

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ KÜPLERİNİN ROMAN TİPİ BASKINLIK SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Melis Berçin YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Zülfükar SAYGI

HAZİRAN 2022



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Melis Berçin YILMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FİBONACCİ KÜPLERİNİN ROMAN TİPİ BASKINLIK SAYILARI

Melis Berçin YILMAZ

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Zülfükar SAYGI

Tarih: HAZİRAN 2022

Bağlantı ağları çoklu bilgisayarların iletişim ihtiyaçları için geliştirilmiştir. Bağlantı ağları, köşe kümesi $V(G)$ ve kenar kümesi $E(G)$ olan bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesi ile temsil edilebilir. Burada $V(G)$ kümesi işlemcileri, $E(G)$ kümesi ise iletişim ağlarını gösterir. En temel bağlantı ağı modellerinden biri n boyutlu hiperküp Q_n çizgesidir. Bu çizgenin köşeleri uzunluğu n olan tüm ikili diziler ile etiketlenirken, sadece birer koordinatı farklı olan köşelerin birleştirilmesi ile kenar kümesi oluşturulur. n boyutlu Fibonacci küpü Γ_n , Q_n çizgesinin köşe kümesinden ardışık bir içeren tüm köşelerin çıkarılması ile elde edilir.

G bir çizge ve D kümesi G çizgesinin köşe kümesi olan V kümesinin bir alt kümesi olsun. V kümesindeki her bir köşe, D kümesinin bir elemanı veya D kümesinin bir elemanına komşu ise D kümesine baskın köşe kümesi denir. Baskın köşe kümelerinden en az elemanlı olanlarına minimal baskın küme ve bu kümenin eleman sayısına G çizgesinin baskınlık sayısı denir. Literatürde Fibonacci küplerinin bazı baskınlık tipi sayıları bilinmektedir. Fakat, savaş stratejisi olarak geliştirilen ve yardım kaynağı paylaşımı problemine de uygulanabilir olan Roman baskınlık problemi Fibonacci küpleri için literatürde çalışılmamıştır. Bu tezde, Roman baskınlık sayısı, zayıf Roman baskınlık sayısı ve çift Roman baskınlık sayısı olmak üzere üç adet Roman tipi baskınlık sayıları ele alınmıştır. Tam sayı lineer programlama problemleri çözülerek Fibonacci küpleri için bu baskınlık sayıları $n \leq 10$ olmak üzere hesaplanmış ve $11 \leq n \leq 13$ boyutları için en iyi alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci küp, Hiperküp, Roman baskınlık sayısı.

ABSTRACT

Master of Science

ROMAN TYPE DOMINATION NUMBERS OF FIBONACCI CUBES

Melis Berçin YILMAZ

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Zülfükar SAYGI

Date: June 2022

Interconnection networks have been developed for the communication needs of multiple computers. Interconnection networks can be represented by a graph $G = (V(G), E(G))$ with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. Here, the set $V(G)$ represents the processors and the set $E(G)$ represents the communication networks. One of the most basic interconnection models is the n -dimensional hypercube, Q_n . While the vertices of this graph are labeled with all binary strings of length n , the edge set is formed by combining vertices with only one coordinate different. The n Fibonacci cube Γ_n is obtained by deleting all vertices containing a consecutive 1 from the vertex set of Q_n .

Let G be a graph and D be a subset of V , which is the vertex set of graph G . If each vertex in V is adjacent to an element of D or an element of D , the set D is called the domination set. The domination sets with the least number of elements are called the minimal domination set and the number of elements of this set is called the domination number of the G graph. Some domination type numbers of Fibonacci cubes are known in the literature. However, the Roman domination problem, which was developed as a war strategy and can be applied to the resource sharing problem, has not been studied in the literature for Fibonacci cubes. In this thesis, three Roman type domination numbers, namely Roman domination number, weak Roman domination number and double Roman domination number are discussed. By solving integer linear programming problems, these domination numbers are calculated as $n \leq 10$ for Fibonacci cubes and the best lower and upper bounds are obtained for $11 \leq n \leq 13$ dimensions.

Keywords: Fibonacci cube, Hypercube, Roman domination number.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren kıymetli danışmanım, hocam Prof. Dr. Zülfükar SAYGI'ya çok teşekkür ederim. Birbirinden değerli bilgilerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve iki dönem birlikte öğrenci asistanlığı yaptığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü'nde öğrenci asistanlığı yapmış ve yapmakta olan, bana gerektiğinde her konuda yardımcı olmaya çalışan bütün arkadaşlarıma teşekkür ederim. Bu tezde baskınlık problemi motivasyonu için satranç tahtası şekillerini kullanmamıza izin veren, üç tip Roman baskınlık değişmezinin tam sayı lineer programlamalarının kod olarak yazılmasına verdiği katkılardan dolayı hocamız Arda Buğra ÖZER'e teşekkürü borç bilirim.

Her zaman yeni bir şey öğrenme azmi ve isteğine hayran olduğum kıymetli babam Mecit Koyuncu'ya, bize sürekli yetmeye ve yetişmeye çalışan, fedakâr annem Hatice Koyuncu'ya ve tabii ki her zaman verdiği sonsuz destek ve motivasyonla yanımda olan ağabeyim Yaser Koyuncu'ya varlıklarından aldığım güç için teşekkür ederim.

Değerli eşim Tunahan Yılmaz, sana yollarımızın kesiştiği günden beri her daim yanımda olduğun, yol arkadaşlığı ettiğin ve yapabileceklerime benden daha çok inandığın için sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez TÜBİTAK tarafından 120F125 numaralı "Hiperküp ve Belirli Alt Çizgilerinin Bazı Çizge Teorik Özellikleri ve Baskınlık Tipi Değişmezleri" başlıklı proje kapsamında desteklenmiştir.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve araştırma bursu imkanı sunan TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Fibonacci Küpünün Tanımı ve Temel Ayrışımı	3
1.1.1 Temel ayrışım	5
1.2 Fibonacci Küpünün Sayma Sonuçları	10
1.2.1 Derece dizilerine ait sonuçlar	11
1.2.2 Küp sayısına ait sonuçlar	13
1.2.3 Uzaklık değişmezlerine ait sonuçlar	20
1.2.4 Bağlılığa ait sonuçlar	23
1.2.5 Düzensizliğe ait sonuçlar	26
2. BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ	29
2.1 Fibonacci Küplerinde Baskınlık Tipi Değişmezleri	31
2.1.1 2 - kutulama sayısı	36
2.1.2 Bağımsız baskınlık sayısı	39
2.1.3 Toplam baskınlık sayısı	41
2.1.4 Bağlı baskınlık sayısı	46
2.1.5 Eşli baskınlık sayısı	49
2.1.6 İşaretleli baskınlık sayısı	51
3. ROMAN BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ	55
3.1 Roman Baskınlık Tipi Değişmezi	56
3.2 Zayıf Roman Baskınlık Tipi Değişmezi	60
3.3 Çift Roman Baskınlık Tipi Değişmezi	64
3.4 Roman Baskınlık Tipi Değişmezi Optimizasyon Problemi	68
3.4.1 BVV formülasyonu	68
3.5 Zayıf Roman Baskınlık Tipi Değişmezi Optimizasyon Problemi	71
3.5.1 WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama	71
3.6 Çift Roman Baskınlık Tipi Değişmezi Optimizasyon Problemi	72
3.6.1 DRDP-1 tam sayı lineer programlama	72
4. SONUÇLAR	75
4.1 Fibonacci Küpleri İçin Roman Baskınlık Sayısına Dair Sonuçlar	75
4.2 Zayıf Roman Baskınlık Sayısına Dair Sonuçlar	78
4.3 Çift Roman Baskınlık Sayısına Dair Sonuçlar	81
5. SONUÇ	87
KAYNAKLAR	89
EKLER	93

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Sırasıyla Q_0 , Q_1 , Q_2 ve Q_3 hiperküpleri	3
Şekil 1.2: G çizgesi	5
Şekil 1.3: G çizgesi köşeleri için 2 farklı mükemmel eşleşme	6
Şekil 1.4: Γ_2 çizgesi	7
Şekil 1.5: Γ_3 çizgesi	7
Şekil 1.6: Γ_4 çizgesi	7
Şekil 1.7: Γ_3 çizgesinde $010 \rightarrow 000 \rightarrow 001 \rightarrow 001 \rightarrow 101 \rightarrow 100$ Hamilton yolu	9
Şekil 1.8: Γ_4 çizgesinde $0100 \rightarrow 0101 \rightarrow 0001 \rightarrow 1001 \rightarrow 1000 \rightarrow 1010 \rightarrow$ $0010 \rightarrow 0000 \rightarrow 0100$ Hamilton döngüsü	9
Şekil 1.9: Sırasıyla Γ_3 ve Γ_4 küplerindeki bağımsız köşe kümeleri	9
Şekil 1.10: Γ_4 küpünde Q_1 çizgesine izomorf ayrık alt çizgeler	16
Şekil 1.11: Γ_1 küpündeki Q_0 çizgesine izomorf ayrık alt çizgeler	17
Şekil 1.12: Γ_0 küpü	17
Şekil 1.13: Γ_3 küpündeki Q_1 çizgesine izomorf ayrık alt çizgeler	17
Şekil 1.14: Γ_3 küpündeki Q_2 çizgesine izomorf ayrık alt çizge	18
Şekil 1.15: Γ_5 küpü	19
Şekil 1.16: P_4 çizgesinde a ve c köşeleri arasındaki uzaklık	20
Şekil 1.17: P_5 çizgesinde f ve i köşeleri arasındaki uzaklık	20
Şekil 1.18: C_4 çizgesinde b ve d köşeleri arasındaki uzaklık	20
Şekil 1.19: C_5 çizgesinde f ve h köşeleri arasındaki uzaklık	21
Şekil 1.20: Γ_4 küpünde derecesi 2 olan köşeler	24
Şekil 1.21: Γ_4 küpünden 0010 köşesinin silinmesiyle elde edilen çizge	24
Şekil 1.22: Γ_4 küpünden 0000 ve 0001 köşelerinin silinmesiyle elde edilen çizge	25
Şekil 1.23: Γ_4 küpünden 0010 ile 0000 ve 1010 ile 1000 köşelerinin oluşturduğu kenarların silinmesiyle elde edilen çizge	25
Şekil 2.1: Satranç tahtası üzerindeki bir vezirin hakim olduğu kareler	29
Şekil 2.2: Satranç tahtası üzerindeki her kareye hakim farklı karelere yerleştirilmiş 5 vezirin konumu	29
Şekil 2.3: P_4 çizgesinde 2 farklı baskın köşe kümeleri	30
Şekil 2.4: P_5 çizgesinde 2 farklı baskın köşe kümeleri	30
Şekil 2.5: C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerindeki baskın köşe kümeleri	30
Şekil 2.6: Γ_3 küpü için bir baskın küme	31
Şekil 2.7: Γ_3 küpü için bir bağımsız ve baskın küme	31
Şekil 2.8: Γ_4 küpü için bir baskın küme	32
Şekil 2.9: Γ_4 küpü için bir bağımsız ve baskın küme	32
Şekil 2.10: Γ_3 için 0 – 1 tam sayı lineer programlama değişkenleri	34
Şekil 2.11: P_4 için 2 - kutulama X kümesi	36
Şekil 2.12: P_5 için 2 - kutulama X kümesi örnekleri	36
Şekil 2.13: Γ_3 küpünün 2 - kutulama X kümesi	37
Şekil 2.14: Γ_4 küpünde 2 - kutulama X_1 kümesi	37
Şekil 2.15: Γ_4 küpünde 2 - kutulama X_2 kümesi	37

Şekil 2.16: P_4 çizgesi için baskın küme	39
Şekil 2.17: P_4 çizgesi için toplam baskın köşe kümesi	41
Şekil 2.18: P_5 için toplam baskın köşe kümesi	42
Şekil 2.19: C_4, C_5 ve C_6 çizgeleri için toplam baskın köşe kümeleri	42
Şekil 2.20: Γ_5 küpü için sırasıyla baskın köşe ve toplam baskın köşe kümesi	45
Şekil 2.21: P_4 çizgesinde $P_4[S_1]$ bağlı alt çizgesi	47
Şekil 2.22: P_5 çizgesinde $P_5[S_2]$ bağlı alt çizgesi	47
Şekil 2.23: C_4, C_5 ve C_6 çizgelerindeki bağlı alt çizge örnekleri	47
Şekil 2.24: Γ_4 küpünde $\Gamma_4[S]$ bağlı alt çizgesi	48
Şekil 2.25: Γ_4 küpünde $\Gamma_4[S^*]$ bağlı alt çizgesi	48
Şekil 2.26: P_4 çizgesinde S_1 eşli baskın köşe kümesi	49
Şekil 2.27: P_5 çizgesinde S_2 eşli baskın köşe kümesi	49
Şekil 2.28: C_4, C_5 ve C_6 çizgeleri için eşli baskın köşe kümeleri	50
Şekil 2.29: Γ_3 küpü için S_1 eşli baskın köşe kümesi	50
Şekil 2.30: Γ_4 küpünde S_2 eşli baskın köşe kümesi	50
Şekil 2.31: P_4 çizgesi için bir işaretli baskın f fonksiyonu	52
Şekil 2.32: P_5 çizgesi için bir işaretli baskın f fonksiyonu	52
Şekil 2.33: C_4, C_5 ve C_6 çizgeleri için işaretli baskın f fonksiyonları	52
Şekil 2.34: Γ_5 küpü için bir işaretli baskın f fonksiyonu	53
Şekil 3.1: P_4 çizgesi için bir Roman baskınlık fonksiyonu	56
Şekil 3.2: P_5 çizgesi için Roman baskınlık fonksiyonu	56
Şekil 3.3: C_4, C_5 ve C_6 çizgeleri için Roman baskınlık fonksiyonları	57
Şekil 3.4: Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 küpleri için Roman baskınlık fonksiyonları	57
Şekil 3.5: Γ_4 ve Γ_5 küpleri için Roman baskınlık fonksiyonları	58
Şekil 3.6: Γ_6 küpü için bir Roman baskınlık fonksiyonu	58
Şekil 3.7: P_4 çizgesi için bir zayıf Roman baskınlık fonksiyonu	61
Şekil 3.8: P_5 çizgesi için zayıf Roman baskınlık fonksiyonunun alamayacağı değer	62
Şekil 3.9: P_5 çizgesi için bir Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu	62
Şekil 3.10: C_4, C_5 ve C_6 çizgeleri için zayıf Roman baskınlık fonksiyonları	62
Şekil 3.11: Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 küpleri için zayıf Roman baskınlık fonksiyonları	63
Şekil 3.12: Γ_4 ve Γ_5 küpleri için zayıf Roman baskınlık fonksiyonları	63
Şekil 3.13: Γ_6 küpü için bir zayıf Roman baskınlık fonksiyonu	63
Şekil 3.14: P_4 çizgesi için bir γ_{dR} - fonksiyonu	64
Şekil 3.15: P_5 çizgesi için bir γ_{dR} - fonksiyonu	65
Şekil 3.16: C_4, C_5 ve C_6 çizgeleri için γ_{dR} - fonksiyonları	65
Şekil 3.17: Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 küpleri için γ_{dR} - fonksiyonları	65
Şekil 3.18: Γ_4 ve Γ_5 küpleri için γ_{dR} - fonksiyonları	65
Şekil 3.19: Γ_6 küpü için bir γ_{dR} - fonksiyonu	66
Şekil 3.20: Γ_3 küpünün karar değişkenleri	69

SEMBOL LİSTESİ

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda yer almaktadır.

Simgeler	Açıklama
$V(G)$	Bir G çizgesinin köşe kümesi
$E(G)$	Bir G çizgesinin kenar kümesi
Q_n	n - boyutlu Hiperküp
f_n	n . Fibonacci sayısı
φ	Altın oran
Γ_n	n - boyutlu Fibonacci küpü
Λ	Boş dizi
P_n	n - boyutlu yol
C_n	n - boyutlu döngü
$\alpha(G)$	Bir G çizgesinin bağımsızlık sayısı
$G \square H$	Bir G ve bir H çizgesinin kartezyen çarpımı
$C(G, x)$	Bir G çizgesinin küp polinomu
$q_k(n)$	n - boyutlu bir Fibonacci küpünün k - boyutlu Q_n çizgesine izomorf alt çizge sayısı
$d_G(u, v)$	Bir G çizgesindeki u ve v köşeleri arasındaki uzaklık
$diam(G)$	Bir G çizgesinin çapı
$ecc_G(u)$	Bir G çizgesindeki u köşesinin dışmerkezliliği
$W(G)$	Bir G çizgesinin Wiener indeksi
$\overline{ecc}(G)$	Bir G çizgesinin ortalama dışmerkezliliği
$\overline{deg}(G)$	Bir G çizgesinin ortalama derecesi
$\kappa(G)$	Bir G çizgesinin köşe bağlılığı
$\kappa'(G)$	Bir G çizgesinin kenar bağlılığı
$\delta(G)$	Bir G çizgesinin en küçük derecesi
$\Delta(G)$	Bir G çizgesinin en büyük derecesi
$irr(G)$	Bir G çizgesinin düzensizliği
$I_G(x)$	Bir G çizgesinin düzensizlik polinomu
$\gamma(G)$	Bir G çizgesinin baskınlık sayısı
$N(v)$	Bir G çizgesindeki v köşesinin komşu köşelerini içeren küme
$N[v]$	Bir G çizgesindeki v köşesinin komşu köşelerini ve v köşesini içeren küme
$\rho(G)$	Bir G çizgesinin 2 - kutulama sayısı
$i(G)$	Bir G çizgesinin bağımsız baskınlık sayısı
$\gamma_t(G)$	Bir G çizgesinin toplam baskınlık sayısı

Simgeler	Açıklama
$\gamma_c(G)$	Bir G çizgesinin bağlı baskınlık sayısı
$\gamma_p(G)$	Bir G çizgesinin eşli baskınlık sayısı
$\gamma_s(G)$	Bir G çizgesinin işaretli baskınlık sayısı
$\gamma_R(G)$	Bir G çizgesinin Roman baskınlık sayısı
$\gamma_r(G)$	Bir G çizgesinin zayıf Roman baskınlık sayısı
$\gamma_{dR}(G)$	Bir G çizgesinin çift Roman baskınlık sayısı
$\gamma_{rR}(G)$	Bir G çizgesinin Restrained Roman baskınlık sayısı



1. GİRİŞ

Günümüzde çoğu dijital sistemin performansı mantıkları veya hafızaları ile değil iletişimleri ya da bağlantılarıyla sınırlıdır. Teknoloji geliştikçe hafızalar ve işlemciler daha küçük, daha hızlı ve daha az masraflı hale gelirler. Ancak ışığın hızı değişmez. Sistem bileşenleri arasındaki bağlantı ağlarını yöneten alan yoğunluğu ve kablolama yoğunluğu kendi bileşenlerinden daha yavaş oranda ölçeklenir. Ayrıca bileşenler arasındaki iletişim sıklığı modern işlemcilerin saat hızlarının çok ötesindedir. Bu faktörler bağlantı ağlarının gelecekteki dijital sistemlerin başarısında anahtar rol oynamasına neden olur.

Tasarımcılar bağlantı ağlarının bant genişliğini daha verimli kullanmaya çalışırken, bağlantı ağları, günümüz dijital sistemleri için sistem düzeyinde iletişim sorunlarına neredeyse evrensel bir çözüm olmaktadır. Bir bilgisayar sisteminin birkaç ögesinin paralel olarak bağlanabileceği ve böylece aralarında sinyallerin geçebileceği bir sinyal yoluna bilgisayar biliminde bus denir. Bağlantı ağları aslen çoklu bilgisayarların iletişim ihtiyaçlarının karşılanması için geliştirilmiş olsa da bugün standart sistem düzeyindeki bu ağlar busların yerini almaya başlamıştır. Birleşik bir bütün olarak anahtarlanan ve iletilen sabit maksimum boyutta ve iyi tanımlanmış formatta bir grup bit, paket (packet) olarak tanımlanır. Tasarımcılar paketlerin yönlendirilmesinin yönlendirici kablolardan daha hızlı ve ekonomik olduğunu fark ettikleri için bağlantı ağları spesifik bir amacı olan sistemlerde özel kablolanın da yerini almaktadır.

Bağlantı ağları uzun bir geçmişe sahiptir. Devre anahtarlı ağlar uzun bir süre telefonlarda kullanılmıştır. 1950'lerde bilgisayarları birbirine bağlantı ağları ile bağlamak için önerilerde bulunulmuş fakat az sayıda prototip sunulmuştur. Bu prototiplerin sayısı 1960'larda artmıştır. 1962'de Solomon olası her vericinin olası her alıcısıyla doğrudan bağlantı kurabildiği, bit serili ilk çoklu bilgisayardır. 1970'lerde ise farklı tipte çoklu bilgisayarlar da ortaya çıkmıştır. Bu dönem ayrıca birden çok işlemciyi birden çok hafıza bankasına bağlamak için vektör ve dizi işlemcilerinde kullanılan birkaç dolaylı ağ üzerinde çalışılmasına şahit olmuştur. Bu sorunu gidermek için akademik topluluk çok aşamalı bağlantı ağlarının çeşitli varyantlarını geliştirmiştir. 1982'deki BBN Butterfly dolaylı bir ağ kullanan ilk çok işlemcili cihazlardan biridir. İkili n - küp ya da hiperküp ağı 1978'de önerilmiş ve ilk olarak 1981'de Caltech Kozmik Küp'te uygulanmıştır. 1980'lerin başında akademik topluluk bu bağlantı ağlarının matematiksel özellikleri ile gerçek sistem problemlerini hızla birbirinden ayırmak üzerine yoğunlaşmıştır (Dally, 2003).

MIMD (multiple instruction, multiple data) bir paralel hesaplama tekniğidir. Bilgisayar destekli tasarım, imalat, simülasyon, modelleme ve benzeri alanlarda kullanılır. MIMD kullanan makineler bağımsız çalışabilen ve eş zamanlı olmayan (asynchronous) birçok işlemciye sahiptir. Herhangi bir zamanda farklı işlemciler verinin farklı parçaları üzerinde farklı talimatları çalıştırabilirler. MIMD makineleri ortak hafıza ve dağıtılmış hafıza kategorilerinde olabilir. Bu sınıflandırmalar, MIMD işlemcilerinin hafızaya nasıl eriştiğine dayanmaktadır. Ortak hafızalı makineler bus - tabanlı, genişletilmiş veya hiyerarşik tipte olabilirken dağıtılmış hafızalı makineler hiperküp veya mesh bağlantı şeması olabilir.

Dört işlemci içeren bir hiperküp sistem ara bağlantı ağına sahip bir MIMD dağıtılmış

hafıza makinesinde, bir karenin her bir köşesine bir işlemci ve bir hafıza modülü yerleştirilir. Sistem çapı, bir işlemcinin en uzaktaki işlemciye mesaj göndermesi için atması gereken minimum adım sayısı olarak tanımlanır. Örneğin, 2 - küpün çapı 2 dir. Sekiz işlemcili ve her işlemci ve hafıza modülünün bir küpün köşe noktasına yerleştirildiği bir hiperküp sisteminde ise çap 3 tür. Yani, her işlemcinin diğer N işlemciye doğrudan bağlı olduğu 2^N işlemci içeren bir sistemin çapı N dir. Bağlantı ağlarında hiperküp sisteminin bir dezavantajı köşe sayısı 2 nin kuvveti olduğu için bu şekilde yapılandırılması gerektiğidir. Bu nedenle uygulama için gerçekten ihtiyaç duyulandan çok daha fazla işlemciye sahip olabilecek bir makine inşa edilmek zorunda kalınır.

Köşe kümesi $V(G)$ ve kenar kümesi $E(G)$ olan bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesi ile bağlantı ağları temsil edilebilir. Burada $V(G)$ kümesi işlemcileri, $E(G)$ kümesi ise iletişim ağlarını gösterir. En temel bağlantı ağı modellerinden biri n - boyutlu hiperküp, $Q_n = (V_n, E_n)$ dir. Q_n küpünün köşeleri uzunluğu n olan ikili diziler ile ifade edilir. İki köşe arasındaki kenar ancak ve ancak temsil eden ikili diziler arasındaki Hamming uzaklık 1 ise vardır.

Fibonacci küpü, Fibonacci sayılarından ilham alan yeni bir ağ sınıfı olarak sunulur. n - boyutlu Fibonacci küpü, Γ_n , en basit ifadeyle ikili dizilerinde ardışık 1 içermeyen köşelerin oluşturduğu hiperküplerin alt çizgesi olarak tanımlanır. Kendini yineleyen yani yine Fibonacci küpü olan ağlara ayrıştırılabilen bir yapıya sahiptir. Bu yapı oldukça ilgi çekici olarak bulunur. Aynı sayıda köşeler için hiperküplerden %20 oranında daha az kenar bulundurulur. Hiperküpler kadar hızlı büyüyemezler ve birçok hatalı köşe içeren bir hiperküp olarak kabul edilirler. Cong ve diğ. (1993) Fibonacci küplerinin birçok hiperküp algoritmasını taklit edebildiklerini ifade etmiştir. Dolayısıyla, çekici bulunan temel yapısal özellikleri sebebiyle hiperküplere alternatif olarak gösterilen bağlantı ağı modeli olarak tanıtılırlar.

Tezin 1. bölümünde öncelikle Fibonacci küplerinin tanımına, temel ayrışımına ve sırasıyla literatürde bilinen derece dizilerine, küp sayısına, uzaklık değişmezlerine, bağlılığa ve düzensizliğe ait sayma sonuçlarına değinilmiş ve bu sonuçlar örneklendirilmiştir. 2. bölümde ise bir G çizgesi için bir vezirin satranç tahtası üzerindeki hareketine dayanan baskınlık problemi motivasyonu verilmiştir. G bir çizge ve D kümesi G çizgesinin köşe kümesi olan $V(G)$ kümesinin bir alt kümesi olsun. $V(G)$ kümesindeki her bir köşe, D kümesinin bir elemanı veya D kümesinin bir elemanına komşu ise D kümesine baskın köşe kümesi denir. Baskın köşe kümelerinden en az elemanlı olanlarına minimal baskın küme ve bu kümenin eleman sayısına G çizgesinin baskınlık sayısı denir. Literatürde Fibonacci küplerinin bazı baskınlık tipi sayıları bilinmektedir. Fibonacci küplerinde çalışılmış baskınlık tipi değişmezlerine ait sonuçlar, birkaç boyuttaki Fibonacci küpleri için bu değişmezlerin sayılarını gösteren şekiller ve bu tiplere ait optimizasyon problemleri 2. bölümün alt bölümlerinde sırayla bahsedilmiştir. Fakat, savaş stratejisi olarak geliştirilen ve yardım kaynağı paylaşımı problemine de uygulanabilir olan Roman baskınlık problemi Fibonacci küpleri için literatürde çalışılmamıştır. 3. bölümde öncelikle Roman baskınlık probleminin kaynağı olan motivasyon verilmiştir. Daha sonra Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık tipi değişmezlerinin tanımlarına, bir G çizgesi için bilinen genel sonuçlarına değinilmiştir. Literatürde daha önce Fibonacci küpleri için çalışılmamış olan bu üç tip değişmez için $n \leq 6$ boyutlarındaki Fibonacci küplerinde değerleri gösterilmiştir. 3.4, 3.5 ve 3.6 alt bölümlerinde Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık tipi değişmezlerinin var olan tam sayı lineer

programlamaları verilmiştir. Son olarak 4. bölümde Fibonacci küpleri için bilgisayar ortamında çalıştırılan her bir optimizasyon problemiyle 1 saatlik süre sonunda elde edilen $n \leq 13$ boyutları için kesin değerlere ve literatürdeki alt ve üst sınır değerlerini geliştiren ya da ilk kez alt ve üst sınır değerleri ortaya koyan sayısal sonuçlara yer verilmiştir.

Bu tez boyunca $G = (V(G), E(G))$ ifadesi ile gösterilen bir G çizgesi eğer G çizgesi açıksa $G = (V, E)$ olarak gösterilecektir. Bu gösterimde V kümesi G çizgesinin köşe kümesini E kümesi ise G çizgesinin kenar kümesini ifade etmektedir.

1.1 Fibonacci Küpünün Tanımı ve Temel Ayrışımı

Şimdi bu alt kısımda yapısal özellikleri ile dikkat çeken ve hiperküplere alternatif gösterilen Fibonacci küplerinin matematiksel tanımını ve temel ayrışımını inceleyelim.

Tanım 1.1.1. $B = \{0, 1\}$ olmak üzere $n \geq 1$ için,

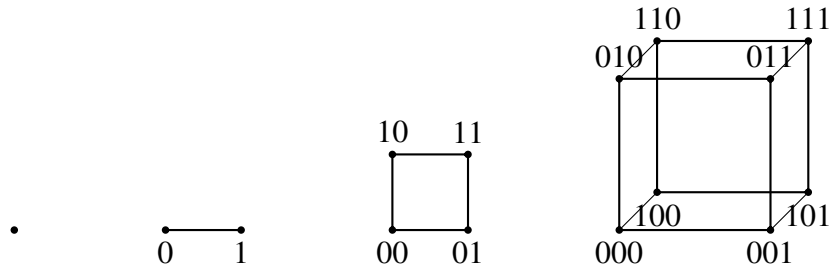
$$\mathcal{B}_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid b_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesi olsun. Hiperküp, Q_n (n - küp), \mathcal{B}_n köşe kümesi üzerinde tanımlı bir çizgedir. Bu çizgede tam olarak bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için $b_i \neq b'_i$ iken $b_1 b_2 \dots b_n$ ve $b'_1 b'_2 \dots b'_n$ köşeleri komşudur. $|V(Q_n)| = 2^n$ ve $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$ olarak tanımlanır. $|V(Q_0)| = 1$ olup $|E(Q_0)| = 0$ dir.

Not 1.1.2. Q_n iki köşeli tam çizgenin (complete graph) n - li kartezyen çarpımıdır. $Q_0 = K_1$ olup $Q_1 = K_2$ dir.

Not 1.1.3. Bu tez boyunca Fibonacci sayıları f_n sembolü ile gösterilecektir. Bilindiği üzere $f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ olmak şartıyla her $n \geq 2$ için $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ eşitliği sağlanır.

Örnek 1. Şekil 1.1 de sırasıyla $n = 0, 1, 2$ ve 3 boyutları için Q_n çizgeleri ve bu çizgelerin köşelerine \mathcal{B}_n köşe kümesinin elemanlarının etiketlenmiş halleri gösterilmektedir.



Şekil 1.1: Sırasıyla Q_0, Q_1, Q_2 ve Q_3 hiperküpleri

Tanım 1.1.4. $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$ eşitliği sağlanır ve bu φ değerine **altın oran** denir.

Zeckendorf Teoremi . Her pozitif tam sayı bir ya da daha fazla farklı Fibonacci sayılarının toplamı olarak tek bir şekilde gösterilebilir. Bu toplam ardışık Fibonacci sayıları içermez. Yani, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak şartıyla $0 < k \leq f_{n+2} - 1$ için $b_i \in \{0,1\}$ ve $b_i \cdot b_{i+1} = 0$ olmak üzere

$$k = \sum_{i=1}^n b_i \cdot f_{n-i+2} \quad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Çizelge 1.1 de 0 ve 20 tam sayıları arasında yer alan bütün tam sayıların Zeckendorf Teoremi'nden yararlanılarak ardışık olmayan Fibonacci sayıları şeklinde toplamı ve bu sayıların 6 bitlik gösterimleri verilmiştir.

Çizelge 1.1: $0 \leq n \leq 20$ olmak üzere n tam sayısının Zeckendorf ve 6 bitlik gösterimi.

n	Ardışık olmayan Fibonacci sayıları şeklinde toplamı	6 bitlik gösterim
0	0	000000
1	f_2	000001
2	f_3	000010
3	f_4	000100
4	$f_4 + f_2$	000101
5	f_5	001000
6	$f_5 + f_2$	001001
7	$f_5 + f_3$	001010
8	f_6	010000
9	$f_6 + f_2$	010001
10	$f_6 + f_3$	010010
11	$f_6 + f_4$	010100
12	$f_6 + f_4 + f_2$	010101
13	f_7	100000
14	$f_7 + f_2$	100001
15	$f_7 + f_3$	100010
16	$f_7 + f_4$	100100
17	$f_7 + f_4 + f_2$	100101
18	$f_7 + f_5$	101000
19	$f_7 + f_5 + f_2$	1010001
20	$f_7 + f_5 + f_3$	101010

Tanım 1.1.5. $n \geq 1$ için,

$$\mathcal{F}_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \in \mathcal{B}_n \mid b_i \cdot b_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq n-1\}$$

olsun. \mathcal{F}_n kümesi ardışık 1 içermeyen n uzunluğundaki bütün ikili dizileri içerir. \mathcal{F}_n kümesinin elemanları Fibonacci dizileri olarak adlandırılır.

Not 1.1.6. \mathcal{F}_n kümesi altında bir tam sayının Zeckendorf gösterimine dolayısıyla n bitlik gösterimine eşittir ve $|\mathcal{F}_n| = f_{n+2}$ dir.

Tanım 1.1.7. n - boyutlu Fibonacci küpü Γ_n , Q_n hiperküpünün köşe kümesi \mathcal{F}_n olan bir alt çizgesidir.

Not 1.1.8. Γ_n çizgesi Q_n çizgesinden en az iki ardışık 1 içeren bütün köşelerin silinmesiyle elde edilir.

1.1.1 Temel ayrışım

$n \geq 1$ olmak kaydıyla, \mathcal{F}_n kümesi sırasıyla 1 ve 0 ile başlayan aşağıdaki dizi kümelerine ayrılır,

$$A_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \in \mathcal{F}_n \mid b_1 = 1\} \quad \text{ve} \quad B_n = \{0\alpha \mid \alpha \in A_{n-1} \cup B_{n-1}\}.$$

$A_0 = \emptyset$ ve λ boş dizi olmak kaydıyla $B_0 = \{\lambda\}$ kabul edildiğinde herhangi $n \geq 1$ için

$$A_n = \{1\alpha \mid \alpha \in B_{n-1}\} \quad \text{ve} \quad B_n = \{0\alpha \mid \alpha \in A_{n-1} \cup B_{n-1}\}$$

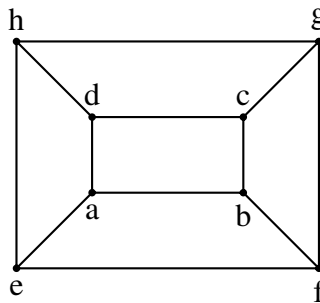
olarak tanımlanabilir. \mathcal{F}_n kümesinin bu şekilde ayrılması Γ_n çizgesinin temel ayrışımını ortaya çıkarır. Bu ayrışım

$$\Gamma_n = 0\Gamma_{n-1} + 10\Gamma_{n-2} \quad (1.2)$$

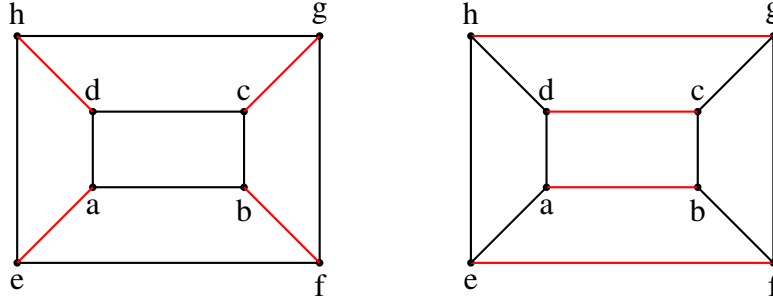
olarak gösterilir.

Tanım 1.1.9. Bir G çizgesinde **mükemmel eşleşme** (perfect matching) çizgenin tüm köşelerini eşleyen bir eşleşmedir. Bir başka deyişle, eğer çizgedeki her köşe eşleşmenin bir kenarına ait ise bu eşlemeye mükemmel eşleşme denir.

Örnek 2. Şekil 1.2 de $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ olan bir G çizgesi verilmektedir. Görüldüğü üzere G çizgesinin her köşesi Şekil 1.3 te kırmızı kenarlarla ifade edildiği gibi bir eşleşmenin bir kenarına dahildir ve bu durum 2 farklı şekilde gösterilmektedir. Dolayısıyla, G çizgesinin 4 adet mükemmel eşleşme içerdiği söylenebilir.



Şekil 1.2: G çizgesi



Şekil 1.3: G çizgesi köşeleri için 2 farklı mükemmel eşleşme

(1.2) formülasyonu ile verilen temel ayrışım $10\Gamma_{n-2}$ çizgesi ile $0\Gamma_{n-1}$ içerisinde yer alan $00\Gamma_{n-2}$ çizgesi arasındaki Tanım 1.1.9 da verilen mükemmel eşleşmeyi ifade eder.

Örnek 3. Sırasıyla $n = 1, 2, 3$ ve 4 için \mathcal{F}_n , A_n ve B_n kümeleri yazılırsa:

$n = 1$ için,

$$\mathcal{F}_1 = \{0, 1\} \text{ dir.}$$

$$A_1 = \{1\} \text{ ve } B_1 = \{0\} \text{ dizi kümelerine ayrılır.}$$

$n = 2$ için,

$$\mathcal{F}_2 = \{00, 01, 10\} \text{ dir.}$$

$$A_2 = \{10\} \text{ ve } B_2 = \{01, 00\} \text{ dizi kümelerine ayrılır.}$$

$n = 3$ için,

$$\mathcal{F}_3 = \{000, 001, 010, 100, 101\} \text{ dir.}$$

$$A_3 = \{101, 100\} \text{ ve } B_3 = \{010, 001, 000\} \text{ dizi kümelerine ayrılır.}$$

$n = 4$ için,

$$\mathcal{F}_4 = \{0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1010, 1001, 0101\} \text{ dir.}$$

$$A_4 = \{1010, 1001, 1000\}$$

ve

$$B_4 = \{0101, 0100, 0010, 0001, 0000\} \text{ dizi kümelerine ayrılır.}$$

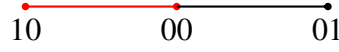
Örnek 3 ten anlaşılacağı üzere $n \geq 2$ olmak üzere A_n kümesinden alınan bir dizi 10 ile başladığı için A_n kümesi Γ_n çizgesinin Γ_{n-2} çizgesine izomorf olan bir alt çizgesinin köşe kümesidir. Aynı şekilde, B_n kümesi Γ_n çizgesinin Γ_{n-1} çizgesine izomorf olan bir alt çizgesinin köşe kümesidir. Dahası, A_n kümesindeki her 1α köşesi tam olarak B_n kümesindeki 0α köşesiyle komşudur.

Ayrıca, $|V(\Gamma_0)| = f_2 = 1$ ve $|V(\Gamma_1)| = f_3 = 2$ olduğu için temel ayrışım gereği $|V(\Gamma_n)| = |V(\Gamma_{n-1})| + |V(\Gamma_{n-2})| = f_{n+2}$ elde edilir. (Not 1.1.6 ve Tanım 1.1.7 ile bu eşitliğin sağlandığını daha önce elde etmiştik.)

Şimdi Γ_n küpünün temel ayrışım yapısından yararlanarak birkaç boyutta Fibonacci küplerinin nasıl elde edildiğini görelim.

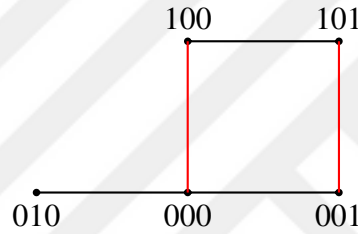
Bir sonraki sayfadaki Örnek 4 te yer alan Γ_2 , Γ_3 ve Γ_4 çizgeleri bu yapının daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

Örnek 4. Daha önce $n = 2$ için $\mathcal{F}_2 = \{00, 01, 10\}$ olduğu görülmüştü. Buradan hareketle $A_2 = \{10\}$, $B_2 = \{00, 01\}$ dizi kümeleri elde edilmiştir. A_2 kümesi Γ_2 çizgesinin Γ_0 çizgesine izomorf bir alt çizgesini oluştururken, B_2 kümesi Γ_1 çizgesine izomorf bir alt çizgesini oluşturmaktadır. Şekil 1.4 te görüleceği üzere A_2 kümesindeki 10 köşesi tam olarak B_2 kümesindeki 00 köşesine komşudur. Bu iki köşe arasındaki kenar kırmızı renkle gösterilmiştir.



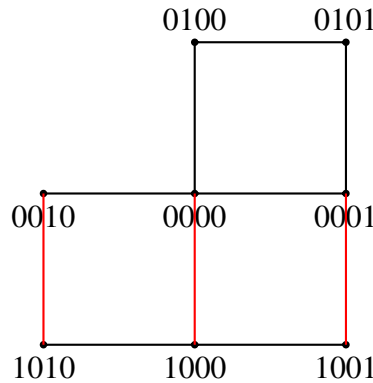
Şekil 1.4: Γ_2 çizgesi

$n = 3$ için A_3 kümesi Γ_3 küpünün Γ_1 küpüne izomorf bir alt çizgesini oluştururken B_3 kümesi Γ_2 küpüne izomorf bir alt çizgesini oluşturmaktadır. Şekil 1.5 te görüldüğü gibi 100 köşesi 000 köşesiyle, 101 köşesi ise 001 köşesi ile komşudur. Aradaki kenarlar kırmızı renk kullanılarak gösterilmiştir.



Şekil 1.5: Γ_3 çizgesi

$n = 4$ için A_4 kümesi Γ_4 küpünün Γ_2 küpüne izomorf bir alt çizgesini oluştururken B_4 kümesi Γ_3 küpüne izomorf bir alt çizgesini oluşturmaktadır. Şekil 1.6 da görüldüğü gibi 1010 köşesi 0010 köşesiyle, 1000 köşesi 0000 köşesiyle, 1001 köşesi ise 0001 köşesi ile komşudur. Aradaki kenarlar kırmızı ile gösterilmiştir.



Şekil 1.6: Γ_4 çizgesi

Γ_n , Fibonacci küpünün çizge teorisindeki önemli çizge teorik özelliklerine dair bazı sonuçlar da Fibonacci küplerine dair yapılan çalışmalarda bulunan ilk bilgilerdir. Bu

sonuçlar sırasıyla Hamilton yolu (Hamiltonian path), bağımsızlık sayısı (independence number) ve asal çizge (prime graph) özellikleridir.

Tanım 1.1.10. Bir $G = (V, E)$ çizgesi üzerinde bir veya daha fazla köşeden geçen rotaya *yol* denir. n köşeden geçen yol P_n ile gösterilir.

Tanım 1.1.11. Bir $G = (V, E)$ çizgesinde bir köşeden başlayıp aynı köşede biten yola *döngü* denir. n köşeli döngü C_n ile gösterilir.

Not 1.1.12. Bu çalışma boyunca $v_1, \dots, v_n \in V(P_n)$ olmak üzere $P_n = (v_1, \dots, v_n)$ ve $v'_1, \dots, v'_n \in V(C_n)$ olmak üzere $C_n = (v'_1, \dots, v'_n)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.1.13. Bir G çizgesinde her bir köşeden sadece bir kere geçilen bir yol varsa iki köşe arasındaki bu yola **Hamilton yolu** denir. Bir G çizgesindeki **Hamilton döngüsü** tüm köşelerden bir kez geçen bir döngüdür.

Cong ve diğ. (1993) Fibonacci küplerinin Hamilton yolu içerdiklerini temel ayrıştırmaya benzeyen bir yapı kurarak gösterirler. Bu yapıda boş dizi $g_0 = \lambda$ ve $g_1 = 0, 1$ dizisi alınır. Bu diziler sırasıyla Γ_0 ve Γ_1 çizgelerini geren yollardır. \bar{g} , g dizisinin sağdan sola yazılmış halini ifade etmek ve αg , g nin her teriminin önüne sabit bir α dizisi eklenmesiyle elde edilen bir dizi olmak şartıyla $n \geq 2$ için,

$$g_n = 0\bar{g}_{n-1}, 10\bar{g}_{n-2}$$

olsun. Birkaç g_i dizisi şu şekildedir:

$$g_0 = \lambda$$

$$g_1 = 0, 1$$

$$g_2 = 01, 00, 10$$

$$g_3 = 010, 000, 001, 101, 100$$

$$g_4 = 0100, 0101, 0001, 0000, 0010, 1010, 1000, 1001$$

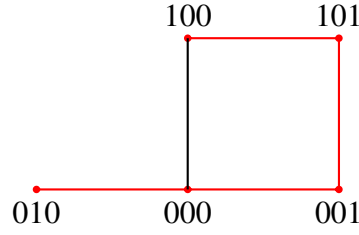
Temel ayrışmadan g_n dizisinin Γ_n çizgesinin bütün köşelerini içerdiği görülür. Tümevarım yöntemiyle, $0\bar{g}_{n-1}$ ve $10\bar{g}_{n-2}$ deki ardışık terimler 1 pozisyonda farklılık gösterir. Son olarak, tekrar tümevarımdan yararlanılarak $0\bar{g}_{n-1}$ deki son terim ile $10\bar{g}_{n-2}$ deki ilk terimin 1 pozisyonda farklılık gösterdiği elde edilir. g_n dizisinin elemanlarını sırasıyla içeren yol Hamilton yolunu vermektedir.

Önerme 1.1.14. Her $n \geq 0$ için, Γ_n Fibonacci küpü Hamilton yoluna sahiptir (Cong ve diğ., 1993).

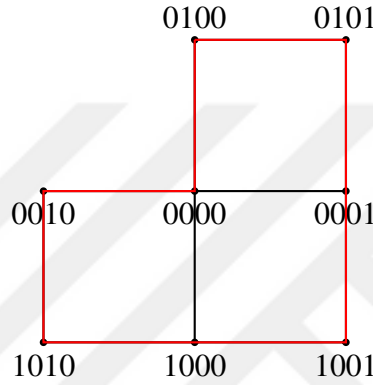
Not 1.1.15. Γ_n iki parçalı çizge olduğu için eğer köşe sayısı çiftse, yani, $k \geq 1$ için $n = 3k + 1$ ise, yalnızca bu durumda Hamilton döngüsü içerir. Cong ve diğ. (1993) köşe sayısı çift olan bütün Fibonacci küplerinin Hamilton döngüsüne sahip olduğundan bahseder.

Not 1.1.16. Salvi (1996) $n \geq 7$ için her Γ_n kenarının uzunluğu çift olan döngüde bulunduğunu ispatlamıştır.

Örnek 5. Şekil 1.7 ve Şekil 1.8 de sırasıyla Γ_3 küpündeki Hamilton yolu ve Γ_4 küpündeki Hamilton döngüsü kırmızı renkle gösterilmektedir.



Şekil 1.7: Γ_3 çizgesinde $010 \rightarrow 000 \rightarrow 001 \rightarrow 101 \rightarrow 100$ Hamilton yolu

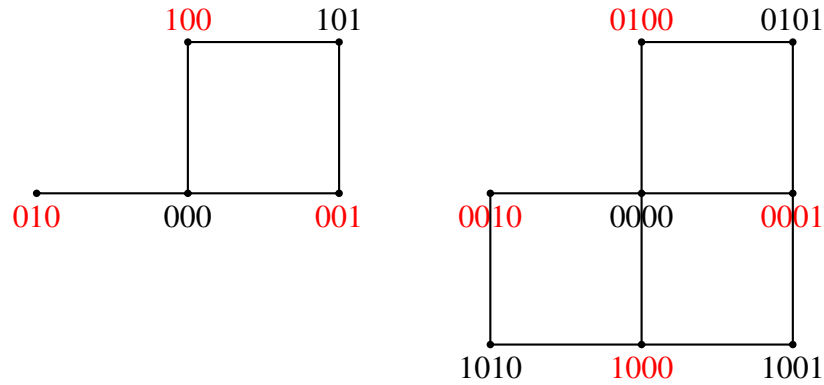


Şekil 1.8: Γ_4 çizgesinde $0100 \rightarrow 0101 \rightarrow 0001 \rightarrow 1001 \rightarrow 1000 \rightarrow 1010 \rightarrow 0010 \rightarrow 0000 \rightarrow 0100$ Hamilton döngüsü

Tanım 1.1.17. Bir G çizgesinin en büyük bağımsız köşe (komşu olmayan köşeler) kümesindeki eleman sayısına α çizgenin **bağımsızlık sayısı** denir. Bu sayı $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Sonuç 1.1.18. Her $n \geq 0$ için, $\alpha(\Gamma_n) = \left\lceil \frac{f_{n+2}}{2} \right\rceil$ dir (Munarini ve Salvi, 2002).

Örnek 6. Şekil 1.9 da sırasıyla $n = 3$ ve $n = 4$ boyutları için Fibonacci küplerindeki bağımsız köşe kümeleri bu küplerdeki kırmızı renkteki köşeler ile gösterilmektedir. Buradan $\alpha(\Gamma_3) = 3$ ve $\alpha(\Gamma_4) = 4$ olduğu gözlemlenir.



Şekil 1.9: Sırasıyla Γ_3 ve Γ_4 küplerindeki bağımsız köşe kümeleri

Dolayısıyla Şekil 1.9 da görüldüğü üzere Sonuç 1.1.18

$$\alpha(\Gamma_3) = \left\lceil \frac{f_5}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$$

ve

$$\alpha(\Gamma_4) = \left\lceil \frac{f_6}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil = 4$$

olduğunu doğrular.

Tanım 1.1.19. Bir G ve bir H çizgesinin **kartezyen çarpımı** (Cartesian Product), $G \square H$ ile gösterilir. Bu kartezyen çarpım ya $gg' \in E(G)$ ve $h = h'$ ya da $hh' \in E(H)$ ve $g = g'$ özelliklerini sağlayan $(g, h), (g', h')$ ikililerini içeren $E(G \square H)$ kenar kümesine ve $V(G) \times V(H)$ köşe kümesine sahiptir.

Tanım 1.1.20. Bir G çizgesi aşık olmayan bir çizge ise ya da iki aşık olmayan çizgenin kartezyen çarpımı şeklinde ifade edilemiyorsa bu çizgeye **asal** adı verilir.

Q_n hiperküpünün n adet K_2 çizgesinin kartezyen çarpımı olarak tanımlanabildiğini daha önce ifade etmiştik. Hiperküpler çizgelerin kartezyen çarpımlarının en basit katıdır. Zhang ve diğ. (2009) Fibonacci küplerinin kartezyen çarpıma göre asal olduğunu ispatlamıştır.

Önerme 1.1.21. Her $n \geq 1$ için, kartezyen çarpıma göre Γ_n asaldır (Zhang ve diğ., 2009).

1.2 Fibonacci Küpünün Sayma Sonuçları

Bu bölümde Γ_n Fibonacci küpünün önemli sayma sonuçlarından bahsedilecektir. Büyük bir kısmı üreteç fonksiyonu yöntemiyle elde edilmiş sonuçlardır.

Önerme 1.2.1. $n \geq 1$ için,

$$|E(\Gamma_n)| = \frac{nf_{n+1} + 2(n+1)f_n}{5} \quad (1.3)$$

tir (Munarini ve diğ., 2001).

Klavzar (2005) makalesinde ise Γ_n için kenar sayısı şu şekilde ifade edilmiştir.

Önerme 1.2.2. Her $n \geq 1$ için Γ_n küpündeki kenar sayısı,

$$|E(\Gamma_n)| = f_{n+1} + \sum_{i=2}^{n-2} f_i f_{n+1-i} \quad (1.4)$$

(1.3) eşitliği kullanılarak $n \geq 1$ için Fibonacci küpündeki kenar sayılarının sırasıyla 1, 2, 5, 10, 20, 38, 71, 130, ... olduğu elde edilebilir.

Tanım 1.1.11 den hatırlanacağı üzere 4 köşeden geçen döngü C_4 ile gösterilir.

Önerme 1.2.3. *Fibonacci küplerindeki C_4 sayısı,*

$$|S(\Gamma_n)| = -\frac{3n}{25}f_{n+1} + \left(\frac{n^2}{10} + \frac{3n}{50} - \frac{1}{25}\right)f_n \quad (1.5)$$

dir (Klavzar, 2005).

(1.5) eşitliğinden yararlanılarak $n \geq 1$ için Fibonacci küpündeki C_4 sayılarının sırasıyla $0, 0, 1, 3, 9, 22, 51, 111, \dots$ olduğu gözlemlenebilir.

1.2.1 Derece dizilerine ait sonuçlar

Γ_n Fibonacci küpünün temel ayrışımı ve üreteç fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1.2.4. $n \geq k \geq 0$ olsun. Γ_n çizgesinde derecesi k olan köşe sayısı

$$\sum_{i=0}^k \binom{n-2i}{k-i} \binom{i+1}{n-k-i+1} \quad (1.6)$$

ile bulunur (Klavzar ve diğ., 2011).

Örnek 7. (1.6) da verilen formülü Γ_4 çizgesinde derecesi 2 olan köşe sayılarını bulmak için kullanalım. Γ_4 çizgesinde derecesi 2 olan köşe kümesi $\{0010, 0100, 0101, 1010, 1001\}$ dir.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \binom{4-2i}{2-i} \binom{i+1}{3-i} &= \binom{2}{1} \binom{2}{2} + \binom{0}{0} \binom{3}{1} \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

olduğu gözlemlenir. Böylelikle bu sayının derecesi 2 olan köşe kümesinin eleman sayısına eşit olduğu görülür.

Fibonacci küpleri ile ilgili olan ilk çalışmada, Hsu (1993), Γ_n Fibonacci küpünün derecelerinin sınırları gözlemlenmiştir.

Lemma 1.2.5. $n \geq 3$ olmak kaydıyla $d_n(i)$ Fibonacci küpü Γ_n çizgesindeki bir i köşesinin derecesi olsun. O halde,

$$\lfloor (n-2)/3 \rfloor \leq d_n(i) \leq (n-2) \quad (1.7)$$

eşitsizlikleri sağlanır (Hsu, 1993).

Köşe derecesini veren Γ_n çizgesinin yinelemeli yapısına ve ikili köşesini ifade eden tam sayıya bağlı olan yinelemeli formül Ellis - Monaghan ve diğ. (2006) da gösterilmiştir. Γ_n çizgesinin baskınlık sayısını araştırmak için bu yaklaşım Pike ve Zou (2012) çalışmasında geliştirilmiştir.

İlgili ana sonuç derecesi $n - 3$ ve n arasında olan köşelerin tam sayısını n değerine bağlı olarak verir.

Sonuç 1.2.6. $m \geq 0$ ve $n \geq 2m + 2$ olsun. Derecesi $n - m$ olan Γ_n çizgesindeki köşe sayısı

$$\begin{cases} 1; & m = 0, \\ 2; & m = 1, \\ n+1; & m = 2, \\ 3n-8; & m = 3, \\ n^2/2 + 3n/2 - 21; & m = 4, \\ 2n^2 - 16n + 10; & m = 5 \end{cases}$$

eşittir. Daha genel bir ifadeyle $f_{n,n-m}$ derecesi $\lfloor m/2 \rfloor$ olan n cinsinden bir polinomdur. Baş katsayısı m bir çift sayıysa $\frac{1}{(m/2)!}$, m bir tek sayıysa $\frac{\lfloor m/2 \rfloor + 1}{\lfloor m/2 \rfloor!}$ dir (Klavzar ve diğ., 2011).

Not 1.2.7. Küçük dereceli Γ_n köşeleri için, Sonuç 1.2.6 ya paralel bir sonuç Klavzar ve diğ. (2011) çalışmasında elde edilmiştir.

$b_1 b_2 \dots b_n \in V(\Gamma_n)$ olmak üzere bu köşenin ağırlığı $\sum_{i=1}^n b_i$ olarak tanımlanır. Ağırlık ve derece sabitlendiğinde bu özelliklere sahip köşe sayısı (1.8) ile elde edilmiştir.

Teorem 1.2.8. $k, w \leq n$ olmak üzere k, n, w tam sayılar olsun. Ağırlığı w ve derecesi k olan Γ_n çizgesinin köşe sayısı

$$\binom{w+1}{n-w-k+1} \binom{n-2w}{k-w} \quad (1.8)$$

olur (Klavzar ve diğ., 2011).

Örnek 8. (1.8) i kullanarak Γ_4 çizgesinde derecesi 2 ağırlığı 1 olan köşe sayısını bulalım.

$$\binom{1+1}{4-1-2+1} \binom{4-2}{2-1} = \binom{2}{2} \binom{2}{1} = 2$$

bulunur. Derecesi 2 olan köşelerin kümesi $\{0010, 0100, 0101, 1010, 1001\}$ olup bu kümede ağırlığı 1 olan köşeler 0010 ve 0100 köşeleridir. Dolayısıyla bu sayı 2 dir. Yani elde edilen sonuç doğrudur.

Derece dizilerinin yanı sıra Fibonacci küplerindeki herhangi bir köşenin ortalama derecesini bulmak için aşağıdaki tanıma ihtiyaç duyulur.

Tanım 1.2.9. G çizgesi Q_n çizgesinin alt çizgesi olsun. Böylece G çizgesinin köşeleri n uzunluğunda ikili diziler olsun. O halde $i \in \{1, \dots, n\}$ ve $\chi \in \{0, 1\}$ olmak üzere

$$W_{(i,\chi)}(G) = \{u = u_1 \dots u_n \in V(G) \mid u_i = \chi\}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanım kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 1.2.10.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|W_{(i,0)}(\Gamma_n)|}{|W_{(i,1)}(\Gamma_n)|} = \phi^2 \quad (1.9)$$

dir (Klavzar ve Mollard, 2014).

Tanım 1.2.11. Bir G çizgesinin *ortalama derecesi* (average degree) değeri

$$\overline{deg}(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{u \in V(G)} deg(u) \quad (1.10)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Γ_n Fibonacci küpünün ortalama derecesinin limiti de bulunan sonuçlardandır.

Teorem 1.2.12.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{deg}(\Gamma_n)}{n} = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}. \quad (1.11)$$

dir (Klavzar ve Mollard, 2014).

1.2.2 Küp sayısına ait sonuçlar

Γ_n Fibonacci küpü, Q_n hiperküpünün alt çizgesi olarak tanımlandığı için Γ_n çizgesinin içerdiği daha küçük boyutlu hiperküpeler üzerine çalışmalar yapılmıştır. Küp polinomu bu çalışmalardan biridir.

Tanım 1.2.13. G çizgesinin Q_n hiperküpüne izomorf alt çizge sayısı $c_n(G)$ ile gösterilsin. G çizgesinin küp polinomu

$$C(G, x) = \sum_{n \geq 0} c_n(G) x^n \quad (1.12)$$

ile gösterilir (Bresar ve diğ., 2003).

Burada $c_0(G) = |V(G)|$, $c_1(G) = |E(G)|$ ve G çizgesinin içerdiği 4 - döngü sayısı $c_2(G)$ olur.

Bresar ve diğ. (2003) te Γ_n küpünün temel ayrışımı kullanılarak $\{C(\Gamma_n, x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n, x) y^n &= 1 + 2y + xy + 3y^2 + 2xy^2 + 5y^3 + 5xy^3 + x^2y^3 + 8y^4 + 10xy^4 + 3x^2y^4 \\ &\quad + 13y^5 + 20xy^5 + 9x^2y^5 + x^3y^5 + \dots \\ &= \frac{1 + y(1 + x)}{1 - y - y^2(1 + x)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

olduğu elde edilir.

Teorem 1.2.14. Herhangi $n \geq 0$ tam sayısı için, $C(\Gamma_n, x)$ 'in derecesi $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ dir ve

$$C(\Gamma_n, x) = \sum_{a=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-a+1}{a} (1+x)^a \quad (1.14)$$

eşitliği sağlanır (Klavzar ve Mollard, 2012).

Örnek 9. (1.14) kullanılarak Γ_n için elde edilen küp polinomları şu şekildedir:

$n = 0$ için $\lfloor \frac{0+1}{2} \rfloor = 0$ olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} C(\Gamma_0, x) &= \binom{1}{0} (1+x)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. Tanım 1.2.13 ten anlaşılacağı üzere $C(\Gamma_0, x) = c_0(\Gamma_0)x^0$ olduğundan eşit olduğu 1 değeri aslında yalnızca bu küpteki köşe sayısını ifade etmektedir.

$n = 1$ için $\lfloor \frac{1+1}{2} \rfloor = 1$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} C(\Gamma_1, x) &= \binom{2}{0} (1+x)^0 + \binom{1}{1} (1+x)^1 \\ &= 1 + 1 + x \\ &= 2 + x \end{aligned}$$

elde edilir. Burada 2 değeri Γ_1 küpündeki köşe sayısıyken x bilinmeyeninin katsayısı Γ_1 küpündeki kenar sayısıdır (P_2 sayısıdır).

$n = 2$ için $\lfloor \frac{2+1}{2} \rfloor = 1$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} C(\Gamma_2, x) &= \binom{3}{0} (1+x)^0 + \binom{2}{1} (1+x)^1 \\ &= 1 + 2(1+x) \\ &= 3 + 2x \end{aligned}$$

olur. 3 değeri Γ_2 küpündeki köşe sayısıyken x bilinmeyeninin katsayısı olan 2 değeri ise Γ_2 küpündeki kenar sayısıdır (P_2 sayısıdır).

$n = 3$ için $\lfloor \frac{3+1}{2} \rfloor = 2$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} C(\Gamma_3, x) &= \binom{4}{0} (1+x)^0 + \binom{3}{1} (1+x)^1 + \binom{2}{2} (1+x)^2 \\ &= 1 + 3(1+x) + (1+2x+x^2) \\ &= 5 + 5x + x^2 \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Polinomdaki 5 değeri Γ_3 küpündeki köşe sayısıyken x bilinmeyeninin katsayısı olan 5 değeri kenar sayısı (P_2) ve x^2 ifadesinin katsayısı olan 5 ise içerdiği 4 - döngü (C_4) sayısıdır.

$n = 4$ için $\lfloor \frac{4+1}{2} \rfloor = 2$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
C(\Gamma_4, x) &= \binom{5}{0}(1+x)^0 + \binom{4}{1}(1+x)^1 + \binom{3}{2}(1+x)^2 \\
&= 1 + 4(1+x) + 3(1+2x+x^2) \\
&= 8 + 10x + 3x^2
\end{aligned}$$

olur.

$n = 5$ için $\left\lfloor \frac{5+1}{2} \right\rfloor = 3$ tür. Yani,

$$\begin{aligned}
C(\Gamma_5, x) &= \binom{6}{0}(1+x)^0 + \binom{5}{1}(1+x)^1 + \binom{4}{2}(1+x)^2 + \binom{3}{3}(1+x)^3 \\
&= 1 + 5(1+x) + 6(1+2x+x^2) + (1+3x+3x^2+x^3) \\
&= 13 + 20x + 9x^2 + x^3
\end{aligned}$$

elde edilir. (1.13) teki Taylor serisi açılımına dikkat edilirse $n \geq 0$ olmak şartıyla y^n ifadesinin katsayılarının Γ_n küpünün küp polinomuna eşit olduğu görülebilir. $C(\Gamma_4, x)$ ve $C(\Gamma_5, x)$ polinomlarının doğruluğu Şekil 1.6 ve Şekil 1.15 üzerinden kontrol edilebilir.

(1.14) aslında $k \geq 0$ için oluşturulan Q_k sayısının

$$\sum_{i=k}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i+1}{1} \binom{i}{k} \quad (1.15)$$

olduğunu göstermektedir.

Mollard (2012) Fibonacci küplerinden oluşturulan k - küplerinin en büyük sayısını elde etmiştir.

Teorem 1.2.15. Γ_n içerisindeki Q_{k+1} çizgeleri içerisinde olmayan Q_k çizgesi sayısı maksimal olmak üzere $k \geq 1$ bir tam sayısı için, Γ_n içerisindeki maksimal Q_k alt çizgelerinin sayısı

$$\binom{k+1}{n+1-2k} \quad (1.16)$$

olur (Mollard, 2012).

Gravier ve diğ., (2015) çalışmasında Γ_n Fibonacci küpünde Q_k hiperküpüne izomorf ayrık alt çizgelerin alabileceği en büyük sayı çalışılan özelliklerden biridir ve bu sayı $q_k(n)$ simgesi ile gösterilir.

$r(n) \in \{0, 1, 2\}$ yani $n \equiv r(n) \pmod{3}$ olmak kaydıyla Fibonacci küplerinin yinelemeli yapısından yararlanılarak Fibonacci küpü $00\Gamma_{n-2} \equiv 10\Gamma_{n-2}$ ve $010\Gamma_{n-3}$ alt çizgelerine ayrışabilir. Bu ayrışma birbiriyle kesişimi olmayan alt çizgelerden oluştuğu için \cup ile gösterilir.

$$\Gamma_n = (00\Gamma_{n-2} \equiv 10\Gamma_{n-2}) \cup 010\Gamma_{n-3}$$

Bu ayrışma tekrarlandığında,

$$\Gamma_n = \dot{\cup}_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} ((010)^{i-1} 00\Gamma_{n+1-3i} \equiv (010)^{i-1} 10\Gamma_{n+1-3i}) \dot{\cup} (010)^{\frac{n-r(n)}{3}} \Gamma_{r(n)}$$

ifadesine ulaşılır. Buradan hareketle Γ_n küpündeki mükemmel eşleşmelerin sayısının en büyüğü hesaplanmıştır.

Lemma 1.2.16. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

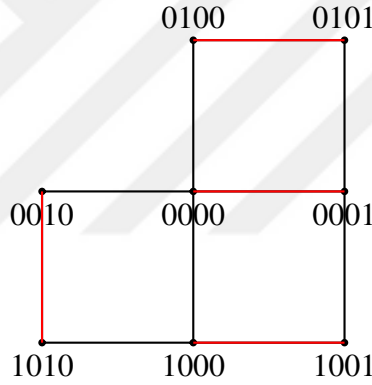
$$q_1(n) = \frac{|\Gamma_n| - \gamma(n)}{2} = \left\lfloor \frac{f_{n+2}}{2} \right\rfloor \quad (1.17)$$

eğer $r(n) = 1$ ise $\gamma(n) = 0$, aksi halde $\gamma(n) = 1$ dir (Gravier ve diğ., 2015).

Örnek 10. (1.17) yi Γ_4 çizgesinde inceleyelim.

$$q_1(4) = \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor = 4$$

bulunur. Şekil 1.10 da Γ_4 küpündeki Q_1 çizgesine izomorf ayırık alt çizgeler kırmızı renk ile gösterilmiştir.



Şekil 1.10: Γ_4 küpünde Q_1 çizgesine izomorf ayırık alt çizgeler

Γ_n küpündeki ayırık hiperküplerin sayısı için daha genel formüller de Gravier ve diğ. (2015) çalışmasında elde edilen sonuçlardır.

Teorem 1.2.17. Her $n \geq 3$ ve $k \geq 1$ için,

$$q_k(n) = q_{k-1}(n-2) + q_k(n-3) \quad (1.18)$$

eşitliği sağlanır (Gravier ve diğ., 2015).

Örnek 11. (1.18) i Γ_3 küpü için uygulayalım.

$k = 1$ için Γ_3 küpündeki Q_1 çizgesine izomorf ayırık alt çizgelerin sayısı:

$$q_1(3) = q_0(1) + q_1(0)$$

dır. Burada $q_0(1)$ ifadesi Γ_1 küpündeki Q_0 çizgesine izomorf ayırık alt çizge sayısıdır. Şekil 1.11 den görüleceği gibi aslında bu çizgedeki köşe sayısı anlamına gelmektedir

ve kırmızı renk ile gösterilmiştir. Dolayısıyla, $q_0(1) = 2$ olur. $q_1(0)$ ise Γ_0 küpündeki Q_1 çizgesine izomorf ayrık alt çizge sayısıdır. Dolayısıyla, Şekil 1.12 den anlaşılacağı üzere bu sayı 0 a eşittir. Buradan,

$$q_1(3) = 2$$

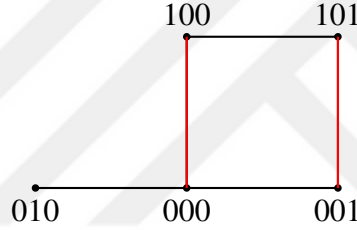
bulunur. Bu sonuç Şekil 1.13 te kırmızı renk ile ifade edilen çizgelerle görülebilir.



Şekil 1.11: Γ_1 küpündeki Q_0 çizgesine izomorf ayrık alt çizgeler

•
 λ

Şekil 1.12: Γ_0 küpü



Şekil 1.13: Γ_3 küpündeki Q_1 çizgesine izomorf ayrık alt çizgeler

$k = 2$ için Γ_3 küpündeki Q_2 çizgesine izomorf ayrık alt çizge sayısı ise

$$q_2(3) = q_1(1) + q_2(0)$$

olarak elde edilir. Burada $q_1(1)$ ifadesi Γ_1 küpündeki Q_1 çizgesine izomorf ayrık alt çizge sayısıdır. Bu sayı Şekil 1.11 den görüleceği gibi 1 dir. $q_2(0)$ ise Γ_0 küpündeki Q_2 çizgesine izomorf ayrık alt çizge sayısını ifade eder. Dolayısıyla bu sayı 0 olarak elde edilir. Yani,

$$q_2(3) = 1$$

olur. Şekil 1.14 te bu çizge kırmızı renk ile Γ_3 küpünde ifade edilmektedir.

$k = 3$ için Γ_3 küpündeki Q_3 çizgesine izomorf ayrık alt çizge sayısının 0 olduğu kolayca anlaşılabilir. (1.18) uygulandığında

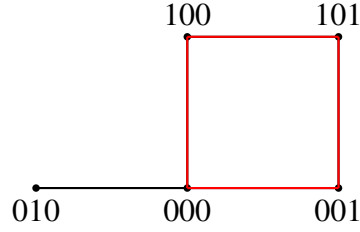
$$q_3(3) = q_2(1) + q_3(0)$$

elde edilecek olup burada $q_2(1)$ ifadesi Γ_1 küpündeki Q_2 çizgesine izomorf ayrık alt çizge sayısı ve $q_3(0)$ ifadesi de Γ_0 küpündeki Q_3 çizgesine izomorf ayrık alt çizge sayısını ifade eder.

Her iki küpte de bu sayılar 0 a eşit olduğu için

$$q_3(3) = 0$$

olduğu açıktır.



Şekil 1.14: Γ_3 küpündeki Q_2 çizgesine izomorf ayrık alt çizge

Sonuç 1.2.18. Her $n \geq 0$ ve $k \geq 1$ için,

$$q_k(n) = \sum_{i=k-1}^{\lfloor \frac{n+k-2}{3} \rfloor} \binom{i}{k-1} f_{n+k-3i-1} \quad (1.19)$$

eşitliği sağlanır (Gravier ve diğ., 2015).

Örnek 12. Şimdi $n = 5$ için sırasıyla (1.19) dan yararlanarak q_1 , q_2 ve q_3 sayılarını bulalım.

$$q_1(5) = \binom{0}{0} f_5 + \binom{1}{0} f_2 = 5 + 1 = 6$$

$$q_2(5) = \binom{1}{1} f_3 = 2$$

ve

$$q_3(5) = \binom{2}{2} f_1 = 1$$

elde edilir. Şekil 1.15 ten bu sayılar kontrol edilebilir.

Sonuç 1.2.19. Her $k \geq 0$ için, $\{q_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$m_k(x) = \frac{x^{2k-1}}{(1-x^3)^k(1-x-x^2)} \quad (1.20)$$

dir (Gravier ve diğ., 2015).

Saygı ve Eğecioğlu (2016) çalışmasında ise küçük k değeri için k - boyutlu hiperküplere izomorf ayrık alt çizgelerin en büyük sayısı için net formül elde edilmiş ve bu küplerin Γ_n çizgesinin köşe sayıları ile arasındaki oranın limit değeri hesaplanmıştır.

Teorem 1.2.20. Her $n \geq 0$ ve $k \geq 1$ için,

$$q_k(n) = \frac{1}{2^k} f_{n+2} + p(n) \quad (1.21)$$

dir (Saygı ve Eğecioğlu, 2016).

Burada $p(n)$ derecesi en fazla $k - 1$ olan rasyonel katsayılı polinomu ifade eder. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_k(n)}{|V(\Gamma_n)|} = \frac{1}{2^k} \quad (1.22)$$

olduğu gösterilmiştir.

Ayrık hüperküplerin en büyük kümesi tarafından Fibonacci küplerinde kaplanmamış köşelerin sayısı da Mollard (2017) de çalışılmıştır.

Tanım 1.2.21. $P_k(n)_{k=1}^{\infty}$ aşağıdaki koşullarla tanımlanan tam sayıların dizisinin ailesi olsun.

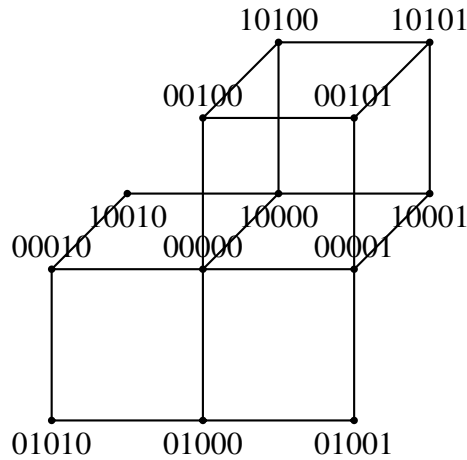
(i) $k \geq 2$ ve $n \geq 0$ için $P_k(n+3) = P_k(n) + 2P_{k-1}(n+1)$ dir.

(ii) $k \geq 2$ için $P_k(0) = 1, P_k(1) = 2, P_k(2) = 3$ tür.

(iii) Eğer $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise $P_1(n) = 0$ ve eğer $n \equiv 0 \pmod{3}$ veya $n \equiv 2 \pmod{3}$ ise $P_1(n) = 0$ dir.

Teorem 1.2.22. $q_k(n)$ ayrık Q_k çizgeleri tarafından Γ_n çizgesinin kaplanmamış köşe sayısı $P_k(n)$ dir (Mollard, 2017).

Örnek 12 de bahsi geçen Γ_5 küpü aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 1.15: Γ_5 küpü

1.2.3 Uzaklık değişmezlerine ait sonuçlar

Bu kısımda öncelikle ilgili uzaklık değişmezlerinin tanımlarını inceleyelim. Daha sonra bu değişmezler için Γ_n Fibonacci küpünde elde edilen sonuçları sırasıyla görelim.

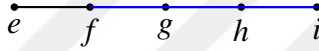
Tanım 1.2.23. Bir G çizgesinde u ve v köşeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğu **uzaklık** (distance) olarak adlandırılır ve $d_G(u, v)$ olarak gösterilir.

Not 1.2.24. G çizgesi açık bir şekilde anlaşılırsa u ve v köşeleri arasındaki en kısa yol basitçe $d(u, v)$ şeklinde de ifade edilmektedir.

Örnek 13. Şimdi Tanım 1.2.23 kullanılarak P_4 , P_5 , C_4 ve C_5 çizgeleri incelensin. Şekil 1.16 da görüldüğü gibi P_4 çizgesinde a ve c köşeleri için mavi ile gösterilen en kısa yol bu iki köşe arasındaki uzaklık olup $d_{P_4}(a, c) = 2$ elde edilir. Benzer şekilde Şekil 1.17 de f ve i köşeleri arasındaki en kısa yol mavi ile gösterilip $d_{P_5}(f, i) = 4$ elde edilmektedir.



Şekil 1.16: P_4 çizgesinde a ve c köşeleri arasındaki uzaklık

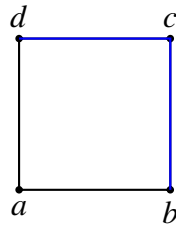


Şekil 1.17: P_5 çizgesinde f ve i köşeleri arasındaki uzaklık

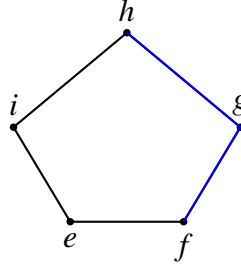
Şekil 1.18 de C_4 çizgesindeki b ve d köşeleri arasındaki en kısa yol mavi ile gösterilir. Buradan, $d_{C_4}(b, d) = 2$ elde edilir. Şekil 1.19 da ise benzer şekilde f ve h köşeleri arasındaki en kısa yol mavi ile gösterilip $d_{C_5}(f, h) = 2$ bilgisine ulaşılır.

Tanım 1.2.25. Bağlı bir G çizgesinin iki köşesi arasındaki uzaklığın en büyüğüne **çap** (diameter) denir. Bir G çizgesinin çapı $diam(G)$ ile gösterilir.

Örnek 14. P_4 , P_5 , C_4 ve C_5 çizgelerinin çaplarını bulalım. Şekil 1.16 dan görüldüğü üzere P_4 çizgesinde en büyük uzaklık a ve d köşeleri arasında yer alır. Dolayısıyla, $diam(P_4) = d_{P_4}(a, d) = 3$ olur. Şekil 1.17 de ise P_5 için en büyük uzaklığın e ve i köşeleri arasında yer aldığı görülür. Bu yüzden $diam(P_5) = d_{P_5}(e, i) = 4$ elde edilir. Şekil 1.18 ve Şekil 1.19 dan $diam(C_4) = 2$ ve $diam(C_5) = 2$ bilgilerine ulaşılır.



Şekil 1.18: C_4 çizgesinde b ve d köşeleri arasındaki uzaklık



Şekil 1.19: C_5 çizgesinde f ve h köşeleri arasındaki uzaklık

Tanım 1.2.26. Bir G çizgesindeki bir u köşesi ile çizgede yer alan diğer tüm köşeler arasındaki uzaklıkların en büyüğüne u köşesinin **dışmerkezliliği** (eccentricity) denir. Bir G çizgesindeki u köşesinin dışmerkezliliği $ecc_G(u)$ ile gösterilmektedir.

Örnek 15. Şekil 1.16 da P_4 çizgesindeki c köşesini ele alalım. Bu köşenin dışmerkezliliği çizgedeki diğer köşelerle arasındaki uzaklığın en büyüğü olacaktır. Burada $d_{P_4}(a,c) = 2$, $d_{P_4}(b,c) = 1$ ve $d_{P_4}(c,d) = 1$ olduğundan $ecc_{P_4}(c) = 2$ elde edilir.

Benzer şekilde Şekil 1.17 de yer alan P_5 çizgesindeki g köşesinin dışmerkezliliğini hesaplayalım. Bu köşenin en büyük uzaklığı kendisi ve e köşesi ya da kendisi ve i köşesi arasındaki uzaklığa eşit olup $ecc_{P_5}(g) = 2$ olarak bulunur.

Dışmerkezlilik tanımını bir de Şekil 1.18 ve Şekil 1.19 daki C_4 çizgesindeki a köşesi ve C_5 çizgesindeki e köşeleri için incelersek sırasıyla $ecc_{C_4}(a) = 2$ ve $ecc_{C_5}(e) = 2$ bilgilerine ulaşılır.

Tanım 1.2.27. Bir G çizgesindeki dışmerkezliliklerin en küçüğüne **yarıçap** (radius) denir.

Örnek 16. Şimdi bu tanımı önce P_4 ve P_5 çizgeleri için daha sonra da C_4 ve C_5 çizgeleri için inceleyelim.

Şekil 1.16 da P_4 çizgesinde yer alan köşelerin sırasıyla dışmerkezlilikleri şu şekildedir:

$ecc(a) = 3$, $ecc(b) = 2$, $ecc(c) = 2$ ve $ecc(d) = 3$ tür. P_4 çizgesinin yarıçapı bu değerlerin en küçüğü olduğundan bu değer 2 dir.

Şekil 1.17 de P_5 çizgesindeki köşeler için dışmerkezlilik değerleri ise şöyledir:

$ecc(e) = 4$, $ecc(f) = 3$, $ecc(g) = 2$, $ecc(h) = 3$ ve $ecc(i) = 4$ tür. Böylelikle yarıçap değeri 2 bulunur.

Şekil 1.18 ve Şekil 1.19 da C_4 ve C_5 çizgelerinin yarıçap değerlerinin de 2 olduğu anlaşılır.

Tanım 1.2.28. Bir G çizgesinde G çizgesinin yarıçapına eşit dışmerkezliliğe sahip köşelerin kümesine **merkez** (center) adı verilir.

Örnek 17. P_4 çizgesi için Şekil 1.16 da görüldüğü üzere P_4 çizgesinin merkez köşeler kümesi $\{b,c\}$ kümesidir. P_5 için Şekil 1.17 den anlaşılacağı üzere merkez köşeler kümesi $\{g\}$ dir. Yani P_5 çizgesinin merkezi g köşesidir. Şekil 1.18 ve Şekil 1.19 dan sırasıyla C_4 ve C_5 çizgeleri için bu çizgelerde yer alan bütün köşelerin merkez köşe kümesinde olduğu kolaylıkla görülebilir.

Hsu (1993) makalesinde Γ_n çizgesinin çapının n değerine eşit olduğu ifade edilir.

Munarini ve Salvi (2002) çalışmasında ise Γ_n çizgesinin yarıçapının $\lceil n/2 \rceil$ olduğu ispatlanır. Ayrıca Γ_n çizgesinin merkez değerine de karar verilir.

Teorem 1.2.29. $n \geq k \geq 1$ olsun. Γ_n çizgesindeki k dışmerkezli köşe sayısı

$$\binom{k}{n-k} + \binom{k-1}{n-k} \quad (1.23)$$

dir (Castro ve Mollard, 2011).

Tanım 1.2.30. G bağlı bir çizge olsun. Bu çizgedeki sıralı olmayan bütün köşe ikilileri arasındaki uzaklıkların toplamına G çizgesinin Wiener indeksi denir. Bir G çizgesinin Wiener indeksi $W(G)$ ile gösterilir.

Bu uzaklık değişmezi özellikle matematiksel kimya alanı için oldukça önemli görülür. Hesaplanması ortalama uzaklık, $\mu(G)$, değerinin hesaplanmasına eşdeğerdir.

$$\mu(G) = \frac{1}{\binom{|V(G)|}{2}} W(G) \quad (1.24)$$

olarak ifade edilir. Klavzar ve Mollard (2011) Fibonacci küplerinin Wiener indeksini Fibonacci sayılarıyla şu şekilde ifade etmiştir.

Teorem 1.2.31. Herhangi $n \geq 0$ için,

$$W(\Gamma_n) = \sum_{i=1}^n f_i f_{i+1} f_{n-i+1} f_{n-i+2} \quad (1.25)$$

dir (Klavzar ve Mollard, 2011).

(1.25) ile Greene ve Wilf (2006) çalışmasındaki teori biraraya getirildiğinde Wiener indeks için kapalı bir formül elde edilebilir.

Teorem 1.2.32. Herhangi $n \geq 0$ için,

$$W(\Gamma_n) = \frac{4(n+1)f_n^2}{25} + \frac{(9n+2)f_n f_{n+1}}{25} + \frac{6n f_{n+1}^2}{25} \quad (1.26)$$

dir (Klavzar ve Mollard, 2011).

Sonuç 1.2.33.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(\Gamma_n)}{n} = \frac{2}{5} \quad (1.27)$$

dir (Klavzar ve Mollard, 2011).

Tanım 1.2.34. Bir G çizgesinin *ortalama dışmerkezliliği* (average eccentricity)

$$\overline{ecc}(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{u \in V(G)} \overline{ecc}(u)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Γ_n çizgesinin ortalama dışmerkezliliğinin limiti de hesaplanan uzaklık değişmezlerinden biridir.

Teorem 1.2.35.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{ecc}(\Gamma_n)}{n} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad (1.28)$$

dur (Klavzar ve Mollard, 2014).

1.2.4 Bağlılığa ait sonuçlar

Azarija ve diğ. (2015) Γ_n küpünün temel ayrışımından yararlanarak Γ_n Fibonacci küpünün en küçük derecesine, köşe bağlılığına ve kenar bağlılığına dair sonuçlar elde etmiştir. Bu sonuçları incelemeden önce bahsi geçen terimlerin tanımlarına bakalım.

Tanım 1.2.36. G bir çizge olmak şartıyla eğer çizgedeki her köşe çifti birbirine bağlı ise bu çizgeye **bağlı** (connected) denir. Bir başka deyişle, içerdiği her köşe çifti arasında bir yol bulunduran çizgeye bağlı adı verilir.

Tanım 1.2.37. **Köşe kesimi** (vertex cut) veya **ayırma kümesi** (seperating set) içerdiği köşeler bağlı bir G çizgesinden silindiğinde G çizgesinin bağlılığını bozan köşelerin kümesidir.

Tanım 1.2.38. **Köşe bağlılığı**, $\kappa(G)$, en küçük köşe kesiminin boyutudur.

Tanım 1.2.39. Bir G çizgesinde bir kenar silindiğinde çizgenin bağlılığı bozuluyorsa bu kenara **köprü** (bridge) adı verilir. Daha genel bir ifadeyle, bir G çizgesinde **kenar kesimi** (edge cut) içerdiği kenarlar çizgeden silindiğinde çizgenin bağlılığını bozan kenarların kümesidir.

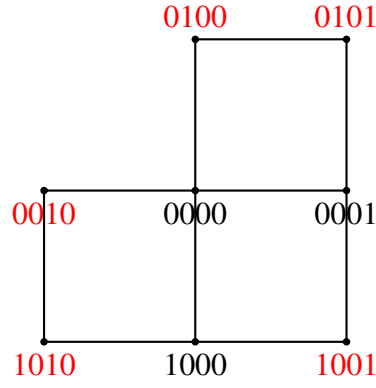
Tanım 1.2.40. **Kenar bağlılığı**, $\kappa'(G)$, en küçük kenar kesiminin boyutudur.

Lemma 1.2.41. $\delta(\Gamma_n)$, Γ_n çizgesinin en küçük derecesini göstermek üzere eğer $n \geq 1$ ise,

$$\delta(\Gamma_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor \quad (1.29)$$

tür (Azarija ve diğ., 2015).

Örnek 18. Şekil 1.20 de derecesi 2 olan köşelerin etiketleri kırmızı olacak şekilde Γ_4 Fibonacci küpü gösterilmektedir. Burada açıkça görüldüğü üzere Γ_4 küpündeki siyah etiketli köşelerin derecesi kırmızı etiketlilerden daha büyüktür. Dolayısıyla, $\delta(\Gamma_4) = 2$ dir. (1.29) da yer alan formülasyon kullanılarak bu değer doğruluğu kontrol edilebilir.



Şekil 1.20: Γ_4 küpünde derecesi 2 olan köşeler

$$\delta(\Gamma_4) = \left\lfloor \frac{4+2}{3} \right\rfloor = 2$$

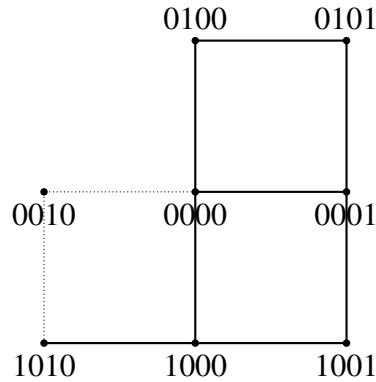
dir.

Teorem 1.2.42. $n \geq 1$ ise,

$$\kappa(\Gamma_n) = \kappa'(\Gamma_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor \quad (1.30)$$

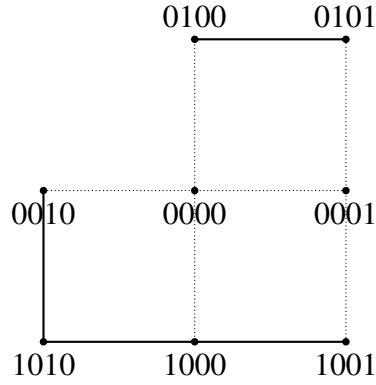
(Azarija ve diğ., 2015)

Örnek 19. Şekil 1.20 de yer alan Γ_4 küpünün köşe bağılılığı ve kenar bağılılığı sayılarını bulalım. Şekil 1.21 de 0010 köşesi Γ_4 küpünden silindiğinde elde edilen çizge gösterilmektedir. Bu köşeye ait kenarlar kesikli çizgilerle gösterilmektedir. Anlaşıldığı üzere elde edilen çizge bağılıdır. Benzer şekilde diğer köşeler de küpten tek tek silinirse bu işlem gerçekleştirildikten sonra elde edilen çizgelerin bağılılığının korunduğu görülür.



Şekil 1.21: Γ_4 küpünden 0010 köşesinin silinmesiyle elde edilen çizge

Ama eğer Γ_4 küpünden 0000 ve 0001 köşeleri aynı anda silinirse elde edilen çizge bağılı olmayacaktır. Şekil 1.22 bu durumu göstermektedir. Burada 0000 ve 0001 köşelerine ait kenarlar kesikli çizgilerle ifade edilmektedir.



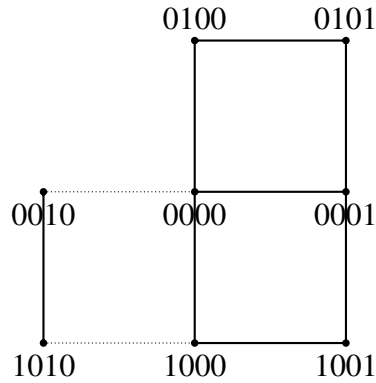
Şekil 1.22: Γ_4 küpünden 0000 ve 0001 köşelerinin silinmesiyle elde edilen çizge

O halde Γ_4 küpü için köşe bağılılığı sayısına dair öngörü 2 dir. (1.30) kullanıldığında

$$\kappa(\Gamma_4) = \left\lfloor \frac{4+2}{3} \right\rfloor = 2$$

olacaktır. Dolayısıyla elde edilen öngörü doğrulanır.

Γ_4 küpünde en küçük derece 2 olduğu için bu küpte yalnızca bir kenarın silinmesiyle elde edilen çizgeler yine bağlı olacaktır. Ama 0010 ve 0000 köşelerinin birbiriyle oluşturduğu kenar ile 1010 ve 1000 köşelerinin birbiriyle oluşturduğu kenar silinirse elde edilen çizge bağlı değildir. Bu kenarlar kesikli çizgilerle Şekil 1.23 teki Γ_4 çizgesinde gösterilmiştir.



Şekil 1.23: Γ_4 küpünden 0010 ile 0000 ve 1010 ile 1000 köşelerinin oluşturduğu kenarların silinmesiyle elde edilen çizge

O halde Γ_4 küpü için kenar bağılılığı sayısına dair öngörü 2 dir. (1.30) kullanıldığında

$$\kappa'(\Gamma_4) = \left\lfloor \frac{4+2}{3} \right\rfloor = 2$$

olduğu doğrulanır.

1.2.5 Düzensizliğe ait sonuçlar

Tanım 1.2.43. Bir G çizgesinde eğer tüm köşelerin derecesi aynı ise bu çizgeye **düzenli** (regular) çizge denir.

Bir G çizgesinin düzensizliği (irregularity) çizgenin düzenli bir çizgeden ne kadar farklı olduğunu ölçen bir değişmezdir. Hiperküp, Q_n çizgesinde tüm köşelerin dereceleri aynı olduğu için bu çizge düzenli çizgedir. Dolayısıyla, Γ_n Fibonacci küpünün düzensizliği Q_n hiperküpten ne kadar farklı olduğunu ölçen bir değişmezdir.

Tanım 1.2.44. Bir G çizgesinin düzensizliği $irr(G)$, bir diğer ismiyle Albertson indeksi

$$irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |deg_G(u) - deg_G(v)| \quad (1.31)$$

dir.

Alizadeh ve diğ. (2020) çalışmasında Γ_n küpünün düzensizliğine dair net formül elde edilmiştir.

Teorem 1.2.45. $n \geq 1$ ise,

$$irr(\Gamma_n) = \frac{2}{5}((n-1)f_n + 2nf_{n-1}) \quad (1.32)$$

dir (Alizadeh ve diğ., 2020).

Örnek 20. $n = 3$ için Γ_3 küpünün düzensizliği,

$$irr(\Gamma_3) = \frac{2}{5}(2f_3 + 6f_2) = \frac{2}{5}(10) = 4$$

$n = 4$ için Γ_4 küpünün düzensizliği,

$$irr(\Gamma_4) = \frac{2}{5}(3f_4 + 8f_3) = \frac{2}{5}(25) = 10$$

ve $n = 5$ için Γ_5 küpünün düzensizliği,

$$irr(\Gamma_5) = \frac{2}{5}(4f_5 + 10f_4) = \frac{2}{5}(50) = 20$$

olarak elde edilir.

Elde edilen bu sonucu motivasyon olarak kullanan Egecioğlu ve diğ. (2020) çalışmasında Fibonacci küpleri için düzensizlik polinomu ele alınır. Bu çizge ailesi için düzensizlik polinomunun Albertson indeksini özelleştirdiği ve $|deg(u) - deg(v)|$ hakkında ek bilgiler sağladığı görülür.

Tanım 1.2.46. Bir G çizgesinin düzensizlik polinomu $I_G(x)$ şu şekilde tanımlanır:

$$I_G(x) = \sum_{uv \in E(G)} x^{|deg_G(u) - deg_G(v)|} \quad (1.33)$$

dir.

Teorem 1.2.47. $I_n(x) = I_{\Gamma_n}(x)$ ifadesi Γ_n küpünün düzensizlik polinomunu gösterebilir. Her $n \geq 4$ için Γ_n çizgesinin $I_n(x)$ düzensizlik polinomu

$$I_n(x) = 2I_{n-1}(x) + I_{n-2}(x) - 2I_{n-3}(x) - I_{n-4}(x) \quad (1.34)$$

olarak tanımlanır. Burada $I_0(x) = 0$, $I_1(x) = 1$, $I_2(x) = 2x$ ve $I_3(x) = x^2 + 2x + 2$ dir (Eğecioğlu ve diğ., 2020).

Örnek 21. Γ_4 küpünün düzensizlik polinomu, $I_4(x) = I_{\Gamma_4}(x)$,

$$\begin{aligned} I_4(x) &= 2I_3(x) + I_2(x) - 2I_1(x) - I_0(x) \\ &= 2(x^2 + 2x + 2) + 2x - 2 - 0 \\ &= 2x^2 + 6x + 2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu polinomdan Γ_4 içerisinde $uv \in \Gamma_4$ olmak üzere 2 kenar için $|deg(u) - deg(v)|$ farkının 2; 6 kenar için bu farkın 1 ve 2 kenar için bu farkın 0 olduğu anlaşılır.

Γ_5 küpünün düzensizlik polinomu ise,

$$\begin{aligned} I_5(x) &= 2I_4(x) + I_3(x) - 2I_2(x) - I_1(x) \\ &= 2(2x^2 + 6x + 2) + x^2 + 2x + 2 - 2(2x) - 1 \\ &= 4x^2 + 12x + 4 + x^2 + 2x + 2 - 4x - 1 \\ &= 5x^2 + 10x + 5 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu polinomdan Γ_5 içerisinde $uv \in \Gamma_5$ olmak üzere 5 kenar için $|deg(u) - deg(v)|$ farkının 2; 10 kenar için bu farkın 1 ve 5 kenar için bu farkın 0 olduğu anlaşılır.

Sonuç 1.2.48. Γ_n çizgesinin $I_n(x)$ düzensizlik polinomlarının $\{I_n(x)\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$I(x, y) = \sum_{n \geq 0} I_n(x) y^n = \frac{y(1 + (x-1)y)^2}{(1 - y - y^2)^2} \quad (1.35)$$

dir (Eğecioğlu ve diğ., 2020).

Sonuç 1.2.49. Herhangi $n \geq 2$ için (1.3) denkleminde $E_n(E(\Gamma_n))$ biliniyor. Herhangi $n \geq 2$ için Γ_n çizgesinin düzensizlik polinomu

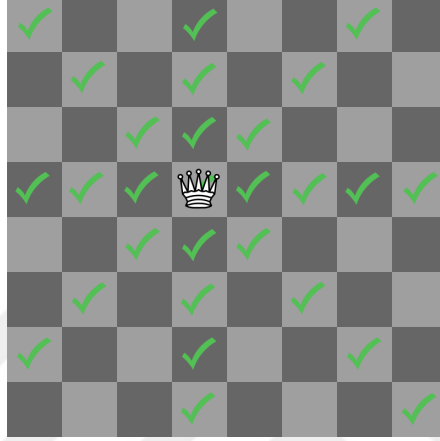
$$\begin{aligned} I_n(x) &= E_n + 2E_{n-1}(x-1) + E_{n-2}(x-1)^2 \\ &= (E_n - 2E_{n-1} + E_{n-2}) + (2E_{n-1} - 2E_{n-2})x + E_{n-2}x^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

dir (Eğecioğlu ve diğ., 2020).



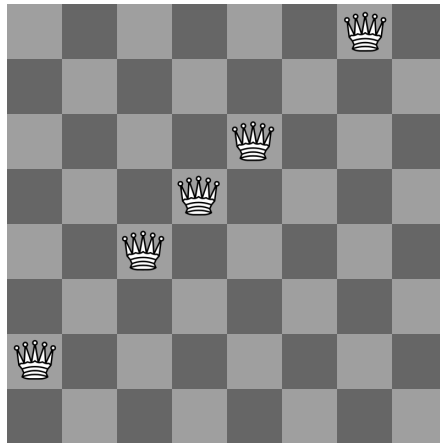
2. BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ

Çizge teorisinde baskınlık probleminin temeli satranç tahtası üzerindeki bir vezirin hareketine dayanmaktadır. Bir vezir satranç kuralları gereği bir hamlesinde istediği kadar karede çapraz, dikey ya da yatay yönde hareket edebilir. Şekil 2.1 de bu durumları gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Satranç tahtası üzerindeki bir vezirin hakim olduğu kareler

Vezirin gidebileceği olası tüm hamleleri göz önüne alındığında satranç tahtasındaki her kare farklı yerlere yerleştirilebilecek bir vezir tarafından saldırılabilecek veya hakim olunabilecek konumda olacaktır. Örneğin, bir satranç tahtasında farklı karelere yerleştirilen 5 vezir satranç tahtası üzerinde yer alan her kareye hakim olabilir. Vezirin olası bu durumu Şekil 2.2 de gösterilmektedir.



Şekil 2.2: Satranç tahtası üzerindeki her kareye hakim farklı karelere yerleştirilmiş 5 vezirin konumu

Satranç tahtası üzerinde bir vezirle en az nokta seçerek en fazla noktaya ulaşılacak istenmiştir. Bu problem çizge teorisine şu şekilde uyarlanır. Satranç tahtası bir G

çizgesi olarak düşünölmek üzere bu tahtanın her bir karesi bir köşe ifade etmek koşuluyla, bu köşelerin her biri dikey, yatay yada çapraz olarak birbirine komşu olsun. Herhangi iki köşe arasındaki dikey, yatay yada çapraz uzaklık ise kenar olsun. O halde satranç tahtasının köşeleri bir baskınlık kümesi ifade edecektir.

Tanım 2.0.1. G bir çizge olsun. $D \subseteq V(G)$ olmak şartıyla, eğer $V(G)$ kümesindeki her köşe ya D kümesine ait ya da D kümesindeki bazı köşelere komşu ise D kümesine baskın küme denir. Baskınlık sayısı, $\gamma(G)$, G çizgesinin en az elemanlı baskın kümesinin eleman sayısıdır.

Bu tanımı birkaç boyutta yol ve döngüler için inceleyelim.

Örnek 22. Şekil 2.3 te $P_4 = (a, b, c, d)$ çizgesinde sırasıyla a ile c köşeleri ve a ile d köşeleri kırmızı renkle gösterilmektedir. Bu köşelerin bulunduğu kümeler, $\{a, c\}$ ve $\{a, d\}$ kümeleri P_4 çizgesindeki baskın köşe kümelerinin örneğidir.



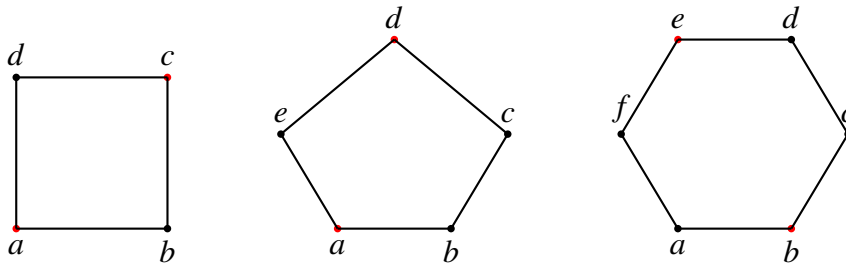
Şekil 2.3: P_4 çizgesinde 2 farklı baskın köşe kümeleri

Şekil 2.4 te $P_5 = (a, b, c, d, e)$ çizgesi gösterilmektedir. Sol taraftaki P_5 çizgesinde kırmızı ile gösterilen köşeler a, b ve e dir. Sağ taraftaki P_5 çizgesinde ise kırmızı ile gösterilen köşeler yalnızca b ve e köşeleridir. Her iki şekilde de kırmızı ile ifade edilen köşeler baskın köşelerdir. Yani hem $\{a, b, e\}$ hem de $\{b, e\}$ baskın köşe kümesidir. Fakat baskınlık sayısı en az elemanlı baskın köşe kümesinin eleman sayısı olduğu için P_5 çizgesinin baskınlık sayısı 2 olarak elde edilir.



Şekil 2.4: P_5 çizgesinde 2 farklı baskın köşe kümeleri

Şekil 2.5 te sırasıyla $C_4 = (a, b, c, d)$, $C_5 = (a, b, c, d, e)$ ve $C_6 = (a, b, c, d, e, f)$ çizgeleri gösterilmektedir. Bu çizgelerde sırasıyla kırmızı renkle ifade edilen köşeler baskın köşelerdir.



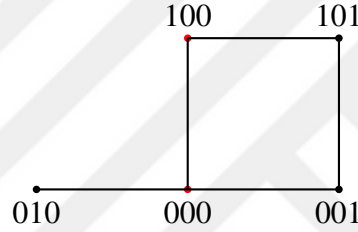
Şekil 2.5: C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerindeki baskın köşe kümeleri

2.1 Fibonacci Küplerinde Baskınlık Tipi Değişmezleri

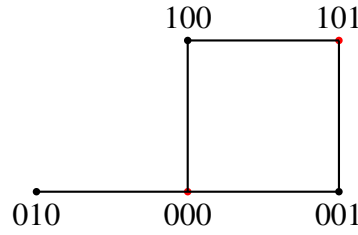
Bu alt bölümde literatürde Fibonacci küpünde çalışılan baskınlık tipi değişmezlerine değineceğiz. Sırasıyla, 2 - kutulama, bağımsızlık baskınlık, toplam baskınlık, bağlı baskınlık, eşli baskınlık ve işaretli baskınlık olmak üzere bu altı farklı tip baskınlık değişmezlerinde Γ_n küpü için elde edilen sayısal sonuçları ve optimizasyon problemlerini ele alacağız.

Öncelikle $n = 3$ ve $n = 4$ boyutları için Fibonacci küplerinin Tanım 2.0.1 den yararlanarak baskın köşe kümelerini ve baskınlık sayılarını inceleyelim.

Örnek 23. Γ_3 için baskın köşe kümesine D diyelim. Tanım gereği $V(\Gamma_n) \setminus D$ kümesinde yer alan her köşe D kümesindeki en az bir köşeye komşu olacağından Γ_3 için Şekil 2.6 ve Şekil 2.7 de kırmızı köşelerle gösterildiği üzere $D = \{000, 100\}$ veya $D = \{000, 101\}$ seçilebilir. Dolayısıyla $\gamma(\Gamma_3) = 2$ olacaktır.



Şekil 2.6: Γ_3 küpü için bir baskın küme



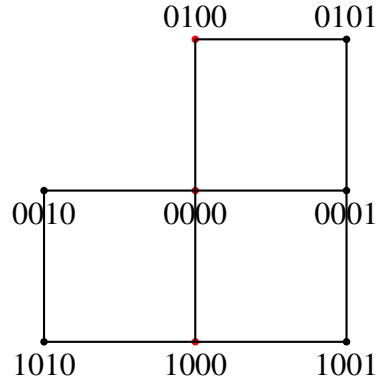
Şekil 2.7: Γ_3 küpü için bir bağımsız ve baskın küme

Örnek 24. Γ_4 çizgesi için baskın köşe kümesi D olsun. Bu kümede yer almayan her köşe kümenin elemanlarından en az birine komşu olacağından $D = \{0100, 0000, 1000\}$ ya da $D = \{1010, 0000, 0101\}$ olarak seçilebilir. Bu iki farklı baskın köşe kümesi Şekil 2.8 ve Şekil 2.9 da kırmızı köşelerle gösterilmiştir. Dolayısıyla $\gamma(\Gamma_4) = 3$ bulunur.

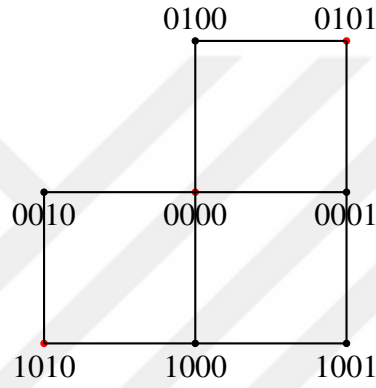
Lemma 2.1.1.

$$\gamma(\Gamma_n) \leq \gamma(\Gamma_{n-1}) + \gamma(\Gamma_{n-2}) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır (Pike ve Zou, 2009).



Şekil 2.8: Γ_4 küpü için bir baskın küme



Şekil 2.9: Γ_4 küpü için bir bağımsız ve baskın küme

Fibonacci küplerinin baskınlık sayıları üzerine yapılan çalışmalara bakıldığında öncelikle $n \leq 8$ için Γ_n Fibonacci küpünün baskınlık sayısının elde edildiği sonuç göze çarpacaktır. Γ_8 için 509 adet farklı baskın küme bulunmuştur (Pike ve Zou, 2009).

(2.1) den yola çıkılarak daha küçük bir baskınlık kümesi elde etmek amacıyla bir veya daha fazla köşeyi başka bir köşeye değiştirerek Γ_9 için 17 elemanlı bir baskınlık kümesi bulunmuştur.

$|V(\Gamma_n)| = f_{n+2}$ olmak üzere, $V(\Gamma_9) = f_{11} = 89$ dur. 17 elemanlı baskınlık kümesi D ile ifade edilirse o halde elde edilen küme D kümesi

$$D = \{010000000, 100100000, 010100000, 001000100, 000010010, 000001010, 000001001, 101001000, 101000010, 100010100, 100000101, 001010001, 000101001, 000101010, 000100101, 101010001, 010010101\}$$

dir (Castro ve diğ., 2011).

Ayrıca $n \geq 4$ için,

$$\gamma(\Gamma_n) \geq \left\lceil \frac{f_{n+2} - 3}{n - 2} \right\rceil \quad (2.2)$$

sonucuna da ulaşılmıştır (Pike ve Zou, 2009).

Ilic ve Milosevic (2017) çalışmasında $n = 10$ boyutuna kadar Fibonacci küplerinin baskınlık sayısı tam sayı lineer programlama kullanılarak bulunmuştur. $\gamma(\Gamma_9)$ için Castro ve diğ. (2011) çalışmasında üst sınır olduğu öngörülen 17 sayısının $\gamma(\Gamma_9) = 17$ olduğu elde edilmiştir.

Elde edilen değerler Çizelge 2.1 de gösterilmektedir.

Çizelge 2.1: $n \leq 10$ olmak üzere Γ_n için baskınlık sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ V(\Gamma_n) $	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$ E(\Gamma_n) $	1	2	5	10	20	38	71	130	235	420
$\gamma(\Gamma_n)$	1	1	2	3	4	5	8	12	17	25

Bu sonuçlar aşağıdaki tam sayı lineer programlamanın sonucudur.

G bir çizge ve $S \subseteq V(G)$ olmak şartıyla köşe kümesinin her bir köşesi için,

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in S \text{ ise} \\ 0, & i \in V \setminus S \text{ ise} \end{cases} \quad (2.3)$$

G çizgesindeki v köşesine komşu bütün köşeleri ve böyle iki köşeyi birleştiren kenarları içeren G çizgesinin oluşturduğu bir alt küme $N(v)$ ile gösterilir. $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ olmak üzere v köşesinin kapalı komşuluğunu gösterebilir.

Değişkenler (2.3) deki gibi olmak şartıyla G çizgesinin baskınlık sayısı (2.5) ve (2.6) kısıtları sağlanmak üzere (2.4) de verilen minimum değer bulunmasıyla elde edilebilir.

$$\gamma(G) = \min \sum_{i \in V(G)} x_i \quad (2.4)$$

Kısıtlar:

$$\text{Her } i \in V(G) \text{ için } \sum_{j \in N[i]} x_j \geq 1, \quad (2.5)$$

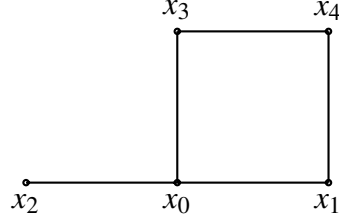
$$\text{Her } i \in V(G) \text{ için } x_i \in \{0, 1\} \quad (2.6)$$

(2.6) kısıtı eğer i köşesi S baskın kümesinin elemanı ise bu köşenin 1 değerini aldığı değilse 0 değerini aldığı ifade etmektedir. (2.5) kısıtı ise her $i \in S$ için G çizgesinde i köşesinin komşu köşeleri S kümesinde değilse ya da i köşesinin en az bir komşusu S kümesindeyse gerçekleşecektir. Dolayısıyla, (2.5) kısıtı aslında i köşesinin ya kendisinin ya da en az bir komşusunun S baskın kümesinde olduğunu ifade etmektedir. Böylece (2.5) ve (2.6) kısıtlarının baskın küme S kümesini tanımladığı görülür.

Γ_n , Fibonacci küpü için bu formülasyon f_{n+2} değişkene ve $2f_{n+2}$ kısıta sahiptir.

Verilen bu 0-1 tam sayı lineer programlamayı bir Γ_n çizgesinde inceleyelim.

Örnek 25. Γ_3 küpü ele alın. Bu küpün her bir köşesine $i \in V(\Gamma_5)$ olmak üzere x_i değeri Şekil 2.10 da görüldüğü gibi atanır.



Şekil 2.10: Γ_3 için 0 – 1 tam sayı lineer programlama değişkenleri

Böylece 0-1 tam sayı lineer programlamanın (2.5) ve (2.6) koşulları şu şekilde oluşur:

$$\begin{aligned} x_2 + x_0 &\geq 1 \\ x_2 + x_0 + x_1 + x_3 &\geq 1 \\ x_0 + x_1 + x_4 &\geq 1 \\ x_0 + x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_1 + x_4 + x_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

Amaç Γ_3 küpü için baskın köşelere karar vermek ve en küçük elemanlı baskın köşe kümesini elde etmektir. Bu bağlamda, yukarıdaki eşitsizliklerde $x_2 = 1$ ve $x_0 = 1$ seçilirse x_0 değişkeninin dahil olduğu bütün eşitsizlikler sağlanır. En son eşitsizlik olan $x_1 + x_4 + x_3 \geq 1$ eşitsizliğinin sağlanması için burada $i \in \{1, 3, 4\}$ olmak şartıyla en az bir x_i değerine 1 verilsin. Bu durumda $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ ve $x_4 = 0$ seçilirse, $S_1 = \{x_0, x_1, x_2\}$ kümesi Γ_3 için baskın bir köşe kümesini ifade edecektir. Benzer şekilde $x_1 = 0$, $x_3 = 1$ ve $x_4 = 0$ için $S_2 = \{x_0, x_2, x_3\}$ baskın köşe kümesi, $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ ve $x_4 = 1$ seçilirse $S_3 = \{x_0, x_2, x_4\}$ baskın köşe kümesi olacaktır.

Baskınlık sayısı en az elemanlı baskın köşe kümesinin eleman sayısı olduğundan Γ_3 için eleman sayısı 3 olan S_1 , S_2 ve S_3 kümelerinden daha az elemanlı bir baskın köşe kümesinin elde edilip edilmediğini inceleyelim. O halde $x_2 + x_0 \geq 1$ için $x_2 = 1$ ve $x_0 = 0$ kabul edilirse $x_2 + x_0 + x_1 + x_3 \geq 1$ sağlanacaktır. $x_0 + x_1 + x_4 \geq 1$ ve $x_0 + x_3 + x_4 \geq 1$ eşitsizlikleri için x_4 ortak bilinmeyen olduğundan bu bilinmeyene 1 değeri ve diğer bilinmeyenlere 0 değeri verilirse bir sonraki $x_1 + x_3 + x_4 \geq 1$ eşitsizliği de sağlanır. Dolayısıyla $S_4 = \{x_2, x_4\}$ kümesi de Γ_3 için baskın bir köşe kümesidir ve eleman sayısı 2 dir. Benzer şekilde $x_2 = 0$ ve $x_0 = 1$ olarak atanıp $x_4 = 1, x_1 = 0$ ve $x_3 = 0$ olursa $S_5 = \{x_0, x_4\}$ kümesi de 2 elemanlı baskın bir köşe kümesi ifade edecektir. Veya $x_2 = 0$, $x_0 = 1$ seçilip diğer bilinmeyenler 0 iken yalnızca $x_1 = 1$ ya da $x_3 = 1$ olarak atanırsa $S_6 = \{x_0, x_1\}$ ve $S_7 = \{x_0, x_3\}$ kümeleri de eleman sayısı 2 olan baskın köşe kümeleri olarak elde edilir.

Eleman sayısı 1 olan baskın köşe kümesi elde edilemez. Çünkü 0-1 tam sayı lineer programlamadan elde edilen eşitsizlikler yalnızca bir değişkene 1 değeri atanıp diğerlerinin 0 olmasıyla elde edilemeyecektir. Dolayısıyla, $\gamma(\Gamma_3) = 2$ olarak bulunur.

Literatürde $n \geq 13$ için Fibonacci küpünün baskınlık sayısına dair üst sınır da elde edilen sonuçlar arasındadır.

δ en küçük dereceli herhangi bir G çizgesi için,

$$\gamma(G) \leq \frac{|V(G)|}{\delta + 1} \sum_{j=1}^{\delta+1} \frac{1}{j} \quad (2.7)$$

dir (Arnautov, 1974). Bilinen bu üst sınırdan yola çıkarak Klavzar ve diğ. (2011) Γ_n küpü için en küçük derece üzerine çalışmış ve $\delta(\Gamma_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ sonucuna ulaşmıştır. Bu sonuç sayesinde

$$\gamma(\Gamma_n) \leq \frac{f_{n+2}}{\left\lfloor \frac{n+5}{3} \right\rfloor} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n+5}{3} \right\rfloor} \frac{1}{j} \quad (2.8)$$

olduğu elde edilmiştir.

Teorem 2.1.2. $n \geq 13$ ise $\gamma(\Gamma_n) \leq 116f_n - 187f_{n-1}$ eşitsizliği sağlanır (Saygı, 2017).

Not 2.1.3. Fibonacci sayılarının özellikleri kullanılarak Teorem 2.1.2 üst sınırının (2.8) sınırından daha iyi olduğu görülmüştür (Saygı, 2017).

Azarija ve diğ. (2018) çalışmasında Ilic ve Milosevic (2017) nin üzerine çalışmış olduğu Γ_n Fibonacci küpü için baskınlık sayıları 1 boyut daha genişletilerek yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar aşağıdaki çizelgede koyu renkle belirtilmiştir.

Çizelge 2.2: $n \leq 12$ için Γ_n küpünün baskınlık sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\gamma(\Gamma_n)$	1	1	2	3	4	5	8	12	17	25	39	55-60

Saygı (2019) çalışmasında Fibonacci küplerinin bütün köşelerinin derece bilgileriyle ilgili daha fazla detay veren yukarı - aşağı derece polinomları (up - down degree polynomials) çalışılmıştır. Bu polinomlar yardımıyla Fibonacci küplerinin baskınlık sayısı için alt sınır veren optimizasyon problemi tanımlanmıştır. Azarija ve diğ. (2018) ve Ilic ve Milosevic (2017) çalışmalarındaki tam sayı lineer programlama uygulamaları $n = 13$ için

$$78 \leq \gamma(\Gamma_{13}) \leq 93 \quad (2.9)$$

varsayımı elde edilmiştir. $\gamma(\Gamma_{12}) \leq 61$ bilgisi ve (2.9) varsayımı kullanılarak Γ_n çizgesinin baskınlık sayısı ile ilgili sınır elde edilmiştir.

Teorem 2.1.4. Eğer $n \geq 12$ ise

$$\gamma(\Gamma_n) \leq 21f_{n-8} - (2f_{n-10} + 8f_{n-12}) \quad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanır (Saygı, 2019)

2.1.1 2 - kutulama sayısı

2 - kutulama (2 - packing) ifadesi daha genel bir ifadeyle k - kutulama kavramı Meir ve Moon (1975) tarafından sunulmuştur. Bir çizgede birbirlerinden k değerinden daha fazla uzaklıkta bulunan köşelerin oluşturduğu çizgenin köşe kümesinin alt kümesi olan kümeye k - kutulama adı verilir. Dolayısıyla, 2 - kutulama basitçe bir çizgede komşu olmayan ya da ortak komşusu olmayan köşelerin oluşturduğu kümedir.

Bu alt bölümde 2 - kutulama tanımına ve literatürde Γ_n Fibonacci küpleri için bilinen sonuçlara değinilecektir.

Tanım 2.1.5. G bir çizge olsun. $X \subseteq V(G)$ olmak kaydıyla X kümesinde bulunan herhangi farklı u ve v köşeleri için $d(u,v) > 2$ ise X kümesine 2 - kutulama kümesi denir. G çizgesinin 2 - kutulama kümesinin alabileceği en büyük eleman sayısına 2 - kutulama sayısı denir ve $\rho(G)$ ile gösterilir.

Not 2.1.6. Her G çizgesi için $\gamma(G) \geq \rho(G)$ eşitsizliği sağlanır.

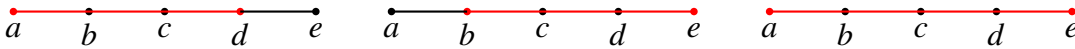
Şimdi birkaç örnekle 2 - kutulama tanımını anlamaya çalışalım.

Örnek 26. $P_4 = (a,b,c,d)$ çizgesi için $X \subseteq V(P_4)$ olmak üzere X kümesinin 2 - kutulama kümesi olması için P_4 çizgesinde sadece a ve d köşeleri için $d_{P_4}(a,d) = 3 > 2$ koşulu sağlandığından X kümesinin bu köşeleri içermesi gerekmektedir. a ve d köşeleri arasındaki uzaklık Şekil 2.11 de kırmızı renkle gösterilmektedir. Dolayısıyla $\rho(P_4) = 2$ dir.



Şekil 2.11: P_4 için 2 - kutulama X kümesi

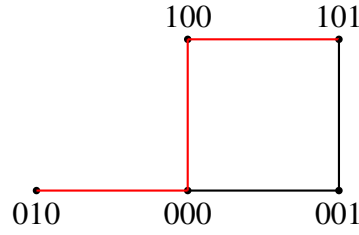
$P_5 = (a,b,c,d,e)$ çizgesi için ise $X \subseteq V(P_5)$ olmak şartıyla $X = \{a,d\}$, $X = \{b,e\}$ ya da $X = \{a,e\}$ olarak tanımlanırsa X kümesi P_5 çizgesi için 2 - kutulama kümesi ifade eder. Bu üç durum Şekil 2.12 de kırmızı renkle P_5 çizgesinde sırayla gösterilmektedir. Buradan $\rho(P_5) = 2$ olduğu gözlemlenir.



Şekil 2.12: P_5 için 2 - kutulama X kümesi örnekleri

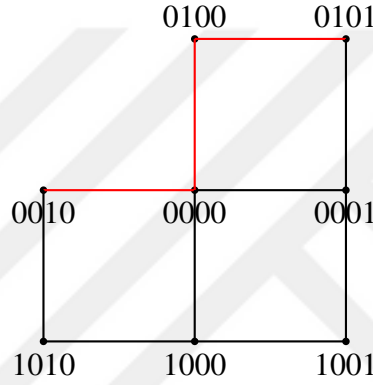
C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için 2 - kutulama sayılarına karar verelim. C_4 ve C_5 çizgeleri için bu iki çizgede yer alan herhangi bir köşenin dışmerkezliliği 2 olduğundan 2 - kutulama şartı sağlanmaz. C_6 çizgesinde ise herhangi bir köşenin dışmerkezliliği 3 olduğu için ve dışmerkezlilik ifadesi C_6 çizgesinde yer alan iki köşe arasındaki uzaklıkların en büyüğü olduğu için $\rho(C_6) = 2$ bulunur.

Örnek 27. Γ_3 çizgesi için $X \subseteq V(\Gamma_3)$ olmak kaydıyla $X = \{010, 101\}$ alınsın. Şekil 2.13 te kırmızı renkle çizilen kenarlarla görüldüğü üzere $d_{\Gamma_3}(010, 101) = 3 > 2$ olduğu için X bir 2 - kutulama kümesidir. Γ_3 için 2 - kutulama şartını sağlayan başka köşeler olmadığından $\rho(\Gamma_3) = 2$ olarak elde edilir.



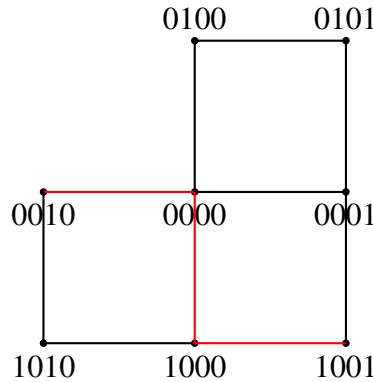
Şekil 2.13: Γ_3 küpünün 2 - kutulama X kümesi

Örnek 28. Γ_4 çizgesi için $X_1 \subseteq \Gamma_4$ olmak koşuluyla Şekil 2.14 te görüldüğü üzere kırmızı kenarlar 0010 ve 0101 köşeleri arasındaki uzaklığı göstermek şartıyla $X_1 = \{0010, 0101\}$ olarak alındığında kümenin elemanları $d_{\Gamma_4}(0010, 0101) = 3 > 2$ şartını sağlamaktadır. Dolayısıyla X_1 bir 2 - kutulama kümesidir.



Şekil 2.14: Γ_4 küpünde 2 - kutulama X_1 kümesi

$X_2 \subseteq \Gamma_4$ olsun. Kırmızı kenarlar 0010 ve 1001 köşeleri arasındaki uzaklığı göstermek şartıyla eğer $X_2 = \{0010, 1001\}$ olarak alınırsa, Şekil 2.15 te görüldüğü üzere $d_{\Gamma_4}(0010, 1001) = 3 > 2$ şartı sağlandığı için X_2 bir 2 - kutulama kümesi olur.



Şekil 2.15: Γ_4 küpünde 2 - kutulama X_2 kümesi

Not 2.1.7. Eğer $X \subseteq \Gamma_4$ olmak kaydıyla $X = \{0010, 0101, 1001\}$ olarak alınırsa $d_{\Gamma_4}(0101, 1001) = 2$ olduğu için X kümesi bir 2 - kutulama kümesi ifade etmez. Burada 2 - kutulama kümesi olarak ifade edilen bütün kümelerin eleman sayısı en fazla 2 olduğu için $\rho(\Gamma_4) = 2$ bulunur. Dolayısıyla Not 2.1.6 gerçekleşir. $\gamma(\Gamma_4) = 3 > 2 = \rho(\Gamma_4)$ tür.

Castro ve diğ. (2011) çalışmasında $n = 10$ boyutuna kadar Γ_n için 2 - kutulama sayıları elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen değerler Çizelge 2.3 te gösterilmektedir.

Çizelge 2.3: $n \leq 10$ olmak üzere Γ_n için 2 - kutulama sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho(\Gamma_n)$	1	1	2	2	3	5	6	9	14	20

Fibonacci küplerinde 2 - kutulama için elde edilen asimtotik alt sınır ise şu şekildedir.

Teorem 2.1.8. Her $n \geq 8$ için, $\rho(\Gamma_n) \geq 2^{2^{\frac{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}}$ dir (Castro ve diğ., 2011).

Yukarıda bulunan sonuçlardan sonra Ilic ve Milosevic (2017) çalışmasında $n = 11$ boyutuna kadar olan Γ_n Fibonacci küplerinin tam sayı lineer programlama yardımıyla 2 - kutulama sayılarına da ulaşılmıştır. Dolayısıyla Çizelge 2.3 te elde edilen sonuçlar geliştirilmiştir.

Elde edilen yeni değerler Çizelge 2.4 teki gibidir.

Çizelge 2.4: $n \leq 11$ olmak üzere Γ_n için 2 - kutulama sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$V(\Gamma_n)$	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$\rho(\Gamma_n)$	1	1	2	2	3	5	6	9	14	20	29

Bu değerler aşağıda tanımlanan tam sayı lineer programlamanın sonucudur.

Değişkenler (2.3) deki gibi olmak şartıyla herhangi G çizgesinin 2 - kutulama sayısı (2.12) ve (2.13) kısıtları sağlanmak üzere (2.11) amaç değer fonksiyonunun maksimum değeriyle elde edilebilir.

$$\rho(G) = \max \sum_{i \in V(G)} x_i \quad (2.11)$$

Kısıtlar:

$$\text{Her } i \in V(G) \text{ için } \sum_{j \in N[i]} x_j \leq 1, \quad (2.12)$$

$$\text{Her } i \in V(G) \text{ için } x_i \in \{0, 1\} \quad (2.13)$$

S bir 2 - kutulama kümesi olsun. Eğer $i \in S$ ise (2.13) kısıtı gereğince 1 değerini aksi takdirde 0 değerini almaktadır. (2.12) kısıtı bir i köşesinin kapalı komşuluğundaki

köşelerle olan toplamını ifade etmektedir. Burada eğer $i \in S$ ise 2 - kutulama tanımından dolayı kapalı komşuluğundaki köşeler S kümesinin elemanı olmayacağından (2.12) kısıtı sağlanır. Eğer i köşesi S kümesinin elemanı değilse fakat kapalı komşuluğundaki elemanlardan biri S kümesinde ise yine (2.12) kısıtı sağlanacaktır. Dikkat edilirse kapalı komşuluğundaki iki köşenin aynı anda S kümesinde olma ihtimali aralarındaki uzaklık 2 olacağından yoktur. Dolayısıyla, (2.12) ve (2.13) kısıtları 2 - kutulama S kümesini tanımlamaktadır.

Azarija ve diğ. (2018) çalışmasında ise Ilic ve Milosevic (2017) nin üzerine çalışmış olduğu Çizelge 2.4 te elde edilen Γ_n Fibonacci küpü için 2 - kutulama sayıları 1 boyut daha genişletilmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar Çizelge 2.5 te koyu renkle belirtilmiştir.

Çizelge 2.5: $n \leq 12$ için Γ_n küpünün 2 - kutulama sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\rho(\Gamma_n)$	1	1	2	2	3	5	6	9	14	20	29	42

2.1.2 Bağımsız baskınlık sayısı

Baskınlık probleminde bir G çizgesinin baskın kümesi birbirine komşu iki köşeyi bulundurabilir. Fakat bağımsız baskınlık problemi bir G çizgesinin baskın köşe kümesindeki elemanlar arasında kenar bulundurulmaması motivasyonunu benimser. Bu alt bölümde Γ_n Fibonacci küpleri için bağımsız baskınlık sayılarına ait sonuçlara değinilecektir.

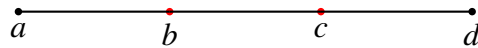
Tanım 2.1.9. G bir çizge olmak üzere bağımsız küme bir diğer adıyla kararlı (durağan) küme içerdiği köşelerin herhangi ikisi komşu olmayan köşeler kümesidir.

Tanım 2.1.10. Bağımsız baskın köşe sayısı $i(G)$ ile gösterilir. $i(G)$, G çizgesinin en küçük bağımsız baskın köşe kümesinin eleman sayısına eşittir.

Not 2.1.11. $\gamma(G) \leq i(G)$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi birkaç örnekle bağımsız baskın köşe kümesi tanımını inceleyelim.

Örnek 29. Kırmızı köşeler baskın köşeleri göstermek üzere Şekil 2.16 da $P_4 = (a, b, c, d)$ çizgesi için baskın küme gösterilmektedir. Görüldüğü üzere kümenin elemanları komşu olduğu için bu küme bağımsız baskın küme değildir.



Şekil 2.16: P_4 çizgesi için baskın küme

Fakat Şekil 2.3 teki P_4 çizgesinde yer alan kırmızı köşeler aynı zamanda bağımsız baskın köşe kümesinin elemanlarıdır. Dolayısıyla $i(P_4) = 2$ sonucuna varılır. Benzer şekilde, Şekil 2.4 te P_5 çizgesi için iki farklı baskın küme gösterilmektedir. Burada sol tarafta yer alan P_5 çizgesinde kırmızı köşelerle ifade edilen $\{a, b, e\}$ kümesi baskın

kümeyi ifade ederken a ve b köşeleri komşu olduğundan bağımsız baskın küme değildir. Fakat sağ tarafta yer alan P_5 çizgesi için kırmızı köşeler aynı zamanda bağımsız baskın köşe kümesinin elemanlarıdır. Dolayısıyla $i(P_5) = 2$ sonucuna ulaşılır.

C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için Şekil 2.5 incelenebilir. Burada ifade edilen kırmızı köşeler aynı zamanda bağımsız baskın köşe kümesinin de elemanlarıdır. Dolayısıyla bu çizgeler için de bağımsız baskınlık sayısı 2 olarak elde edilir.

Örnek 30. Bağımsız baskınlık tanımı bir de Γ_3 ve Γ_4 çizgesi için incelensin. Şekil 2.6 da Γ_3 çizgesinde yer alan kırmızı köşeler baskın kümeyi ifade ederken bağımsız baskın küme değildir. Fakat Şekil 2.7 de yer alan Γ_3 küpündeki kırmızı köşeler aynı zamanda bağımsız baskın kümenin elemanlarıdır. Yani, $i(\Gamma_3) = 2$ olduğu anlaşılır.

Γ_4 küpü için Şekil 2.8 de yer alan Γ_4 küpünde kırmızı köşeler birbirine komşudur. Dolayısıyla bu köşelerin oluşturduğu küme baskın kümeyle bağımsız baskın küme değildir. Fakat Şekil 2.9 da yer alan Γ_4 küpündeki kırmızı köşeler aynı zamanda bağımsız baskın köşe kümesinde yer almaktadır. O halde görüldüğü üzere $i(\Gamma_4) = 3$ bulunur.

Ilic ve Milosevic (2017) çalışmasında $n \leq 10$ için Fibonacci küplerinin bağımsız baskınlık sayıları da hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Çizelge 2.6 da gösterilmiştir.

Çizelge 2.6: $n \leq 10$ olmak üzere Γ_n için bağımsız baskınlık sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(G)$	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$i(\Gamma_n)$	1	1	2	3	4	5	8	12	19	26

Bu sonuçlar elde edilirken kullanılan tam sayı lineer programlama aşağıdaki gibidir. Değişkenler (2.3) teki gibi olmak şartıyla herhangi bir G çizgesinin bağımsız baskınlık sayısı (2.15), (2.16) ve (2.17) kısıtları sağlanmak üzere (2.14) te yer alan amaç değer fonksiyonunun minimum değeri hesaplanarak elde edilebilir.

$$i(G) = \min \sum_{i=1}^{|V(G)|} x_i \quad (2.14)$$

Kısıtlar:

$$\text{Her } i \in V(G) \text{ için } \sum_{j \in N[i]} x_j \geq 1, \quad (2.15)$$

$$\text{Her } i \in V(G) \text{ için } (n-1)x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j \leq n-1 \quad (2.16)$$

$$\text{Her } i \in V(G) \text{ için } x_i \in \{0, 1\} \quad (2.17)$$

Bir G çizgesi için $S \subseteq V(G)$ olmak koşuluyla S kümesi içerisinde komşu olmayan köşelerin olduğu bir küme olsun. Burada $i \in S$ ise tanım gereği her $j \in N[i]$ için j köşesi S kümesinde yer almayacağından (2.15) gerçekleşir. Aynı şekilde, eğer $i \notin S$

için en az bir $j \in N[i]$ köşesi S kümesinin elemanı ise (2.15) yine gerçekleşecektir. Dolayısıyla (2.15), (2.17) kısıtıyla birlikte baskın S kümesini ifade eder. Her $i \in S$ için $j \in N[i]$ köşesi tanım gereği S kümesinde yer almadığı için (2.16) kısıtında $x_i = 1$ olacağından $n - 1 \leq n - 1$ sağlanır. Benzer şekilde, eğer $i \notin S$ fakat en az bir $j \in N[i]$ için $j \in S$ ise i köşesinin derecesi en fazla n olduğundan $\sum_{j \in N(i)} x_j$ en fazla $n - 1$

olacaktır. Dolayısıyla bu durumda da (2.16) kısıtı sağlanır. Ve bu koşul bağımsızlığı garanti edecektir. Yani (2.15), (2.17) ve (2.16) kısıtları S kümesinin bağımsız baskın küme olduğunu ifade etmektedir.

Fibonacci küpü Γ_n için bu formülasyon f_{n+2} değişkene ve $3f_{n+2}$ sınıra sahipken (2.15) ve (2.16) dan elde edilen her kısıt en fazla n değişkene sahiptir.

Azarija ve diğ. (2018) çalışmasında Ilic ve Milosevic (2017) nin üzerine çalışmış olduğu bağımsız baskınlık sayıları için de 1 boyut daha genişletilmiş yeni sonuçlar elde edilmiştir. Yani Çizelge 2.6 da $n = 10$ boyutuna kadar olan sonuçlar geliştirilip Çizelge 2.7 de $n = 11$ boyutuna kadar ifade edilmiştir. Elde edilen yeni sonuç koyu renkle gösterilmektedir.

Çizelge 2.7: $n \leq 11$ için Γ_n küpünün bağımsız baskınlık sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$i(\Gamma_n)$	1	1	2	3	4	5	8	12	19	26	40

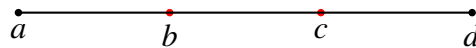
2.1.3 Toplam baskınlık sayısı

Bir G çizgesinin toplam baskınlık sayısı (total domination number, $\gamma_t(G)$) ilk kez Cockayne ve diğ. (1980) de sunulur. Bu parametre sadece izole köşesi bulunmayan, başka bir deyişle bağlı çizgeler için tanımlanır. Her toplam baskın küme aynı zamanda baskın küme niteliğinde olduğu için $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$ elde edilir.

Bu alt bölümde Γ_n Fibonacci küpleri için toplam baskınlık sayısı ile ilgili bilinen sonuçlara değineceğiz.

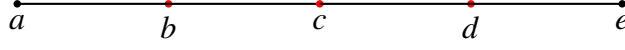
Tanım 2.1.12. G bir çizge olsun. Eğer $V(G)$ kümesindeki her köşe D kümesinde bulunan bazı köşelere komşu ise D kümesine toplam baskın küme denir. Toplam baskınlık sayısı, $\gamma_t(G)$, G çizgesinin toplam baskın kümesinin eleman sayısının en küçüğüdür.

Örnek 31. Sırasıyla P_4 , P_5 , C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerini inceleyelim. Toplam baskın köşe kümesinde yer alan her bir köşenin komşu olduğu en az bir köşe de toplam baskın köşe kümesinde yer alacağı için Şekil 2.3 te yer alan $P_4 = (a, b, c, d)$ çizgesi için kırmızı köşeler toplam baskın köşe kümesini ifade etmemektedir. Şekil 2.17 de görüldüğü üzere $P_4 = (a, b, c, d)$ çizgesi için b ve c köşeleri baskın köşeler olarak alındığında bu köşeler aynı zamanda birbirlerine komşu oldukları için $\{b, c\}$ kümesi toplam baskın köşe kümesini ifade eder. Yani $\gamma_t(P_4) = 2$ bulunur.



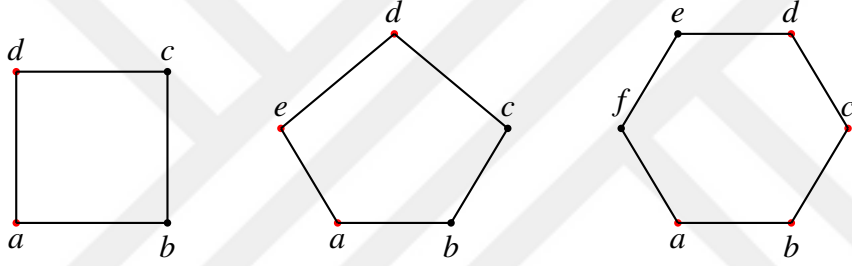
Şekil 2.17: P_4 çizgesi için toplam baskın köşe kümesi

$P_5 = (a, b, c, d, e)$ çizgesi için Şekil 2.4 te gösterilen baskın köşe kümeleri kümenin her bir elemanı kümedeki en az bir köşeye komşu olmadığı için aynı zamanda toplam baskın köşe kümesi değildir. Şekil 2.18 de ise anlaşılacağı gibi P_5 çizgesi için $\{b, c, d\}$ kümesi baskın köşe kümesi olarak alındığında P_5 çizgesindeki her köşenin en az bir komşusu bu kümede yer aldığından $\{b, c, d\}$ toplam baskın köşe kümesidir. Dolayısıyla $\gamma_t(P_5) = 3$ elde edilir.



Şekil 2.18: P_5 için toplam baskın köşe kümesi

$C_4 = (a, b, c, d)$, $C_5 = (a, b, c, d, e)$ ve $C_6 = (a, b, c, d, e, f)$ çizgeleri için Şekil 2.5 te gösterilen baskın köşe kümeleri toplam baskın köşe kümesi özelliği taşımamaktadır. Şekil 2.19 da sırasıyla bu çizgelerin toplam baskın köşe kümelerine bir örnek gösterilmektedir. Buradan, $\gamma_t(C_4) = 2$, $\gamma_t(C_5) = 3$ ve $\gamma_t(C_6) = 4$ olduğu gözlemlenir.



Şekil 2.19: C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için toplam baskın köşe kümeleri

Örnek 32. Şimdi toplam baskın köşe kümesi tanımını bir de Γ_5 küpü için inceleyelim. Kırmızı köşeler baskın köşeleri ifade etmek üzere Γ_5 için Şekil 2.20 de sol taraftaki küpte baskın köşe kümesi gösterilmektedir. Burada 10010 ve 10101 köşeleri için baskın köşe kümesinde bu köşelere komşu köşeler bulunmaz. Dolayısıyla bu küme aynı zamanda toplam baskın köşe kümesi özelliği taşımamaktadır. Şekil 2.20 de sağ tarafta ise Γ_5 için toplam baskın köşe kümesine bir örnek gösterilmektedir. Dolayısıyla, $\gamma_t(\Gamma_5) = 5$ olduğu elde edilir.

Azarija ve diğ. (2018) çalışmasında Fibonacci küpünde $n \leq 12$ için toplam baskınlık sayısına karar verilip bu sayı için üst ve alt sınır elde edilirken, bu baskınlık sayılarını genişletmek veya elde etmek amacıyla tam sayı lineer programlama kullanılır. Bu programlama ile $n \leq 12$ boyutu için elde edilen kesin sonuçlar Çizelge 2.8 deki gibidir.

Çizelge 2.8: $n \leq 12$ olmak üzere Γ_n için toplam baskınlık sayısı.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$V(\Gamma_n)$	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
$\gamma_t(\Gamma_n)$	2	2	2	3	5	7	10	13	20	30	44	65

Çizelge 2.8 sonuçları aşağıdaki tam sayı lineer programlamanın sonucudur. Her $v \in V(\Gamma_n)$ için (2.3) teki gibi değişkenler atandığını kabul edelim. $\gamma(\Gamma_n)$ değerine karar verme problemi her $v \in V(\Gamma_n)$ için $uv \in E(\Gamma_n)$ olmak üzere u köşesi baskın kümenin elemanı ise 1 yoksa 0 değerini aldığını ifade eden (2.19) kısıtının sağlanıp (2.18) de ifade edilen amaç değer fonksiyonunun en küçük değerinin elde edilmesi olarak tanımlanır.

$$\gamma(G) = \min \sum_{v \in V(\Gamma_n)} x_v, \quad (2.18)$$

Kısıt:

$$\sum_{uv \in E(\Gamma_n)} x_u \geq 1 \quad (2.19)$$

Burada (2.19) kısıtını inceleyelim. Diyelim ki baskın köşe kümesi D kümesi olsun. Eğer belirli bir $v \in V(\Gamma_n)$ köşesi aynı zamanda $v \in D$ şartını sağlıyorsa bu v köşesinin de en az bir u komşu köşesi D kümesindeyse (2.19) kısıtı D kümesinin toplam baskın küme ifade ettiğini belirtir. Dikkat edilirse, v köşesinin D kümesinin elemanı olmama durumunda da baskın köşe kümesi tanımı gereği en az bir u komşu köşesi D kümesinin elemanı olacağından (2.19) kısıtının yine sağlandığı görülecektir.

Azarija ve diğ. (2018) Γ_{13} küpü için kesin bir sonuca ulaşmamış olup bu küpün alt ve üst sınırlarına dair bir tahmine ulaşır. Bu tahmin şu şekildedir:

$$97 \leq \gamma(\Gamma_{13}) \leq 101 \quad (\text{Azarija ve diğ., 2018}). \quad (2.20)$$

Toplam baskınlık sayısı için belirtilen optimizasyon problemi ile şu sonuca varılmıştır.

Teorem 2.1.13. *Eğer $n \geq 11$ ise*

$$\gamma(\Gamma_n) \leq 2f_{n-10} + 21f_{n-8} \quad (2.21)$$

eşitsizliği sağlanır (Azarija ve diğ., 2018)

(2.7) eşitsizliği sağlandığı, $\delta(\Gamma_n) = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ ve $\gamma \leq 2\gamma$ olduğu için

$$\gamma(\Gamma_n) \leq \frac{2f_{n+2}}{\lfloor \frac{n+5}{3} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+5}{3} \rfloor} \frac{1}{j} \quad (2.22)$$

eşitsizliği de sağlanmaktadır (Azarija ve diğ., 2018).

(2.21) ve (2.22) de eşitsizliğin sağ tarafında yer alan değerler hesaplandığında (2.21) in $n \leq 33$ için (2.22) den daha iyi bir sınır olduğu tespit edilir.

Not 2.1.14. $\gamma(\Gamma_{13}) \leq 101$ bilgisi kullanılarak $n \geq 12$ için (2.21)

$$\gamma(\Gamma_n) \leq 601f_{n-1} - 371f_n \quad (2.23)$$

sınırına daha da geliştirilebilir (Azarija ve diğ., 2018).

Belirli köşelerin dereceleri kullanılarak yapılan çalışmalarla $\gamma(\Gamma_n)$ için alt sınır da geliştirilmiştir.

Teorem 2.1.15. *Eğer $n \geq 9$ ise*

$$\gamma(\Gamma_n) \geq \left\lceil \frac{f_{n+2} - 11}{n - 3} \right\rceil - 1 \quad (2.24)$$

dir (Azarija ve diğ., 2018).

$n = 12$ boyutuna kadar olan $\gamma(\Gamma_n)$ değerleri yukarıda belirtilen tam sayı lineer programlama yardımıyla elde edilmiştir. Çizelge 2.9, (2.21) ve (2.24) ten elde edilen sınırlarla oluşturulmuştur. $n = 33$ boyutuna kadar olan değerler için (2.21) in daha iyi sınır verdiği gözlemlenmiştir (Azarija ve diğ., 2018).

Çizelge 2.9: $n = 33$ boyutuna kadar Γ_n için toplam baskınlık değerleri ve elde edilmiş sınırları.

n	$\gamma(\Gamma_n)$	n	$\gamma(\Gamma_n)$	n	$\gamma(\Gamma_n)$
1	2	12	65	23	3749-13276
2	2	13	97-101	24	5779-21481
3	2	14	87-174	25	8926-34757
4	3	15	131-283	26	13816-56238
5	5	16	196-457	27	21424-90995
6	7	17	296-740	28	33280-147233
7	10	18	449-1197	29	51778-238228
8	13	19	682-1937	30	80676-385461
9	20	20	1040-3134	31	125876-623689
10	30	21	1590-5071	32	196649-1009150
11	44	22	2438-8205	33	307580-1632839

Saygı (2017) çalışmasında Γ_n çizgesinin temel ayrışmasından yararlanılarak $n \geq 14$ için Fibonacci küpünün toplam baskınlık sayısına dair üst sınır bulunur. Yapılan bu çalışma Azarija ve diğ. (2018) üst sınırlarını geliştirmiştir.

Fibonacci küpünün temel ayrışmasından faydalanılarak elde edilen sonuç şu şekildedir:

Lemma 2.1.16. *Eğer $n \geq 14$ ise*

$$\gamma(\Gamma_n) \leq 2\gamma(\Gamma_{n-2}) + \gamma(\Gamma_{n-3}) \quad (2.25)$$

eşitsizliği sağlanır (Saygı, 2017).

Eğer $\gamma(\Gamma_n)$ için daha iyi sınırlar elde edilmek istenirse (2.25) kullanılarak bazı durumlar için sınırların daha da geliştirilebileceği not edilir. Teorem 2.1.2, (2.25) ve Γ_n küpünün temel ayrışması kullanılarak takip eden sonuca ulaşırlar. Γ_{n-3} küpünün ve

Γ_{n-4} küpünün baskınlık değerlerinden yararlanarak (2.26) Γ_n Fibonacci çizgesinin toplam baskınlık sayısına dair üst sınır sunar.

Teorem 2.1.17. *Eğer $n \geq 15$ ise*

$$\gamma_t(\Gamma_n) \leq 3\gamma(\Gamma_{n-3}) + 2\gamma(\Gamma_{n-4}) \leq 116f_n - 187f_{n-1} = 21f_{n-8} - (2f_{n-10} + f_{n-12}) \quad (2.26)$$

dir (Saygı, 2017).

Özel olarak, $\gamma_t(\Gamma_{14}) \leq 166$ dır (Saygı, 2019).

Not 2.1.18. *Azarija ve diğ. (2018) (2.21) de elde edilen sınırın $n \leq 33$ için (2.22) deki sınırdan daha iyi olduğunu not etmektedir. Saygı (2017) ise Fibonacci sayılarının özellikleri kullanılarak (2.26) da verilen üst sınırın (2.22) deki, (2.21) deki (2.23) teki sınırlardan daha iyi olduğunu belirtmektedir.*

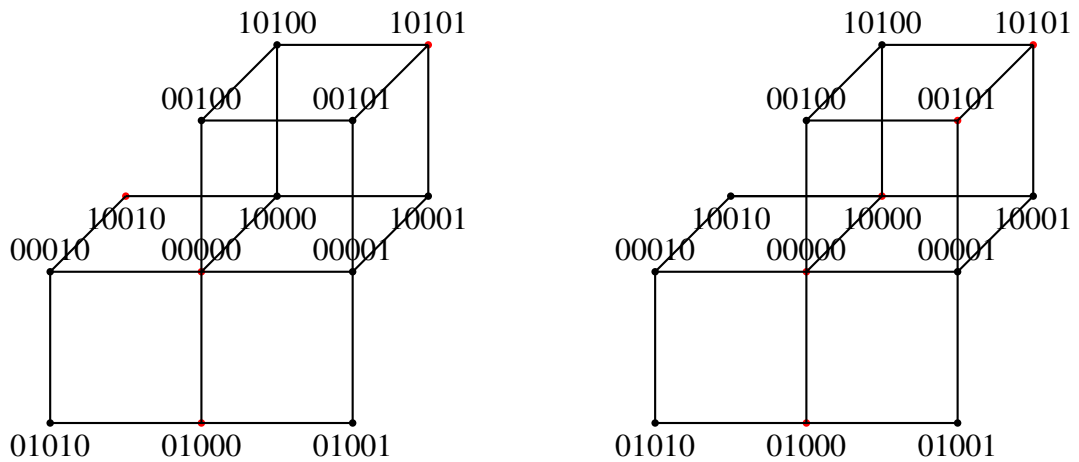
Saygı (2017) deki sonuçlar Çizelge 2.10, 2.11 ve 2.12 de toplanmıştır ve bilinen $n \geq 13$ için $\gamma_t(\Gamma_n)$ için üst sınır bilgileri sunulmuştur. (2.21) ve (2.23) teki üst sınırlar sırasıyla ikinci ve üçüncü satırda gösterilmektedir. (2.25) ve (2.26) da elde edilmiş değerler ise son satırda belirtilmiştir.

Saygı (2019) da Fibonacci küplerinin bütün köşelerinin derece bilgileriyle ilgili daha fazla detay veren yukarı - aşağı derece polinomları kullanılarak Fibonacci küplerinin toplam baskınlık sayısı için de alt sınır veren bir optimizasyon problemi tanımlanır. (2.10) da elde edilen sınır ve (2.26) kullanılarak (2.21) ve (2.26) yı geliştiren bir sonuca ulaşılır.

Teorem 2.1.19. *Eğer $n \geq 16$ ise*

$$\gamma_t(\Gamma_n) \leq 21f_{n-8} - (2f_{n-10} + 8f_{n-12}) \quad \text{dir (Saygı, 2019).}$$

Sıradaki şekil, Örnek 32 de bahsi geçen Γ_5 çizgelerini göstermektedir.



Şekil 2.20: Γ_5 küpü için sırasıyla baskın köşe ve toplam baskın köşe kümesi

Sıradaki çizelgeler, Çizelge 2.9 ve Saygı (2017) deki sonuçlarla oluşturulan Çizelge 2.10, 2.11 ve 2.12 dir.

Çizelge 2.10: $13 \leq n \leq 20$ olmak üzere Γ_n için geliştirilmiş üst sınırlar.

	n	13	14	15	16	17	18	19	20
Teorem 2.21	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	101	174	283	457	740	1197	1937	3134
Not 2.23	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	101	166	267	433	700	1133	1833	2966
Saygı (2017)	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	101	166	261	422	683	1105	1788	2893

Çizelge 2.11: $21 \leq n \leq 27$ olmak üzere Γ_n için geliştirilmiş üst sınırlar.

	n	21	22	23	24	25	26	27
Teorem 2.21	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	5071	8205	13276	21481	34757	56238	90995
Not 2.23	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	4799	7765	12564	20329	32893	53222	86115
Saygı (2017)	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	4681	7574	12255	19829	32084	51913	83997

Çizelge 2.12: $28 \leq n \leq 33$ olmak üzere Γ_n için geliştirilmiş üst sınırlar.

	n	28	29	30	31	32	33
Teorem 2.21	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	147233	238228	385461	623689	1009150	1632839
Not 2.23	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	139337	225452	364789	590241	955030	1545271
Saygı (2017)	$\gamma(\Gamma_n) \leq$	135910	219907	355817	575724	931541	1507265

Elde edilen bu sınırların daha önce elde edilen sınırlardan daha iyi olduğu gözlemlenebilir.

2.1.4 Bağlı baskınlık sayısı

Bağlı baskınlık sayısı (connected domination number) ilk kez Sampathkumar ve Walikar (1979) çalışmasında sunulur. Herhangi bir G çizgesi için bağlı baskınlık sayısının sınırları ve bazı özel çizgelerdeki sayısal değerleri için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Azarija ve diğ. (2018) bu baskınlık tipi değişmezinin Γ_n , Fibonacci küpleri için birkaç boyutta elde edilen sayılarını vermiştir. Öncelikle bağlı baskınlık sayısının tanımına bir göz atalım.

Tanım 2.1.20. Bir G çizgesinde $S \subseteq V(G)$ olsun. $V(G) \setminus S$ kümesindeki her köşe S kümesindeki bir köşeye komşu olmak şartıyla S kümesi tarafından oluşturulan çizge $G[S]$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.20 de verilen bağlı $G[S]$ çizgesi G çizgesinin alt çizgesi olma özelliğini taşır. Bu tanım kullanılarak bağlı baskın küme aşağıdaki şekilde tanımlanır.

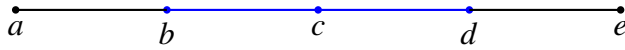
Tanım 2.1.21. Bir G çizgesinde $S \subseteq V(G)$ olmak üzere S kümesi hem baskın küme hem de bağlı olma özelliğini taşıyorsa bu kümeye bağlı baskın küme denir. G çizgesinin bağlı baskınlık sayısı, $\gamma_c(G)$, G çizgesinin bağlı baskın kümesinin eleman sayısının en küçüğüdür.

Bu tanımları birkaç örnekle inceleyelim.

Örnek 33. Şekil 2.21 deki $P_4 = (a,b,c,d)$ ve Şekil 2.22 deki $P_5 = (a,b,c,d,e)$ çizgelerini ele alalım. $S_1 \subseteq V(P_4)$ ve $S_2 \subseteq V(P_5)$ olmak şartıyla eğer $S_1 = \{b,c\}$ ve $S_2 = \{b,c,d\}$ olarak alınırsa P_4 çizgesinde a köşesinin S_1 kümesindeki b köşesine ve d köşesinin ise bu kümedeki c köşesine komşu olduğu görülür. S_1 tarafından oluşturulan $P_4[S_1]$ çizgesi P_4 çizgesinin alt çizgesi olup bağlı olma şartını sağlar. Dolayısıyla buradan S_1 kümesinin P_4 çizgesinin bağlı baskın kümesi olduğu ve $\gamma_c(P_4) = 2$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde P_5 çizgesi için a köşesi S_2 kümesindeki b köşesine e köşesi ise bu kümedeki d köşesine komşudur. S_2 kümesi tarafından oluşturulan $P_5[S_2]$ çizgesi P_5 çizgesinin alt çizgesi olup bağlı olma şartını sağlar. Yani, S_2 kümesi P_5 çizgesinin bağlı baskın kümesidir ve buradan $\gamma_c(P_5) = 3$ bilgisine ulaşılır. Sırasıyla Şekil 2.21 ve Şekil 2.22 de P_4 için $P_4[S_1]$ çizgesi ve P_5 için $P_5[S_2]$ çizgesi mavi renkle gösterilmektedir.

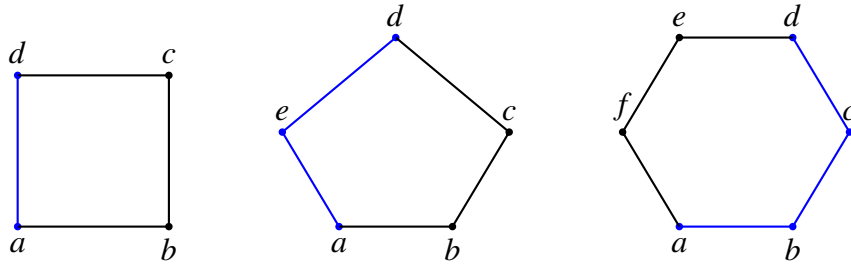


Şekil 2.21: P_4 çizgesinde $P_4[S_1]$ bağlı alt çizgesi



Şekil 2.22: P_5 çizgesinde $P_5[S_2]$ bağlı alt çizgesi

Şimdi Şekil 2.23 te sırasıyla verilen $C_4 = (a,b,c,d)$, $C_5 = (a,b,c,d,e)$ ve $C_6 = (a,b,c,d,e,f)$ çizgelerini inceleyelim.

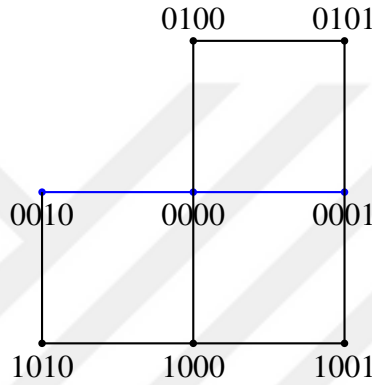


Şekil 2.23: C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerindeki bağlı alt çizge örnekleri

Bağlı baskın kümelerinde yer almayan köşelerinin her biri bağlı baskın kümelerinde yer alan en az bir köşeye komşu olma şartını sağlayacaktır. C_4 çizgesinde her köşenin

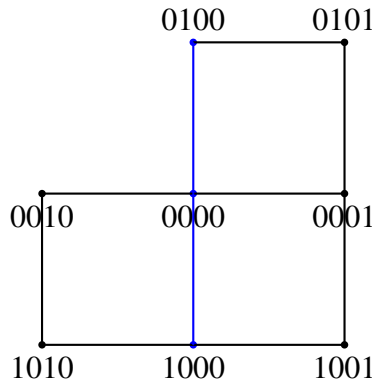
derecesi 2 olduğu için birbirine komşu bu çizgede bulunan herhangi 2 köşenin oluşturduğu küme bağlı baskın küme olur. Benzer şekilde C_5 için her köşenin derecesi 2 olduğu için birbirine komşu bu çizgede yer alan herhangi 3 köşenin; C_6 için ise her köşenin derecesi 2 olduğu için birbirine komşu bu çizgede yer alan herhangi 4 köşenin oluşturduğu küme bağlı baskın küme özelliği taşır. C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerindeki bu durum mavi renkle Şekil 2.23 te gösterilir.

Örnek 34. Bağlı baskın küme tanımını bir de Γ_4 küpü için inceleyelim. $S \subseteq V(\Gamma_4)$ olmak şartıyla $S = \{0010, 0000, 0001\}$ kümesi olsun. $V(\Gamma_4) \setminus S$ kümesindeki her köşe S kümesinde yer alan bir köşeye komşudur. S kümesi tarafından oluşturulan $\Gamma_4[S]$ çizgesi Γ_4 küpünün alt çizgesi olup bağlı çizge özelliği taşır. Dolayısıyla, S kümesi Γ_4 küpünün bağlı baskın kümesi olup $\gamma_c(\Gamma_4) = 3$ bulunur. Γ_4 küpündeki bağlı $\Gamma_4[S]$ çizgesi Şekil 2.24 te mavi renk ile gösterilmektedir.



Şekil 2.24: Γ_4 küpünde $\Gamma_4[S]$ bağlı alt çizgesi

Eğer $S^* = \{0100, 0000, 1000\}$ kümesi olarak tanımlanırsa elde edilen yeni alt çizge yine bağlı olma özelliği taşır ve bu şekilde tanımlanan S^* kümesi bağlı baskın küme olur. Şekil 2.25 te bu durum görülebilir.



Şekil 2.25: Γ_4 küpünde $\Gamma_4[S^*]$ bağlı alt çizgesi

Azarija ve diğ. (2018) de tam sayı lineer programlama yardımıyla $n = 9$ boyutuna kadar Γ_n için bağlı baskınlık sayıları elde edilir. Bu sayılar Çizelge 2.13 te incelenebilir.

Çizelge 2.13: $n \leq 9$ için Γ_n bağlı baskınlık sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma_c(\Gamma_n)$	1	1	2	3	5	7	10	14	22

2.1.5 Eşli baskınlık sayısı

Haynes ve Slater (1998) çalışmasında ilk kez bir G çizgesinin eşli baskınlık sayısından (paired domination number) bahsedilir. Genel olarak eşli baskınlık sayısı ve baskınlık sayısı arasındaki ilişki, yollar ve döngüler üzerindeki sayısal değerleri eşli baskınlık sayısı üzerine yapılmış çalışmalardır. Azarija ve diğ. (2018) Fibonacci küpleri için optimizasyon problemlerinden yararlanarak birkaç boyutta eşli baskınlık sayılarına ulaşmıştır. Öncelikle bu baskınlık sayısının tanımını görelim.

Tanım 2.1.22. G bir çizge olsun. Eşli baskınlık sayısı (paired domination number), $\gamma_p(G)$, en küçük baskın küme $S \subseteq V(G)$ kümesinin eleman sayısıdır. S tarafından oluşturulan çizge mükemmel eşleşme içermelidir.

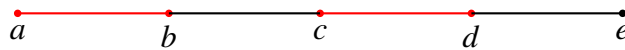
Örnek 35. Sırasıyla P_4 , P_5 , C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için eşli baskın kümeleri elde edelim.

$P_4 = (a, b, c, d)$ çizgesi için $S_1 = \{b, c\}$ kümesi baskın kümedir. Tanım 1.1.9 da mükemmel eşleşme tanımı verilmişti. Bu bağlamda S_1 tarafından oluşturulan çizge mükemmel eşleşme içereceğinden S_1 kümesi eşli baskın köşe kümesidir. Dolayısıyla $\gamma_p(P_4) = 2$ elde edilir. Bu küme Şekil 2.26 da kırmızı renkle P_4 çizgesinde gösterilir.



Şekil 2.26: P_4 çizgesinde S_1 eşli baskın köşe kümesi

$P_5 = (a, b, c, d, e)$ çizgesi için $S_2 = \{a, b, c, d\}$ kümesi baskın kümedir. Bu küme tarafından oluşturulan çizge 2 adet mükemmel eşleşme içerir. Yani, S_2 kümesi eşli baskın köşe kümesidir ve $\gamma_p(P_5) = 4$ bulunur. Şekil 2.27 de S_2 kümesi kırmızı renkle P_5 çizgesinin üzerinden gösterilmektedir. Dikkat edilirse S_2 kümesinden daha az elemanlı P_5 çizgesinin elemanlarını içeren herhangi bir küme ya baskınlık özelliği taşımadığı için ya da mükemmel eşleşme içermediği için eşli baskın köşe kümesi olma özelliğini taşımaz.



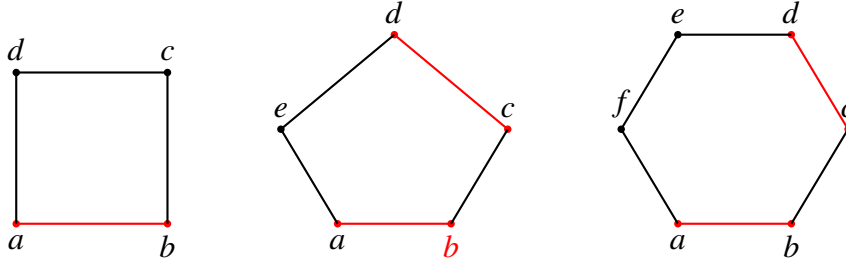
Şekil 2.27: P_5 çizgesinde S_2 eşli baskın köşe kümesi

Şekil 2.28 de $C_4 = (a, b, c, d)$, $C_5 = (a, b, c, d, e)$ ve $C_6 = (a, b, c, d, e)$ çizgeleri için ise sırasıyla

$$\gamma_p(C_4) = 2,$$

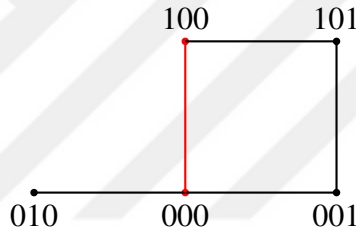
$$\gamma_p(C_5) = 4 \text{ ve}$$

$$\gamma_p(C_6) = 4 \text{ olarak elde edilir.}$$

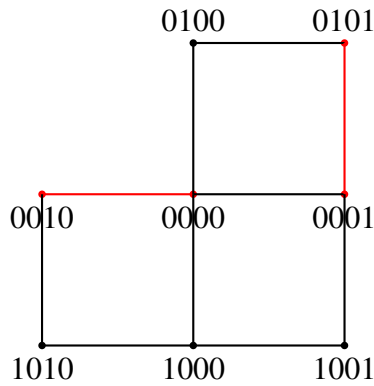


Şekil 2.28: C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için eşli baskın köşe kümeleri

Örnek 36. Γ_3 küpü için $S_1 = \{000, 100\}$ kümesi hem baskın küme hem de S_1 kümesi tarafından oluşturulan çizge mükemmel eşleşme içerdiğinden Γ_3 küpü için S_1 kümesi eşli baskın köşe kümesidir. Dolayısıyla $\gamma_p(\Gamma_3) = 2$ bulunur. Şekil 2.29 da S_1 kümesi kırmızı renkle ifade edilmiştir. Γ_4 küpü için ise $S_2 = \{0010, 0000, 0001, 0101\}$ kümesi göz önüne alınırsa bu kümenin Γ_4 küpü için hem baskın küme hem de S_2 tarafından oluşturulan çizgede 2 adet mükemmel eşleşme olduğu görülür. Bu nedenle S_2 kümesi eşli baskın köşe kümesidir ve $\gamma_p(\Gamma_4) = 4$ elde edilir. Şekil 2.30 da S_2 kümesi kırmızı renkle gösterilmektedir.



Şekil 2.29: Γ_3 küpü için S_1 eşli baskın köşe kümesi



Şekil 2.30: Γ_4 küpünde S_2 eşli baskın köşe kümesi

Azarija ve diğ. (2018) çalışmasında bir G çizgesinde eşli baskınlık problemini modellemek için G çizgesinin eşli baskın köşe kümesi tarafından oluşturulan çizgesinde $e \in E(G)$ kenarının mevcut olup olmadığını gösteren bir ikili değişken x_e tanımlanır.

$$\gamma_p(G) = \min \left(2 \sum_{e \in E(G)} x_e \right) \quad (2.27)$$

Kısıtlar:

$$\text{Her } v \in V(G) \text{ için } \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \leq 1, \quad (2.28)$$

$$\text{Her } v \in V(G) \text{ için } \sum_{u \in N(v)} \sum_{w \in N(u)} x_{uw} \geq 1 \quad (2.29)$$

Eğer x_e değişkeninin atandığı kenarın köşeleri eşli baskın köşe kümesinin elemanları ise bu değişken 1 değerini alır değilse 0 değerini almaktadır. (2.27) formülü bu değişkenlerin toplamının hesaplandığını ve eşli baskın köşe kümesinde baskın köşeler bulunduğu için bu toplamın 2 katının en küçük değerinin eşli baskınlık sayısına eşit olduğunu gösterir. (2.28) kısıtı her $v \in V(G)$ köşesi için komşuluğunda yer alan her u köşesi ile eşli baskın köşe kümesinde yer alıp almama durumuna göre aralarındaki kenar değişkenine atanan değerleri belirtir. G çizgesindeki her v köşesi yalnızca bir tane mükemmel eşleşme oluşturabileceği için (2.28) kısıtında ifade edilen toplam 1 değerine eşit ya da küçük olur. (2.29) kısıtı ise her $v \in V(G)$ köşesinin ya kendisinin komşuluğunda yer alan bir köşeye eşli baskın köşe kümesinde olduğunu ya da komşuluğunda yer alan bir u köşesinin, u köşesinin komşuluğunda yer alan bir w köşesiyle eşli baskın köşe kümesinde yer alıp v köşesine baskınlık gösterdiğini ifade eder.

Bu modelleme yardımıyla $n \leq 10$ boyutuna kadar Γ_n Fibonacci küpleri için eşli baskınlık sayılarına ulaşılmıştır. Çizelge 2.14 te bu sayılar gösterilmektedir.

Çizelge 2.14: $n \leq 10$ boyutu için Γ_n küpünün eşli baskınlık sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma_p(\Gamma_n)$	2	2	2	4	6	8	10	14	20	30

2.1.6 İşaretli baskınlık sayısı

Dunbar ve diğ. (1995) çalışması ilk kez bir G çizgesinin işaretli baskınlık sayısını (signed domination number) inceler. Herhangi bir G çizgesinin işaretli baskınlık sayısına dair sınırlarına ve özel çizgeler için bu baskınlık sayısının sayısal değerlerine ulaşmak için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Azarija ve diğ. (2018) de bunlardan biridir. Bu çalışmada optimizasyon problemi yardımıyla Fibonacci küpleri için birkaç boyutta değerlerine ulaşılmıştır. Öncelikle işaretli baskınlık sayısının tanımını anlamaya çalışalım.

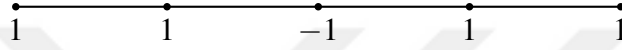
Tanım 2.1.23. G bir çizge ve $f : V(G) \rightarrow \{-1, 1\}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $v \in V(G)$ için $N[v] = \{v\} \cup \{u : uv \in E(G)\}$ ifadesi v köşesinin kapalı komşuluğu olarak tanımlanmak üzere $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1$ gerçekleşiyorsa f fonksiyonuna işaretli baskın fonksiyon denir. İşaretli baskınlık sayısı, $\gamma_s(G)$, G çizgesinin tüm işaretli

baskın f fonksiyonlarının toplamının, $\sum_{v \in V(G)} f(v)$, alabileceği en küçük değerdir.

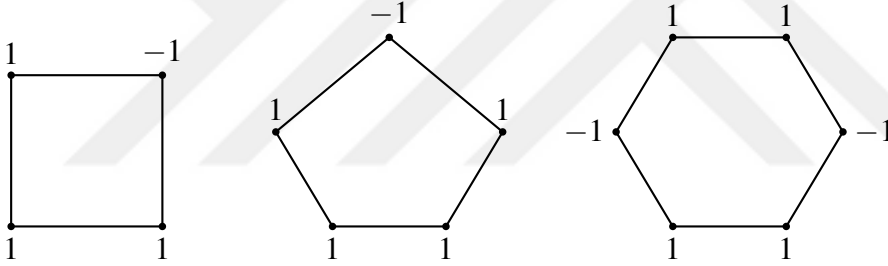
Örnek 37. Şekil 2.31, Şekil 2.32 ve Şekil 2.33 te sırasıyla P_4 , P_5 ve C_4 , C_5 , C_6 çizgilerinin işaretli baskın f fonksiyonu altındaki görüntüleri gösterilmektedir. Dikkat edilirse sırasıyla bu çizgelerde yer alan her bir köşenin kapalı komşuluğundaki bütün köşelerinin f fonksiyonu altındaki görüntü değerleri toplandığında bu toplamın 1 ya da 1 den daha büyük olduğu görülecektir. $\gamma_s(P_4) = 4$, $\gamma_s(P_5) = 3$ ve $\gamma_s(C_4) = 2$, $\gamma_s(C_5) = 3$, $\gamma_s(C_6) = 2$ olduğu gözlemlenir.



Şekil 2.31: P_4 çizgesi için bir işaretli baskın f fonksiyonu



Şekil 2.32: P_5 çizgesi için bir işaretli baskın f fonksiyonu



Şekil 2.33: C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için işaretli baskın f fonksiyonları

Örnek 38. Şimdi Γ_5 küpü için işaretli baskınlık sayısını bulalım. Şekil 2.34 te işaretli baskın f fonksiyonu altında Γ_5 küpünün köşeleri gösterilmektedir. Burada her bir köşenin kapalı komşuluğundaki değerler toplamına bakıldığında bu toplamın 1 ya da 1 den daha büyük olduğu görülecektir. Dolayısıyla, $\gamma_s(\Gamma_5) = 5$ olduğu bilgisi elde edilir.

Azarija ve diğ. (2018) çalışmasında işaretli baskın sayıyı modellemek için her $v \in V(G)$ köşesiyle ilişkili olarak v köşesine sırasıyla 1 veya -1 değeri atanıp atanmadığını gösteren bir x_v ikili değişkeni sunulur. v köşesinin işaretli baskın f fonksiyonu değeri -1 ise $x_v = 0$, 1 ise $x_v = 1$ olmak üzere,

$$\min \sum_{v \in V(G)} (2x_v - 1) \quad (2.30)$$

Kısıt:

$$v \in V(G) \text{ olmak üzere } \sum_{u \in N[v]} (2x_u - 1) \geq 1 \quad (2.31)$$

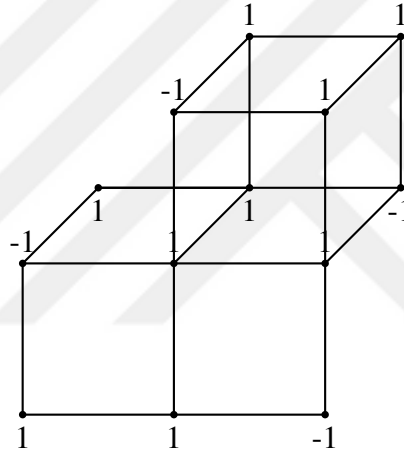
Burada (2.30) bir G çizgesindeki her v köşesinin işaretli baskın f fonksiyonu değerleri neticesinde elde edilen toplamın alabileceği en küçük değeri yani işaretli baskınlık sayısını ifade eder. (2.31) kısıtı ise tanımda yer alan her v köşesi için kapalı komşuluğunda yer alan köşelerin işaretli baskın f fonksiyonu değerlerinin toplamının 1 değerine eşit ya da bu değerden büyük olması gerektiğini gösterir.

Azarija ve diğ. (2018) bu modelleme yardımıyla $n \leq 10$ boyutu için Γ_n küpünün işaretli baskınlık sayılarını elde eder. Çizelge 2.15 te bu değerler verilmiştir.

Çizelge 2.15: $n \leq 10$ için Γ_n küpünün işaretli baskınlık sayıları.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma_s(\Gamma_n)$	2	3	3	2	5	9	10	17	25	40

Örnek 38 deki Γ_5 küpü aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.34: Γ_5 küpü için bir işaretli baskın f fonksiyonu



3. ROMAN BASKINLIK TİPİ DEĞİŞMEZLERİ

Milattan sonra dördüncü yüzyılda İmparator Büyük Konstantin Roma İmparatorluğu'nu korumak için bir strateji izlemiştir. Eğer Roma İmparatorluğu'nda bulunan bir yer orduya sahip değilse orası emniyetsiz bölge, bir orduya sahipse emniyetli bölge olarak düşünülmüştür. Emniyetsiz bölge komşu yerden bir ordu gönderilerek güvenli hale getirilebilir. Ancak İmparator Büyük Konstantin eğer bir yerden bir yere ordu göndermek ordu gönderen bölgeyi emniyetsiz bölge durumuna düşürüyorsa bunun yapılamayacağını buyurmuştur. Dolayısıyla, bir yerden komşusu olan yere ordu gönderilmeden önce o yere iki ordu konumlandırılması gerektiğini düşünmüştür. Bu şekilde, İmparator Büyük Konstantin Roma İmparatorluğu'nu koruyabilecektir. İmparator bir yerde bir orduyu sürdürmek, ona bakmak maliyetli olduğu için Roma'yı korurken mümkün olduğunca az sayıda ordu konumlandırmak istemiştir. Bu durum Roman baskınlık fonksiyonu tanımının altında yatan temel motivasyon olmuştur.

Bir G çizgesindeki her köşe Roma İmparatorluğu'ndaki bir yeri gösterebilir. Bir v köşesi emniyetsiz bölge ise Roman baskınlık fonksiyonu, f , değeri 0'dır. Yani $f(v) = 0$ olacaktır. Eğer G çizgesindeki bir v köşesi emniyetli bölge ise $f(v) \in \{1, 2\}$ dir. Bir v köşesinden emniyetsiz komşu bölgeye ordu gönderilmeden önce $f(v) = 2$ olmalıdır. Maliyeti azaltmak ama aynı zamanda Roma İmparatorluğu'nu korumaya devam etmek ise f fonksiyonunun ağırlığı olan $w(f)$ ile ifade edilir. $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ dir ve dolayısıyla amaç bu toplamın en az değerine ulaşmaktır (Henning ve Hedetniemi, 2003).

Roman baskınlık problemi yalnızca bir savaş stratejisi olarak düşünülmemelidir. Yardım kaynağı paylaşımı problemine de uygulanabilir.

Örneğin bu problem bir bölgenin itfaiye aracı veya ambulans ihtiyacının karşılanması olarak da düşünülebilir. Bir ilçeye bağlı bütün mahalleleri göz önüne alalım. Diyelim ki bazı mahallelerde itfaiye ya da sağlık merkezi olmasın. Eğer bu mahallelerin komşularından en az birinde 2 itfaiye aracına sahip itfaiye merkezi ya da 2 ambulans aracı bulunan sağlık merkezi varsa herhangi bir acil durumda bu birimler birer itfaiye aracını ya da ambulans aracını imkanı olmayan bu mahallelere yönlendirebilirler. Böylelikle bu imkanlara sahip mahalleler herhangi bir kayba uğramadan imkanları olmayan diğer mahallelere yardım ederler.

Hatta aynı anda iki farklı mahallenin itfaiye ya da ambulans ihtiyacı varsa bu iki mahallenin ortak komşuluğunda en az 2 itfaiye aracı ya da en az 2 ambulans aracı bulunan itfaiye ya da sağlık merkezi konumlanmışsa her iki mahalleye de aynı zamanda hizmet verilebilir. Tabii ki bu şekilde yardım edilmesi farklı bir Roman tipi baskınlık problemi olarak yorumlanır.

Bu bölüme kadar literatürde Γ_n Fibonacci küpleri için çalışılmış baskınlık tipi değişmezlerini ve elde edilen sayısal sonuçlara değindik. Bu bölümde ise literatürde daha önce Γ_n Fibonacci küpü için hiç çalışılmamış Roman, zayıf Roman (weak Roman) ve çift Roman (double Roman) baskınlık tipi değişmezlerini inceleyeceğiz. Bu üç tip baskınlık tipi değişmezleri için öncelikle herhangi bir G çizgesi için elde edilmiş genel sonuçlardan bahsedeceğiz.

3.1 Roman Baskınlık Tipi Değişmezi

Tanım 3.1.1. G bir çizge ve $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ fonksiyonu G üzerinde bir fonksiyon olsun. $f(u) = 0$ olan her u köşesi en az bir tane $f(v) = 2$ olan bir v köşesine komşuysa f fonksiyonu Roman baskınlık fonksiyonu olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2. Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığı $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ dir. G çizgesinin Roman baskınlık sayısı Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığının en küçük değeridir ve $\gamma_R(G)$ ile gösterilir.

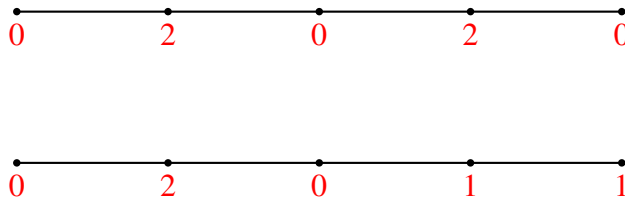
Roman baskınlık tanımını birkaç örnekle inceleyelim.

Örnek 39. Sırasıyla P_4 , P_5 ve C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerine bakalım. Öncelikle P_4 çizgesi için eğer uç noktalarda yer almayan köşelerden birinin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 2 olursa komşuluğunda yer alan her iki köşenin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 0 ve sona kalan uç köşe noktasının değeri 1 ise P_4 çizgesi için Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığının en küçük değeri elde edilmiş olur. Dolayısıyla, $\gamma_R(P_4) = 3$ elde edilir. Bu durum Şekil 3.1 de görülebilir.



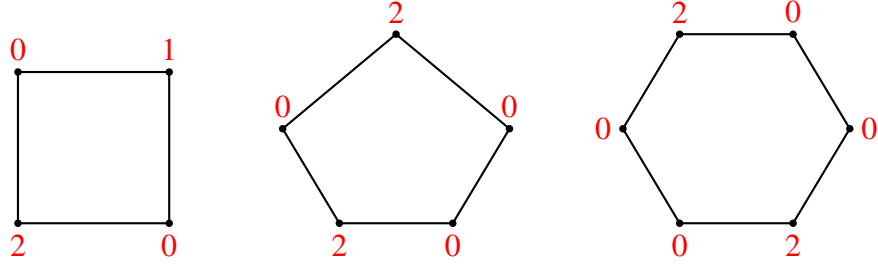
Şekil 3.1: P_4 çizgesi için bir Roman baskınlık fonksiyonu

P_5 çizgesi için köşelerin görüntüsü iki farklı şekilde olabilir. Uç noktalarda yer almayan ve birbirine komşu olamayan iki köşenin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 2 olursa uç köşelerin ve 2 değerini alan köşelerin ortak komşu köşesinin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 0 olursa bu fonksiyonun ağırlığının en küçük değeri elde edilir. Eğer uç noktalarda olmayan ama uç noktalardan birine komşu olan bir köşenin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 2 ise bu köşenin komşu olduğu uç köşenin ve diğer köşenin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 0 ve kalan iki köşenin değeri 1 olursa yine Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığının P_5 çizgesi için en az değeri hesaplanır. Dolayısıyla, $\gamma_R(P_5) = 4$ olarak bulunur. Bu iki durum sırasıyla Şekil 3.2 de gözlemlenebilir.



Şekil 3.2: P_5 çizgesi için Roman baskınlık fonksiyonu

C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için sırasıyla $\gamma_R(C_4) = 3$, $\gamma_R(C_5) = 4$ ve $\gamma_R(C_6) = 4$ elde edilir. C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerinin Roman baskınlık fonksiyonu değerleri Şekil 3.3 te görüldüğü gibidir.



Şekil 3.3: C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için Roman baskınlık fonksiyonları

Cockayne ve diğ. (2004) makalesinde $\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ olduğu gözlemlenir. Bu örnekten anlaşıldığı üzere elde edilen değerlerle Cockayne ve diğ. (2004) çalışmasının sonucunun doğru olduğu bilgisine ulaşılır. Çizge teorisinde Roman baskınlık problemi oldukça ilgi görmüştür. Cockayne ve diğ. (2004) çalışmasında elde edilen bazı sonuçlar şu şekildedir.

Önerme 3.1.3. *Herhangi bir G çizgesi için,*

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G) \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanır (Cockayne ve diğ., 2004).

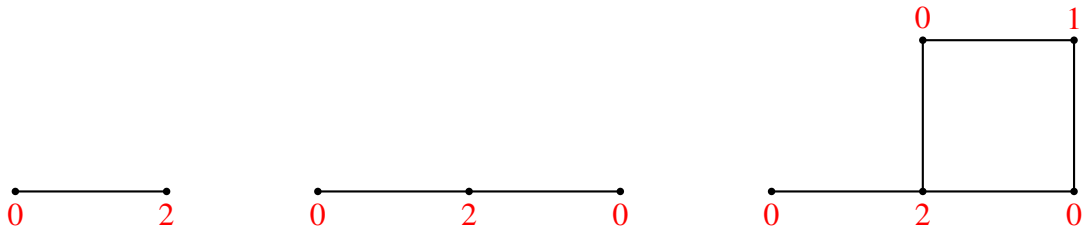
Önerme 3.1.4. *Köşe sayısı n ve en büyük derecesi Δ olan herhangi G çizgesi için,*

$$\frac{2n}{\Delta+1} \leq \gamma_R(G) \quad (3.2)$$

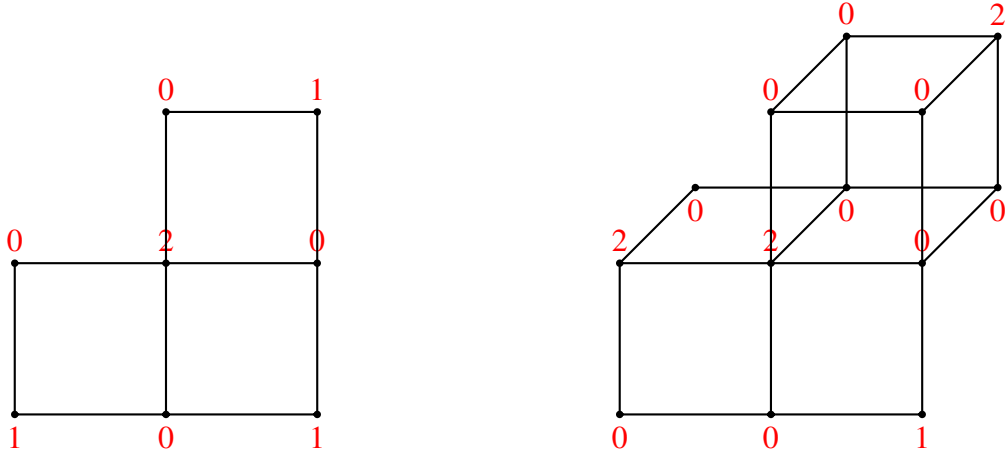
eşitsizliği sağlanır (Cockayne ve diğ., 2004).

Roman baskınlık tanımını $n \leq 6$ boyutuna kadar Γ_n Fibonacci küpleri için inceleyelim ve (3.1) ve (3.2) sonuçlarını ele alalım.

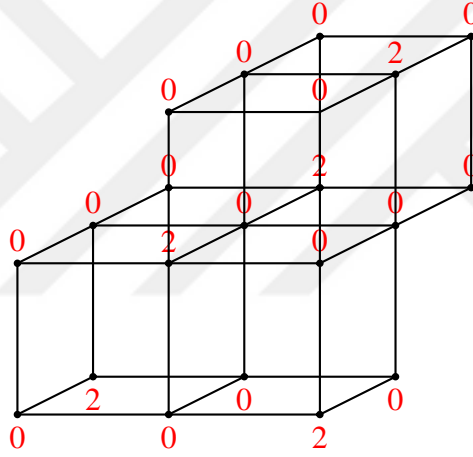
Örnek 40. *Şekil 3.4 te sırasıyla Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 küplerinin Roman baskınlık fonksiyonu değerleri verilmektedir. Görüldüğü üzere $\gamma_R(\Gamma_1) = 2, \gamma_R(\Gamma_2) = 2$ ve $\gamma_R(\Gamma_3) = 3$ bulunur. Şekil 3.5 te Γ_4 ve Γ_5 küplerinin görüntüleri gösterilmektedir. Burada $\gamma_R(\Gamma_4) = 5$ ve $\gamma_R(\Gamma_5) = 7$ olarak bulunduğu anlaşılırken Şekil 3.6 da ise Γ_6 için $\gamma_R(\Gamma_6) = 10$ olduğu gözlemlenir.*



Şekil 3.4: Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 küpleri için Roman baskınlık fonksiyonları



Şekil 3.5: Γ_4 ve Γ_5 küpleri için Roman baskınlık fonksiyonları



Şekil 3.6: Γ_6 küpü için bir Roman baskınlık fonksiyonu

Örnek 41. (3.1) in doğruluğunu $n \leq 6$ boyutuna kadar elde ettiğimiz sonuçların birkaç tanesinde test edelim. $n = 3$ için $\gamma(\Gamma_3) = 2$ ve $\gamma_R(\Gamma_1) = 3$ tür. Buradan $2 \leq 3 \leq 4$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. $n = 4$ için $\gamma(\Gamma_4) = 3$ ve $\gamma_R(\Gamma_4) = 5$ tir. Böylelikle $3 \leq 5 \leq 6$ eşitsizliği elde edilir. $n = 5$ için $\gamma(\Gamma_5) = 4$ iken $\gamma_R(\Gamma_5) = 7$ dir. Dolayısıyla $4 \leq 7 \leq 8$ eşitsizliği bulunur. Her üç boyutta da Fibonacci küpleri için elde edilen Roman baskınlık sayılarının baskınlık sayılarının kendisi ve iki katı arasında kaldığı gözlemlenir. Böylece (3.1) in $n = 3, 4$ ve 5 için doğru olduğu bilgisine ulaşılır.

Örnek 42. (3.2) de verilen alt sınırı birkaç boyutta Γ_n Fibonacci küpleri için elde ettiğimiz Roman baskınlık sayılarıyla inceleyelim. $n = 4$ için Γ_4 küpünün köşe sayısı 8 dir. En büyük derece ise $\Delta = 4$ olacaktır. O halde,

$$\frac{2 \times 8}{4+1} = \frac{16}{5} \leq 5$$

olduğu görülür. Benzer şekilde, $n = 5$ için $|V(\Gamma_5)| = 13$ ve $\Delta = 5$ tir ve

$$\frac{2 \times 13}{5 + 1} = \frac{26}{6} \leq 7$$

olduğu gözlemlenir. Böylelikle elde ettiğimiz sayılar için $n = 4$ ve $n = 5$ boyutunda (3.2) sağlanır.

Önerme 3.1.5. G çizgesi köşe sayısı n olan bağlı bir çizge olmak üzere $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul G çizgesinde derecesi $n - \gamma(G)$ olan bir v köşesi olmasıdır (Cockayne ve diğ., 2004).

Örnek 43. Γ_3 Fibonacci küpü için $\gamma(\Gamma_3) = 2$ iken $\gamma_R(\Gamma_3) = 3$ tür. Yani, $\gamma_R(G) = 3 = \gamma(G) + 1 = 2 + 1$ elde edilmektedir. Γ_3 küpü köşe sayısı 5 olan bir Fibonacci küpüdür ve derecesi $|V(\Gamma_3)| - \gamma(G) = 5 - 2 = 3$ olan 000 köşesini bulundurmaz.

Önerme 3.1.6. G çizgesi köşe sayısı n olan bağlı bir çizge olmak üzere $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 2$ dir ancak ve ancak

- (a) G çizgesinin $n - \gamma(G)$ dereceli köşesi yoktur.
- (b) Ya G çizgesinin derecesi $n - \gamma(G) - 1$ olan bir köşesi vardır ya da G çizgesinin $|N[v] \cup N[w]| = n + \gamma(G) + 2$ şartını sağlayan v ve w olmak üzere iki köşesi vardır (Cockayne ve diğ., 2004).

Örnek 44. Γ_4 Fibonacci küpünü düşünelim. $|V(\Gamma_4)| = 8$, $\gamma(\Gamma_4) = 3$ ve $\gamma_R(\Gamma_4) = 5$ tir. Dolayısıyla, $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 2 = 3 + 2 = 5$ elde edilir. Önerme 3.1.6'nın (a) şartı Γ_4 çizgesinde derecesi $8 - 3 = 5$ olan bir köşe olmadığı için (b) şartı ise $8 - 3 - 1 = 4$ dereceli 0000 köşesi olduğu için sağlanır.

Tanım 3.1.7. (3.1) den biliniyor ki her G çizgesi için $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$ sağlanmaktadır. Eğer $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$ ise G çizgesine Roman çizge adı verilir.

Örnek 45. $n = 6$ için Γ_6 Fibonacci küpününün Roman baskınlık sayısı 10, baskınlık sayısı ise 5 tir. Dolayısıyla, Γ_6 bir Roman çizgedir.

Not 3.1.8. Şekil 3.6 da görüldüğü üzere Roman baskınlık f fonksiyonu altında Γ_6 küpününün hiçbir köşesinin 1 değerini almadığı gözlemlenebilir.

Teorem 3.1.9. G çizgesi köşe sayısı n ve baskınlık sayısı $\gamma(G) \geq 2$ olan bağlı bir çizge olsun. k sayısı $2 \leq k \leq \gamma(G)$ şartını sağlayan bir tam sayı ise $\gamma_R(G) = \gamma(G) + k$ dir ancak ve ancak

- (a) $1 \leq s \leq k - 1$ i sağlayan herhangi s tam sayısı için G çizgesi $| \cup_{v \in U_t} N[v] | = n - \gamma(G) - s + 2t$ şartını sağlayan t ($1 \leq t \leq s$) köşelerinin U_t kümesine sahip değildir.
- (b) $1 \leq l \leq k$ şartını sağlayan en az bir l tam sayısı vardır ve G çizgesi $| \cup_{v \in W_l} N[v] | = n - \gamma(G) - k + 2l$ şartını sağlayan l köşelerinin W_l kümesini içerir (Xing ve diğ., 2006).

Tanım 1.2.25 de bir G çizgesinin çapının tanımından bahsedilmiştir. Mobaraky ve Sheikholeslami (2008) çalışmasında bir G çizgesinin çapı cinsinden Roman baskınlık sayısının alt ve üst sınırları çalışılmıştır.

Teorem 3.1.10. *Bir G bağlı çizgesi için,*

$$\gamma_R(G) \geq \left\lceil \frac{\text{diam}(G) + 2}{2} \right\rceil. \quad (3.3)$$

dir (Mobaraky ve Sheikholeslami, 2008).

Teorem 3.1.11. *Herhangi bir n köşeli G bağlı çizgesi için,*

$$\gamma_R(G) \leq n - \left\lfloor \frac{1 + \text{diam}(G)}{3} \right\rfloor. \quad (3.4)$$

tür (Mobaraky ve Sheikholeslami, 2008).

(3.4) teki sınır $\delta \geq 3$ olan bağlı bir G çizgesi için geliştirilmiştir.

Teorem 3.1.12. *$\delta \geq 3$ olmak üzere n köşeli herhangi bir bağlı G çizgesi için,*

$$\gamma_R(G) \leq n - \left\lfloor \frac{1 + \text{diam}(G)}{3} \right\rfloor - (\delta - 2) \left\lfloor \frac{\text{diam}(G) + 2}{3} \right\rfloor \quad (3.5)$$

tür (Mobaraky ve Sheikholeslami, 2008).

3.2 Zayıf Roman Baskınlık Tipi Değişmezi

Roman baskınlık probleminin İmparator Büyük Konstantin'in Roma İmparatorluğu'nu koruma stratejisi motivasyonuna bağlı olduğundan söz etmiştik. Bu stratejide İmparator Büyük Konstantin'in Roma İmparatorluğu'nu tek bir saldırıdan korurken önemli maliyetlerinden tasarruf etme potansiyeli araştırılmıştır. Bu amaç zayıf Roman baskınlık tipi değişmezi (weak Roman domination) tanımı altında yatan motivasyonu şu şekilde oluşturmuştur.

Daha önce tanımlanan simge kullanılarak eğer bölge ve ona komşu olan her bölge emniyetsizse (yani buralarda ordu yoksa) o bölge savunmasız olarak tanımlanır. Bir savunmasız bölge bir saldırıya karşı korunmasız olduğu için emniyetli bölgeden emniyetsiz bölgeye ordu hareketinde savunmasız bölge oluşturulmayacak şekilde her emniyetsiz bölgenin bir emniyetli bölgeye komşu olması gerekli görülür. Bu nedenle, her emniyetli olmayan bölge emniyetsiz bir bölge oluşturmadan savunulabilir. Böylece İmparator Büyük Konstantin hala Roma İmparatorluğu'nu koruyabilecektir. Orduların bu şekilde yerleşmesi bir zayıf Roman baskınlık fonksiyonuna karşılık gelir ve bu tür minimum ordu yerleşimi minimum zayıf Roman baskınlık fonksiyonuna karşılık gelecektir. Roma İmparatorluğu'nu tek bir saldırıdan korurken orduları sürdürmenin maliyetini önemli ölçüde kurtarma potansiyeli var olduğundan bu zayıf Roman kavramı İmparator Konstantin'in Roman baskınlık kavramından daha çekici görülür.

Maliyeti daha yüksek olan Roman baskınlık fonksiyonunda V_0 kümesindeki her köşe V_2 kümesindeki en az bir köşe tarafından domine edilirken zayıf Roman baskınlık fonksiyonunda V_0 kümesindeki her köşe $V_1 \cup V_2$ kümelerindeki bir köşe tarafından domine edilir (Henning ve Hedetniemi, 2003).

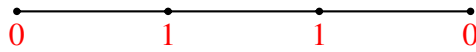
Roman baskınlık probleminde olduğu gibi zayıf Roman baskınlık problemi de bir ilçeye bağlı mahallelerin ambulans ve itfaiye ihtiyacının karşılanması olarak düşünülebilir. Burada Roman baskınlık probleminden farklı olarak amaç acil bir durumda bünyesindeki 1 ya da 2 itfaiye ya da ambulans aracını itfaiye merkezi ya da sağlık merkezi olmayan bir komşu mahalleye gönderen mahallenin diğer itfaiye merkezi ya da sağlık merkezi olmayan komşularını mağdur etmemektir.

Not 3.2.1. G bir çizge ve $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. V_0, V_1 ve V_2 sırasıyla f fonksiyonu değerleri 0, 1, 2 olan köşelerin kümeleri olsun. O halde $f = (V_0, V_1, V_2)$ olarak yazılacaktır.

Tanım 3.2.2. G bir çizge ve $u \in V_0$ olmak üzere eğer u köşesi V_1 ya da V_2 kümesinde bulunan bir köşeye komşu değilse f fonksiyonuna göre savunmasızdır. Her $u \in V_0$ köşesi $v \in V_1 \cup V_2$ şartını sağlayan bir v köşesi ile komşu ise öyle ki; savunmasız köşe bulundurmamak şartıyla $f' : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ fonksiyonu altında u köşesi $f'(u) = 1$, $v \in V_1 \cup V_2$ olan bir v köşesi ise $f'(v) = f(v) - 1$ değerini alır. Ayrıca $w \in V - \{u, v\}$ için $f'(w) = f(w)$ olarak tanımlanır. Böylece f fonksiyonuna zayıf Roman fonksiyonu denir.

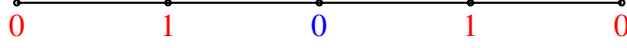
Tanım 3.2.3. $w(f), |V_1| + 2|V_2|$ olmak üzere f fonksiyonunun ağırlığı olarak tanımlanır. Zayıf Roman baskınlık sayısı, $\gamma_r(G)$, G çizgesindeki zayıf Roman baskınlık fonksiyonunun en küçük ağırlığıdır.

Örnek 46. Sırasıyla P_4, P_5 ve C_4, C_5, C_6 çizgelerinin zayıf Roman f fonksiyonu değerlerini inceleyelim. P_4 çizgesi için uç noktalarda yer alan köşelerin derecesi 1 dir. Bu köşelerin savunmasız olmaması için ya kendilerinin ya da komşu oldukları köşelerin zayıf Roman f fonksiyonu değerleri 1 ya da 2 olmalıdır. Zayıf Roman baskınlık sayısı zayıf Roman f fonksiyonunun ağırlığının alabileceği en küçük değer olduğundan $\gamma_r(P_4) = 2$ elde edilir. Şekil 3.7 de P_4 çizgesinin zayıf Roman f fonksiyonunun alabileceği değerlerden biri gösterilmektedir.



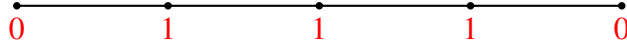
Şekil 3.7: P_4 çizgesi için bir zayıf Roman baskınlık fonksiyonu

P_5 çizgesi için benzer şekilde uç noktalarda yer alan köşeler savunmasız bırakılmamalıdır. Zayıf Roman baskınlık sayısı zayıf Roman f fonksiyonunun ağırlığının alabileceği en küçük değerdir. Şekil 3.8 de yer alan P_5 çizgesinde f fonksiyonu değeri 0 olan köşelerin komşu olduğu köşelerin değerinin 1 olduğu görülür. Ancak mavi etiketli 0 köşesinin f' fonksiyonu değeri 1 olduğunda komşu köşelerinden birinin f' fonksiyonu değeri 0 olacaktır. Bu durum da uç noktada yer alan f fonksiyonu değeri 0 olan bir köşeyi savunmasız durumuna düşürür. Dolayısıyla $\gamma_r(P_5) \neq 2$ dir.



Şekil 3.8: P_5 çizgesi için zayıf Roman baskınlık fonksiyonunun alamayacağı değer

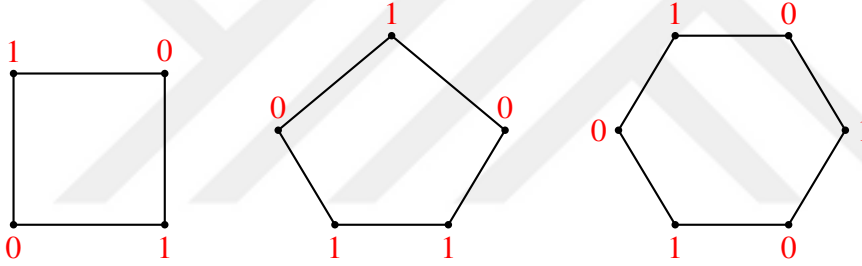
Şekil 3.9 da P_5 çizgesinin zayıf Roman f fonksiyonunun alabileceği değerlerden biri gösterilmektedir. Buradan $\gamma_r(P_5) = 3$ olduğu elde edilir.



Şekil 3.9: P_5 çizgesi için bir Zayıf Roman baskınlık fonksiyonu

Henning ve Hedetniemi (2003) çalışmasında $n \geq 1$ olmak üzere $\gamma_r(P_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil$ olduğu elde edilir. P_4 ve P_5 çizgesinden de bu eşitliğin doğruluğu görülebilir.

Şekil 3.10 da C_4 , C_5 ve C_6 çizgelerinin zayıf Roman baskınlık f fonksiyonu değerleri gösterilmektedir. $\gamma_r(C_4) = 2$, $\gamma_r(C_5) = 3$ ve $\gamma_r(C_6) = 3$ olarak elde edilir.



Şekil 3.10: C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için zayıf Roman baskınlık fonksiyonları

Benzer şekilde, Henning ve Hedetniemi (2003) çalışmasında $n \geq 4$ için de C_n çizgelerinin zayıf Roman baskınlık sayılarıyla ilgili $\gamma_r(C_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil$ eşitliği de elde edilir. C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için bulunan sayılarla bu eşitliğin doğruluğu test edilebilir.

Literatürde zayıf Roman baskınlık problemi üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde ilk olarak Henning ve Hedetniemi (2003) çalışması göze çarpmaktadır.

Gözlem 1. G çizgesindeki her Roman baskınlık fonksiyonu G çizgesinin zayıf Roman baskınlık fonksiyonudur (Henning ve Hedetniemi, 2003).

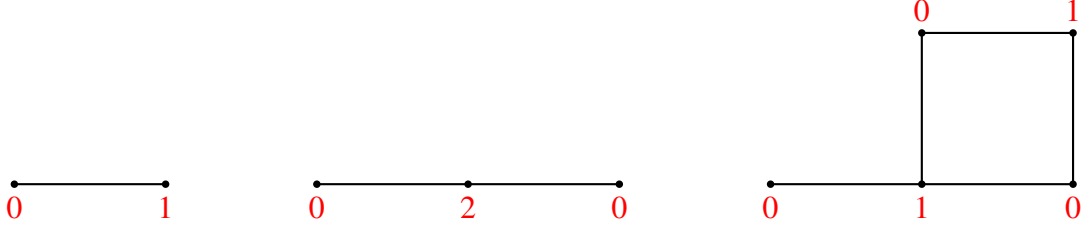
Teorem 3.2.4. Herhangi G çizgesi için,

$$\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G) \quad (3.6)$$

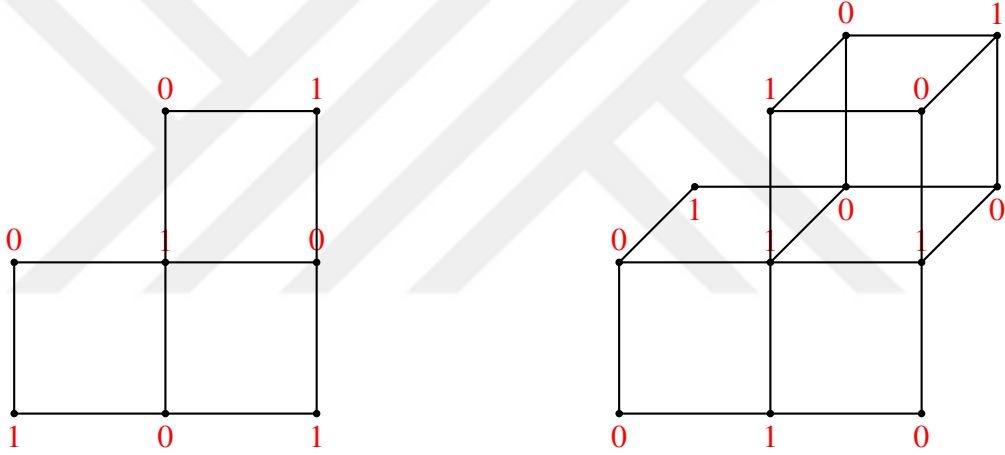
eşitsizliği sağlanır (Henning ve Hedetniemi, 2003).

Şimdi de $n \leq 6$ boyutu için Fibonacci küplerinin zayıf Roman baskınlık sayılarını elde edelim.

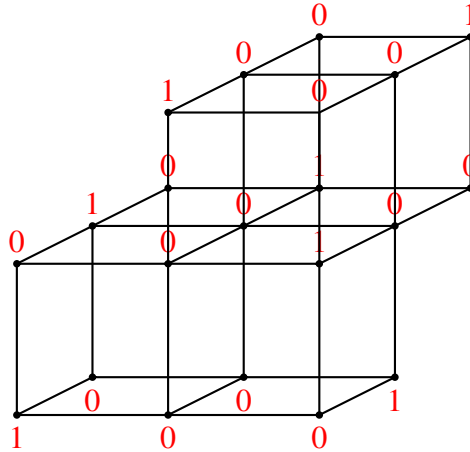
Örnek 47. Şekil 3.11 de sırasıyla Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 küplerinin, Şekil 3.12 de Γ_4 ve Γ_5 küplerinin ve Şekil 3.13 te Γ_6 küpünün zayıf Roman baskınlık fonksiyonu değerleri verilmektedir. Görüldüğü üzere $\gamma_r(\Gamma_1) = 1, \gamma_r(\Gamma_2) = 2, \gamma_r(\Gamma_3) = 2, \gamma_r(\Gamma_4) = 4, \gamma_r(\Gamma_5) = 6$ ve $\gamma_r(\Gamma_6) = 7$ olarak bulunur.



Şekil 3.11: Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 küpleri için zayıf Roman baskınlık fonksiyonları



Şekil 3.12: Γ_4 ve Γ_5 küpleri için zayıf Roman baskınlık fonksiyonları



Şekil 3.13: Γ_6 küpü için bir zayıf Roman baskınlık fonksiyonu

3.3 Çift Roman Baskınlık Tipi Değişmezi

Roman baskınlık değişmezinde, saldırıya uğrayan herhangi bir köşeyi savunmak için bir ordu gerektiği hatırlansın. Beeler ve diğ. (2016) çalışmasında önerilen strateji ise herhangi bir saldırının en az iki ordu tarafından savunulabilmesini sağlayarak korumayı ikiye katlayan daha güçlü bir Roman baskınlık tipi versiyonudur. Bu baskınlık tipinde Hem Roman baskınlık tipi değişmezinde hem de zayıf Roman baskınlık tipi değişmezinde en fazla iki Roma ordusunun herhangi bir bölgede konumlandırılmasından farklı olarak belirli bir bölgeye üç ordu konumlandırılır. Bu konumlandırma yeteneği, beklenen ek maliyetten daha az maliyetle daha rahat ve daha güçlü bir savunma seviyesi sağlayacaktır.

Tanım 3.3.1. $f : V \rightarrow \{0,1,2,3\}$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa bu fonksiyona çift Roman baskınlık fonksiyonu (double Roman dominating function) denir:

f fonksiyonu tarafından i değeri atanmış köşelerin kümesi V_i olmak üzere

(a) eğer $f(v) = 0$ ise v köşesinin ya V_2 kümesinde en az iki komşusu ya da V_3 kümesinde en az bir komşusu olması zorunludur.

(b) eğer $f(v) = 1$ ise v köşesinin $V_2 \cup V_3$ kümesinde en az bir komşusu olması zorunludur.

Tanım 3.3.2. Çift Roman baskınlık sayısı, $\gamma_{dR}(G)$, bir G çizgesi üzerinde tanımlı çift Roman baskınlık fonksiyonunun en küçük ağırlığıdır. $\gamma_{dR}(G)$ ağırlıklı G çizgesinin çift Roman baskınlık fonksiyonuna G çizgesinin γ_{dR} - fonksiyonu denir.

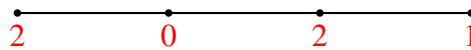
Önerme 3.3.3. $\gamma_{dR}(G)$ ağırlıklı çift Roman baskınlık fonksiyonunda hiçbir köşeye 1 değeri atanmasına gerek yoktur (Beeler ve diğ. 2016).

Önerme 3.3.4. G bir çizge olsun. $f = (V_0, V_1, V_2)$ olarak tanımlanan G çizgesinin bir γ_{dR} - fonksiyonu olmak üzere

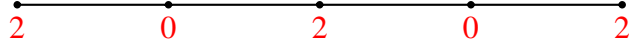
$$\gamma_{dR}(G) \leq 2|V_1| + 3|V_2| \quad \text{dir (Beeler ve diğ. 2016).} \quad (3.7)$$

Çift Roman baskınlık fonksiyonu tanımını birkaç örnekle daha iyi anlamaya çalışalım ve $n \leq 6$ boyutları için Γ_n Fibonacci küplerinde inceleyelim.

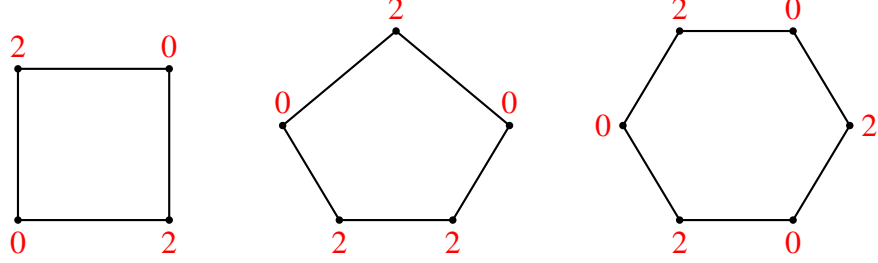
Örnek 48. Sırasıyla Şekil 3.14, Şekil 3.15 ve Şekil 3.16 da P_4 , P_5 ve C_4 , C_5 , C_6 çizgelerinin γ_{dR} - fonksiyonu değerleri gösterilmektedir. Anlaşılacağı üzere $\gamma_{dR}(P_4) = 5$, $\gamma_{dR}(P_5) = 6$ ve $\gamma_{dR}(C_4) = 4$, $\gamma_{dR}(C_5) = 6$, $\gamma_{dR}(C_6) = 6$ olarak elde edilir.



Şekil 3.14: P_4 çizgesi için bir γ_{dR} - fonksiyonu

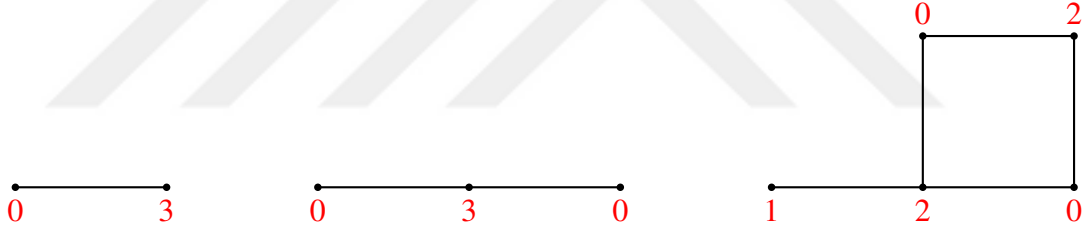


Şekil 3.15: P_5 çizgesi için bir γ_{dR} - fonksiyonu

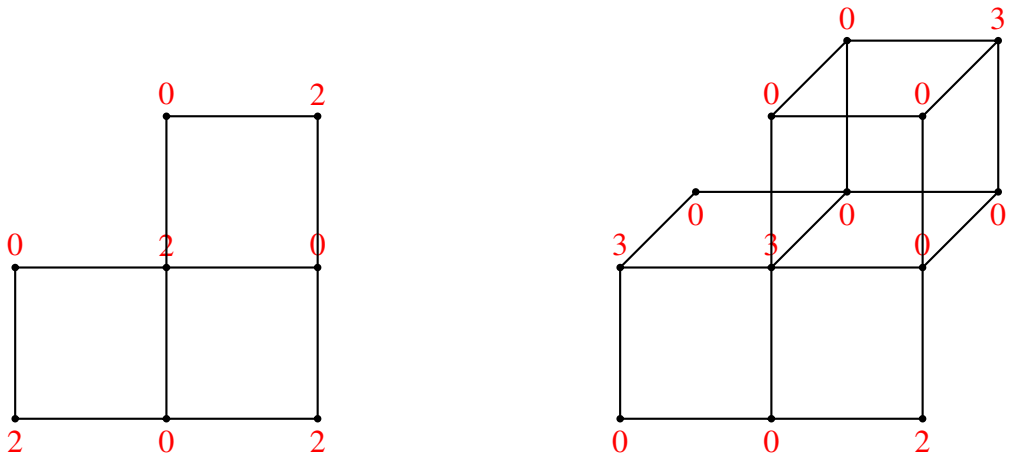


Şekil 3.16: C_4 , C_5 ve C_6 çizgeleri için γ_{dR} - fonksiyonları

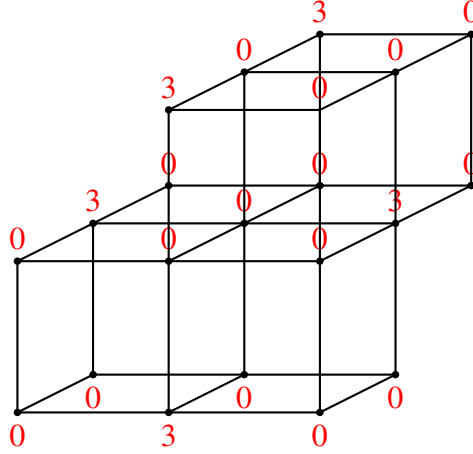
Örnek 49. Şekil 3.17 de sırasıyla Γ_1 , Γ_2 ve Γ_3 küplerini, Şekil 3.18 de sırasıyla Γ_4 ve Γ_5 küplerini, Şekil 3.19 da ise Γ_6 küpü gösterilmektedir. Bu şekillerde Fibonacci küplerinin bir γ_{dR} - fonksiyonu değerleri verilmektedir. Buradan $\gamma_{dR}(\Gamma_1) = 3$, $\gamma_{dR}(\Gamma_2) = 3$, $\gamma_{dR}(\Gamma_3) = 5$, $\gamma_{dR}(\Gamma_4) = 8$, $\gamma_{dR}(\Gamma_5) = 11$ ve $\gamma_{dR}(\Gamma_6) = 15$ olarak bulunmaktadır.



Şekil 3.17: Γ_1 , Γ_2 ve Γ_3 küpleri için γ_{dR} - fonksiyonları



Şekil 3.18: Γ_4 ve Γ_5 küpleri için γ_{dR} - fonksiyonları



Şekil 3.19: Γ_6 küpü için bir γ_{dR} - fonksiyonu

Örnek 50. Şekil 3.17, Şekil 3.18 ve Şekil 3.19 da sırasıyla $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ ve Γ_6 Fibonacci küplerinin çift Roman baskınlık fonksiyonu değerleri verilmektedir. Buradan Önerme 3.3.3 ün $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5$ ve Γ_6 küplerinde sağlandığı görülebilir. Γ_3 küpünde ise 000 etiketli köşenin çift Roman baskınlık fonksiyonu değeri eğer 3 olursa 010 köşesine 1 değerinin atanmaması gerektiği anlaşılabilir.

Sonuç 3.3.5. Eğer G çizgesi aşikar olmayan bağlı bir çizge ve G çizgesinin V_2 kümesindeki köşelerinin sayısını en yüksek büyüklüğe çıkaran $f = (V_0, V_1, V_2)$ olmak üzere f fonksiyonu bir Roman baskınlık fonksiyonu ise, $\gamma_{dR}(G) \leq 2\gamma_R(G) - |V_2|$ eşitsizliği sağlanır (Beeler ve diğ. 2016).

Önerme 3.3.6. Herhangi bir G çizgesi için $\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G)$ dir (Beeler ve diğ. 2016).

Sonuç 3.3.7. Eğer $f = (V_0, V_2, V_3)$ bir G çizgesinin herhangi γ_{dR} - fonksiyonu ise

$$\gamma_R(G) \leq 2(|V_2| + |V_3|) = \gamma_{dR}(G) - |V_3| \quad \text{tür (Beeler ve diğ., 2016).} \quad (3.8)$$

Sonuç 3.3.8. Herhangi aşikar olmayan bağlı G çizgesi için $\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G) < 2\gamma_R(G)$ dir (Beeler ve diğ., 2016).

Ayrıca bu sonuçlara ek olarak çift Roman baskınlık sayısının alt ve üst sınırları normal baskınlık sayısı cinsinden elde edilmiştir.

Önerme 3.3.9. Herhangi G çizgesi için $2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$ dir (Beeler ve diğ., 2016).

Sonuç 3.3.10. Eğer G köşe sayısı $n \geq 3$ ve bağlı bir çizge ise $\gamma_{dR}(G) \leq \frac{5n}{4}$ tür (Beeler ve diğ., 2016).

Örnek 51. Sonuç 3.3.10 u Γ_3, Γ_4 ve Γ_5 küpleri için inceleyelim.

Γ_3 küpünün köşe sayısı 5 tir. Şekil 3.17 de görüldüğü üzere $\gamma_{dR}(\Gamma_3) = 5$ elde edilmiştir. Dolayısıyla,

$$\gamma_{dR}(\Gamma_3) = 5 \leq \left(\frac{5 \times 5}{4} = 6.25\right)$$

sağlanır.

Sırasıyla Γ_4 küpünün köşe sayısı 8, Γ_5 küpünün köşe sayısı ise 13 tür. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\gamma_{dR}(\Gamma_4) &= 8 \leq \left(\frac{5 \times 8}{4} = 10\right) \\ \gamma_{dR}(\Gamma_5) &= 11 \leq \left(\frac{5 \times 11}{4} = 13.75\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Ahangar ve diğ. (2017) çalışmasında ise yollar ve döngüler için çift Roman baskınlık sayısının tam değerleri verilmektedir.

Önerme 3.3.11.

$$n \geq 1 \text{ için, } \gamma_{dR}(P_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ n+1, & n \equiv 1 \text{ ya da } 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases} \quad (3.9)$$

dir (Ahangar ve diğ., 2017).

Önerme 3.3.12.

$$n \geq 3 \text{ için, } \gamma_{dR}(C_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{6} \text{ ise} \\ n+1, & n \equiv 1, 5 \pmod{6} \text{ ise} \end{cases} \quad (3.10)$$

dir (Ahangar ve diğ., 2017).

Örnek 52. Örnek 48 de sırasıyla P_4 , P_5 ve C_4 , C_5 , C_6 çizgeleri için elde edilen çift Roman baskınlık sayıları verilmektedir. (3.9) ve (3.10) daki eşitlikleri bu çizgeler için test edelim.

P_4 için $n = 4$ tür. $n \equiv 1 \pmod{3}$ olduğu için (3.9) gereği $\gamma_{dR}(P_4) = 4 + 1 = 5$ elde edilmelidir. Örnek 48 den de görüleceği üzere çizilerek elde edilen sayı da 5 tir.

Benzer şekilde P_5 için $n = 5$ tir. $n \equiv 2 \pmod{3}$ olduğu için $\gamma_{dR}(P_5) = 5 + 1 = 6$ bulunmalıdır. Örnek 48 de elde edilen sayı 6 dır.

C_4 , C_5 ve C_6 için ise sırasıyla $n = 4$, $n = 5$ ve $n = 6$ dır. (3.10) gereği C_4 için $n \equiv 4 \pmod{6}$ olduğundan

$\gamma_{dR}(C_4) = 4$, C_5 için $n \equiv 5 \pmod{6}$ olduğundan $\gamma_{dR}(C_5) = 5 + 1 = 6$ ve C_6 için $n \equiv 0 \pmod{6}$ olduğundan $\gamma_{dR}(C_6) = 6$ elde edilmelidir. Örnek 48 de bu çizgelerin çizilmesiyle bulunan sayıların sırasıyla 4, 6 ve 6 olduğu görülebilir.

Sonuç 3.3.13. Eğer G köşe sayısı n ve en küçük derecesi $\delta \geq 3$ olan bir çizge ise $\gamma_{dR}(G) \leq n$ dir (Ahangar ve diğ., 2017).

Yue ve diğ. (2018) makalesinde de çift Roman baskınlık sayısına dair alt ve üst sınırlar derece cinsinden elde edilmiştir.

Teorem 3.3.14. Δ en büyük dereceli ve n köşe sayılı herhangi bir G çizgesi için,

$$\gamma_{dR}(G) \geq \frac{2n}{\Delta} + \frac{\Delta-2}{\Delta} \gamma(G) \quad \text{dir (Yue ve diğ., 2018).} \quad (3.11)$$

Teorem 3.3.15. G çizgesi n köşeli en küçük derecesi δ olan bir çizge olsun.

$$\gamma_{dR}(G) \leq \frac{3n(1 + \ln \frac{2(1+\delta)}{3})}{1+\delta} \quad \text{dir (Yue ve diğ., 2018).} \quad (3.12)$$

Önerme 3.3.16. G çizgesi n köşeli en büyük derecesi Δ olan bir çizge olsun. O halde $\gamma_{dR}(G) \leq 2n - 2\Delta + 1$ dir (Yue ve diğ., 2018).

3.4 Roman Baskınlık Tipi Değişmezi Optimizasyon Problemi

Literatürde Roman baskınlık problemi üzerine bilinen 4 tip tam sayı lineer programlama bulunmaktadır. Bunlardan ilki Revelle ve Rosing (2000) tarafından kullanılmıştır. \mathcal{RR} formülasyonu olarak bilinmektedir. İkincisi Burger ve diğ. (2013) kullanmış olduğu \mathcal{BVV} formülasyonudur. Diğer iki programlama bahsi geçen programlamaların iyileştirilmiş halleridir. Çalışmamızda \mathcal{BVV} formülasyonu ile tanımlanan optimizasyon problemini inceleyeceğiz.

3.4.1 \mathcal{BVV} formülasyonu

$f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ kümesine tanımlanan f fonksiyonu için

$$x_i = \begin{cases} 1, & f(i) = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 1, & f(i) = 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. V_1 kümesi $x_i = 1$ köşelerini V_2 kümesi $y_i = 1$ köşelerini içeren iki küme ve V_0 kümesi ise $V(G) \setminus (V_1 \cup V_2)$ olarak tanımlanmak üzere (3.14), (3.15) ve (3.16) kısıtları sağlanmak şartıyla (3.13) teki minimum değer bir G çizgesinin Roman Baskınlık sayısını ifade etmektedir.

$$\min \sum_{i \in V} x_i + 2 \sum_{i \in V} y_i \quad (3.13)$$

Kısıtlar:

$$i \in V \quad \text{için} \quad x_i + y_i + \sum_{j \in N_i} y_j \geq 1, \quad (3.14)$$

$$i \in V \quad \text{için} \quad x_i + y_i \leq 1, \quad (3.15)$$

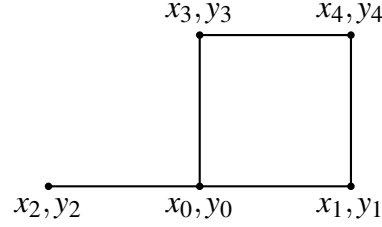
$$i \in V \quad \text{için} \quad x_i, y_i \in \{0, 1\} \quad (3.16)$$

Burada amaç fonksiyonu (3.13) te verilmektedir. (3.14) kısıtı emniyetsiz bölgenin en az bir tane iki orduya sahip bölgenin komşuluğunda olması gerektiğini ifade eder. (3.15) kısıtı ise bir bölgeye ya 1 ordu ya da 2 ordu konumlandırılabilirdiğini dolayısıyla $x_i + y_i$ toplamının en fazla 1 olabileceğini belirtmektedir. Karar değişkenleri x_i ve y_i , (3.16) koşulu tarafından ikili olarak korunmaktadır.

\mathcal{BVV} formülasyonu $2|V|$ ikili değişken ve $2|V|$ koşulları içermektedir.

Formülasyonu ve belirtilen kısıtları daha iyi anlamak adına bir örnek ele alalım.

Örnek 53. BVV formülasyonunu Γ_3 Fibonacci küpü için incelenirse öncelikle Şekil 3.20 de görüldüğü gibi Γ_3 küpünün karar değişkenleri yerleştirilir.



Şekil 3.20: Γ_3 küpünün karar değişkenleri

Ardından,

(3.14) kısıtı gereğince:

$$x_0 + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \quad (3.17)$$

$$x_1 + y_1 + y_0 + y_4 \geq 1 \quad (3.18)$$

$$x_2 + y_2 + y_0 \geq 1 \quad (3.19)$$

$$x_3 + y_3 + y_0 + y_4 \geq 1 \quad (3.20)$$

$$x_4 + y_4 + y_1 + y_3 \geq 1 \quad (3.21)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca (3.15) kısıtı gereğince:

$$x_0 + y_0 \leq 1$$

$$x_1 + y_1 \leq 1$$

$$x_2 + y_2 \leq 1 \quad (3.22)$$

$$x_3 + y_3 \leq 1$$

$$x_4 + y_4 \leq 1$$

eşitsizlikleri de sağlanmalıdır. Γ_3 küpü için Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığının alabileceği en küçük değer için kabul edelim ki $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$ olsun. Tanım gereği Roman baskınlık fonksiyonu değeri 0 olan köşe değeri 2 olan en az bir köşeye komşu olmalıdır. Bu nedenle (3.17) eşitsizliğinde y_1 , y_2 ya da y_3 değişkenlerinden biri 1 dir.

1. Durum: $y_1 = 1$ ise

$x_1 = 0$ dir. Amaç Roman baskınlık fonksiyonunun ağırlığını en aza indirmek olduğu için (3.18) eşitsizliğinde $y_4 = 0$ kabul edilsin. Dolayısıyla (3.18) sağlanır. (3.19) eşitsizliği için x_2 ya da y_2 değişkenlerinden birinin 1 olması gerekmektedir. Roman baskınlık fonksiyonunun en küçük değeri için $x_2 = 1$ kabul edilsin. Böylece $y_2 = 0$ olur. Şimdi (3.20) ve (3.21) eşitsizlikleri için elde edilen değerler şu şekildedir:

$$x_3 + y_3 + 0 + 0 \geq 1$$

$$x_4 + 0 + 1 + y_3 \geq 1$$

Bu durumda $y_4 = 0$ kabul edildiği için $x_4 = 1$ ya da $x_4 = 0$ olacaktır. Eğer $x_4 = 1$ ise (3.21) eşitsizliği için $y_3 = 0$ kabul edilebilir. Bu nedenle (3.20) eşitsizliği için $x_3 = 1$ olmalıdır. Böylece $\gamma_R(\Gamma_3) = 5$ sonucuna ulaşılr. Eğer $x_4 = 0$ ise ya x_3 ya da y_3 değişkeni 1 kabul edilmelidir. $x_3 = 1, y_3 = 0$ ise $\gamma_R(\Gamma_3) = 4$; $x_3 = 0, y_3 = 1$ ise $\gamma_R(\Gamma_3) = 5$ sonucu elde edilir.

2. Durum: $y_2 = 1$ ise

$x_2 = 0$ dir. Böylece 000 köşesinin komşularından birinin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 2 olmuş olur. Roman baskınlık fonksiyonunun alabileceği en küçük ağırlık hedeflendiği için diyelim ki 000 köşesinin diğer komşu köşelerinin değerleri 0 olsun. Yani, $x_1 = 0, y_1 = 0, x_3 = 0$ ve $y_3 = 0$ kabul edilsin. (3.18), (3.20) ve (3.21) eşitsizliklerinin her birinin sağlanması için görülür ki $y_4 = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $x_4 = 0$ olacaktır. Böylelikle $\gamma_R(\Gamma_3) = 4$ elde edilir.

3. Durum: $y_3 = 1$ ise

$x_3 = 1$ dir. 010 köşesinin tek komşusu 000 köşesi olduğundan bu köşenin Roman baskınlık fonksiyonu altındaki görüntüsü 0 olamaz. Dolayısıyla $x_2 = 1$ ya da $y_2 = 1$ olmalıdır. Roman baskınlık fonksiyonunun en küçük değeri elde edilmek istenildiğinden kabul edelim ki $x_2 = 1$ olsun. Dolayısıyla $y_2 = 0$ olacaktır. Bu değişken değerlerinin (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitsizliklerine yerleştirilmesiyle görülür ki Roman baskınlık fonksiyonunun en küçük değerinin elde edilmesi için $x_1 = 1, y_1 = 0, x_4 = 0$ ve $y_4 = 0$ kabul edilebilir. Böylece $\gamma_R(\Gamma_3) = 4$ elde edilir.

Şimdi $x_0 = 1, y_0 = 0$ ihtimalini inceleyelim. Bu ihtimalde (3.17) eşitsizliğindeki diğer değerler amaç doğrultusunda 0 kabul edilsin. Yani $y_1 = 0, y_2 = 0$ ve $y_3 = 0$ olsun. 010 köşesinin tek komşusu 000 köşesi olduğu için ve bu köşenin Roman baskınlık fonksiyonu değeri 1 olduğu için kendisinin bu fonksiyona göre değeri tanım gereği 0 olamaz. Bu nedenle, $x_2 = 1$ olmalıdır. Kabul edilen değerlerle (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitsizliklerine bakılırsa

$$x_1 + 0 + 0 + y_4 \geq 1$$

$$1 + 0 + 0 \geq 1$$

$$x_3 + 0 + 0 + y_4 \geq 1$$

$$x_4 + y_4 + 0 + 0 \geq 1$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.22) den görülür ki aynı zamanda $x_4 + y_4 \leq 1$ şartı da sağlanmalıdır. Bu durum $x_4 + y_4 = 1$ olması gerektiğini gösterir. Diyelim ki $x_4 = 0, y_4 = 1$ olsun. Böylece $x_1 = 0$ ve $x_3 = 0$ kabul edilebilir. Bu durumda $\gamma_R(\Gamma_3) = 4$ elde edilmiş olur. Eğer $x_4 = 1, y_4 = 0$ kabul edilirse hem $x_1 = 1$ hem de $x_3 = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\gamma_R(\Gamma_3) = 5$ elde edilir.

Son olarak $x_0 = 0$ iken $y_0 = 1$ olasılığını ele alalım. Bu durum 000 köşesinin Roman baskınlık fonksiyonu değerinin 2 olduğunu ifade eder. Tanım gereği 000 köşesinin bütün komşu köşelerinin Roman baskınlık fonksiyonu 0 değerini alırsa $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 0$ ve $x_3 = 0, y_3 = 0$ olur. Bu değerler (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitsizliklerine yerleştirilecek olursa

$$0 + 1 + 0 + 0 + 0 \geq 1$$

$$0 + 0 + 1 + y_4 \geq 1$$

$$0 + 0 + 1 \geq 1$$

$$0 + 0 + 1 + y_4 \geq 1$$

$$x_4 + y_4 + 0 + 0 \geq 1$$

elde edilir. (3.22) den görülür ki aynı zamanda $x_4 + y_4 \leq 1$ şartı da sağlanmalıdır. Bu durum $x_4 + y_4 = 1$ olması gerektiğini ifade eder. $x_4 = 0$, $y_4 = 1$ kabul edilirse $\gamma_R(\Gamma_3) = 4$ bulunur. Fakat, $x_4 = 1$, $y_4 = 0$ ise $\gamma_R(\Gamma_3) = 3$ elde edilir.

(3.17), (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitsizlikleri yalnızca 2 ya da 1 adet $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak koşuluyla x_i değişkenin 1 değeri almasıyla veya $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak koşuluyla 1 adet y_i değişkeninin 1 değeri almasıyla elde edilemez. Dolayısıyla bu durum $\gamma_R(\Gamma_3) = 3$ olduğunu ifade etmektedir.

3.5 Zayıf Roman Baskınlık Tipi Değişmezi Optimizasyon Problemi

Literatürde zayıf Roman baskınlık problemi üzerine bilinen 2 tip tam sayı lineer programlama bulunmaktadır. Bu programlamalar ilk olarak Ivanovic (2018) çalışmasında WRDP ve WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama olarak sunulmuştur. Çalışmamızda WRDP için geliştirilmiş optimizasyon problemini ele alacağız.

3.5.1 WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama

$E' = \{(j, i) \mid (i, j) \in E\}$ olsun ve her $e \in E \cup E'$ için

$$z_e = \begin{cases} 1, & e = (i, j), \quad i \quad (x_i = 0 \quad \text{ve} \quad y_i = 0) \quad \text{ve} \quad j \quad (x_j = 1 \quad \text{ya da} \quad y_j = 1) \\ & \text{değişim kümesi oluştururlar.} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.23)$$

tanımlanır. X kümesi 1 ordu bulunduran köşe kümesini ifade ederken Y kümesi tam olarak 2 ordu bulunduran köşe kümesini göstermek üzere ikili karar değişkenleri x_i ve y_i ,

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in X \quad \text{ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 1, & i \in Y \quad \text{ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.24)$$

olarak tanımlanır. WRDP için $G(V, E)$ çizgesi üzerinde geliştirilmiş tam sayı lineer programlama şu şekilde ifade edilebilmiştir.

$$\min \sum_{k \in V} (x_k + 2y_k) \quad (3.25)$$

Kısıtlar:

$$x_i + y_i + \sum_{e \ni i} z_e \geq 1, \quad i \in V \quad (3.26)$$

$$x_j + y_j - x_i - y_i + 1 \geq 2z_e, \quad e = (i, j) \in E \cup E' \quad (3.27)$$

$$y_j + \sum_{\substack{l \in N_k \\ l \neq i, \\ l \neq j}} (x_l + y_l) \geq z_e, \quad e = (i, j) \in E \cup E', \quad k \in N_j \setminus N_i \quad (3.28)$$

$$x_i, y_i, z_e \in \{0, 1\} \quad i \in V, \quad e \in E \cup E'. \quad (3.29)$$

(3.25) teki amaç fonksiyonunun değeri ile zayıf Roman baskınlık sayısı, $\gamma_r(G)$, gösterilmektedir. (3.26) kısıtı ile her i köşesinin savunulduğu ya da yer değiştirebileceği, savunulan bir köşeye komşu olduğu belirtilir. Bir j köşesi ile bir i köşesinin değişim oluşturmasının geçerliliği (3.27) kısıtı tarafından sağlanır. Ayrıca, (3.28) kısıtı ile j köşesinden i köşesine herhangi bir yer değişikliğinden sonra Roma İmparatorluğu'nun güvenliğinin korunduğu gösterilmektedir. Karar değişkenlerinin ikili özelliği (3.29) kısıtıyla sağlanır.

(3.25) ile ifade edilen programlama $2|V| + |E|$ değişkene ve $3|V| + 2|E|$ kısıta sahiptir.

3.6 Çift Roman Baskınlık Tipi Değişmezi Optimizasyon Problemi

Cai ve diğ. (2019) çalışmasında Çift Roman baskınlık tipi değişmezi için **DRDP - 1** ve **DRDP - 2** olmak üzere iki farklı tam sayı lineer programlama ve bu programlamaların geliştirilmiş halleri görülür. Çalışmamızda **DRDP - 1** tam sayı lineer programlama tipini inceleyeceğiz.

3.6.1 DRDP-1 tam sayı lineer programlama

DRDP-1 tam sayı lineer programlamada üç adet ikili değişkenler kümesi kullanılır. V_1 kümesi $x_v = 1$, V_2 kümesi $y_v = 1$ ve V_3 kümesi $z_v = 1$ değişkenlerinin atandığı kümeleri ve V_0 kümesi ise $V(G) \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$ temsil etmek üzere her $v \in V$ köşesi için

$$x_v = \begin{cases} 1, & f(v) = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad y_v = \begin{cases} 1, & f(v) = 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad z_v = \begin{cases} 1, & f(v) = 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. (3.31), (3.32), (3.33) ve (3.34) kısıtları sağlanmak şartıyla (3.30) deki toplamın minimum değeri ile bir G çizgesinin çift Roman baskınlık sayısı elde edilir.

$$[\mathbf{DRDP-1}] \quad \min \sum_{v \in V} x_v + 2 \sum_{v \in V} y_v + 3 \sum_{v \in V} z_v \quad (3.30)$$

Kısıtlar:

$$\forall v \in V \text{ için } x_v + y_v + z_v + \frac{1}{2} \sum_{u \in N(v)} y_u + \sum_{u \in N(v)} z_u \geq 1, \quad (3.31)$$

$$\forall v \in V \text{ için } \sum_{u \in N(v)} y_u + \sum_{u \in N(v)} z_u \geq x_v, \quad (3.32)$$

$$\forall v \in V \text{ için } x_v + y_v + z_v \leq 1, \quad (3.33)$$

$$\forall v \in V \text{ için } x_v, y_v, z_v \in \{0, 1\} \quad (3.34)$$

Burada (3.31) kısıtında verilen toplamın 1 değerine eşit ya da büyük olması γ_{DR} - fonksiyonu değeri 0 olan her köşenin değeri 3 olan en az bir ya da değeri 2 olan en az iki köşeye komşu olması gerektiğini ifade eder. (3.32) kısıtı ise bir köşenin γ_{DR} - fonksiyonu değeri 1 ise o köşenin değerinin 2 ya da 3 olan en az bir köşeye komşuluğunu garanti eder. (3.33) kısıtı bir köşenin γ_{DR} - fonksiyonu değerinin tek ve bir olduğunu belirtmektedir.

Teorem 3.6.1. *DRDP-1 formülasyonunun ideal amaç fonksiyonu (optimal objective function) çift Roman baskınlık sayısı γ_{DR} ye eşittir (Cai ve diğ., 2019).*



4. SONUÇLAR

3. Kısımda öncelikle Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık tipi değişmezlerini incelemiştik. Daha sonra literatürde bu Roman baskınlık türleri için çalışılmış optimizasyon problemlerinden bahsetmiştik. Çalışmamızın bu kısmında Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık türleri için ele aldığımız tam sayı lineer programlamaları kullanıp Fibonacci küpleri için bilgisayar ortamında elde ettiğimiz sonuçlara değineceğiz.

4.1 Fibonacci Küpleri İçin Roman Baskınlık Sayısına Dair Sonuçlar

\mathcal{BVV} - formülasyonu kullanılarak $n \leq 10$ boyutu için Fibonacci küplerinde elde edilen Roman baskınlık sayıları ve $11 \leq n \leq 13$ boyutları için elde edilen alt ve üst sınırlar aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.1 de Γ_2 için amaç fonksiyonu değeri 2 olarak elde edilir. Yani $\gamma_R(\Gamma_2) = 2$ dir. Çizelge 4.2 de görüldüğü üzere amaç fonksiyonunun değeri 3 olarak elde edilir. Yani $\gamma_R(\Gamma_3) = 3$ tür. Çizelge 4.3 ten amaç fonksiyonunun değerinin 5 olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $\gamma_R(\Gamma_4) = 5$ sonucu elde edilir. Çizelge 4.4 ten amaç fonksiyonunun değeri 7 olarak bulunur. Yani $\gamma_R(\Gamma_5) = 7$ dir. Çizelge 4.5 ise Γ_6 küpünün V_1 , V_2 ve V_0 kümelerini göstermektedir. Buradan amaç fonksiyonunun değerinin 10 olduğu gözlemlenir. Yani $\gamma_R(\Gamma_6) = 10$ olarak elde edilir. Bu kısma kadar elde edilen $\gamma_R(\Gamma_n)$ sayılarının Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da gösterilen değerlerle aynı olduğu gözlemlenir.

Çizelge 4.1: Γ_2 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 2$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	$\{00\}$
V_0	$V(\Gamma_2) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 4.2: Γ_3 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 3$	Küme Elemanları
V_1	$\{101\}$
V_2	$\{000\}$
V_0	$V(\Gamma_3) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 4.3: Γ_4 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 4$	Küme Elemanları
V_1	{1010}
V_2	{0000, 0001}
V_0	$V(\Gamma_4) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 4.4: Γ_5 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 5$	Küme Elemanları
V_1	{10010}
V_2	{00000, 01000, 10101}
V_0	$V(\Gamma_5) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 4.5: Γ_6 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 6$	Küme Elemanları
V_1	{100100, 100101}
V_2	{000001, 000010, 010100, 101000}
V_0	$V(\Gamma_6) \setminus (V_1 \cup V_2)$

$n = 7, 8, 9$ ve 10 için Fibonacci küplerinin köşe ve kenar sayılarının artması nedeniyle el ile çizilmesi oldukça zordur. Bilgisayar ortamında \mathcal{BVV} - formülasyonun çalıştırılması $n = 7, 8, 9$ ve 10 boyutlarındaki Γ_n küpü için Roman baskınlık sayılarının elde edilmesini sağlamaktadır.

Çizelge 4.6: Γ_7 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 7$	Küme Elemanları
V_1	{1010101}
V_2	{0000001, 0000010, 0000100, 0000101, 0101000, 1001000, 1010000}
V_0	$V(\Gamma_7) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 4.6 dan amaç fonksiyonu değerinin 15 olduğu anlaşılır. Yani $\gamma_R(\Gamma_7) = 15$ olarak bulunur.

Çizelge 4.7 de V_1 ve V_2 kümeleri görüldüğü gibidir. Buradan amaç fonksiyonu değerinin 23 olduğu anlaşılacaktır. Dolayısıyla $\gamma_R(\Gamma_8) = 23$ olarak bulunur. Çizelge 4.8 de ise yer alan kümelere görüldüğü üzere amaç değer fonksiyonu 34 olarak elde edilir. Yani $\gamma_R(\Gamma_9) = 34$ tür.

Çizelge 4.7: Γ_8 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 8$	Küme Elemanları
V_1	$\{10000100\}$
V_2	$\{00001001, 00010000, 00100100, 00101010, 01000101, 01001010, 01010000, 10000010, 10010101, 10100001, 10101000\}$
V_0	$V(\Gamma_8) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 4.8: Γ_9 küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 9$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	$\{000000010, 000001001, 000001010, 000100101, 001000100, 001010001, 010000101, 010010000, 010100000, 010101000, 100010100, 100010101, 100100000, 100101000, 101000001, 101001000, 101010010\}$
V_0	$V(\Gamma_9) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Son olarak \mathcal{BVV} - formülasyonu sonucunda karar değişkenlerinin elde edilen değerlerine göre temel ayrışımından yararlanarak Γ_{10} küpünde bu değerlerin hangi köşelere denk geldiğini gösteren Çizelge 4.9 u inceleyelim.

Çizelge 4.9: Γ_{10} küpünün \mathcal{BVV} - formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 10$	Küme Elemanları
V_1	$\{0010001000, 0100001010\}$
V_2	$\{0000000100, 0000101000, 0001000001, 0001001010, 0001010010, 0010000010, 0010010101, 0010100001, 0100001001, 0100010000, 0100100010, 0100100101, 0101000000, 0101010101, 1000000010, 1000000101, 1000010001, 1000100001, 1001001000, 1001010100, 1010001001, 1010010000, 1010100100, 1010101010\}$
V_0	$V(\Gamma_{10}) \setminus (V_1 \cup V_2)$

Çizelge 4.9 da verilen kümelerden anlaşılacağı gibi $n = 10$ için amaç değer fonksiyonunun değeri 50 dir. Yani $\gamma_R(\Gamma_{10}) = 50$ olarak elde edilir.

Şimdi literatürde bilinen sınır değerleri ile \mathcal{BVV} formülasyonu ile elde edilen değerleri bir çizelge altında görelim.

Çizelge 4.10 bir Γ_n çizgesi için bilinen en iyi alt ve üst sınırları veren (3.1) i ve (3.2) yi 2. sütunda gösterirken 3. sütunda $n \leq 13$ boyutu için Roman baskınlık sayılarına dair elde edilen sonuçları ifade etmektedir. Bu sayılar 3. sütunda mavi renk ile gösterilmiştir.

Çizelge 4.10: $n \leq 13$ için Γ_n küpünün alt ve üst sınırları ve \mathcal{BVV} - formülasyonu ile elde edilen sonuçlar.

n	$\frac{2 V(\Gamma_n) }{\Delta+1} \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_n) \leq 2\gamma(\Gamma_n)$	$\gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_n)$
1	$2 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_1) \leq 2$	2
2	$2 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_2) \leq 2$	2
3	$3 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_3) \leq 4$	3
4	$4 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_4) \leq 6$	5
5	$5 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_5) \leq 8$	7
6	$6 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_6) \leq 10$	10
7	$9 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_7) \leq 16$	15
8	$13 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_8) \leq 24$	23
9	$18 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_9) \leq 34$	34
10	$27 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_{10}) \leq 50$	50
11	$39 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_{11}) \leq 78$	$75 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_{11}) \leq 77$
12	$58 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_{12})$	$107 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_{12}) \leq 119$
13	$88 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_{13})$	$157 \leq \gamma_{\mathcal{R}}(\Gamma_{13}) \leq 183$

Çizelge 4.10 da görüldüğü üzere $n \leq 10$ için \mathcal{BVV} - formülasyonunun 1 saat çalıştırılması ile elde edilen sonuçların literatürde verilen sınırlar arasında yer aldığı aşikardır. \mathcal{BVV} - formülasyonu ile $n = 11$ boyutu için Γ_n Fibonacci küpünün Roman baskınlık sayısına dair alt ve üst sınır değerlerinin geliştirildiği de gösterilmiştir. $n = 12$ ve $n = 13$ boyutları için ise sırasıyla (3.2) den alt sınırın 58 ve 88 olduğu bilinmektedir. $n = 12$ için $\gamma(\Gamma_{12})$ değerinin sınırları bilinirken $n = 13$ boyutu için baskınlık sayısı bilinmemektedir. \mathcal{BVV} formülasyonu ile bu boyutlar için Roman baskınlık sayısının alt ve üst sınır değerleri ortaya konmuştur. Bulunan bu değerler mavi renk kullanılarak gösterilmiştir.

4.2 Zayıf Roman Baskınlık Sayısına Dair Sonuçlar

WRDP için geliştirilmiş optimizasyon problemi kullanılarak $n \leq 8$ boyutuna kadar Γ_n Fibonacci küplerinin zayıf Roman baskınlık sayıları ve $9 \leq n \leq 13$ boyutları için elde edilen sınırlar aşağıdaki gibidir. WRDP için geliştirilmiş optimizasyon probleminin çalıştırılmasıyla literatürde $n = 9$ ve $n = 10$ için bilinen sınırlar geliştirilmiş ve $11 \leq n \leq 13$ için ise alt ve üst sınırlarına dair sayısal değerler elde edilmiştir. Çizelge 4.11 de amaç değer fonksiyonu değeri 1 olarak elde edilir. Dolayısıyla $\gamma_r(\Gamma_1) = 1$ olduğu gözlemlenir. Çizelge 4.12, Γ_2 küpü için amaç değer fonksiyonu değerinin 2 olduğunu göstermektedir. Yani, $\gamma_r(\Gamma_2) = 2$ dir. Çizelge 4.13 te V_1 kümesinin eleman sayısı 2 dir. Yani bu değer amaç değer fonksiyonu değeridir. Dolayısıyla $\gamma_r(\Gamma_3) = 2$ olur. Çizelge 4.14 ten amaç değer fonksiyonu değeri 4 olarak elde edilir. Bu durum $\gamma_r(\Gamma_4) = 4$ olduğunu ifade eder. Anlaşılacağı üzere Çizelge 4.15 ise Γ_5 küpü için amaç değer fonksiyonu değerinin 6 olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$\gamma_r(\Gamma_5) = 6$ bulunur.

Çizelge 4.11: Γ_1 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 1$	Küme Elemanları
V_1	$\{0\}$
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_1) \setminus V_1$

Çizelge 4.12: Γ_2 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 2$	Küme Elemanları
V_1	$\{01, 10\}$
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_2) \setminus V_1$

Çizelge 4.13: Γ_3 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 3$	Küme Elemanları
V_1	$\{000, 101\}$
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_3) \setminus V_1$

Çizelge 4.14: Γ_4 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 4$	Küme Elemanları
V_1	$\{0001, 0010, 0100, 1000\}$
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_4) \setminus V_1$

Çizelge 4.15: Γ_5 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 5$	Küme Elemanları
V_1	$\{00000, 00001, 00100, 01000, 10010, 10101\}$
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_5) \setminus V_1$

Çizelge 4.16: Γ_6 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 6$	Küme Elemanları
V_1	{000010, 001001, 010000, 010101, 100001, 100100, 101010}
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_6) \setminus V_1$

Görüldüğü gibi Çizelge 4.16, Γ_6 küpünün amaç değer fonksiyonu değerinin 7 olduğunu ifade eder. Yani $\gamma_r(\Gamma_6) = 7$ olarak elde edilir.

Dikkat edilirse bilgisayar ortamında WRDP için geliştirilmiş formülasyonun çalıştırılmasıyla $n \leq 6$ boyutuna kadar Γ_n küpü için elde edilen zayıf Roman baskınlık sayıları Şekil 3.11, Şekil 3.12 ve Şekil 3.13 te gösterilen sayısal sonuçlarla aynıdır. $n = 7$ ve $n = 8$ boyutları için köşe sayıları arttığından el ile bu küplerin çizimi oldukça zordur. WRDP için geliştirilmiş formülasyon ile bu boyutlar için sayısal sonuçlara ulaşılmıştır.

Çizelge 4.17: Γ_7 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 7$	Küme Elemanları
V_1	{0000010, 0001001, 0010000, 0010101, 0100001, 0100100, 0101010, 1000001, 1001000, 1010010, 1010100, 1010101}
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_7) \setminus V_1$

Çizelge 4.17 $n = 7$ için Γ_n Fibonacci küpünün WRDP formülasyonundaki değişkenlerin atandığı kümelerin elemanlarını göstermektedir. Buradan amaç değer fonksiyonu, $\gamma_r(\Gamma_7)$, 12 olarak elde edilir.

Çizelge 4.18: Γ_8 küpünün WRDP için geliştirilmiş formülasyonundaki V_1 , V_2 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 8$	Küme Elemanları
V_1	{00000000, 00000100, 00001010, 00010001, 00100000, 00100101, 00101001, 01000101, 01001000, 01010010, 01010100, 10000000, 10000100, 10001001, 10010010, 10010101, 10100000, 10101010}
V_2	\emptyset
V_0	$V(\Gamma_8) \setminus V_1$

Çizelge 4.18 den amaç değer fonksiyonu 18 olarak bulunur. Yani, $\gamma_r(\Gamma_8) = 18$ dir. Çizelge 4.19 da 2. sütun (3.6) daki alt ve üst sınırları gösterirken 3. sütun WRDP için geliştirilmiş formülasyon ile elde edilen sayısal sonuçları ifade etmektedir. Bu

sonuçlar mavi renkle gösterilmektedir.

WRDP için geliştirilmiş formülasyonun 1 saatlik sürede çalıştırılması sonucunda Çizelge 4.19 da $n \leq 8$ boyutu için elde edilen değerlerin zayıf Roman baskınlık sayısına dair bilinen en iyi alt ve üst sınır değerleri arasında kaldığı kolaylıkla görülebilir. $n = 9, 10$ ve 11 boyutları için ise daha iyi sınırlara ve $12 \leq n \leq 13$ boyutları için ise $\gamma_r(\Gamma_n)$ değerlerinin alt ve üst sınırlarına dair sayısal bilgilere erişildiği gösterilmektedir.

Çizelge 4.19: $n \leq 13$ boyutu için Γ_n küpünün zayıf Roman baskınlık sayılarının sınırları ve WRDP için geliştirilmiş formülasyon ile elde edilen sonuçlar.

n	$\gamma(\Gamma_n) \leq \gamma_r(\Gamma_n) \leq \gamma_R(\Gamma_n) \leq 2\gamma(\Gamma_n)$	$\gamma_r(\Gamma_n)$
1	$1 \leq \gamma_r(\Gamma_1) \leq 2 \leq 2$	1
2	$1 \leq \gamma_r(\Gamma_2) \leq 2 \leq 2$	2
3	$2 \leq \gamma_r(\Gamma_3) \leq 3 \leq 4$	2
4	$3 \leq \gamma_r(\Gamma_4) \leq 5 \leq 6$	4
5	$4 \leq \gamma_r(\Gamma_5) \leq 7 \leq 8$	6
6	$5 \leq \gamma_r(\Gamma_6) \leq 10 \leq 10$	7
7	$8 \leq \gamma_r(\Gamma_7) \leq 15 \leq 16$	12
8	$12 \leq \gamma_r(\Gamma_8) \leq 23 \leq 24$	18
9	$17 \leq \gamma_r(\Gamma_9) \leq 34 \leq 34$	$23 \leq \gamma_r(\Gamma_9) \leq 28$
10	$25 \leq \gamma_r(\Gamma_{10}) \leq 50 \leq 50$	$31 \leq \gamma_r(\Gamma_{10}) \leq 43$
11	$39 \leq \gamma_r(\Gamma_{11}) \leq 78$	$41 \leq \gamma_r(\Gamma_{11}) \leq 67$
12		$58 \leq \gamma_r(\Gamma_{12}) \leq 106$
13		$82 \leq \gamma_r(\Gamma_{13}) \leq 163$

4.3 Çift Roman Baskınlık Sayısına Dair Sonuçlar

DRDP - 1 formülasyonu kullanılarak $n \leq 10$ boyutu için Γ_n Fibonacci küpünde çift Roman baskınlık sayısına dair elde edilen değerler ve $11 \leq n \leq 13$ boyutları için elde edilen sınırlar şu şekildedir:

Çizelge 4.20: Γ_2 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 2$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	\emptyset
V_3	$\{00\}$
V_0	$V(\Gamma_2) \setminus V_3$

Dolayısıyla amaç değer fonksiyonunun Çizelge 4.20 den değerinin 3 olduğu

görülmektedir. Yani $\gamma_{dR}(\Gamma_2) = 3$ elde edilir.

Çizelge 4.21: Γ_3 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 3$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	$\{101\}$
V_3	$\{000\}$
V_0	$V(\Gamma_3) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Çizelge 4.21 den görüldüğü üzere amaç değer fonksiyonunun değeri 5 olarak bulunur. Yani $\gamma_{dR}(\Gamma_3) = 5$ tir.

Çizelge 4.22: Γ_4 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 4$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	$\{0101\}$
V_3	$\{0000, 1000\}$
V_0	$V(\Gamma_4) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Çizelge 4.22 den anlaşılacağı gibi amaç değer fonksiyonunun değeri 8 dir. Dolayısıyla $\gamma_{dR}(\Gamma_4) = 8$ olur.

Çizelge 4.23: Γ_5 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 5$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	$\{00010\}$
V_3	$\{00101, 01000, 10000\}$
V_0	$V(\Gamma_5) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Elde edilen değerler Çizelge 4.23 te görülmektedir. Buradan amaç değer fonksiyonunun değerininin 11 olduğu anlaşılır. Yani $\gamma_{dR}(\Gamma_5) = 11$ bulunur. Çizelge 4.24 ten amaç değer fonksiyonu 15 olarak elde edilmektedir. Yani $\gamma_{dR}(\Gamma_6) = 15$ bulunur.

Buraya kadar **DRDP - 1** formülasyonu ile $n \leq 6$ boyutuna kadar temel ayrışımından da yararlanarak hangi köşenin hangi değeri aldığı bilgisine ulaşılmıştır. Ayrıca bu boyuta kadar olan sayısal sonuçlar incelenirse Şekil 3.17, Şekil 3.18 ve Şekil 3.19 da gösterilen değerlerle aynı olduğu görülecektir.

Çizelge 4.24: Γ_6 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 6$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	\emptyset
V_3	$\{000101, 001001, 001010, 010000, 100000\}$
V_0	$V(\Gamma_6) \setminus V_3$

DRDP - 1 formülasyonun bilgisayar ortamında çalıştırılmasıyla el ile çizilmesi zor olan $n = 7, 8, 9$ ve 10 için Γ_n çizgesinin çift Roman baskınlık sayılarına ve $11 \leq n \leq 13$ boyutları için alt ve üst sınır değerlerine ulaşılmıştır. Ayrıca $n = 6$ boyutuna kadar olduğu gibi $7 \leq n \leq 10$ boyutları için **DRDP - 1** formülasyonu ile karar değişkenleri için elde edilen değerlerin hangi köşelerin değerleri olduğu bilgisine de temel ayrışımından erişilmiştir.

Çizelge 4.25 amaç fonksiyonu değerinin 23 olduğunu ifade eder. Dolayısıyla $\gamma_{dR}(\Gamma_7) = 23$ tür. Amaç değer fonksiyonu Çizelge 4.26 dan 35 olarak elde edilir. Yani $\gamma_{dR}(\Gamma_8) = 35$ tir. Çizelge 4.27 de görüleceği gibi amaç fonksiyonunun değerinin 51 olduğu aşıkardır. Yani $\gamma_{dR}(\Gamma_9) = 51$ olarak elde edilir. Çizelge 4.28 den edinilen sonuca göre ise amaç fonksiyonu değeri 75 olarak bulunur. Dolayısıyla $\gamma_{dR}(\Gamma_{10}) = 75$ tir.

Son olarak Çizelge 4.29 da literatürde bilinen sınır değerleri ve elde edilen sayısal sonuçlar verilmektedir. Burada 2. sütun (3.11) de elde edilen alt sınırı 3. sütun ise Sonuç 3.3.5 te elde edilen üst sınırı göstermektedir. 4. sütunda çalışmamızda elde edilen değerler mavi renkle gösterilmektedir.

Çizelge 4.25: Γ_7 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 7$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	$\{1010101\}$
V_3	$\{0000001, 0000010, 0000100, 0000101, 0101000, 1001000, 1010000\}$
V_0	$V(\Gamma_7) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Çizelge 4.26: Γ_8 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 8$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	$\{00010100\}$
V_3	$\{00001001, 00001010, 00010010, 00100001, 00100101, 01000000, 01010101, 10000100, 10010001, 10100010, 10101000\}$
V_0	$V(\Gamma_8) \setminus (V_2 \cup V_3)$

Çizelge 4.27: Γ_9 küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 9$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	\emptyset
V_3	{000001001, 000001010, 000010010, 000100101, 000101001, 000101010, 001000100, 001010001, 010000000, 010010101, 010100000, 100000101, 100010100, 100100000, 101000010, 10101000, 101010001}
V_0	$V(\Gamma_9) \setminus V_3$

Çizelge 4.28: Γ_{10} küpünün **DRDP - 1** formülasyonundaki V_1, V_2, V_3 ve V_0 kümelerinin elemanları.

$n = 10$	Küme Elemanları
V_1	\emptyset
V_2	\emptyset
V_3	{0000001010, 0000100010, 0000100101, 0001001001, 0001010000, 0010000000, 0010010101, 0010101001, 0100000001, 0100000100, 0100010010, 0100101000, 0101000100, 0101001010, 0101010101, 1000001000, 1000010001, 1000010100, 1000100001, 1001000010, 1001000101, 1010000001, 1010010010, 1010100100, 1010101010}
V_0	$V(\Gamma_{10}) \setminus V_3$

Çizelge 4.29: $2 \leq n \leq 13$ boyutu için Γ_n küpünün çift Roman baskınlık sayılarının sınırları ve **DRDP - 1** formülasyonu ile elde edilen sonuçlar.

n	$\frac{2 V(\Gamma_n) }{\Delta} + \frac{\Delta-2}{\Delta}\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G)$	$\gamma_{dR}(G) \leq 2\gamma_R(G) - V_2 $	$\gamma_{dR}(\Gamma_n)$
2	$3 \leq \gamma_{dR}(\Gamma_2)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_2) \leq 4$	$\gamma_{dR}(\Gamma_2) = 3$
3	$4 \leq \gamma_{dR}(\Gamma_3)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_3) \leq 5$	$\gamma_{dR}(\Gamma_3) = 5$
4	$\frac{14}{4} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_4)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_4) \leq 9$	$\gamma_{dR}(\Gamma_4) = 8$
5	$\frac{37}{5} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_5)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_5) \leq 13$	$\gamma_{dR}(\Gamma_5) = 11$
6	$\frac{62}{6} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_6)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_6) \leq 20$	$\gamma_{dR}(\Gamma_6) = 15$
7	$\frac{108}{7} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_7)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_7) \leq 29$	$\gamma_{dR}(\Gamma_7) = 23$
8	$\frac{182}{8} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_8)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_8) \leq 45$	$\gamma_{dR}(\Gamma_8) = 35$
9	$\frac{297}{9} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_9)$	$\gamma_{dR}(\Gamma_9) \leq 68$	$\gamma_{dR}(\Gamma_9) = 51$
10	$\frac{488}{10} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_{10})$	$\gamma_{dR}(\Gamma_{10}) \leq 100$	$\gamma_{dR}(\Gamma_{10}) = 75$
11	$\frac{817}{11} \leq \gamma_{dR}(\Gamma_{11})$		$108 \leq \gamma_{dR}(\Gamma_{11}) \leq 117$
12			$157 \leq \gamma_{dR}(\Gamma_{12}) \leq 178$
13			$231 \leq \gamma_{dR}(\Gamma_{13}) \leq 276$

Çizelge 4.29 da $2 \leq n \leq 10$ için elde edilen $\gamma_{dR}(\Gamma_n)$ değerlerinin bilinen en iyi alt ve üst sınır değerleri arasında yer aldığı açıktır. **DRDP-1** optimizasyon problemi yardımıyla bilgisayar ortamında 1 saatlik sürede $11 \leq n \leq 13$ boyutları için çift Roman baskınlık sayıları için alt ve üst sınır değerleri elde edildiği gösterilmektedir.





5. SONUÇ

Biz bu çalışmada öncelikle bağlantı ağları modellemesi için hiperküplere ek alternatif olarak sunulan Fibonacci küplerinin dikkat çeken özelliklerini inceledik. İlk olarak n - boyutlu Fibonacci küplerinin tanımını, temel ayrışımını ve bazı önemli çizge teorik özelliklerini ele aldık. Daha sonra literatürde Fibonacci küpleriyle ilgili bilinen sayma sonuçlarına değinip ve bu sonuçları örneklendirip n - boyutlu Fibonacci küpünün yapısını daha iyi anlamaya çalıştık.

Ardından temel motivasyonumuz olan kaynağını satranç tahtasındaki bir vezirin hareketinden alan baskınlık probleminin Γ_n Fibonacci küplerinde nasıl ele alındığını inceledik. Bu çalışmalar sonucunda literatürde Fibonacci küpleri için baskınlık, 2 - kutulama, bağımsız baskınlık, toplam baskınlık, bağlı baskınlık, eşli baskınlık ve işaretli baskınlık sayılarının çalışıldığını gördük. Böylelikle, bu baskınlık tipleri için Γ_n küpünde bilinen değerlerini, alt ve üst sınırlara dair yapılan çalışmaları ve optimizasyon problemlerini inceledik. Verilen tam sayı lineer programlamalarda ele alınan kısıtların ne ifade etmeye çalıştığını anladık.

Çizge teorisinde Roma İmparatorluğu'nu korumak için geliştirilen, savaş stratejisi olarak ele alınan Roman baskınlık problemi için herhangi bir G çizgesi ve bazı n - boyutlu P_n ve C_n çizgeleriyle ilgili sayısal sonuçların var olduğunu fakat bu problemin daha önce n - boyutlu Fibonacci küpleri için çalışılmadığını fark ettik. Çalışmamızda Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık tipi değişmezlerini Γ_n Fibonacci küpleri için ele aldık. Öncelikle $n \leq 6$ boyutları için Fibonacci küplerini el ile çizerek bu küplerin Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık sayılarını bulduk. Fakat $n \geq 6$ boyutları için Γ_n küpünde köşe ve kenar sayısının artması sebebiyle bu boyutlara ait sayısal verilere ulaşamadık. Bu sonuçlara ulaşmak için bu türlerle ilgili literatürde var olan optimizasyon problemlerini inceledik.

Biz sırasıyla Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık türleri için BVV , WRDP için geliştirilmiş tam sayı lineer programlama ve **DRDP-1** formülasyonlarını ele aldık. Bu optimizasyon problemlerini bilgisayar ortamında bir saat boyunca Gurobi Optimizerini kullanan Ubuntu 20.04 LTS Linux işletim sistemini çalıştıran 32GB RAM'li Intel Core i7-10875H CPU @ 2.30 GHz ye uyguladık. Öncelikle $n \leq 6$ için Γ_n küplerinde elde ettiğimiz sayıların doğruluğundan emin olduk. Ardından BVV formülasyonu yardımıyla $n = 7, 8, 9$ ve 10 boyutları için Fibonacci küplerinin Roman baskınlık sayılarına, $n = 11$ için alt ve üst sınır değerlerinin geliştirilmiş sonuçlarına ve $n = 12$ ve 13 boyutları için alt ve üst sınır değerlerine ulaştık. Elde ettiğimiz kesin değerlerin $n \leq 10$ boyutu için literatürde bilinen en iyi alt ve üst sınır değerleri arasında kaldığını gördük. WRDP için geliştirilmiş formülasyon ise bilgisayar ortamında bir saat çalıştırıldığında $n = 7$ ve $n = 8$ boyutları için zayıf Roman baskınlık sayısı ile ilgili kesin değerlere, $n = 9, 10$ ve 11 için ise literatürde zayıf Roman baskınlık sayısına dair bilinen en iyi alt ve üst sınırları geliştiren ve $12 \leq n \leq 13$ boyutları için ise bu baskınlık tipine dair alt ve üst sınırlar ortaya koyan değerleri elde etmemizi sağlamıştır. Son olarak Fibonacci küplerinin çift Roman baskınlık sayılarını elde etmek amacıyla bilgisayar ortamında bir saat çalıştırdığımız **DRDP-1** formülasyonu ile $n = 7, 8, 9$ ve 10 boyutları için literatürde bilinen alt ve üst sınır değerleri arasında kalan kesin değerler elde ettik. $11 \leq n \leq 13$ boyutları için ise

Fibonacci küplerinin çift Roman baskınlık sayılarının alt ve üst sınır değerlerine ulaştık.

Gelecek çalışmalarımızda Γ_n Fibonacci küplerinde Roman, zayıf Roman ve çift Roman baskınlık tipi değişmezleri için Fibonacci küplerinin çizge teorik özelliklerini kullanarak daha büyük n boyutları için teorik sonuçlar bulmaya gayret edeceğiz. $n \geq 13$ boyutları için optimizasyon kodlarını daha makul sürelerde çalıştırarak daha iyi sayısal veriler elde etmeye özen göstereceğiz.



KAYNAKLAR

- H. A. Ahangar, M. Chellali, and S. M. Sheikholeslami.** (2017). On the double Roman domination in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 232, 1-7.
- Y. Alizadeh, E. Deutsch, and S. Klavžar.** (2020). On the Irregularity of pi-permutation graphs, Fibonacci cubes, and trees. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43, 4443-4456.
- A. R. Ashrafi, J. Azarija, A. Babai, K. Fathalikhani, and S. Klavžar.** (2016). The (non-)existence of perfect codes in Fibonacci cubes. *Information Processing Letters*, 116, 387-390.
- J. Azarija, S. Klavžar, J. Lee, and Y. Rho.** (2015). Connectivity of Fibonacci cubes, Lucas cubes and generalized cubes. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 17(1), 79-88.
- J. Azarija, S. Klavžar, Y. Rho, and S. Sim.** (2018). On domination-type invariants of Fibonacci cubes and hypercubes. *Ars Mathematica Contemporanea*, 14, 387-395.
- R. A. Beeler, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi.** (2016). Double Roman domination. *Discrete Applied Mathematics*, 211, 23-29.
- B. Bresar, S. Klavžar, and S. Skrekovski.** (2003). The cube polynomial and its derivatives: the case of median graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 10.
- Q. Cai, N. Fan, Y. Shi, and S. Yao.** (2019). Integer linear programming formulations for double roman domination problem. *Optimization Methods and Software*.
- A. Castro and M. Mollard.** (2012). The eccentricity sequences of Fibonacci and Lucas cubes. *Discrete Mathematics*, 312, 1025-1037.
- A. Castro, S. Klavžar, M. Mollard and Y. Rho.** (2011). On the domination number and 2-packing number of Fibonacci cubes and Lucas cubes. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2655-2660.
- E. J. Cockayne, R. M. Dawes and S. T. Hedetniemi.** (1980). Total domination in graphs. *Networks*, 10, 211-219.
- E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi.** (2004). Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 278, 11-22.
- B. Cong, S. Zheng, and S. Sharma.** (1993). On simulations of linear arrays, rings and 2d meshes on fibonacci cube networks. *In Proceedings of the 7th International Parallel Processing Symposium*, 747-751.

- J. E. Dunbar, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning and P. J. Slater.** (1995). Signed domination in graphs. *Combinatorics, Graph Theory, Applications, 1*, 311-322.
- Ö. Egecioğlu, E. Saygi, and Z. Saygi.** (2020). The irregularity polynomials of Fibonacci and Lucas cubes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 44(2)*.
- J. A. Ellis-Monaghan, D. A. Pike, and Y. Zou.** (2006). Decycling of Fibonacci cubes. *The Australasian Journal of Combinatorics, 35*, 31-40.
- S. Gravier, M. Mollard, S. Spacapan, and S. S. Zemljic.** (2015). On disjoint hypercubes in Fibonacci cubes. *Discrete Applied Mathematics, 190-191*, 50-55.
- T. W. Haynes and P. J. Slater.** (1998). Paired-domination in graphs. *John Wiley and Sons, Inc. Networks, 32*, 199-206.
- M. A. Henning and S. T. Hedetniemi.** (2003). Defending the Roman Empire a new strategy. *Discrete Mathematics, 266*, 239-251.
- W.-J. Hsu.** (1993). Fibonacci cubes - a new interconnection technology. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 4(1)*, 3-12.
- A. Ilic and M. Milosevic.** (2017). The parameters of Fibonacci and Lucas cubes. *Ars Mathematica Contemporanea, 12*, 25-29.
- M. Ivanovic.** (2016). Improved mixed integer linear programming formulations for Roman domination problem. *Publications De L'institut Mathématique, 51-58*.
- M. Ivanovic.** (2018). Improved integer linear programming formulation for weak Roman domination problem. *Soft Computing, 22*, 6583-6593.
- S. Klavžar and M. Mollard.** (2014). Asymptotic properties of Fibonacci cubes and Lucas cubes. *Annals of Combinatorics, 18*, 447-457.
- S. Klavžar and M. Mollard.** (2012). Cube polynomial of Fibonacci and Lucas cubes. *Acta Applicandae Mathematicae, 117(1)*.
- S. Klavžar.** (2013) Structure of Fibonacci cubes: a survey. *Journal of Combinatorial Optimization, 25*, 505-522.
- S. Klavžar, M. Mollard, and M. Petkovsek.** (2011). The degree sequence of Fibonacci and Lucas cubes. *Discrete Mathematics, 311*, 1310-1322.
- S. Klavžar and M. Mollard.** (2011). Wiener index and hosoya polynomial of fibonacci and lucas cubes. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00624188v2>.

- A. Meir and J. W. Moon.** (1975). Relations between packing and covering numbers of a tree. *Pacific Journal of Mathematics*, 61, 225 - 233.
- B. P. Mobaraky and S. M. Sheikholeslami.** (2008). Bounds on Roman domination numbers of graphs. *Matematiki Vesnik*, 60, 247-253.
- M. Mollard.** (2012). Maximal hypercubes in Fibonacci and Lucas cubes. *Discrete Applied Mathematics*, 160, 2479-2483.
- E. Munarini, C. Perelli Cippo, and N. Zagaglia Salvi.** (2001). On the Lucas cubes. *The Fibonacci Quarterly*, 39(1), 12-21.
- E. Munarini and N. Zagaglia Salvi.** (2002). Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes. *Discrete Mathematics*, 255 (1-3), 317-324.
- D. A. Pike and Y. Zou.** (2009). The domination number of Fibonacci cubes. *manuscript*.
- N. Z. Salvi.** (1996). On the existence of cycles of every even length on generalized Fibonacci cubes. *Mathematiche (Catania)*, 241-251.
- E. Sampathkumar and H. B. Walikar.** (1979). The connected domination number of a graph. *Journal of Mathematical Physics*, 13, 607-613.
- E. Saygi and Ö. Egecioğlu.** (2016). Counting disjoint hypercubes in Fibonacci cubes. *Discrete Applied Mathematics*, 215, 231-237.
- E. Saygi.** (2019). On the domination number and the total domination number of Fibonacci cubes. *Ars Mathematica Contemporanea*, 16, 245-255.
- E. Saygi.** (2017). Upper bounds on the domination and total domination number of Fibonacci cubes. *Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences*, 21, 782-785.
- H.- M. Xing, X. Chen, and X.- G. Chen.** (2006). A note on Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 306, 3338-3340.
- J. Yue, M. Wei, M. Li, and G. Liu.** (2018). On the double Roman domination of graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 338, 669-675.
- H. Zhang, L. Ou, and H. Yao.** (2009). Fibonacci-like cubes as z-transformation graphs. *Discrete Mathematics*, 309(6), 1284-1293.



EKLER

EK 1: Türkçe - İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü



EK 1: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

Türkçe terim	İngilizce Terim
Asal çizge	Prime graph
Ayırma kümesi	Seperating set
Bağımsızlık sayısı	Independence number
Bağlı	Connected
Çap	Diameter
Çift Roman baskınlık sayısı	Double Roman domination number
Dışmerkezlilik	Eccentricity
Düzenli	Regular
Düzensizlik	Irregularity
Eşli baskınlık sayısı	Paired domination number
Eş zamanlı olmayan	Asynchronous
Fibonacci küp	Fibonacci cube
Hamilton yolu	Hamiltonian path
Hiperküp	Hypercube
İdeal amaç fonksiyonu	Optimal objective function
2 - kutulama	2 - packing
İşaretili baskınlık sayısı	Signed domination number
Kartezyen çarpım	Cartesian product
Kenar kesimi	Edge cut
Köprü	Bridge
Köşe kesimi	Vertex cut
Merkez	Center
Mükemmel eşleşme	Perfect matching
Ortalama dışmerkezlilik	Average eccentricity

Türkçe terim**İngilizce Terim**

Paket

Packet

Tam çizge

Complete graph

Toplam baskınlık sayısı

Total domination number

Uzaklık

Distance

Yarıçap

Radius

Yukarı - Aşağı derece polinomları

Up - Down degree polynomials

Zayıf Roman baskınlık sayısı

Weak Roman domination number

