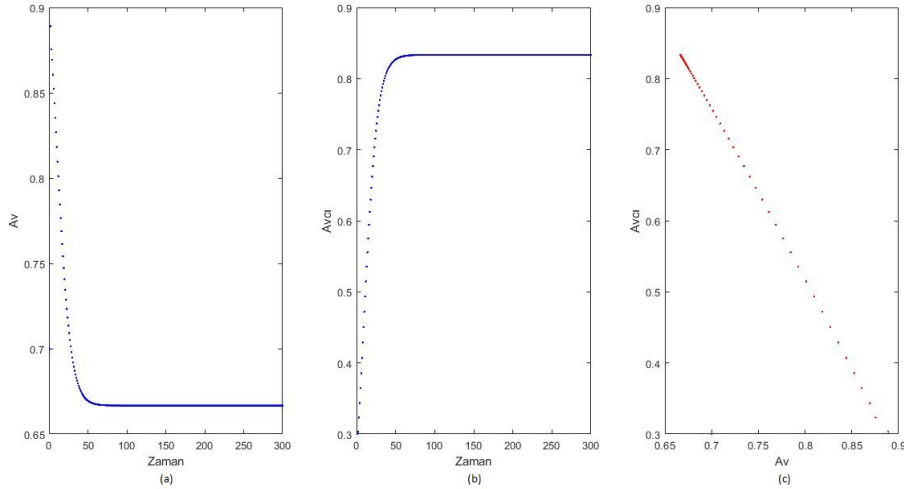
Aynı yorum av türü için de yapılabilir. Aynı anda av türünden sığınan bireyler olurken avcı sayısı da azaldığından av türü $\tilde{u} = 1$ denge noktasına daha hızlı ulaşmaktadır.



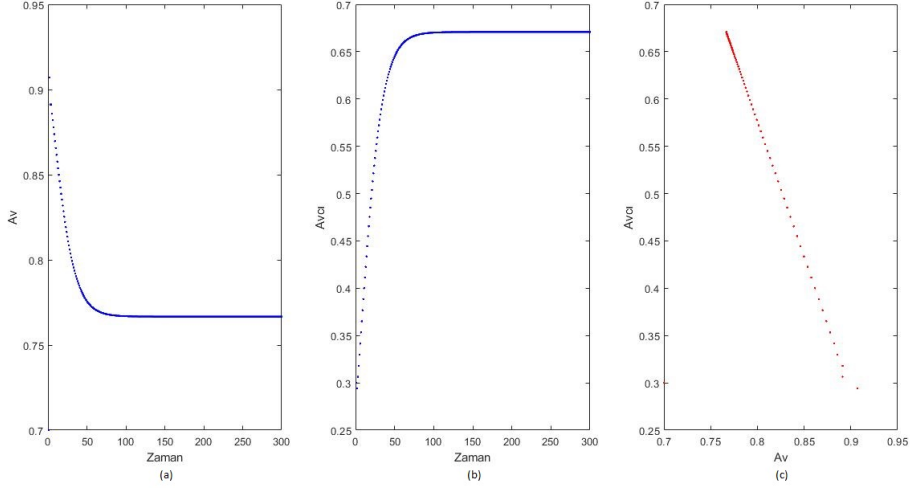
Şekil 5.22: $r = 2.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.8$ iken $u(0) = 0.8$, $v(0) = 0.1$ başlangıç koşullarına sahip $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

5.4 Pozitif Denge Noktası İçin Sığınak Etkisi

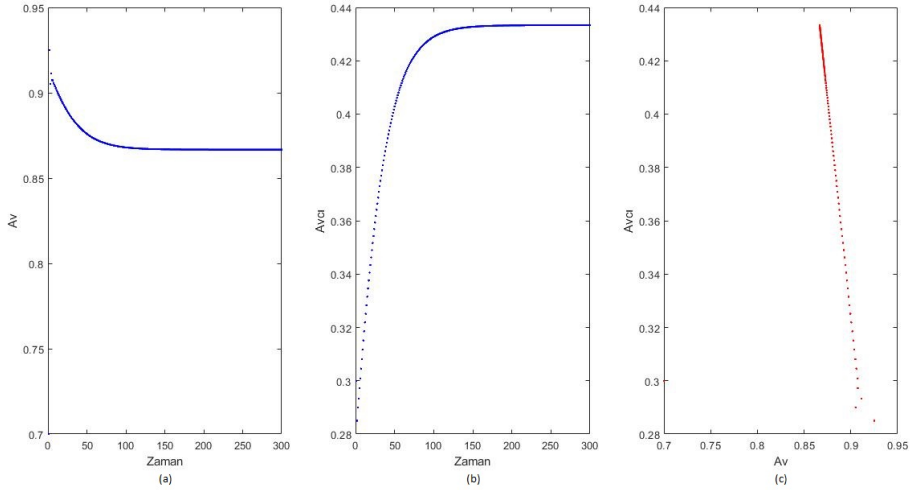
Bu bölümde ise değişen α parametresinin (\tilde{u}, \tilde{v}) denge noktasının kararlılık yapısına etkisi gözlemlenecektir. Bunun için $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$ parametreleri sabit tutularak α değerleri değiştirilecektir.



Şekil 5.23: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

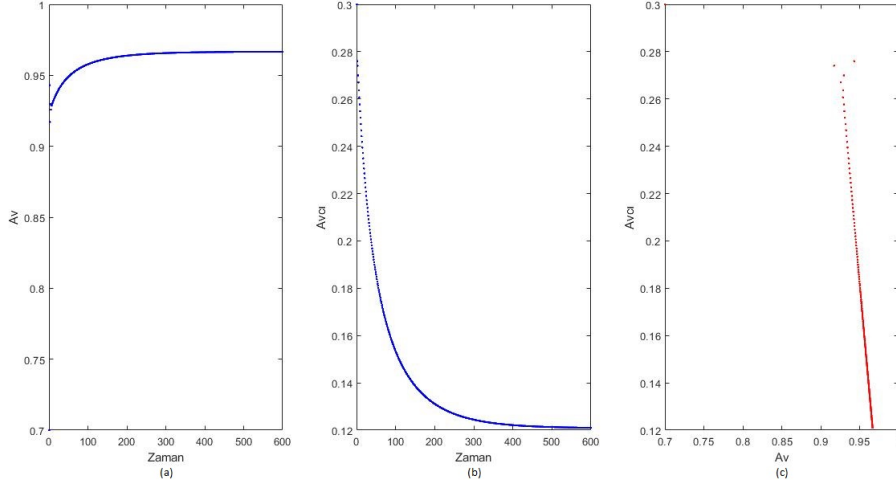


Şekil 5.24: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0.1$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.



Şekil 5.25: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0.2$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

Şekil (5.23), (5.24), (5.25) ve (5.26)'yı incelediğimizde, sığınak etkisinin içinde bulunduğu α değeri arttıkça çözümlerin denge noktasına daha çok iterasyon yaparak yaklaştığı, kararlı yapıya ulaşma süresinin arttığı görülmektedir.



Şekil 5.26: $r = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1/3$, $\delta = 0.6$, $\alpha = 0.3$ iken $u(0) = 0.7$, $v(0) = 0.3$ başlangıç koşullarına sahip sığınak etkisi içeren modelin $u(t)$ çözüm grafiği şekil (a), $v(t)$ çözüm grafiği şekil (b) ile verilmiştir. Şekil (c)'de ise aynı başlangıç değer ve parametrelere sahip sistemin faz portresi verilmiştir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Matematiksel modelleme, bugüne kadar çok çeşitli alanlarda kullanılarak insanların yaşamı ve doğayı anlamasına yardımcı olmuştur. Özellikle popülasyon modelleri, son yıllarda çok çalışılan model türüdür. Bu tür modellerde sistemin çözümlerinin belirlenmesi, şu an bilinen yöntemlerle her zaman mümkün olmamaktadır. Kararlılık ve çatallanma analizleri, çözümlerin tam olarak bilinmediği durumda, uzun vadede nasıl davranacağını öngörme imkanı sağlar.

Popülasyon dinamiğinde sıklıkla kullanılan iki tür matematiksel model vardır: diferansiyel denklemler ile tanımlanan sürekli zamanlı modeller ve fark denklemleriyle tanımlanan ayrık zamanlı modeller. Herhangi bir türün popülasyon büyüklüğü, nesiller veya ölçümler arasında sabit bir aralığa sahip olabilir. Örneğin, birçok böcek türünün ardışık nesilleri arasında örtüşme yoktur ve böylece popülasyonları ayrık zamanlı adımlarla gelişir. Popülasyon büyüklüğü küçük olduğunda veya popülasyonun nesilleri örtüşmediğinde ayrık zamanlı model kullanmak, sürekli zamanlı model kullanmaya göre daha uygundur. Ayrıca nümerik çalışmalar için ayrık zamanlı modeller, sürekli zamanlı modellerden daha verimli hesaplamalar elde etme imkanı sağlayabilir. Burada sürekli zamanlı modellerin ayrıklaştırma ihtiyacı, lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerin genellikle temel fonksiyonların kombinasyonu şeklinde yazılan analitik çözümlerinin olmamasından kaynaklanır. Çözümlerin iyi analitik yaklaşımlarını hesaplamak için ayrıklaştırma tekniği gereklidir (Debaldev, 2013).

Bu tezde, sürekli zamanlı modelden elde edilen, sığınak etkisi içeren Lotka-Volterra tipi bir ayrık av-avcı modelinin kararlılık ve çatallanma analizi yapılmıştır. Sığınağın sistemin dinamiğine etkisini anlamak için tüm analizler ilk olarak sığınak etkisi içermeyen sisteme, daha sonra sığınak etkisi içeren sisteme uygulanmıştır.

Öncelikle (4.1) ve (4.2) ile verilen diferensiyel denklem sistemleri, δ ayrıklaştırma parametresi seçilmek üzere Euler metodu ile fark denklem sistemine çevrilmiştir. Sonrasında hesaplamaların kolaylığı açısından, elde edilen sistemler boyutsuzlaştırılarak parametre sayısı düşürülmüştür ve denge noktaları bulunarak kararlılık analizi yapılmıştır.

Dinamik sistemlerde seçilen bir kontrol parametresinin değişimiyle birlikte sistemin nitel yapısında farklılıklar meydana gelebilir. Örneğin yeni denge noktaları oluşabilir, mevcut denge noktası yok olabilir veya denge noktaları kararlılık yapısını değiştirebilir. Sistemdeki bu değişikliklere çatallanma, değişimin meydana geldiği kritik parametre değerine ise çatallanma değeri denir. Çatallanma teorisi, dinamik sistemlerde yaygın olarak çalışılan bir alandır (Strogatz, 1994).

Bu çalışmada, boyutsuz (4.4) ve (4.54) sistemlerinin kararlılık analizinden sonra pozitif denge noktasındaki flip ve Neimark-Sacker tipi çatallanma analizine yer

verilmiştir. Çatallanmaların meydana gelebileceği koşullar Lemma (6.1) in ikinci ve üçüncü durumları ile belirlenmiş, çatallanmanın teorik olarak varlığı ise ikinci bölümde anlatılan teknikler ile gösterilmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre, seçilen parametreler ile sığınak etkisi arttıkça pozitif denge noktasındaki av türü artarken avcı türü azalmıştır. Avcı türünün avlanma oranının azalmasıyla beraber türde meydana gelen azalma, beklenen bir sonuçtur. Ayrıca sığınak etkisi arttıkça bu denge noktasına ulaşma süresi kısalmaktadır.

Flip çatallanmada ise sığınak etkisiyle beraber elde edilen kritik çatallanma değerinin küçüldüğü görülmektedir. Bu, sistemde değişen kararlılık yapısıyla beraber 2-döngülerin daha küçük δ değerinde meydana geldiğini söylemektedir.

Neimark-Sacker tipi çatallanma, sistemde periyodik çözümlerin olduğu bir çatallanma türüdür. Bu periyodik çözümler, modelin kullanım amacına göre farklı anlamlara gelebilir. Bu tezde kullanılan modelde, av ve avcı türünün beraber var olduğu durumu temsil etmektedir. Yapılan analizlerde, sisteme eklenen sığınak etkisiyle Neimark-Sacker çatallanma için elde edilen kritik çatallanma değerinin büyüdüğü elde edilmiştir. Yani seçilen parametreler ile sığınak etkisi arttıkça pozitif denge noktası daha büyük δ değerlerine kadar kararlı kalmakta ve sonrasında periyodik çözümler oluşmaktadır.

Bulunan tüm analitik sonuçlar beşinci bölümde MATLAB programı kullanılarak nümerik simülasyonlarla desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- Allen, L.J.S.**, *An Introduction to Mathematical Biology*, Upper Saddle River, Pearson-Prentice Hall, New Jersey, (2007).
- Agiza H.N., ELabbasy E. M., EL-Metwally, H., Elsadany, A. A.** (2009) Chaotic dynamics of a discrete prey-predator model with Holling type II, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(1), 116-129.
- Bacaër, N.**, *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (2011).
- Balarezo J. F. , Wang S., Chavez, K. G. , Al-Hourani A., Kandeepan S.** (2021) Dynamics of Botnet Propagation in Software Defined Networks using Epidemic Models, *IEEE Access*
- Baydemir, P.**, (2018) Leslie tipi bir ayrık av-avcı popülasyon modelinin kararlılık ve Neimark-Sacker çatallanma analizi (Yüksek Lisans Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Baydemir P., Merdan H., Karaoğlu, E., Sucu G.** (2020) Complex Dynamics of a Discrete-Time Prey-Predator System with Leslie Type: Stability, Bifurcation Analyses and Chaos, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 30(10), 2050149
- Bayraktar, M.**, *Analiz*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, (2010).
- Brauer, F., Castillo-Chavez, C.**, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer-Verlag, New York, (2001).
- Chen F., Ma Z., Zhang H.**, (2012) Global asymptotical stability of the positive equilibrium of the Lotka-Volterra prey-predator model incorporating a constant number of prey refuges, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 13(6), 2790-2793
- Chen L., Chen F., Chen L.**, (2010). Qualitative analysis of a predator-prey model with Holling type II functional response incorporating a constant prey refuge, *Nonlinear Anal RealWorld Appl.*, 11,246-252.
- Chen L., Chen F., Wang Y.**, (2013). Influence of predator mutual interference and prey refuge on Lotka-Volterra predator-prey dynamics, *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.*, 18, 3174-3180.
- Ch, C.-W., Hsu, S.-B., Wu L.-I.**, (1998). On the asymmetric May-Leonard model of three competing species, *SIAM J. Appl. Math.*, 58(1), 211-226.

- Chow C., Hoti M., Li C, Lan K.,** (2018). Local stability analysis on Lotka-Volterra predator-prey models with prey refuge and harvesting, *Math Meth Appl Sci.*, 41, 7711-7732.
- Davi S.,** (2012). Nonconstant prey harvesting in ratio-dependant predator-prey system incorporating a constant prey refuge, *Int J Biomath.*,5(2), 1250021.
- Das, P., Kundu, A.,** (2014). Bifurcation and chaos in delayed cellular neural network model, *Journal of Applied Mathematics and Physics*,2(5), 219-224.
- Debaldev, J.** (2013). Chaotic dynamics of a discrete predator-prey system with prey refuge, *Applied Mathematics and Computation*, 224, 848-865.
- Elaydi, S.,** *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag, New York, (1996).
- Elsadany A. A.,** (2012). Dynamical complexities in a discrete-time food chain, *Computational Ecology and Software*, 2(2), 124-139.
- Gopalsamy, K. and Leung** (1996). Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition, *Physica D*, 89, 395-426.
- Gao, S., Chen, L.** (2005). The effect of seasonal harvesting on a single-species discrete population model with stage structure and birth pulses, *Chaos, Solitons and Fractals* 2, 24, 1013?1023.
- Hale, J.K., Koçak, H.** *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, (1991).
- Hethcote H. W,** (2000). The mathematics of infectious diseases, *SIAM Review*,42, 599-653.
- Hu, Z., Teng, Z., Zhang, L.** (2011). Stability and bifurcation analysis of a discrete predator-prey model with nonmonotonic functional response, *Nonlinear Anal., Real World Appl.*, 12, 2356?2377.
- Ji L., Wu C.,** (2010). Qualitative analysis of a predator-prey model with constant-rate prey harvesting incorporating a constant prey refuge, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, 2285-2295.
- Kar T.K.,** (2006). Modelling and analysis of a harvested prey-predator system incorporating a prey refuge, *J Comput Appl Math.*, 185, 19-33.
- Karaoğlu, E.,** (2018) Gecikmeli bir yapay sinir ağı modeli ile gecikmeli bir av-avcı modelinin kararlılık ve Hopf çatallanma analizleri (Doktora Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kayan, Ş.,** (2018) Tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon sistemleri için Hopf çatallanma analizi algoritması ve uygulamaları (Doktora Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

- Kolman, B., Hill, D.R.**, *Elementary Linear Algebra with Applications*, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, (2008).
- Kozusko, F., Bajzer Ĺ.** (2003). Combining Gompertzian growth and cell population dynamics, *Mathematical Biosciences*, 185, 153-167.
- Kuang, Y.** (1988). Nonuniqueness of limit cycles of gause-type predator-prey systems, *Application Analysis*, 29, 269-287.
- Kuznetsov, Y.A.**, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1998).
- Liu, X., Dongmei X.** (2007). Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(1), 80-94.
- MATLAB** version R2019b. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., (2019).
- Ma, Z.**, (2010) The Research of Predator-Prey Models Incorporating Prey Refuges (PhD thesis), Lanzhou University, Lanzhou.
- Ma Z., Chen F., Wu C., Chen W.**, (2013). Dynamic behaviors of a Lotka-Volterra predator-preymodel incorporating a prey refuge and predator mutual interferenc, *Appl Math Comput.*, 219, 7945-7953.
- May, R.M.**, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, NJ, USA, (1974).
- Murray, J.D.**, *Mathematical Biology I: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, (2002).
- Ogata, K.**, *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1987).
- Strogatz, S.**, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Books Publishing, New York, (1994).
- Wiggins, S.**, *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos*, Springer-Verlag, New York, (2003).
- Xiao D., Jennings L.S.**, (2005). Bifurcations of a ratio-dependent predator-prey system with constant rate harvesting, *SIAM J Appl Math.*, 65, 737-753.
- Yang W.**, (2013) Diffusion has no influence on the global asymptotical stability of the Lotka-Volterra prey-predator model incorporating a constant number of prey refuges , *Applied Mathematics and Computation*, 223, 278-280.
- Zhu H., Zou X.**, (2008) Impact of delays in cell infection and virus production on HIV-1 dynamics, *Math Med. Biol.*, 25(2), 99-112.

EKLER

EK 1 : Bazı Temel Teoremler ve Kavramlar

EK 2 : Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü



EK 1: Bazı Temel Teoremler ve Tanımlar

Kapalı Fonksiyon Teoremi . (Bayraktar, 2010)

Kabul edelim ki $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ açık bir küme ve $(x_0, y_0) \in U$ öyle ki $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. Ayrıca $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, şeklinde tanımlı bir F fonksiyonu

1. $F(x_0, y_0) = 0$ dır.
2. $F \in C^\infty(N_\delta(x_0, y_0))$ dır. Yani, pozitif bir δ değeri için $N_\delta(x_0, y_0)$ komşuluğunda, F fonksiyonunun türevleri (her mertebeye) süreklidir.
3. $\det(F_y(x_0, y_0)) \neq 0$ öyle ki $F_y(x, y) = \left(\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y_j} \right), 1 \leq k, j \leq m$.

şartlarını gerçeksinsin. O halde,

- a) $F(x, f(x)) \equiv 0$ olacak şekilde, $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde tanımlı bir tek $y = f(x)$ fonksiyonu vardır
- b) $y_0 = f(x_0)$ dır.
- c) $f \in C^\infty(V)$ ve $x \in V$ için

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$F_y(x, y) = \left(\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y_j} \right), \quad 1 \leq k, j \leq m,$$

$$F_x(x, y) = \left(\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq n$$

olup

$$\det(F_y(x, f(x))) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -[F_y(x, f(x))]^{-1} F_x(x, f(x))$$

olarak hesaplanır.

Ters Dönüşüm Teoremi . (Bayraktar, 2010)

S, \mathbb{R}^2 de açık bir küme ve $f = (f_1, f_2) : S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü verilmiş olsun. Üstelik $f \in C^1(S)$ ve $p_0 = (x_0, y_0) \in S$ için

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} \Big|_{p_0} \neq 0$$

olduğunu farzedelim. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde

$$f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = (u_0, v_0)$$

noktasının $N_r(u_0, v_0)$ civarı vardır.

1. $N_r(u_0, v_0)$ da tanımlı bir tek

$$g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)) = (x, y)$$

dönüşümü vardır.

2. $g(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ dir.

3. $g = (g_1, g_2) \in C^1 N_r(u_0, v_0)$ dir.

4. $N_r(u_0, v_0)$ da $f(g(u, v)) = (u, v)$ dir. (g, f nin tersidir.)

5. $N_r(u_0, v_0)$ da

$$\frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

dir.

6. $g, (x_0, y_0)$ in bir civarında birebirdir.

7. Uygun bir $\epsilon > 0$ için $S^* = \{g(x, y) : (x, y) \in N((x_0, y_0); \epsilon)\}$ açık bir kümedir.

Topolojik Denklik

f fonksiyonu analitik olmak üzere, parametreye bağlı

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1 \quad (6.1)$$

ayrık dinamik sistemini ele alalım. Bu sistemin Jakobiyen matrisinin $(0, 0)$ noktasındaki değeri $A(\alpha)$ olsun.

İlk olarak, $\alpha = 0$ olduğu durumu ele alalım. Burada $f(x, 0) = f(x)$ olmak üzere (6.1) sistemi

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.2)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $A := A(0)$ olarak tanımlanabilir. Böylelikle lineer olmayan (6.2) sistemi

$$x \mapsto Ax \quad (6.3)$$

lineer sistemine çevrilebilir. Dikkat edilirse orijin hem (6.2) sistemi hem de (6.3) sistemin denge noktasıdır.

Şimdi de kabul edelim ki $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri A Jakobiyen matrisine karşılık gelen özdeğerler olsun. Ayrıca kabul edelim ki reel kısmı negatif olan n_- tane, reel kısmı pozitif olan n_+ tane ve reel kısmı sıfır olan n_0 tane özdeğer mevcut olsun. Burada tüm özdeğerlerin reel kısmı sıfırdan farklı ise hiperbolik denge noktası olarak adlandırılır.

Tanım. Kabul edelim ki ϕ , (6.2) sisteminin denge noktasını içeren, ψ ise (6.3) sistemin denge noktasını içeren bir açık küme olmak üzere ϕ deki yörüngeleri ψ deki yörüngelere eşleyen bir $H : \phi \rightarrow \psi$ homeomorfizmi¹ mevcut olsun. Bu taktirde, (6.2) sistemi ile (6.3) sistemine orijinin civarında topolojik olarak denktir denir.

Lemma 6.1. (Baydemir, 2018)

Kabul edelim ki $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$ ikinci dereceden reel katsayılı bir polinom olsun ve λ_1 ile λ_2 , $F(\lambda)$ polinomunun iki kökü olsun. Öyleyse,

1. $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow F(1) > 0, F(-1) > 0$ ve $C < 1$,
2. $\lambda_1 = -1$ ve $|\lambda_2| \neq 1 \Leftrightarrow F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$,
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, |\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1 \Leftrightarrow B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$

dir.

İspat. İspat iki durumda ele alınacaktır. Birinci durum $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olması, ikinci durum ise $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ olmasıdır.

Durum I - Kabul edelim ki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsun. λ_1 ve λ_2 , $F(\lambda)$ polinomunun kökleri olduğundan

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$$

$$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$$

¹ ϕ ve ψ topolojik uzaylar olmak üzere $H : \phi \rightarrow \psi$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca, H fonksiyonu sürekli olup H fonksiyonunun tersi H^{-1} mevcut ve sürekli olsun. Bu taktirde H fonksiyonuna *homeomorfizm* denir (Yıldız, 2005).

olarak bulunur.

1. (\Rightarrow) Kabul edelim ki $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olsun. Bu durumda $-1 < \lambda_1 < 1$ ve $-1 < \lambda_2 < 1$ olduğunu biliyoruz.

O halde $F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$ ve $F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) > 0$ gerçekleşir.

Son olarak her λ_1, λ_2 değeri için $\lambda_1 \lambda_2 \leq |\lambda_1 \lambda_2| = |\lambda_1| |\lambda_2|$ olup hipotezden $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ eşitsizliklerini kullanırsak $C = \lambda_1 \lambda_2 < 1$ bulunur.

(\Leftarrow) Tersine, kabul edelim ki $F(-1) > 0, F(1) > 0$ ve $C < 1$ olsun. Öyleyse, $F(1) > 0$ ise $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$ olup

i) $(1 - \lambda_1) > 0$ ve $(1 - \lambda_2) > 0$

veya

ii) $(1 - \lambda_1) < 0$ ve $(1 - \lambda_2) < 0$

$F(-1) > 0$ ise $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) > 0$ olup

iii) $(1 + \lambda_1) > 0$ ve $(1 + \lambda_2) > 0$

veya

iv) $(1 + \lambda_1) < 0$ ve $(1 + \lambda_2) < 0$

$C < 1$ ise

v) $\lambda_1 \lambda_2 < 1$

sağlanır.

Yukarıdaki ifadelerden **ii)** ve **v)** koşulu aynı anda sağlanmaz. Çünkü **ii)** koşulunun sağlanması durumunda $\lambda_1 > 1$ ve $\lambda_2 > 1$ olup $\lambda_1 \lambda_2 > 1$ gerçekleşeceğinden bu durum **v)** koşulu ile çelişir.

Benzer şekilde **iv)** ve **v)** koşulu da aynı anda sağlanmaz. Çünkü **iv)** koşulunun sağlanması durumunda $\lambda_1 < -1$ ve $\lambda_2 < -1$ olup $\lambda_1 \lambda_2 > 1$ gerçekleşeceğinden bu durum **v)** koşulu ile çelişir.

O halde, $F(-1) > 0, F(1) > 0$ ve $C < 1$ hipotezlerinin gerçekleşebilmesi için

i) $1 - \lambda_1 > 0$ ve $1 - \lambda_2 > 0$

$$\text{iii)} 1 + \lambda_1 > 0 \quad \text{ve} \quad 1 + \lambda_2 > 0$$

$$\text{v)} \lambda_1 \lambda_2 < 1$$

koşullarının aynı anda sağlanması gerekmektedir. Şimdi **i)**, **iii)** ve **v)** koşulları altında $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ ifadelerinin gerçekleştiğini gösterelim:

$$\text{i)} (1 - \lambda_1) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 1$$

$$\text{iii)} (1 + \lambda_1) > 0 \Rightarrow \lambda_1 > -1$$

olup $-1 < \lambda_1 < 1$ ise $|\lambda_1| < 1$ gerçekleşir.

Benzer şekilde

$$\text{i)} (1 - \lambda_2) > 0 \Rightarrow \lambda_2 < 1$$

$$\text{iii)} (1 + \lambda_2) > 0 \Rightarrow \lambda_2 > -1$$

olup $-1 < \lambda_2 < 1$ ise $|\lambda_2| < 1$ olarak bulunur.

2. Kabul edelim ki $\lambda_1 = -1$ ve $|\lambda_2| \neq 1$ olsun. $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ olduğunu gösterelim.

$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$ olup hipotez gereği $\lambda_1 = -1$ olduğu için $F(-1) = 0$ olarak bulunur. Ayrıca $B = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -(-1 + \lambda_2) = 1 - \lambda_2$ olmak üzere $\lambda_2 \neq -1, 1$ olduğundan $B \neq 0, 2$ elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ olsun. O halde

$F(-1) = 0$ ise $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = 0$ olup $\lambda_1 = -1$ veya $\lambda_2 = -1$ ya da $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -1$ olmalıdır.

$B \neq 0, 2$ ise $-(\lambda_1 + \lambda_2) \neq 0, 2$ dir. Eğer $\lambda_1 = -1$ ve $B \neq 0, 2$ ise $-(-1 - \lambda_2) \neq 0, 2$ buradan $\lambda_2 \neq -1, 1$ olup $|\lambda_2| \neq 1$ olarak bulunur. Eğer $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -1$ olarak alınırsa $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$ olup $B = 2$ olarak bulunur. Bu ise hipotez ile çelişir.

Benzer şekilde, $\lambda_2 = -1$ ve $B \neq 0, 2$ olduğunu varsayalım. O halde $-(\lambda_1 - 1) \neq 0, 2$ olup $\lambda_1 \neq -1, 1$ bulunur. Bu da bize $|\lambda_1| \neq 1$ olduğunu söyler.

3. Bu madde kompleks kökler için geçerlidir.

Böylelikle ispatın ilk kısmı tamamlanır. Şimdi de ikinci durumu ele alalım.

Durum II - Kabul edelim ki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ olsun.

1. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$) olmak üzere $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$ olsun. O halde $|\lambda_1| = |\lambda_2| = a^2 + b^2$ dir.

Öncelikle $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ iken $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ olduğunu gösterelim.

$$F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) = (1 - (a + ib))(1 - (a - ib)) = (1 - a)^2 + b^2 > 0.$$

Benzer şekilde,

$$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = (1 + (a + ib))(1 + (a - ib)) = (1 + a)^2 + b^2 > 0$$

gerçeklenir. Son olarak, $C = \lambda_1 \lambda_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 < 1$ şartı sağlanır.

Tersine, kabul edelim ki $F(1) > 0, F(-1) > 0$ ve $C < 1$ sağlansın. Hipotezden, $C = \lambda_1 \lambda_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ sağlanır. Böylelikle birinci maddenin ispatını tamamlanır.

2. Bu madde sadece reel kökler için geçerlidir.

3. Kabul edelim ki $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olsun. Göstermeliyiz ki $B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$ şartları sağlanır.

Eğer $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ ise $a^2 + b^2 = 1$ dir. $B = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -(a + ib + a - ib) = -2a$ ve $C = \lambda_1 \lambda_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = 1$ olup $C = 1$ şartı sağlanır. Öte yandan, $B^2 - 4C = (-2a)^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$ gerçekleşir.

Şimdi de kabul edelim ki $C = 1$ ve $B^2 - 4C < 0$ olsun. O halde göstermeliyiz ki $F(\lambda)$ polinomunun $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$) olmak üzere $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ koşulunu sağlayan kompleks iki kökü vardır.

$B = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ ve $C = 1$ olduğundan $B^2 - 4C < 0$ ise $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < 0$ olarak bulunur. Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsaydı $\lambda_1 = \lambda_2$ iken $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ iken $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0$ olurdu. Bu ise $B^2 - 4C < 0$ olması ile çelişir. O halde kökler reel olamaz.

Hipotezden $C = 1$ ise $\lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 = 1$ olması $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olduğunu söyler.

Böylelikle lemmanın ispatı tamamlanır ve sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.1. *Birinci dereceden lineer olmayan fark denklemlerinden oluşan bir sistemi ele alalım ve kabul edelim ki $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C \ni B, C \in \mathbb{R}$, sistemin denge noktasındaki Jakobiye matrisine karşılık gelen karakteristik polinomu olsun. Öyleyse,*

1. $F(1) > 0, F(-1) > 0$ ve $C < 1$ ise denge noktası kararlıdır,
2. $B \neq 0, 2$ ve $F(-1) = 0$ ise flip çatallanma ortaya çıkabilir,
3. $B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$ ise Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkabilir.

EK 2: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

Türkçe terim

İngilizce Terim

Adi diferensiyel denklem

Ordinary differential equation

Ayrık av-avcı modeli

Discrete-time predator-prey model

Çatallanma

Bifurcation

Denge noktası

Equilibrium Point

Değişmez

Invariant

Düzgün

Smooth

Hiperbolik

Hyperbolic

Kararlılık

Stability

Karakteristik

Characteristic

Lineer

Linear

Manifold (Çok Katlı)

Manifold

Merkez Manifold

Center Manifold

Nitel

Qualitative

Özdeğer

Eigenvalue

Özvektör

Eigenvector

Subkritik

Subcritical

Süperkritik

Supercritical

Süperpozisyon Prensibi

Principle of Superposition

Topolojik Olarak Denklik

Topologically Equivalent

Yerel (Lokal)

Local

Yön

Direction