TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POLİNOM OPTİMİZASYONU İLE BİR NONLİNEER DİNAMİK SİSTEM SINIFI İÇİN NONLİNEER GÖZLEYİCİ TASARIMI

DOKTORA TEZİ

Artun SEL

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU

NİSAN 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Artun SEL

ÖZET

Doktora Tezi

POLİNOM OPTİMİZASYONU İLE BİR NONLİNEER GÖZLEYİCİ TASARIMI

Artun SEL

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU

Tarih: Nisan 2023

Bu tezde, durum tahmin problemleri için Kareler Toplamı (SOS), Lineer Matriks Eşitsizlikler (LMI) ve Yarı Kesin Programlama (SDP) araçları kullanılarak polinom tipi terimlere sahip doğrusal olmayan dinamik sistemler için doğrusal olmayan gözlemci tasarım problemi incelenmiştir. İlk olarak, kararlılık analizi problemleri bu çalışmada sıklıkla kullanılan optimizasyon bağlamında ele alınmıştır. Bir Lyapunov fonksiyonu, analiz problemini LMI terimlerini, lineer eşitliklerini içeren ve MOSEK, PENLAB ve SEDUMI gibi koni çözücülerle çözülebilen bir optimizasyon problemi olarak formüle etmeye uygun bir şekilde parametreleştirilir. Mevcut araçlar, optimizasyon problemini bir koni çözücü tarafından çözülebilecek bir biçimde yapılandırmak için kullanılır. Bu formdaki problem, eşitsizliklerin dışbükeyliği ve lineer eşitlik kısıtlamaları nedeniyle bir dışbükey optimizasyon problemi olduğundan, bu problem güvenilir bir şekilde çözülebilir. Analiz problemini bir optimizasyon problemi olarak ifade etmek için kullanılan araçlar ile, aynı teknikler, girdi-durum kararlılığı (ISS) analiz problemi ifadesine uygulanır. ISS-Lyapunov fonksiyonuna uygulanan kısıtlamalar kullanılarak, bu analiz problemi de asimptotik kararlılık problemlerine benzer bir şekilde formüle edilebilir. ISS analiz problemi, gözlemcinin bir ISS-Lyapunov işlevine dayatılan kısıtlamalara benzer kısıtlamaları karşılaması gerektiğinden, gözlemci sentez problemi ile ISS analiz problemi arasında bir bağlantı olduğu için, bu çalışmayla ilgilidir. Gözlemci sentez problemi, bu yeni problemdeki bozucu sinyalin, durum tahmini terimleri olduğu, bozucu bastırımı isterleri ile doğrusal olmayan bir kontrol tasarım problemi olarak doğrudan formüle edilebilir. Bunu kullanarak, problem, çift doğrusal terimlere sahip bir optimizasyon problemi olarak ifade edilebilir. Bu optimizasyon probleminde bulunan yapı nedeniyle, optimizasyon problemi algoritmaları aracılığıyla türev alma kullanılarak, doğrusal olmayan bir gözlemcinin parametreleri optimize edilebilir. Bu işlemin ifade edilmesi ve uygulanması sistematiktir. Çalışmanın sonuçları verilmiş ve dışbükey optimizasyon algoritmaları kullanılarak kararlılık sertifikaları oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Optimizasyon, Kontrol sentezi, Gözlemci sentezi, Kararlılık analizi, Konveks optimizasyon.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

NONLINEAR OBSERVER DESIGN FOR A CLASS OF NONLINEAR

DYNAMICAL SYSTEMS USING POLYNOMIAL OPTIMIZATION

Artun SEL

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Electrical and Electronics Engineering Science Programme

Supervisor: Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU

Date: April 2023

In this thesis, nonlinear observer design problem is examined for nonlinear dynamical systems having polynomial type terms using Sum Of Squares (SOS), Linear Matrix Inequalities (LMI) and Semidefinite programming (SDP) tools for state estimation problems. First, the stabiliy analysis problems are discussed in the context of optimization that is frequently in this study. A Lyapunov function is parameterized in a way that is suitable for formulating the problem of analysis as a problem of an optimization problem that contains LMI terms, affine equalities and can be solved by cone solvers such as MOSEK, PENLAB and SEDUMI. The available tools is utilized to structure the optimization problem into a form that can be solved by a cone solver. Since the problem in this form is a convex optimization problem due to the convexity of the inequalities and the affine equality constraints, this problem can be solved reliably. Using the tools that are used to construct the analysis problem as an optimization problem, the same techniques are applied to the problem of input-to-state stabiliy (ISS) analysis problem. Using the constraints that are imposed on the ISS-Lyapunov function, this analysis problem can also be formulated in a way that is similar to asymptotical stabiliy problems. ISS analysis problem is pertinent to this

study in that there is a connection between observer synthesis problem and ISS analysis problem since the observer needs to satisfy constraints that are similar to the constraints imposed on an ISS-Lyapunov function. The observer synthesis problem can be directly formulated as a nonlinear control design problem with disturbance rejection requirements in that the disturbance in that new problem is state estimate terms. Using this, the problem can be expressed as an optimization problem having bilinear terms. Due to the structure present in this optimization problem, using differentiation through optimization problem algorithms, one can optimize the parameters of a nonlinear observer. This process is easy to express and straightforward to implement. The results of the study is given and stabiliy certificates are constructed using convex optimization algorithms.

Keywords: Optimization, Control synthesis, Observer synthesis, Stability analysis, Convex optimization.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana verdiği sonsuz emek için Prof. Dr. Coşku Kasnakoğlu'na tüm kalbimle teşekkür ederim. Umarım bundan sonraki hayatımda, kendisini gururlandırırım. Bu çalışmada ve bir bakıma hayatımda çok büyük etkisi olan, Prof. Dr. Erol Kurt hocama teşekkürü bir borç bilirim. Değerli üniversitemizin bölüm başkanı Prof. Dr. Tolga Girici hocama sonsuz minnettarım. Kendisi her zaman kitabın kapağına değil de içeriğine bakan bir insan ve eğitimci olarak bana çok büyük katkıda bulundu. Değerli katkılarından ve emeklerinden dolayı Dr. Öğr. Üyesi Ali Murat Demirtaş ve Prof. Dr. Ünver Kaynak hocalarıma çok borçluyum. Umarım bundan sonraki aşamalarda, özellikle Murat hocamın önerdiği konularda kendimi geliştirme fırsatı bulur, istenenin ötesinde bir seviyeye ulaşırım. Değerli araştırmacı Dr. Tolga Sönmez hocama özellikle kontrol konusundaki bana verdiği tavsiyelerden dolayı minnettarım. Beni kontrol ile tanıştıran ve her zaman daha ötesini hedeflemem gerektiğini aşılayan, Prof. Dr. İbrahim Alışkan hocama teşekkür ederim. Değerli mühendis arkadaşım Uygar Güneş'e yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Sinyal işleme ve optimizasyon konusunda bende çok emeği olan değerli bilim insanı Ozan Fırat Özgül'e çok teşekkür ederim. Değerli arkadaşım Dr. Ümit Coşkun'a bana ve kardeşime olan yardımlarından ötürü teşekkür ederim. Değerli arkadaşlarım ve bilim insanları Furkan Küçük, Mustafa Kaan Çetin, Burak ve Yasemin Güzelce 'ye bana verdikleri bilgiler ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Son ve önemlisi olarak, ailemin her bireyine sonsuz teşekkür ederim. Canım annem ve babam, Belgin Sel ve Dr. Halit Sel'e hep yanımda oldukları için teşekkür ederim. Canım abim, Dr. Görker Sel'e bana katkılarından dolayı teşekkür ederim. Canım kardeşim Bilgehan Sel'e açıklanamaz emeklerinden ötürü sonsuz teşekkür ederim. Üniversitemize ve değerli çalışanlarına verdikleri emekler ve sağladıkları imkanlardan dolayı sonsuz minnettarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ... **vii**
ABSTRACT ... **ix**
TEŞEKKÜR ... **xi**
İÇİNDEKİLER ... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ... **xvii**
ÇİZELGE LİSTESİ ... **xix**
KISALTMALAR ... **xxi**
SEMBOL LİSTESİ ... **xxiii**
1. GİRİŞ ... **1**
1.1 Problem Tanımı ... 3
1.2 Problemin Önemi ... 3
1.3 Tasarımdaki Problemler ... 4
1.4 Gözlemci Tasarımındaki Özel Durumlar ... 6
1.5 Çalışmanın Motivasyonu ve Katkılar ... 7
1.6 Tezin Organizasyonu ... 8
1.7 Literatür Araştırması ... 8
1.7.1 Takagi-Sugeno formülasyonu ... 8
1.7.2 Doğrusal sistemler için kontrol tabanlı gözlemci tasarımı ... 10
1.7.3 Optimal kontrol formülasyonu ... 11
1.7.4 EKF formülasyonu ... 12
1.7.5 UKF formülasyonu ... 13
1.7.6 PF formülasyonu ... 14
1.7.7 MM tahminci formülasyonu ... 15
1.7.8 Kazanç planlaması formülasyonu ... 16
1.7.9 MPC MHE formülasyonu ... 17
1.7.10 Adaptif kontrol formülasyonu ... 19
1.7.11 SMC SMO formülasyonu ... 19
1.7.12 Doğrusal gürbüz denetleyici formülasyonu ... 21
1.7.13 Erişilebilirlik analizi ve yörünge optimizasyonu formülasyonu ... 21
1.7.14 HGO formülasyonu ... 23
1.7.15 Diferansiyel düzlük formülasyonu ... 23
1.7.16 LTV formülasyonu ... 24
1.7.17 Lyapunov tabanlı tasarım formülasyonu ... 25
1.7.18 Pasif kontrol tabanlı formülasyon ... 26
1.7.19 Daralma tabanlı formülasyonu ... 27
1.7.20 Geri adım kontrolü formülasyonu ... 28
1.7.21 DFL tabanlı tasarım formülasyonu ... 29
2. KARARLILIK ANALİZİ VE İLGİLİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ **31**
2.1 Lyapunov Fonksiyonu ve Kararlılık ... 31
2.2 Lyapunov Fonksiyonları ve Ulaşılabilir Set $\mathcal{R}$ ... 32

2.3 Lineer Kararlılık 33
2.4 Lineer Kararlılık ve Belirsizlik İçeren Sistemler 34
2.5 Pasiflik 40
2.6 Lineer Sistem Kazancı 43
2.7 Sos Optimizasyon Problemi 44
2.7.1 Pozitif polinomlar 44
2.7.2 Pozitif matriksler 45
2.7.3 Polinom optimizasyonu 45
2.7.4 Kısıtlamalarla polinom optimizasyonu 46
2.7.5 Küme tanımlı matris pozitifliği 46
2.7.6 Kararlılık analizinde sos optimizasyonu 47
2.7.7 Otonom nonlineer sistemler için küresel kararlılık analizi 47
2.7.8 Otonom nonlineer sistemler için yerel kararlılık analizi 48
2.7.9 Tanımlı bir kümede kararlılık analizi 49
2.7.10 Yerel durum için sos optimizasyonu kullanılarak kararlılık analizi 50
3. PARAMETRİK BELİRSİZLİK VE KONTROL LYAPUNOV FONKSİYONLARI 53
3.1 Doğrusal Kararlılık ve Parametrik Belirsizlik 53
3.1.1 Lineer gürbüz kararlılık 54
3.1.2 Doğrusal ikinci dereceden kararlılık 54
3.1.3 Doğrusal kazanç ve zamanla değişmeyen belirsizlik 55
3.2 Parametrik Belirsizlik Varlığında Pasiflik 55
3.3 Parametrik Belirsizlik Varlığında Lineer Sistemin Kazancı 56
3.4 Daralma Teoremi 57
3.4.1 Otonom sistemler için kararlılık problemlerinde daralma teoremi 57
3.4.2 Belirsizlik içeren sistemler için kararlılık problemlerinde daralma teoremi 58
3.4.3 Nonlineer sistemlerde kararlılık marjini için daralma teoremi 58
3.4.4 Nonlineer otonom sistemlerde global kararlılık 59
3.4.5 Nonlineer otonom sistemlerde lokal kararlılık 60
3.4.6 Belirsizlik içerek nonlineer sistemlerde global kararlılık 60
3.4.7 Belirsizlik içeren nonlineer otonom sistemlerde lokal kararlılık 61
3.4.8 Belirsizlik içeren nonlineer sistemlerde lokal kararlılık problemi 61
3.4.9 Özel durumlar ve yapılar 62
3.4.10 Statik belirsizlik 63
4. ISS VE BOZUCU BASTIRIMI 65
4.1 ISS ve Kararlılık Marjin Kavramları 65
4.1.1 ISS koşulları 65
4.1.2 LTI sistemlerde ISS 67
4.2 Lyapunov Fonksiyonları Kullanarak Nonlineer Sistemler İçin ISS Problemi .. 67
4.3 Nonlineer Sistemlerde Lokal Lyapunov Fonksiyonları ile ISS Analizi 69
4.4 Kararlılık Analiz Problemini Çözmek İçin ISS 71
4.5 SGT Kavramı ile Kararlılık Analizi 71
4.6 Başka Kararlılık Çeşitleri 72
4.6.1 iISS 72
4.6.2 exp-ISS 73
4.7 IOS 73
4.8 OSS 74
4.9 IOSS 74
4.10 OIS 75

5. SOS OPTİMİZASYONU İLE KONTROL TASARIMI 77
5.1 LTI Tam Durum Geri Besleme Stabilizasyonu.. 77
5.2 LTI Tam Durum Geri Besleme Stabilizasyonu ve Bozucu Bastırımı............... 78
5.3 Karesel Kararlılık Kavramı ile LTI Kontrol Problemi 82
5.4 LTI Tam Durum Geri Besleme Stabilizasyonu ve İkinci Dereceden Kararlılık ile Bozucu Bastırımı 83
5.5 Nonlineer Sentez Problemi 84
5.6 Sentez Problemini Bölmek İçin Geri Adım Kontrol Metodu........................... 85
5.7 GAS İçin CLF Terimleri 86
5.8 DCP İfadesinin Türevini Alma 88
5.9 Nonlineer Sentez Problemi ve Parametre Optimizasyonu 89
5.10 Lokal Nonlineer Sentez Problemi ve Parametre Optimizasyonu 90
5.11 Sentez Problemindeki Özel Durumlar ve Yapılar... 93
6. ISS İLE GÖZLEYİCİ SENTEZ PROBLEMİ 95
6.1 Lineer Problemler İçin Kontrol Tabanlı Gözleyici Formülasyonu.................. 95
6.2 LTI Sistemler İçin Gözleyici Sentez Problemi 97
6.3 Bozucu Etkili LTI Sistemlerde Gözleyici Sentez Problemi 98
6.4 Belirsizlik İçeren LTI Sistemlerde Gözleyici Sentez Problemi 100
6.5 Nonlineer Sistemlerde Gözleyici Sentez Problemi 101
6.6 Nonlineer Sistemler İçin Lokal Gözleyici Sentez Problemi.......................... 103
6.7 Kontrol Sentez Problemi İçin ISS ve Parametre Optimizasyonu 105
6.8 Lokal Kontrol Sentez Problemi İçin ISS ve Parametre Optimizasyonu......... 106
6.9 Gözleyici Sentez Probleminde Özel Durumlar 107
7. DİNAMİK SİSTEMLER İÇİN UYGULAMALAR 109
7.1 Kararlılık Analizi 109
7.2 ISS Analizi.. 110
7.3 Kontrol Sentezi 111
7.4 Gözleyici Sentezi 112
8. SONUÇ.. 115
KAYNAKLAR... 117
ÖZGEÇMİŞ.. 121

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 5.1 : Gürbüz kontrol kapalı çevrim blok diyagramı.. 78
Şekil 5.2 : Kaskad yapılı nonlineer sistem 85
Şekil 5.3 : Kaskad yapılı nonlineer sistem ve kontrol... 86
Şekil 5.4 : Özel yapıya sahip genel nonlineer sistem.. 93
Şekil 6.1 : Lineer bir sistem için kontrol tabanlı gözleyici sistemi........................... 97
Şekil 6.2 : Bozucu içeren lineer bir sistem için kontrol tabanlı gözleyici sistemi 99
Şekil 7.1 : Sistem durumlarının sıfıra azalması 110
Şekil 7.2 : Tahmin hata terimlerinin azalması... 111
Şekil 7.3 : Sistem durum terimlerinin sıfıra azalması 112
Şekil 7.4 : Farklı noktalardaki sistem davranışı için durum tahmini 113
Şekil 7.5 : Farklı noktalardaki sistem davranışı için durum tahmini 113
Şekil 7.6 : Farklı noktalardaki sistem davranışı için tahmin hataları...................... 113

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Problem yapıları ve karşılık gelen optimizasyon problemleri 48

KISALTMALAR

CARE : Continuous Algebraic Riccati Equation
DARE : Dicrete Algebraic Riccati Equation
DCP : Disciplined Convex Programming
EKF : Extended Kalman Filter
LMI : Linear Matrix Inequality
SDP : Semi Definite Programming
UKF : Unscented Kalman Filter

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$< X >_s$	$X + X^T$
$\lambda_{max}(\cdot), \lambda_{min}(\cdot)$	En büyük-küçük eigenvalue ifadesi
$\sigma_{max}(\cdot), \sigma_{min}(\cdot)$	En büyük-küçük singularvalue ifadesi
$\Sigma(x)$	SOS polinom kümesi
$\mathcal{C}^p$	p-türevlenebilir fonksiyonlar kümesi

1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan sistemler, modern mekanik dinamik sistemlerin önemli bir bölümünü oluşturur. Robotik uygulamalardan endüstriyel kimyasal reaktör kontrolörlerine kadar, mühendislik sistemlerinin geliştirilmesinde ve prototiplenmesinde kullanılan önemli sistemlerin çoğu, doğrusal olmayan dinamik sistem türü olarak modellenebilir. Ek olarak, dinamik sistemlerin incelenmesi, optimizasyon araçları ve sayısal simülasyon platformlarındaki son gelişmeler ile daha sistematik bir hal almıştır [1]. Yıllar geçtikçe, bazı analiz ve kontrol tasarım araçları oluşturulmuştur ve bazıları çok yararlı olabilir. Ancak, bir takım problem gösteriminde birtakım varsayımlar gereklidir. Bu konudaki varsayımlar, belirli bir problem için problemin türü nedeniyle, ciddi kısıtlamalar getirebilir [2]. Kararlılık problemi ve denetleyici tasarımı problemi çok önemli bir sorun olmuştur ve bu konu hakkındaki literatür zengindir ancak bunların pek çoğu bugün mevcut olan sayısal optimizasyon araçlarından yeterince faydalanmamaktadır. Ek olarak, mevcut yöntem türleri belirli bir problem türüne odaklanmıştır. Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin sahip olduğu problem türlerini ele almak için daha genel ve pratik bir prosedüre ihtiyaç vardır [3,4].

Diğer herhangi bir çalışma alanında olduğu gibi, ilk aşamada, bir tür sezgi, alan ve araştırmacılar için çok yararlı olabilir. Ayrıca sezgi, ilgili alanlarda çalışan diğer araştırmacılar için problemin açıklanmasını kolaylaştırabilir. Bununla birlikte, önemli ve zor problemler için, materyalin incelenmesini kolaylaştırmak amacı ile izlenecek bir kuralın olması önemlidir. Kontrol ve doğrusal olmayan sistemler teorisinde de benzer bir durum söz konusudur. Düşük boyutlu problemler için, bazı terimlere bakarak sistemin kararlılığını veya söz konusu sistemin neden kararlı olmadığını açıklayan bir argüman bulmak daha kolay olabilir. Bununla birlikte, bu tür bir problem, konunun anlaşılmasını geliştirmek için gereklidir, ancak aynı tür argümanlarla çözülemeyecek problemler için, tek başına sezgi her zaman yeterli değildir. Yerleşik bir kurallar dizisi, sistemlerin kararlılığını incelemek için önemlidir ve standart hesaplama araçları kullanılarak kontrol edilme biçimleri, güvenilir bir yönteme sahip olmak için gereklidir [5]. Problemlerin güçlükleri göz önünde bulundurulduğunda, güvenilir, anlaşılır ve kolay uygulanabilen yöntemlere sahip olmak büyük önem taşımaktadır. Örneğin, belirli bir kararlı sistem için ifade edilen bir kararlılık türünü kanıtlamak için Lyapunov işlevi kullanılır. Bu tür kararlılık global veya asimptotik olabilir ve uygulamaya bağlı olarak, kararlılığın karakteristiği sonuca varmak için önemli hale gelir [6]. Birçok uygulama için, endüstriyel gereksinimleri ve kısıtlamaları karşılayan bir sistem bulmak için, yerel kararlılık yeterli olabilir, ancak sistemler için özellikle sağlamlığın gerekli olduğu durumlarda, küresel kararlılık istenebilir [7]. Diğer durumlarda, asimptotik ve üstel kararlılık arasındaki fark ciddi bir önem arz edebilir. Örneğin, bazı performans odaklı sistemler için, asimptotik kararlılık her zaman istenmeyebilir ve özellikle söz konusu sistemi etkileyen sürekli bir bozulma sinyalinin olduğu durumlarda üstel kararlılık kabul edilebilir tek seçenek olabilir [8,9].

Kararlılık probleminde olduğu gibi, gereksinimlerin türü, tasarlanması gereken denetleyicilerin türünü de belirler. Örneğin, sağlamlıkla ilgili bir gereklilik, bozulma sinyaline karşı doğal bir duyarsızlığa sahip bir denetleyici gerektirebilir [10]. Problemin formülasyonunda dikkate alınabilecek bir tür bozucu sinyal de vardır. Örneğin, bozucu sinyali hakkında büyüklük kısıtlamaları gibi ek bilgiler varsa, bu tür bilgiler denetleyici algoritmasının tasarım sürecinde kullanılabilir [11]. Bazı durumlarda, doğrusal olmama veya bozulma faktörü şiddetli değilse, sistemin hata dinamiklerini dengelemek için bir tür güçlü doğrusal denetleyici yeterli olabilir. Bu senaryolarda gürbüz bir lineer kontrolör üretmenin bir faydası olması da önemlidir, çünkü bu konularla ilişkili yerleşik birçok araç ve literatür vardır. Doğrusal bir kontrol algoritmasının çalışmayabileceği durumlar için, doğrusal olmayan kontrolör tasarım araçları çok önemli hale gelir. Aslında, doğrusal olmayan araçlar, arzu edilen bazı çözümler sunabilir, çünkü sistemin içerdiği her doğrusal olmama durumu önemli bir zorluk oluşturabilecek bir şey değildir, bazı doğrusal olmayan sistemlerde, bir denetleyici tasarlamanın basit olabileceği bazı özelliklere sahiptir. Lineer olmayan sistemin, belirli özelliğinden yararlanılabilecek durumlar için pasiflik, disipatiflik ve bunların varyasyonları örnek olarak ifade edilebilir ve buna uygun bir kontrolör tasarlanabilir [12-15].

Denetleyici tasarım problemi, bazı durumlarda, doğrusal olmayan sistem dinamiklerine bağlı olarak, ele alınması gereken bir bozucu faktörün olduğu bir tür kontrolör tasarım problemi olarak yeniden formüle edilebileceği için önemlidir. Sisteme bağlı olarak, sistem hakkında önceden bilgi varsa, bu bozulma faktörü sınırlandırılabilir. Örneğin, belirli bir değerden büyük olmadığı bilinen bir bozulma faktörü varsa, bazı doğrusal olmayan kontrol tasarım prosedürleri bundan yararlanabilir. Ancak basit yöntemlerin önemli olduğunu ve tasarımı basitleştirmek için sistem dinamiklerinin özelliklerinden yararlanmanın faydalı olduğunu belirtmek önemlidir [16-20].

Kontrol probleminin önemli olmasının bir başka nedeni de birçok durumda, bir kontrolör ve bir gözlemci oluşturmak için kullanılan araç ve argüman türlerinin benzer olması ve çoğu durumda, gözlemci tasarım probleminin kontrol tasarım problemi ile ilgili olmasıdır.

1.1 Problem Tanımı

Bu çalışmanın odaklandığı problem, polinom tipi doğrusal olmayan sistemler için gözlemci tasarım problemidir. İlgilenilen sistemler, otonom veya girişi olan bir sistem olabilir. Ek olarak, durum vektörünün bir kısmı ölçülebilir ve bu bilgiye dayanarak, bu çalışmada tam durum vektörü yeniden yapılandırması düşünülür. Doğrusal olmayan ifadesi oldukça genel olmasına rağmen, bu çalışmanın odaklandığı doğrusal olmayan durum türü polinom türüdür ve bu oldukça genel olabilir. Çalışmanın temsil ettiği gözlemci tasarım yöntemi, sadece bazı durumlarda sorunu standart bir şekilde sunmayı mümkün kılan ve yararlanılabilecek sistemlerin belirli özelliklerine odaklanmak yerine doğrudan bir çözüm üretmeyi mümkün kılan optimizasyon araçlarından yararlanır [21].

1.2 Problemin Önemi

Çıkış sinyalinin mevcut olduğu durumlar için gözlemci problemleri gereklidir ve kontrol veya sistem izleme durumları için durum tahmini gereklidir. Örneğin, anahtarlama kontrol algoritmaları genellikle, kontrol sisteminin karşılık gelen bir kontrol yasasını uygulaması için önemli olan bir tahmin bloğu gerektirir. Kazanç programlama kontrol algoritmaları için, işlemden önce üretilen kazanç terimlerini güncellemek için durum bilgisi genellikle gereklidir [22].

Sistem izleme için gözlemci tasarımı da gereklidir. Örneğin karmaşık lineer olmayan sistemlerde, durum bilgisine bağlı olarak sistemin çalışma rejimi anlaşılabilir ve gerekli bilgiler çıkarılabilir. Titreşimle ilgili çalışmalar genellikle sistemin altında çalıştığı rejimi daha iyi anlamak için gözlemci sistemleri gerektirir [23].

1.3 Tasarımdaki Problemler

Doğrusal olmayan sistemler için gözlemci tasarımı sorunu, özellikle durum vektörünün ölçülebilir kısmı ile ölçülemeyen kısmı arasındaki ilişki doğrusal olmadığında zordur ve bu doğrusal olmama durumu yüksek derecededir.

Kaotik doğrusal olmayan dinamik sistemler için, söz konusu sinyallerin frekansına bağlı olarak kaotik davranış, küçük hata sinyallerinin büyüme potansiyeline sahip olması nedeniyle gözlemciye zorlayıcı bir etken oluşturabilir. Kaotik sistemlerin başlangıç koşulları özelliğine hassas bağımlılıklarının birçok tahmin problemini zorlaştırdığı bilinmektedir. Hava tahmini bu duruma böyle bir örnek olarak kabul edilebilir. Bununla birlikte, bazı durumlar vardır, tahmin problemi basit olmasa da durum tahmin hata dinamiklerinin büzülme özelliklerine sahip olduğu gösterilebildiğinde, diğer doğrusal olmayan problemlerden daha kolay olabilir. Bu gibi durumlarda, tahmin problemi kolaylaşır. Bu vakaların yaygın olmadığını belirtmek de önemlidir [24].

Yüksek boyutlu sistemler için, gözlemci problemleri de zorlayıcı olabilir çünkü hesaplama miktarı, sistemin tipine veya bir kontrol yasası veya bir gözlemci üretmek için gerekli olan hesaplama tipine bağlı olarak değişir.

Pürüzsüz olmayan dinamikler için, gözlemci tasarım problemi beklenenden daha zordur, ancak bu doğrusal olmamanın durum uzayının belirli bölgelerinde, birlikte çalışılması daha kolay olan başka bir tür doğrusal olmayan ile yaklaşık olabileceği bazı durumlar vardır. Ancak çoğunlukla, bu çalışma sistemin sahip olduğu nonlineerliğin düzgün olmadığı durumlara odaklanmaz.

Bilinmeyen parametrelerin parametrik belirsizliğine sahip problemlerde de bir gözlemci oluşturmak daha zordur. Söz konusu parametrenin büyüklük olarak üst sınır olduğunun bilinebildiği bazı durumlarda veya parametrenin bilinmediği ancak doğası gereği statik olduğunun bilindiği durumlarda, gözlemci tasarımı problemi genel durumlara göre daha kolay hale gelebilir. Parametrenin bilinmediği ve doğası gereği statik olmadığı bilinen durumlar için, doğası gereği zamanla değişen ve bilinmeyen terimlerin başka bir durum olarak kabul edildiği gözlemci problemini yeniden formüle etmek düşünülebilir. Unutulmamalıdır ki, bu tür yeniden formülleştirme, problem boyutunu büyütebilir ve eldeki problemi olduğundan daha zor hale getirebilir. Problemin lineer olmama derecesinin yüksek olmadığı bazı durumlarda, bu tür bir yeniden formülasyon, problemi daha kolay hale getirebilir. Ek olarak, gözlemci algoritmasını problemde bulunan bilinmeyen terimlerin varyasyonlarına karşı daha dayanıklı hale getirebilir. Bilinmeyen terimlerin sayısının da gözlemci tasarım problemini zorlaştırma potansiyeline sahip başka bir faktör olduğunu ifade etmek önemlidir [25].

Gözlemci tasarımı problemi için, bu problemin zor olabileceği başka bir durum, ölçülebilir durum sayısının veya ölçülebilir durum sayısı ile tahmin edilecek durum sayısı arasındaki rasyonun yüksek olduğu durumdur. Bu rasyonun yüksek olması her zaman gözlemleyici tasarım probleminin daha kolay olduğu bir durum yapmamak ile birlikte, sistem dinamiklerinin doğrusal olmama durumuna bağlı olarak problemi zorlaştırma potansiyeline sahip bir faktör olarak da not edilmelidir [26].

Tahmin performansında başlangıç koşullarının önemli rol oynadığı durumlarda, başlangıç koşullarına ilişkin bilginin güvenilirliğinin dikkate alınması da önemlidir. Bazı problemler için, başlangıç koşulu tahminlerinin doğruluğu ile kullanılan tahmin algoritmasının performansı arasında güçlü bir bağlantı vardır. Durumların değerlerinin belirli bir sette kalmasının çoğu zaman faydalı olduğu ve bu setlerin birbirine yakın olması gerekebileceği için, normalizasyon da bu bölümde belirtilebilir. Rastgele olan terimler arasındaki standart sapmanın problemin çözümünde önemli rol oynayabileceği rastgele sinyal işleme problemlerinde meydana gelebilecek bir tür normalleştirme işlemi olarak düşünülebilir [27].

Gözlemci tasarım probleminin daha zor olduğu durumlar için, zaman geciktirme işlemi ve bu işlemin etkisinin eldeki problemler ve kullanılacak araç türleri için karakterize edilmesi zor olduğundan, zaman geciktirme durumları önemli bir örnek olarak kabul edilebilir. Zaman gecikmeli problemler için kullanılan problemler, zamanla değişmeyen muadillerine göre önemli ölçüde farklılık gösterir. Ancak bazı durumlarda, sisteme bağlı olarak, zaman gecikmesine sahip kısmın, başka bir problem olarak kabul edilebileceğinin ve doğrusal olmayan zamanla değişmeyen gözlemleyici probleminin ve zaman gecikmesine sahip küçük boyutlu bir parçanın ortaya çıkabileceğinin bilinmesi önemlidir. Gecikmenin olduğu durumlarda, bu çalışmadaki araçlar doğrudan kullanılamadığından, bu tezin konusu içerisinde yer almamaktadırlar. [28].

1.4 Gözlemci Tasarımındaki Özel Durumlar

Doğrusal olmayan dinamik sistemler için gözlemci problemi genellikle sistematik değildir ve bunlar için kullanılan araçların türü, doğrusal sistemlere kıyasla karmaşıklık açısından önemli ölçüde farklılık gösterir. Bununla birlikte, sistem dinamiklerinin, doğrusal olmamasından yararlanılabilecek bazı özelliklere sahipse ve eldeki sorunu, bazı özel yapıya sahip bir soruna dönüştürme şansı varsa, gözlemci tasarımı probleminin daha kolay olabileceği bazı durumlar da vardır. Ek olarak bu durumlara gözlemci tasarım problemi, daha basit bir formda ifade edilebilir. Bazı durumlarda, özellikle problemin boyutunun düşük olduğu durumlarda, bu geçişi mümkün kılabilecek bazı araçlar olduğunu belirtmek önemlidir [29,30].

Tek dengeye sahip olma gibi önemli özelliklerinden dolayı, doğrusal sistemlerle çalışmanın daha kolay olduğu gerçeğinin önemini vurgulamak her zaman gereklidir. Ek olarak, bu gibi sistemler, yaygın olmasalar da, durum vektörünü tahmin etme probleminin doğrusal bir gözlemci tasarım problemi olarak ifade edilebileceği durumlar olduğunu göz önünde bulundurmak gereklidir. Bu, sistemin sahip olduğu doğrusal olmamanın özel yapısından yararlanılarak elde edilebilir. Ayrıca, bu durumların nadir olduğu, ancak söz konusu durumun varlığında, çalışılması daha kolay bir gözlemci oluşturmak için kullanılması gerektiği unutulmamalıdır [31].

Gözlemci tasarım problemi için, problemin boyutu üçten küçük veya eşit olduğunda ve durum değerlerinin bir bölgede sınırlı olduğu bilindiğinde, problem basit bir şekilde yeniden formüle edilebileceğine dikkat edilmelidir. Bu düşük boyutluluk özelliklerinden yararlanan ancak sorunu, durumların değer fonksiyonunu veren HJB denklemiyle çözülebilecek bir şekilde yeniden formüle eden bazı hesaplama araçları vardır. Ancak, bu bağlamda durum, geleneksel olarak sahip olduğundan farklı bir anlama sahiptir. Dinamik Programlamanın düşük boyutlu problemler için çalıştığı ve ürettiği çözümün, problemin çözümünden önce oluşturulan belirli metriklerde optimal olduğu bilinmektedir. Ancak, yüksek boyutlu durumlar için, hesaplama karmaşıklığının durum boyutuna göre üstel olarak artması ve sayısal yuvarlama hatalarının hızla artması nedeniyle sorunu daha da zorlaştırması nedeniyle, bu yöntem için beklendiği gibi çalışmayabilir. Sayısal problemler için ise, durum vektörünü problemi oluşturması daha kolay bir terime dönüştürmek ve ortaya çıkabilecek sayısal sorunları azaltmak gibi bu problemi hafifletebilecek bazı yöntemler vardır [32,35].

Doğrusal olmayan sistem sistemler için, gözlemci tasarım probleminde, doğru olduğu bilinen ve güvenilir bir modele sahip, genel durumlarda problemin ifade edilişi daha sistematik bir hal alır. Mevcut modelin güvenilir olduğu biliniyorsa, bu problem üzerinde çalışmayı da kolaylaştırır. Diğer bir konu da bazı durumlarda tasarımcının kullanabileceği modelin, gözlemci tasarım prosedürünü kolaylaştırmak için yararlanılabilecek bazı özelliklere sahip olmasıdır, ancak bu modelin güvenilir olmadığı durumlarda bu tür değişken değiştirme işlemleri, gerçek sistem için kararsız dinamikler ve durum tahmin hatası meydana getirebilir [36].

Dikkat edilmesi gereken bir diğer konu ise, sistemin mevcut olan simetrisidir. Sistemde simetri varsa, bu genellikle bir gözlemci oluşturmak için kullanılacak optimizasyonun hesaplama karmaşıklığını azaltır. Bununla birlikte, doğrusal olmayan sistemin sahip olduğu simetrilerin keşfini yapan bazı araçların varlığı da önemlidir. Ek olarak, bunu başarmak için kullanılabilecek bazı sayısal optimizasyon araçları vardır [37].

Gözlemci problemi için, sistemde mevcut olan gürültü de tahmin ediciye birtakım performans sınırları koyabilen önemli bir rol oynar. Bununla birlikte, büzülme sistemleri için bu sorun, genel durumlar kadar şiddetli olmayadabilir. Ayrıca, tasarımcının sorunu bir denetleyici tasarım sorunu haline getirecek şekilde yeniden formüle etmesine yardımcı olabilecek araçlar da vardır. Bu gibi durumlarda, belirtilen bozulma faktörünün etkisi en aza indirilir ve bu problemin özellikle kararlılığının önemli bir faktör olduğu operasyonlar için gereklidir [38].

1.5 Çalışmanın Motivasyonu ve Katkılar

Bu çalışmanın katkıları aşağıdaki gibi sıralanabilir.

1- Gözlemci tasarımı problemi, mevcut bozucu faktörün etkisinin en aza indirilmesine odaklanan bir kontrol tasarımı olarak yeniden formüle edilmiş ve böylece daha sistematik bir gözlemci tasarımı yolu sunulmuştur.

2- Polinom lineer olmayan sistemler için, gözlemci tasarımı problemi, gözlemcinin bulunması için mevcut sayısal optimizasyon araçlarının kullanıldığı bir şekilde formüle edilmiştir.
3- Oluşturulan gözlemci için, gürbüzlük analizi ele alınmış ve gözlemciyi oluşturmak için kullanılan benzer yöntemler verilen sistem ile ilgili performans analizi için de kullanılmıştır.
4- Bazı problemler için, bozucu gözlemci oluşturma yöntemleri, gözlemci tasarım probleminin formülasyonunu kolaylaştıran ISS çerçevesinde ele alınmıştır.

1.6 Tezin Organizasyonu

Bu tez şu şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 2'de kararlılık analizi ve buna karşılık gelen optimizasyon problemi verilmiş ve sunulan ana fikirleri göstermek için bazı durumlar temsil edilmiştir. Bölüm 3'te, daha sonra parametrik belirsizlikler söz konusu olduğunda, gözlemci performansının incelenmesi için kullanılan parametrik belirsizlik ve daralma teoremi açıklanmaktadır. Bölüm 4'te, kontrolör tasarımına ilişkin ISS ve bozucu bastırımı konuları sunulmaktadır. ISS konsepti, genel tasarım prosedürünü kolaylaştıran, gözlemci problemini bir kontrolör problemi olarak yeniden formüle etmek için verilen ana araçtır. 5. bölümde konveks optimizasyon problemi ile türev kullanılarak kontrolör tasarımı verilmiştir. Bu bölüm, bu çalışmada sunulan gözlemci tasarım probleminin ana fikirlerini temsil etmesi açısından özellikle önemlidir. Bölüm 6'da gözleyici tasarımı ve ISS sunulmakta olup, burada ISS kavramı ile gözlemci tasarımı problemi arasındaki ilişki daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere vurgulanmıştır. Bölüm 7'de, burada sunulan gözlemci tasarım prosedürünün bazı doğrusal olmayan problemler için gösterildiği birtakım uygulamalar sunulmaktadır. Bölüm 8'da, sonuçlar ve problemlerin bazı özellikleri ve tasarım prosedürü tartışılmaktadır.

1.7 Literatür Araştırması

1.7.1 Takagi-Sugeno formülasyonu

Takagi Sugeno veya T-S yaklaşımı, kontrol tasarım probleminin bir dizi doğrusal problem olarak yeniden formüle edilmesi için popüler bir yöntemdir. Bazı açılardan, kararlılık garantileri ile birlikte, özel bir doğrusallaştırılmış sistem denetimi türü olarak düşünülebilir. Yöntem, durum uzayı bölgesinin bölümlenmesi ve belirli bir bölgede aktif olacak şekilde özel bir denetleyicinin ayarlanması açısından kazanç programlamaya benzer. Her bölgede, modeli böyle bir yaklaşım için uygun olan doğrusal olmayan sistemle ilişkili bir doğrusal sistem vardır. Genel olarak yaklaşım, izlenebilirliği açısından arzu edilir, ancak sorunun formüle edilme şekli basit değildir ve sistem dinamiklerini doğrusallaştırmanın birkaç farklı yolu vardır. Bir doğrusallaştırma, Taylor yaklaşımına benzer ve T-S yöntemlerinde yaygın olan başka bir doğrusallaştırma tekniği, yarı doğrusallaştırmadır. Problem tipi, kullanılacak lineerleştirme tipini belirler, ancak her lineerleştirme yönteminin avantajları ve dezavantajları da vardır [39,40].

Kontrolörün sistemi etkileme şekli ve giriş sinyali yapısı, giriş sinyalini oluşturmak için bulanık kurallar kümesinin kullanılması ve her bir alt modelin kontrol sinyalinin oluşturulmasına katkıda bulunması bakımından geleneksel kontrol yöntemlerine kıyasla önemli ölçüde farklılık içerir.

Gözlemci tasarım problemi ile çıktı geri besleme problemi arasında bir bağlantı olduğundan, tasarımcının özellikle gözlemci tasarım problemi için yararlı olan bir çıktı geri besleme tipi kontrolör oluşturmasına izin veren bazı T-S kontrolör varyasyonları vardır. Sistemin sahip olduğu doğrusal olmama durumuna bağlı olarak, LQR gibi bazı doğrusal tasarım teknikleri kullanılarak durum uzayının her bölgesi için kontrolör tasarımı yapılabilir.

T-S denetleyici tasarım tekniği nispeten yenidir ve doğrusal olmayan kontrol ve gözlemci tasarım problemlerinin çoğu için farklı bir çerçeve sunar. Bu yöntemin bazı avantajları şunlardır: problemden bağımsız basit ve izlenebilir problem gösterimi, kapalı döngü kararlılık özelliklerinin analizi için güvenilir analiz yöntemleri, büyüklük olarak sınırlı olduğu bilinen belirsiz parametrelere sahip problemler için kullanışlıdır. Yöntemin ek avantajı hem kontrol hem de gözlemci tasarım problemi için, kullanılan araçların ve argümanların birçoğunun, problemin analizini kolaylaştıran doğrusal durumlar için kullanılanlara benzer olmasıdır.

Parametre ayarı, T-S reformülasyonunda mevcut sayısal optimizasyon araçları kullanılarak elde edildiğinden, bu çerçeveye sahip olmak genellikle avantajlıdır.

Özellikle küresel kontrolün veya gözlemcinin gerekli olmadığı, ancak sistemin yerel davranışına odaklanıldığı durumlar için buna benzer yöntemler kullanılabilir.

Bununla birlikte, T-S çerçevesinin bazı eksiklikleri de vardır. Bunların en önemlisi tutuculuktur. Problem doğası gereği problemin durum uzayının bölgelerinde doğrusallaştırılmasına odaklandığından, bazı problemler için ortaya çıkan kontrolör, tasarımcıyı durum uzayında sınırlı bir alanda çalışmaya zorlar ki bu, özellikle yüksek boyutlu problemler için genellikle arzu edilmez.

Yöntemde mevcut olan korunumluluğun yanı sıra, yarı doğrusallaştırma için uzman bilgisi de gereklidir. Bu problemin ifade ediliş şekli, sistem hakkında uzman bilgisi gerektirdiğinden ve problemi ifade etme seçimi konservatifliğin azaltılması için büyük bir önem taşımaktadır.

1.7.2 Doğrusal sistemler için kontrol tabanlı gözlemci tasarımı

Dinamik sistemlerde kontrol ve gözlemci problemleri sıklıkla birbirine bağlıdır. Çoğu durumda, söz konusu sistemlerde, durum tahmini hata dinamiklerini doğrusal olmayan hale getirebilecek doğrusal olmayan durumlar varsa ve hata terimlerinin ve tahmin edilen terimlerin birleşik doğası genellikle zor ve çoğu durumda pratik değilse, ikisi arasındaki benzerliklerin tespit edilmesi kolay değildir. Doğrusal problemlerde, hata dinamiklerini analitik olarak elde etmek sistematik bir şekilde yapılabilir. Doğrusal problemlerde hata dinamikleri çoğu zaman hata terimleri cinsinden temsil edilebilir ve bu durum, ayrılabilirlik problemini kolaylaştırabilir. Ek olarak, gözlemci probleminin bir kontrol problemine dönüşmesi bu durum nedeni ile mümkündür. Gözlemci probleminden türetilen kontrol probleminin lineer olması ve bu durum tasarımcının durum geri beslemesi h-inf kontrolü ve varsa mu-syn gibi iyi kurulmuş lineer ve gürbüz kontrol algoritmalarının uygulanmasına izin vermesi açısından önemlidir. Bu durumla ilgili avantajlar ve orijinal problemle ilgili bazı parametrik ve dinamik belirsizlikler de vardır. Bununla birlikte, orijinal sistem dinamiklerinin doğrusal olmadığında da bu dönüşümün mümkün olduğu bazı özel durumlar vardır ve bu durumlarda, hata dinamiklerinin otonom olma şansı vardır ve bazı durumlarda bu kararlılık, ilgili fırsatlar nedeniyle daha avantajlı olabilir. Yakınsama ve sağlamlık söz konusu olduğunda doğrusal olmayan çerçeve daha büyüktür [41].

Kontrol tabanlı gözlemci tasarım çerçevesi, gözlemci problemini bozan terimlerle kontrol problemine dönüştürmeye izin verir. Gözlemci probleminde, türetilmiş kontrol problemiyle ilişkili bozucu terimler genellikle tahmin edilen durum terimleri biçimindedir ve durum sayısı ile tahmin edilen durum sayısı birbirine eşit seçildiğinden, bu tür dönüşüm her zaman doğru olmayabilir. Bununla birlikte, problemde mevcut yapılar nedeniyle bu çerçevenin kullanılmasına izin verebilecek bazı doğrusal olmama durumları, bu çerçevenin uygun olmasına izin verir.

Kontrol tabanlı gözlemci tasarım çerçevesinin bir avantajı, gözlemci tasarımı problemini daha sistematik bir şekilde ele almasına izin vermesi ve iyi kurulmuş kontrol tasarımı yöntemlerinden faydalanmasına olanak sağlamasıdır. Gözlemci probleminden türetilen kontrol problemi genellikle doğrusal değildir ve bozucu bastırımı kontrol problemi gereklidir. Bu gereklilik problemi zorlaştırabilir ancak bu bozucunun farklı olduğunu, sistemin maruz kaldığı bozucu terimlerin bir dereceye kadar bilindiğini belirtmek gerekir ki bu gözlemci tasarımı sürecinde kullanılabilecek bir etmendir. Durum büyüklüklerinin problemle ilişkili durum uzayının bir bölgesinde sınırlandığının bilindiği durumlarda, bu bilgi çok yararlı olabilir.

1.7.3 Optimal kontrol formülasyonu

Dinamik sistemlerde, güvenilir ve verimli olduğu kanıtlanmış bazı yerleşik sayısal algoritmalar bulunduğundan, optimum kontrol genellikle doğrusal dinamikler ile ilişkilendirilir. Bununla birlikte, doğrusal olmayan problemler için, optimal bir kontrol algoritması oluşturmak için böyle iyi kurulmuş bir algoritma yoktur ve her bir özel problem için, kontrol problemi ayrı ayrı çözülebilir. Bununla birlikte, MPC kontrol yöntemi, optimal kontrol çerçevesi ile ilişkili gereksinimlere yaklaşabilir ve özellikle dışbükey gevşetme algoritmalarının kullanımının işe yaradığı kanıtlanmış problemler söz konusu olduğunda, algoritmanın verimliliği umut vericidir. Bununla birlikte, küçük boyutlu problemler için, optimal kontrol algoritmalarının izlenebilir olma şansı vardır. Üçten küçük ve eşit boyutlar için, genellikle optimal bir kontrol yasası oluşturmaya izin veren dinamik programlama algoritmaları için uygun bir çerçevede temsil edilebilir [42].

Gözlemci problemi için ise bu çerçevenin gözlemci tasarımına uygun olması için gerekli bazı uyarlamalar vardır. MHE olarak bilinen MPC ifadesinin gözlemci eşdeğer sürümünün oldukça etkili çalıştığı bazı durumlar vardır, ancak optimalliğe ihtiyaç duyulan durumların problemin doğrudan dinamik programlama formülasyonunu gerektirebileceğine dikkat edilmelidir. Gözlemci problemini bu algoritmalara uygun bir şekilde temsil eden bazı yöntemler vardır. Özellikle gereksinimleri karşılayan sistemler için bu algoritmaların kullanılması için verimli zeminlerdir.

Bununla birlikte, daha yüksek boyutlar için, bu tür algoritmaları uygulamak neredeyse imkansızdır, ancak probleme uygulanan başka bir kısıtlamanın, orijinal doğrusal olmayan dinamik sistemle ilişkili durum uzayında bir bölgede sınırlanacak durumlar olduğuna dikkat edilmelidir. Sayısal yuvarlama hataları, problem için karasızlık problemini ortaya çıkarabilir. Bu durum, ilgilenilen durum-uzay bölgesinin büyüklüğü ile doğrudan bağlantılıdır. Sayısal sorunları azaltan bu sorunun üstesinden gelmek için bazı yöntemler de vardır.

1.7.4 EKF formülasyonu

Kalman Filtresi, durum tahmini için köklü bir algoritmadır ve dinamik sistemler teorisindeki gözlemci tasarım problemine uygulanabilir. Yöntemin arkasındaki genel fikir, sistemle ilgili ölçümleri ve sistemin davranışını tahmin etmek için kullanılan model tarafından üretilen tahminleri birleştirerek dinamik bir sistemin durumunu tahmin etmektir. Metot için doğrusallık ve Gauss gürültüsü varsayımları, genellikle bu problemin uygulanmasını kolaylaştırır ve durum tahmin problemi için verimli algoritmaların kullanılmasına izin verir. Bu yöntemlerin, doğrusal olmayan sistem dinamikleri için durum tahmini probleminde algoritmanın kullanılmasına izin veren zamana göre değişen varyasyonları vardır. Doğrusal olmayan sistemlerin durumlarını tahmin etmek için kullanılan Kalman filtre algoritmalarının sayısal kararlılıklarıyla ilgili zorluklar vardır, çünkü sorunla ilişkili doğrusal olmama, hata dinamiklerini kararsız hale getirebilir ve bu, algoritmayı belirli sistem türleri için güvenilir olmaktan çıkarabilir [43].

Durum tahmin hata dinamiklerinin kararlılığının garanti edilebildiği problemlerde, yöntemin uygulanması daha basit olduğundan ve yöntemle ilişkili sayısal araçlar iyi kurulmuş durumdadır. Bu problemler, EKF gözlemci uygulamaları için iyi bir zemin oluşturabilir. Bununla birlikte, kararlılık sorunları için, bu sorunu aşmak amacı ile kullanılabilecek bazı teknikler de vardır. Bu problem ile ilgili olarak, bir yaklaşım, durum hatası kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olduğundan emin olmaktır ve bu, her iterasyonda bir terim ekleyerek veya bu değişkeni pozitif tanımlı matris olarak değiştirmek için tekil değer ayrıştırma yöntemini kullanarak elde edilebilir. Bu yöntemler iyi çalışır, ancak durum hatası kovaryans matrisinin tahmin doğruluğu hakkında bazı ipuçları verebileceği Kalman Filtresinden farklı olarak, doğrusal olmama bu dönüşümü önemsiz kıldığından, tahmin hatası EKF ifadesinde her zaman geçerli olmayan bir durumdur. Kovaryans matrisi doğrusal tahmin problemlerinde kullanılan Kalman Filtresi kadar güvenilir doğruluk tahmininde kullanılamaz.

1.7.5 UKF formülasyonu

EKF algoritması, durum dinamikleri doğrusal olmayan problemler için bir gözleyici türüdür. Ancak doğrusal olmamanın her zaman adımında doğrusal bir fonksiyon tarafından yaklaşık olarak tahmin edildiği varsayılabilir ve bu standart Kalman Filtresi algoritmasında avantajlıdır, durum hata matrisini güncellemek için kullanılabilir. Her zaman adımında güncellenecektir. Bununla birlikte, sayısal kararlılık sorunları için, bu güncelleme işlemine biraz dikkat edilmelidir, çünkü doğrusal olmama durum hatası kovaryans matrisinin bazı iterasyonlarda pozitif olmamasını mümkün kılar. Doğrusal yaklaşımın uygun olmadığı durumlar için, durum hatası kovaryans matrisinin güncellenmesi için bazı Taylor yaklaşımlarının kullanılmasını gerektirmeyen Kalman Filtresinin başka bir varyasyonu UKF olarak bilinir [44].

Bu varyasyonda algoritma, sayısal sistem tanımlama benzeri yöntemler kullanarak, hata kovaryans matrisini tahmin etmeye çalışır. Durum tahmin değeri kullanılarak yapılan her iterasyonda, durum tahmin değerlerine yakın belirli sayıda nokta kullanılarak durum hatası kovaryans terimi tahmin edilir, sitem durum denklemlerine eklenir ve çıkış terimleri durum hatası kovaryans matrisini oluşturmak için kullanılır. Bu durum, devam eden iterasyonda kullanılacaktır. Bu tür bir yöntem, özellikle doğrusal olmama durumlarının bir Taylor yaklaşımı aracılığıyla doğru bir şekilde tahmin edilemediği ve doğrusal olmama durumlarının Monte Carlo benzeri yöntemin doğru olamayacağı kadar ciddi olmadığı doğrusal olmayan sistemler için kullanışlıdır. Durum hatası kovaryans matrisini oluşturmak için kullanılan noktalar, sigma noktaları olarak bilinir ve durum tahmin teriminin üç sigma komşuluğundaki değerler hesaba katılarak her iterasyonda sistematik olarak üretilir. Sigma terimleri, önceki iterasyondaki durum hatası kovaryans matrisinin köşegen terimleri kullanılarak hesaplanır. Pek çok doğrusal olmama durumunda, bu yaklaşım EKF ifadesinden daha iyi performans gösterebilir ve bu algoritmanın belirli bir avantajı, durum hatası kovaryans matrisinin bu konuda daha doğru olduğu bilindiğinden, yöntemin doğruluğu hakkında yönteme bilgi verme şansının daha yüksek olmasıdır. Yöntemde bu bilgi, tahmin edicinin performansını doğru bir şekilde değerlendirmek için kullanılabilir. Bu, özellikle bu yöntemin bir tür arıza tespit yöntemi için ele alındığı problemlerde çok yararlı olabilecek bir durumdur. Durum hatası kovaryans terimlerini kullanarak, dedektör sisteminin, kullanılan UKF ifadesinin yapımında kullanılan modelle ilişkili doğruluğu değerlendirmesi mantıklıdır.

1.7.6 PF formülasyonu

Önceki yöntemlerde, sistemin doğrusal bir eşdeğerle benzetilebileceği ve bu yaklaşımın, parçacık filtresi olarak bilinen başka bir uygun yaklaşımla uygulanamadığı durumlar için bir dereceye kadar çalışabileceği varsayımı vardı. Parçacık filtresi, durum tahminiyle ilişkili olasılık yoğunluk fonksiyonunu tahmin etmek ve oluşturmak için her iterasyonda Monte Carlo yöntemlerini kullanır. Problem boyutunun daha küçük ve dörde eşit olduğu bazı durumlarda bu prosedür etkili bir şekilde kullanılabilir. Prosedürün, durum tahmin değişkeniyle ilişkili olasılık yoğunluk fonksiyonunun, problemle ilişkili durum uzayında bulunan sonlu sayılar kümesi kullanılarak iyi bir şekilde tahmin edilebileceğini varsaydığını belirtmek de önemlidir. Algoritmanın hesaplama karmaşıklığı yüksek olmasına rağmen, bu yöntemler doğrusal olmama problemini farklı ve sistematik bir şekilde ele alabilmektedir. Problemle ilişkili nonlineerliğin şiddetli olduğu ve boyutun yüksek olmadığı sistemler için bu yöntemler verimli bir şekilde çalışabilir. Prosedürün aynı zamanda, algoritmaya doğruluğunu bildirecek bir tür durum hatası kovaryans matrisi oluşturması da önemlidir ve bu değer ayrıca yöntemin kendisini veya dinamiklerin genel durumunu değerlendirmek için kullanılabilir. Bu prosedür, hata tespiti için kullanılan bir yöntemde uygulanabilir ve çoğu durumda, her iterasyondan güncellemeler ve düzeltme adımlarıyla ilişkili hesaplama karmaşıklığını azaltan yöntemler vardır [45].

Son zamanlarda bu algoritma, bazı robotik uygulamalarda konum tahmin probleminde kullanılan bir yöntem olan eş zamanlı konum belirleme ve haritalamada kullanılması nedeniyle büyük bir ilgi kazanmıştır. Bu lokalizasyon probleminde kullanılmak üzere parçacık süzgeci algoritmasına uygun bazı yapılar vardır ve bu uygulamalarda kullanılan sayısal araçların güvenilir ve verimli olduğu bilinmektedir. Parçacık filtresi algoritmasının kullanıldığı bir diğer uygulama da hedef takibidir. Radar ve nesne algılama ve izleme problemlerinde. Parçacık filtresi, problemle ilgili doğrusal olmayan durumların üstesinden gelme kabiliyeti nedeniyle bu tür alanlarda kullanılmaktadır. Ek olarak bu tür uygulamalar için güvenilir bir aday olmaya devam etmektedir. Sistemle ilişkili doğrusal olmamanın EKF tarafından ele alınamadığı veya doğası gereği doğrusal yaklaşımları kullanan varyasyonlarından herhangi birinin parçacık filtresinin kullanıldığı bazı havacılık ve uzay uygulamaları vardır.

1.7.7 MM tahminci formülasyonu

Doğrusal olmayan sistem dinamikleri durumu tahmininde kullanılan bir diğer önemli tahmin algoritması, çoklu model tahmincisi olarak bilinir. Çoklu model tahmincisi, sistemin davranışını sistematik bir şekilde modelleyebilen ve tahmin edebilen birçok modelin kullanılmasına izin veren bir çerçevedir. Birçok uygulama için bu algoritma, statik olduğu bilinen ve tasarımcının bildiği bir bölgede değer aldığı bilinen bazı parametrelerin olduğu durumlar için kullanılır. Özellikle havacılık uygulamaları için bu çerçeve kullanılır. Bununla birlikte, bu çerçeve için, parametre belirsizliği durumunun üstesinden gelmek için değil, problemde mevcut olan doğrusal olmamanın üstesinden gelmek için başka kullanım durumları da vardır [46].

Süreç ve ölçüm gürültüsü kovaryans terimlerinin önceden bilinmediği bir ortam için bir tahmin algoritması bildiren bazı çalışmalar vardır. Bu problem, her biri düşük veya yüksek kaliteli bir osilatöre sahip olan birden fazla SOP teriminin bulunduğu bir alanda bir UAV durumunu tahmin etmek için önemlidir. SOP terimleri, UAV için durumlarını tahmin etmeye yardımcı olabilir, ancak bunların kalitesinin bilinmediği durumlarda, sorun aynı anda durum ve kovaryans matrislerini tahmin etmeye dönüşür. Düşük boyutlu durum için Çoklu Model Tahmincisi uygun cevap olabilir. Bununla birlikte, pratik problemler için, ölçeklenebilirlik sorunu nedeniyle standart MM tahmincisi kullanılamaz. Örneğin, N-SOP terimleri için, her birinin M olasılığa sahip bir terimi, M^N tahmincilerinin oluşturulmasıyla sonuçlanacaktır.

İndirgenmiş sıralı MM uyarlamalı tahmin edici durumunda, M^N Mod Eşlemeli filtreler yerine yalnızca MN filtreler oluşturulur. Bununla birlikte, her filtre, durumu, süreci ve ölçüm gürültüsü kovaryans terimlerini tahmin etmek için tasarlanmıştır. Durum ve tahmin hatası kovaryans güncellemesi, standart MM tahmincisi ile aynıdır, ancak her bir filtre için tahmini gürültü kovaryans terim güncellemesi, mod olasılık terimleri kullanılarak yapılır. Mod olasılık terimleri için güncelleme denklemi, Kalman veya parçacık filtresinin türetilmesinde kullanılana benzer Bayes denklemiyle bağlantılı olarak bazı cebirsel manipülasyonlar kullanılarak elde edilir. Gürültü kovaryans tahmini güncellemesi için hesaplanan mod olasılıkları kullanılır. Ek olarak, gürültü kovaryans tahmini, azaltılmış dereceli MM tahmin edicisinin arkasındaki temel fikir olan boyut küçültmeye uygun bir temelde temsil edilir.

Çalışmalar ayrıca, tahmin edicinin hangi koşullar ve varsayımlar altında düzgün çalıştığını belirtmekle birlikte, özellikle deneysel ortamlar için hafif olduğu belirtilmektedir. Son olarak, bu konudaki makaleler, bu fikrin SOP ölçümleri kullanılarak UAV konum tahmini için uygulandığı ve EKF terimlerinin azaltılmış sıralı MM tahmincisinde Mod Eşlemeli filtreler olarak kullanıldığı deneyleri rapor etmektedir. Genel olarak, çalışmalarla ilişkili sonuçların, algoritmanın elde ettiği hesaplamalı azalma göz önüne alındığında, yeterince doğru olduğu gösterilir. Bunun gibi birçok MM uygulaması özellikle, mekanik sistemlerde mevcuttur.

1.7.8 Kazanç planlaması formülasyonu

Doğrusal olmayan sistemlerde kontrol ve gözlem yapmak için kullanılan bir diğer önemli algoritma, kazanç çizelgeleme yöntemleri olarak bilinir. Kazanç çizelgeleme yöntemleri adından da anlaşılacağı gibi temelde sistemi sadece denge noktası ve çevresinde değil, aynı zamanda sadece denge noktaları dikkate alınarak elde edilebilecek alandan daha geniş bir alanda ele alır. TS (Takagi Sugeno) yaklaşımında olduğu gibi problemle ilişkili durum uzayını bölmeye çalışır. Mevcut modelin güvenilir ve doğru olduğunun bilindiği durumlarda kazanç çizelgeleme etkili bir şekilde kullanılabilir. Doğrusal olmayan durumlar için, kazanç çizelgeleme tekniği temel olarak durum denklemlerinde doğrusal olmayan görünen durum değişkenlerini sabit parametreler olarak kabul eder. Dikkate alınacak durum terimleriyle ilişkilendirilen her değer için, karşılık gelen kontrol ve gözlemci algoritmaları oluşturulur ve bu durum terimlerinin değerleri değişirse, kazanç programlama algoritması sürekli olmayan bir şekilde değişir ve karşılık gelen kontrol ve gözlemci algoritmasını etkinleştirir. TS durumunda olduğu gibi, kazanç çizelgeleme yöntemleri izlenebilir ve ölçeklenebilir [47] bir kontrol ve gözlemci algoritması tasarlamaya izin verir.

Kazanç çizelgeleme algoritmalarının yapımında kullanılan sayısal araçlar genellikle LMI optimizasyon araçları biçiminde olduğundan, bu tür kontrol ve gözlemci problemlerini oluşturmak için sayısal olarak güvenilir ve verimli yöntemler kullanılabilir. Ayrıklaştırma tekniğine bağlı olarak, orijinal problemle ilişkili birçok alt problem olabilir ve eğer ayrıklaştırmanın iyi olması gerekiyorsa ve sayısal araçların güvenilir olduğu biliniyorsa, benzer operasyonda gerekli kontrol ve gözlemci araçları üretilebilir. Ancak doğası gereği kazanç çizelgeleme, sistemin durumu ve çıktı terimleri açısından analitik olarak ifade edilebilen bir kontrol yasasına sahip olunmasına izin verir ve bu açıdan, kazanç çizelgelemenin ayarlanması daha kolay olabilir çünkü bir tasarım sürecinde değiştirilebilen açık kontrol ve gözlemci yasası problemin zorluğu ile doğrudan ilişkilidir. Ek olarak, kazanç programlama kontrolü, tasarımcının daha iyi bir kararlılık sertifikasına sahip olmasına izin verebilir; burada MPC ifadesinde bu tür bir kararlılık garantisi, kontrol ve gözlemci algoritmaları açık döngü kontrolüne benzer olduğundan ve bu özellik bir kararlılık sertifikası oluşturmayı zorlaştırdığından kolay değildir. Bu, özellikle güvenliğin büyük bir öncelik olduğu uygulamalarda gereklidir.

1.7.9 MPC MHE formülasyonu

Doğrusal olmayan kontrol ve tahmin problemleri için, orijinal sorudaki doğrusal olmayan sistem dinamikleri ile ilişkili durumlar veya çıkış sinyalleri cinsinden analitik olarak ifade edilebilen kapalı bir kontrol ve tahmin yasalarına sahip olmak önemlidir. Bununla birlikte, tasarımcının elindeki modelin doğru olduğunun bilindiği ve sistemin mevcut dışbükey optimizasyon araçları kullanılarak yararlanılabilecek konvekslik özelliklerine sahip olabileceği durumlar için, geleneksel parametre ayarlama problemi bir probleme dönüşebilir. Giriş sinyallerinin belirli bir zaman aralığı için optimize edilmesi ve her yinelemede bu optimizasyon, genellikle ikinci dereceden bir biçimde seçilen objektif terimler dikkate alınarak çözülür. Özellikle lineer problemlerde, MPC ve onun tahmin edici versiyonu MHE, LQR veya gürbüz kontrol yasalarından önemli ölçüde daha iyi çalışabilir çünkü MPC, problemde lineer olmayan ve düzgün olmayan kontrol sinyalleri kullanma avantajına sahiptir. Algoritmanın bu özelliği, MPC ifadesinin geleneksel durum geri beslemeli lineer kontrolörlerden daha iyi performans göstermesini sağlar. Öte yandan, MPC ifadesinin optimizasyona bağlı doğası gereği, yöntem tarafından üretilecek giriş sinyalinin, sinyallerin bazı büyüklük ve zaman varyasyonlarının görülebileceği şekilde tasarlanabileceği formda kullanılabileceğine dikkat etmek de önemlidir. Örneğin, giriş sinyalinin yalnızca pozitif değerler aldığı ve büyüklüğün sınırlı olduğu bilinen problemler için bu tür bir algoritma oldukça uygun olabilir. Doğrusal denetleyici çerçevesindeki kontrol yasası tarafından üretilen giriş sinyalinin büyüklüğünü cezalandırmak için bazı yöntemler vardır, ancak MPC probleminin formülasyonuna gereksinimlerin uygulanması veya eklenmesi çok daha izlenebilir ve kullanımı avantajlıdır [48].

MPC ile ilgili diğer bir konu, sistem gereksinimlerine bağlı olarak tasarımcı tarafından seçilebilecek bazı sonlu ufukları dikkate aldığından, minimum fazlı olmayan sistemlerle başa çıkabilme yeteneğidir. Bu algoritma, sistemin gelecekteki davranışlarını tahmin etmek için uygun olduğundan, minimum olmayan faz sistemlerinde sıklıkla meydana gelen gecikmeyle ilgili problemlerin olumsuz etkisi, uygun bir zaman aralığı seçilerek hafifletilebilir.

MPC ifadesinin optimum kontrol yaklaşımı doğası da bu yöntemin yakınsama hızına ihtiyaç duyulan uygulamalarda kullanılmasının istendiği başka bir konudur. MPC, sistem durum ve çıkış sinyalleri açısından analitik olarak ifade edilebilen oldukça karmaşık doğrusal olmayan ve pürüzsüz olmayan kontrol yasaları aracılığıyla da elde edilebilen kontrol sinyalleri üretebildiğinden, bu yöntem genellikle yaklaşık bir optimal olarak kabul edilir.

Genel kontrol sinyali üretim problemi, bir tür dışbükey optimizasyon problemi olarak ifade edilebilirse, kontrol sinyallerinin üretilmesi için kullanılabilecek araçlar oldukça güçlü ve güvenilir olduğundan bu yöntem oldukça tercih edilir. Bununla birlikte, giriş sinyali üretimi ile ilgili optimizasyon problemlerinin, bazı yaklaşım ve gevşetme yöntemleri kullanılarak dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilmesi için bazı yöntemler de vardır.

MPC ifadesinin bir başka uygulama alanı da analiz amaçlıdır. Belirli bir lineer olmayan dinamik sistem için, giriş sinyallerinin büyüklük kısıtlamalarını görmek ve sistemle ilişkili doğal gecikme hakkında bir fikir edinmek için kullanılması gereken ufuk uzunluğunu belirlemek için bir MPC tasarlamak genellikle arzu edilen bir uygulamadır.

1.7.10 Adaptif kontrol formülasyonu

Boyutun bir dereceye kadar yönetilebilir olduğu ve bir kümede statik ve sınırlı olduğu bilinen bir parametrenin bulunduğu problemler için uyarlamalı kontrol yöntemleri yeterince işe yarayabilir. Özellikle lineer sistemler için, uyarlamalı kontrol kanunu üretimi için kullanılabilecek bazı yerleşik formülasyon teknikleri vardır. Bununla birlikte, düşük boyutlu doğrusal olmayan problemler için, bireysel doğrusal olmayan terimlere daha fazla dikkat gerektirdiğinden, uyarlanabilir bir denetleyici oluşturmak için böyle iyi kurulmuş algoritmalar mevcut değildir. Bununla birlikte, bu durumlar için, Lyapunov kontrol fonksiyonu yöntemlerini kullanarak, sistem dinamiklerini inceleyerek üretilebilen Lyapunov fonksiyonunun zaman değişiminden doğrudan türetilebilen bir kontrol ve adaptasyon yasası oluşturmanın bir yolu vardır [49].

Bununla birlikte, uyarlanabilir kontrolün eksiklikleri olduğu belirtilmelidir. Genel algoritmanın karmaşıklığı, doğrusal olmayan problemler için genelleştirmeyi takip edilemez kılar. Duyarlılık, uyarlanabilir kontrolün parametrik değişikliklere duyarlı olduğunun bilindiği başka bir konudur ve sağlamlık açısından uyarlanabilir kontrol, özellikle parametrik değişikliklerin olabileceği durumlar için uygun bir aday olmayabilir. Uyarlamalı kontrol ile ilgili diğer bir sorun ise, bazen uyarlama yasasının kullanıldığı parametre kestirim kısmı için yakınsama hızının yeterli olmaması ve durum dinamikleri için genel kararlılık sorunlarına yol açabilmesidir.

1.7.11 SMC SMO formülasyonu

Geleneksel lineer denetleyiciden önemli ölçüde farklı olan başka bir çerçeve, kayan kipli kontrol ve onun gözlemci versiyonu kayan kipli gözlemci olarak bilinir. Yöntem aşağıdaki şekilde açıklanabilir. Birincisi, kayan yüzey olarak bilinen bir set tasarımdır. Kayan yüzey, dinamiklerin bilindiği ve asimptotik olarak kararlı olduğu gösterilen sistem dinamikleriyle ilişkili durum uzayının bir alt kümesidir. Bu kontrol algoritmasının uygulanabilir olması için başka bir gereklilik, genellikle anahtarlama veya doygunluk benzeri fonksiyon aracılığıyla elde edilen, sistem dinamiklerinin kararlı olduğu kümeye sonlu zamanlı yakınsamadır. Tasarımın kritik kısmı, set tanımının analitik hesaplamasıdır ve bu, özellikle yüksek boyutlu doğrusal olmayan sistem dinamikleri için genellikle önemsiz bir çalışma değildir. Ancak bazı mekanik ve endüstriyel küçük boyutlu problemler için bu algoritma yeterince verimli bir şekilde çalışmaktadır [50].

Dinamiklerin asimptotik olarak kararlı olduğu bilinen kümeyi belirlemenin basit bir yolu yoktur. Bununla birlikte, set inşasından sonra, inşa edilen set üzerindeki dinamiklerin kararlılığı izlenebilir bir süreçtir çünkü bu iş için kullanılabilecek hesaplama açısından verimli ve güvenilir optimizasyon algoritmaları vardır, örneğin kareler toplamı ve bilinen yarı kesin programlama araçları bu araçlar arasında ifade edilebilir. Oldukça güvenilir olan bu araçlar bilhassa belirli görevler için istenen bir şekilde de çalışabilir.

Çoğunlukla, kayma yüzeyinin inşası önemsiz bir iş olmadığından ve özellikle doğrusal olmayan sistem stabilizasyon problemlerinde zorlayıcı olduğundan, sistem dinamikleriyle ilişkili durum uzayının doğrusal bir alt uzayıyla başlamak genellikle iyi bir uygulamadır. Bunun nedeni olarak, sistemin bu doğrusal alt uzay üzerindeki kararlılığını kontrol etmek için gereken çalışma, genellikle basit bir optimizasyona dönüşebilen bir problem olarak ifade edilebilir. Kullanılacak kayan kipli kontrol algoritması için seçilen doğrusal alt uzayı hesaplamak için bazı algoritmalar vardır, ancak bunlar genellikle doğrusal sistemlere yöneliktir ve doğrusal olmayan sistemlerde, kayan kipli kontrol problemleriyle ilişkili algoritmalar kümesi genellikle küçük bir alt kümeye özgüdür.

Bu kayan kipli kontrolün ve onun tahmin edicisinin kayan kipli gözlemciye karşı bir parçası olmasının bir avantajı, ortaya çıkan algoritmanın, bozulma faktörünün bozulma sinyallerini neredeyse tahmin edecek bir dereceye kadar bastırılmasında arzu edilir derecede etkili olmasıdır. Bahsedilen bu nedenle, özellikle sistemin hata dinamiklerini etkileyen sürekli bozucuya sahip problemler ve bozucu bastırımı ve performans istenen kriterleri sağlamakta başarılıdır.

Literatürde, kayan kipli kontrolün eşleşen belirsizlikler için sağlam olduğu ve bunun istendiği durumlar olduğu sıklıkla belirtilir, ancak bazı sistemler için eşleşmeyen tip için bozulma reddi bir gerekliliktir. Eşleşmeyen bozulma, sisteme kontrol giriş sinyalinden farklı bir kanaldan giren bozulma sinyalleri olarak tanımlanabilir. Kontrol algoritmasının diğer versiyonlarına gelince, burulmalı kayan kipli kontrol en ilgi çekici olanlardan biri olarak sıralanabilir. Bükümlü SMC, durum uzayının bir alt kümesini oluşturma yeteneğine sahiptir ve bu noktaya dengeye yakınsama oldukça hızlıdır. Bu tür bir algoritmanın düşük boyutlu durumlar için kullanıldığına ve bu sorunun bu özel kayan kipli kontrol türü için önemli olduğuna dikkat edilmelidir.

1.7.12 Doğrusal gürbüz denetleyici formülasyonu

Kullandıkları algoritmalar konveks sayısal optimizasyon araçlarının etkin bir şekilde kullanılmasını mümkün kıldığından, lineer gürbüz denetleyicilerin denetleyici hesaplama süreçlerinde basit olduğu bilinmektedir. Öte yandan, doğrusal denetleyici algoritmalarının arkasındaki literatür oldukça derindir ve bazı doğrusal olmayan problemler için bile, özellikle bir bölgede elde edilebilecek ve kararlı olduğu kanıtlanmış durumlar için bir tür doğrusal gürbüz denetleyici kullanma isteği vardır. Hata dinamiklerinin dinamikleri ile ilişkili durum uzayında belirtilir [51].

Bunlardan ilki, lineer kontrol problemlerinde kullanılan bir lineer kontrol algoritması türü olan LQR lineer kuadratik kontroldür ve problemin orijinalindeki temsili dışbükey olmayıp problemin yapısından ve özelliklerin kullanılmasından dolayıdır. Doğrusal sistemlerde, problemi dışbükey optimizasyon problemine dönüştürmenin bir yolu vardır ki bu, özellikle dinamiklerin yüksek boyutlu olduğu problemler için oldukça arzu edilen bir durumdur. Tam durum geri beslemesinin, bozucu faktörlere karşı oldukça dayanıklı olduğu da bilinmektedir ancak çıkış geri beslemesinin gerekli olduğu durumlarda H-inf kontrol algoritmaları da kontrol problemlerinde yararlanılabilecek bir diğer seçenektir. H-inf kontrol problemi, bu yöntemin güvenilir ve mevcut araçlardan yararlanmayı mümkün kılan bir tür dışbükey optimizasyon problemi olarak temsil edilmesinin bir yolunun olması açısından önemlidir.

Bununla birlikte, parametrik belirsizlik veya dinamik belirsizlik durumları için, h-inf ifadesinin doğrudan kullanımı, problemin hata dinamikleriyle ilişkili durum uzayının büyük bir bölümünde kararlılık elde etme yeteneğine sahip kapalı bir döngü ile sonuçlanmayabilir. Bu durumlarda mu-syn, sistemle ilgili belirsizliği açıklayan bir durum uzayında kararlılığı garanti etmek için kullanılacak bir yöntemdir ve denetleyiciyi oluşturmak için kullanılan algoritmaların önemli bir kısmı dışbükeydir. Bu özelliği, onları bir doğrusal gürbüz bir kontrol problemi olarak kullanılmasına neden olarak gösterilebilir.

1.7.13 Erişilebilirlik analizi ve yörünge optimizasyonu formülasyonu

Hata dinamikleriyle ilişkili durum ve çıkış terimleri cinsinden ifade edilebilen bir denetleyiciye sahip olmak genellikle arzu edilir ve bu, yöntemin kapalı döngü stabilitesini ve performans yönlerini ayarlamayı ve analiz etmeyi mümkün kılar. Bununla birlikte, MPC için bu kolay değildir ve bazı doğrusal olmayan problem sınıfları için mevcut olan bazı açık MPC formülasyonları olmasına rağmen, kullanılabilecek çok sayıda verimli ve anlaşılır algoritma yoktur. Bu, MPC ifadesinin bir optimizasyon problemini çözerek üretilen bir kontrol sinyali üretme açısından büyük bir vaat ettiği bir problemdir ve eğer bu problem yeterli bir süre içinde çözülebilirse, üretilen giriş sinyalinin çok iyi bir şekilde varsayılabileceği bir problemdir. Bu nedenle, ufuk genişliğine de bağlı olarak, MPC kontrol sinyali bir bakıma optimal kontrol sinyaline benzer. Bununla birlikte, kontrolörün bir MPC olduğu kapalı döngü sisteminin kararlılığı önemsiz bir görev değildir ve kapalı döngünün kararlılığı, algoritmanın güvenilirliğini ve güvenliğini garanti etmek için önemli bir faktör olarak ifade edilir. Bu konu MPC algoritması için önemli bir sorundur. Ancak bu durum, problem çeşidine de bağlı olarak, MPC algoritmalarının uygulanmasının önünde büyük bir engel oluşturmayabilir. Bununla birlikte, bu durumu düzeltmeye yönelik bir yöntem, erişilebilirlik analizine dayalı bir teknik olarak ifade edilir. Her zaman adımında giriş sinyali analiz edilerek, kapalı çevrim kararlılığının incelendiği ve kapalı döngü kararlılığının ve durum uzayında kapalı döngünün kararlı kaldığı bölgelerin incelendiği yöntemlerdir. Problemi standart bir konveks optimizasyon problemine dönüştürebilen bazı teknikler vardır ve bunun mümkün olduğu durumlar için bu büyük bir avantajdır [52].

Bir yörünge oluşturmak için Monte Carlo benzeri yaklaşımları kullanmaları bakımından parçacık filtresine benzeyen bazı yörünge optimizasyon yöntemleri vardır. Bunlardan biri de özellikle dinamiklerin optimizasyonunun mümkün olduğu robotik hareket uygulamaları için kullanılan doğrudan lokalizasyondur. Belirli bir süre içinde ve bir tasarımcının bunu başarmasına izin verebilecek bazı özel çözücüler bu konuda bir önem taşır. Bununla birlikte, erişilebilirlik analizi genel olarak tipik bir optimizasyon değildir, çünkü bir noktanın kararlılığını belirleyen bir programa ihtiyaç vardır ve durum uzayında kararlı olan bir bölgede kalıyorlarsa genellikle birden fazla nokta kontrol edilir ve yinelemeli olarak bu süreç devam eder. Tasarımcının üzerinde çalıştığı spesifik problemin gereklilikleri ile kabul edilebilir, belirli bir süre içinde ifade edilebilen bir bölge veya bölgenin tanımı problemin ifade edilmesinde gereklidir.

Literatürde son zamanlarda ortaya çıkan bir başka yaklaşım da kontrol bariyer fonksiyonu tabanlı yaklaşımlar ve bu yöntemler, MPC problemini, aynı anda optimizasyonun çözümünü garanti ederek, problemi bir dışbükey optimizasyon problemine dönüştürmeye izin verecek şekilde çözmeye çalışırlar. Genellikle durum yörüngelerini arzu edilen bir noktaya götürmek için kullanılacak kontrol sinyali olan problem, artık durum yörüngelerini durum uzayında güvenli bölge olarak bilinen bir bölgenin dışına sürecektir. Bu tür bir yöntem, özellikle yüksek boyutlu ve mevcut modelin güvenilir ve test edilmiş olduğu doğrusal olmayan problemler için umut vericidir.

1.7.14 HGO formülasyonu

Yüksek Kazanç denetleyicisi veya onun gözlemci muadili yüksek kazançlı gözlemci, doğrusal olmamayı genellikle yararlı bir şekilde ele almak için kullanılan bir tür kontrol yöntemidir. Sistemi analiz etmek, büyüklüğü yüksek olan bir giriş sinyalini uygulayabilen bir kontrol kanunu uygulamak, kapalı döngü dinamiklerini daha çok lineer bir dinamiğe benzetme potansiyeline sahiptir. Bu özelliği nedeniyle, genellikle tasarım sürecini basitleştirir. Problem, dışbükey bir şekilde temsil edildiği bilinen sağlam bir doğrusal denetleyici kullanılarak çözülebilir. Yüksek kazançlı denetleyici ve gözlemcilerin birçok varyasyonu vardır, bazıları parametrik belirsizlik konusuna odaklanır ve bazıları da kapalı döngü stabilitesinin performansına odaklanır [53].

Bununla birlikte, HGO ile ilişkili önemli bir sorun vardır, o da kesinlik eşdeğerlik ilkesiyle ilişkili ek denetleyici olduğunda kapalı döngü dinamikleridir. HGO, yüksek genliğe sahip giriş sinyalleri kullandığından, bu ani ve yüksek büyüklükteki sinyalin kapalı döngü sistemini kararsız hale getirme olasılığı vardır ve bunun için, kapalı döngünün kararlılığını garanti etmek için, sorunun denetleyici ve gözlemci kısmını göz önünde bulundurmak gerekir. Eş zamanlı olarak zirve olayı olarak bilinen durum, bir karalılık kaybı kaynağıdır ve doygunluk fonksiyonunun doğrudan uygulanması, kapalı döngü sisteminin kararlılığı için her zaman işe yaramayabilir. Ancak, erişilebilirlik analizi yoluyla kapalı döngü kararlılığının garanti edilebildiği durumlar için dikkate alınması gereken iyi bir adaydır. Sağlamlık ihtiyacının yeterli olduğu problemler için bazen yüksek kazançlı kontrolörler iyi çalışabilir. Ulaşılabilirlik bölge bazlı analizlerin ve mümkün olduğunda analitik çalışmaların yapılması diğer önemli bir husustur.

1.7.15 Diferansiyel düzlük formülasyonu

Geleneksel olmayan başka bir formülasyon, diferansiyel düzlük teoremi olarak bilinir. Denetleyici tasarımı sorunu, özellikle doğrusal olmayan durumlar için, tasarımcının kullanabileceği doğrusal kontrol araçlarını kullanmanın mümkün olduğu bir şekilde yeniden formüle edilmiştir. Bu durum ek olarak, kontrol algoritmasıyla ilgili önemli bir avantajdır. Öte yandan, tasarım yasasının dayandığı matematiksel temel oldukça karmaşıktır ve genellikle ihmal edilemeyen bir problemdir. Problem, durumlar ve giriş sinyalleri ile bunların türevleri arasındaki ilişkiyi analiz eder ve bu, küçük ölçekli bir problem için elde edilebilecek bir konudur. Diğer yandan, bu süreç, aralarındaki bir ilişkiyi tespit etmektir. Bunun mümkün olduğu problemler için, bu sistemlere diferansiyel düz sistemler denir ve bu tür problemler için lineer denetleyicileri kullanmanın bir yolu vardır [54].

Yöntem aşağıdaki şekilde açıklanabilir. İlk olarak, giriş çıkış geri besleme doğrusallaştırma kontrol algoritmasındakine benzer şekilde, düz çıkışlar olarak adlandırılan çıkış sinyalleri oluşturulur. Bunlar durum ve giriş sinyalleri cinsinden ifade edilebilen çıkış sinyalleridir. Daha sonra, problem için yörünge optimizasyonu, verimli bir şekilde çözülebilen doğrusal bir hale gelir ve bu yörüngeyi kullanarak, kapalı döngü sisteminin kararlılığını sağlayan ve garanti eden bir doğrusal kontrol yasası oluşturmanın bir yolu vardır. Bununla birlikte, tüm dinamik sistemlerin diferansiyel olarak düz olmadığını ve bir sistemin bu özelliğe sahip olup olmadığını belirlemek önemsiz olmayan bir hal alabilir. Bununla birlikte, küçük ölçekli problemler için, bu algoritma, eğer sistem diferansiyel olarak düz ise, yeterli performansla ilişkili bir kararlılık elde etme potansiyeline sahiptir.

Ayrıca, bu algoritmanın formülasyonunda en karmaşık matematiksel araçları ve argümanları gerektiren ve birkaç örnek durum dışında kontrol topluluğunun avantaj sağlamasına engel teşkil eden algoritma olabileceği de not edilmelidir. Yöntem, listelenen önceki yöntemlere kıyasla oldukça farklı olan Lie grup analizi, Diferansiyel cebir ve Diferansiyel geometri gibi konuları barındırır.

1.7.16 LTV formülasyonu

Doğrusal olmayan sistemler, genellikle uygun bir doğrusallaştırma algoritmasının çalışıp çalışmadığı test edilir ve çalıştığında, bir doğrusal denetleyiciyi oluşturmak için kullanılacak araçların mevcut ve güvenilir olduğu bilindiğinden, bir doğrusal denetleyici uygulamanın ciddi bir avantajı vardır. Ulaşılabilirlik analizi, sistemin lineerleştirilmesi ile tasarlanan lineer denetleyici ile bağlantılı kapalı çevrimin kararlılık analizi için kullanılan bir diğer analiz aracıdır. Bunun mümkün olmadığı durumlarda, LTV yaklaşımı hesaplama açısından ucuz olmayan bir çözüm sunar ve yöntemler basit değildir. Bununla birlikte, bu yöntemin kullanıldığı durumlar için, bu algoritmayı oldukça arzu edilir kılan, belirtilebilecek bazı kararlılık ve performans garantileri vardır. Dinamik LQR formülasyonuna benzer olabilir, ancak sistemin doğrusallaştırılma şekli, standart LQR kontrol sürecinde kullanılandan oldukça farklıdır [55].

1.7.17 Lyapunov tabanlı tasarım formülasyonu

Lyapunov fonksiyonu, sistemin enerjisini doğrudan elde edilemeyen ve hesaplanması kolay bir koordinatta simgeleyen matematiksel bir ifadedir. Belirli bir doğrusal olmayan sistemin kararlılığını kanıtlamak için kullanılan standart bir araçtır ve genellikle ikinci dereceden biçimdedir. Lyapunov işlevi için gereksinimler aşağıdaki gibi listelenmiştir. Fonksiyonun kendisi pozitif olmalı ve dinamiklerin yörüngeleri boyunca türevi negatif olmalıdır. Diğer bir gereklilik ise sınırsızlık ve süreklиliktir [56].

Lyapunov fonksiyonu, analiz problemine ek olarak sentez probleminde de kullanılabilir. Bu yöntem genellikle kontrol Lyapunov fonksiyon tabanlı tasarım yöntemi olarak bilinir. Önce kararlılık sertifikası belirlenir ve karşılık gelen kontrol yasası sertifikadan türetilebilir ve bu şekilde kapalı döngünün kararlılığı eş zamanlı olarak garanti edilir. Genel metodolojiler, genellikle kontrol tasarımında kullanılacak Lyapunov işlevi için bir tür ikinci dereceden ifadenin kullanılmasını önerir. Bazı sistemler için, bu tür bir doğrudan yaklaşım oldukça iyi çalışabilir ve kontrol tasarımı süreci basit olabilir. Ancak birçok durumda, kontrol tasarımı amacıyla kullanılacak bir tür kontrol Lyapunov fonksiyonu seçilmelidir ve bu süreç genellik sistematik olmama durumundadır. Modüler veya kademeli tip gibi sistemin yapısından yararlanmaya olanak sağlayan bazı ek yöntemler vardır. Bu tür yapıları kullanarak, orijinal doğrusal olmayan problemin hata dinamikleriyle ilişkili durum uzayındaki her bölgede genel anlamda çalışan bir kontrol yasası oluşturmak için kullanılabilecek bir kontrol Lyapunov fonksiyonu oluşturmak mümkün olabilir.

Lyapunov işlev tabanlı yöntemler genellikle belirli bir tasarım yöntemi olarak açıklanamaz, ancak farklı algoritma türlerinin bu genel yöntemi kullanarak bir denetleyici oluşturmasına izin verebileceği bir çerçeve olarak nitelendirilebilir. Probleme bağlı olarak, kontrol Lyapunov fonksiyonu tarafından üretilen kontrolör, doğası gereği doğrusal, polinom, rasyonel veya kayan kipli kontrol olabilir. Bu bağlamda, tasarım metodolojisi oldukça geneldir ve doğrusal olmamanın polinom olduğu uygun doğrusal olmayan problemler için etkili bir şekilde kullanılabilir ve sistem boyutunun kontrol yasasının oluşturulması için işlemleri yönetilebilir hale getirmek için yüksek olmaması gerekir.

1.7.18 Pasif kontrol tabanlı formülasyon

Lyapunov fonksiyon tabanlı kontrol yasası yapısında olduğu gibi, doğrusal olmayan sistemin özelliklerinden yararlanan bir başka yöntem de pasiflik kavramıdır. Pasiflik, enerji girişinin sistemin çıkış sinyallerinde yükseltilmediğini göstermek için oluşturulan durumlar, girişler ve çıkış sinyalleri arasındaki bir ilişki olan özel bir enerji kaybı biçimidir. Bu kavram oldukça geneldir ve analiz problemini daha kolay ve modüler hale getirir, bu da özellikle yüksek boyutlu durum vektörlerine sahip problemler için ve sayısal amaçlar için kullanılabilecek bir yapının varlığında arzu edilir [57].

Kontrol Lyapunov fonksiyon tabanlı yöntemlerde olduğu gibi pasiflik tabanlı yöntemler, kapalı döngü dinamiklerini pasif hale getirecek bir kontrol yasası oluşturmaya çalışır ve bu nedenle genel sistemin kararlılığı aynı anda garanti edilebilir. Yöntem genellikle kısmi diferansiyel denklem manipülasyonları yerine bazı cebirsel manipülasyonları kullanır. Pasifliğin en büyük avantajı, problemi modüler bir şekilde ifade edebilmesidir. Bu özelliği, modüler yapılara sahip sistemler söz konusu olduğunda ciddi bir avantajdır.

Diferansiyel düzlük yönteminde olduğu gibi pasiflik, genel bir kontrol tasarım yöntemi değil, sistemin bir özelliğini belirleme ve sistematik bir şekilde yararlanma yöntemi olarak nitelendirilebilir. Pasiflik tabanlı araçlarla her sistem stabilize edilemez ve bu gerçek, bu algoritmanın mevcut haliyle kullanılabileceği sistem türlerini sınırlar. Bununla birlikte, kararlılık garantileri ve gürbüzlük problemleri için, pasiflik uygulanabiliyorsa, bu yöntem genel performans gereksinimleri için yeterli olabilir. Pasif sistemlerin ara bağlantılarının pasif olarak bilinmesi, kontrol tasarım yöntemlerinde yapılan ara bağlantı işlemlerini kolaylaştırdığından, esneklik de pasifliğe dayalı tasarımlarla ilişkilendirilen bir başka artıdır.

Öte yandan, bu tür yöntemlerin modele bağlı olduğu bilinmektedir ve orijinal soruda verilen sistem modeliyle ilgili belirsizlik, yöntemin uygulanmasını mümkün kılmayabilir. Diğer bir konu da tasarım sürecini kolaylaştıran izlenebilir algoritmalar olmadığı için bu yöntemlerin genel olarak ölçeklenebilir olmamasıdır.

1.7.19 Daralma tabanlı formülasyonu

Pasiflik ve Disipatiflik tabanlı yöntemlerde olduğu gibi, denetleyici yapısını kolaylaştırmak için belirli bir hata dinamiğinin bazı karakterlerinden yararlanan başka bir yöntem, daralma tabanlı yöntemler olarak bilinir. Daralma, giriş kazancını ve sistem dinamiklerinin Lipschitz sabitini hesaplamak için reel analiz yöntemlerini kullanan, pasifliğe veya girdi-durum kararlılığına sahip üstel kararlılığa benzer bir kavramdır. Bu sabitler bazı özel değerlerden küçük olarak hesaplanırsa, sistemin karşılık gelen daralma sabitleri ile bir daralma yapısında sistem olduğu belirlenebilir. Bazı durumlarda bu yöntem, tasarımcının kontrol tasarım yöntemini modüler bir şekilde ortaya koymasına izin verir ve bu genellikle gerekli sayıda cebirsel manipülasyonla ilişkili hesaplama karmaşıklığını azaltır [58].

Daralmanın en önemli özelliklerinden biri, genellikle doğrudan daralmanın tanımından gelen içsel karalılık özelliğidir. Aslında, daralmanın bu özelliği nedeniyle, belirli bir lineer olmayan sistem için kararlılık marjlarını belirlemek için daralma sıklıkla kullanılır. Bu açıdan verilen yöntem oldukça önemlidir, çünkü parametrik belirsizliklerin mevcudiyetindeki kararlılık, doğrusal olmayan sistemler söz konusu olduğunda, doğrusal muadillerinin aksine sistematik değildir. Bununla ilgili olarak, bu tür problemler için hali hazırda mevcut olan LMI tabanlı dışbükey optimizasyon araçları vardır.

Daralmanın veya diferansiyel daralmanın bir tanımı, herhangi bir verilen iki yörüngenin mesafesinin veya bir ölçüsünün değişme hızı olduğundan, bu çerçeve genellikle gözlemci tasarımının oluşturulmasında kullanılır. Bir tahmin edici oluşturmak için daraltma yöntemine yönelik ana yaklaşım, bir tahmin edici tasarlamaktır, öyle ki tahmin hatası dinamikleri problemle ilişkili bazı metriklerde daralma yapısında bulunsun.

Diferansiyel daralma analizinin bir avantajı, parametrik belirsizliklere karşı sağlamlığın ve bozucu sinyallere karşı sağlamlığın aynı anda çalışılabilmesidir. Bununla birlikte, bu yöntemlerin çok temel matematiksel ilkeleri kullanmasına rağmen, yaklaşımları sayısal olarak kolaylaştıracak araçların hazır olmadığı da belirtilmelidir.

Bazı durumlarda, diferansiyel daralma analizi, arzu edilen bir dışbükey optimizasyon problemine dönüştürülebilen bir kontrol tasarım problemiyle sonuçlanabilir ve bu durumlar yaygın olmasa da bu süreci mümkün kılan bazı cebirsel manipülasyonlar olduğuna dikkat edilmelidir.

Ancak, kararlılık analizi için, özellikle geri beslemeli birbirine bağlı sistemlerin incelenmesi için, daralmaya dayalı yöntemleri kullanan kararlılık gereksinimi ihtiyatlı olabilir ve bu, belirli analiz problemleri için daralma analizini daha az etkili bir yöntem haline getirir.

Yöntem, sistem ve genel tipi ile ilişkili bir metrik gerektirir. Bu açıdan problem her zaman genelleştirilebilir ve izlenebilir değildir, ancak ölçünün belirlenmesi önemli bir konudur ve bir tane oluşturmak sistematik değildir. Ek olarak, ifade edilmelidir ki, belirli yaygın metriklerin testi ilk adım olarak uygun bir yöntemdir. Bu yaygın olarak kullanılan metriklerin çalışmadığı durumlarda, Gerekli durum değişkenleri aracılığı ile yeni metrikler elde etmek de mümkündür.

1.7.20 Geri adım kontrolü formülasyonu

Geri adım kontrolü, söz konusu sistemin kademeli doğasından yararlanmak için genel bir çerçevedir. Yöntem, modüler kontrol Lyapunov fonksiyonunun üretilmesine odaklanır. Yöntem, problemin kademeli doğasını sistematik olarak kullanır ve bu genellikle kontrol yasasını oluşturmak için yapılan cebirsel manipülasyonların sayısını azaltır. Algoritmanın esnekliği ve basit doğası açısından, dinamiklerinde entegratör bulunan problemler için genellikle uygundur [59].

Algoritmanın bir eksikliği, üretilen kontrol yasasının, kapalı döngü sisteminin sıfıra yakınsamadan önce büyüklüğü yüksek olan bir durum terimi üretmesine neden olabilecek yüksek dereceli terimlere sahip olabilmesidir. Bu sorun, kontrol bariyeri fonksiyon tabanlı yöntemlerden yararlanılarak aşılabilir. Geri adım atma kontrolünün kullanıldığı başka bir yol da şu şekildedir. Geri adımlı kontrol tekniği kullanılarak, kapalı döngü sisteminin hata dinamiklerini dengelemek için kullanılacak doğrusal olmayan terimler üretilebilir ve bu bilgi, terimler bilindiği ve bu terimlerin katsayıları ayarlandığı için kontrol kanunun bulunması için değerlidir. Tasarımcının kullanabileceği mevcut optimizasyon yöntemi bu gibi yöntemler için uygun olabilir ve bu durumlar yaygındır.

Bu çalışmada, kontrol yasasının oluşturulmasında kullanılacak durum terimlerini elde etmek amacı ile sıklıkla kullanıldığı için geri adımlı kontrol tabanlı yöntemler önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca, geri adımlı kontrol yaklaşımı kullanılarak terimlerin katsayılarının elde edildiği bir parametre optimizasyon probleminde problem temsil edilerek daha izlenebilir bir yöntem üretilebilir.

ISS problemi için, problemi daha düşük boyutlu olan sonlu bir alt problemler kümesine bölmek amacı ile geri adımlı kontrol yaklaşımını kullanan bazı yöntemler vardır ve bu tip bir yöntemin kontrol probleminin boyutunu küçültme avantajı vardır ki bu önemsiz bir husus değildir.

1.7.21 DFL tabanlı tasarım formülasyonu

Çift Yönlü Doğrusallaştırma (DFL), doğrusallaştırma tekniklerini doğru bir şekilde kullanmayı amaçlayan bir kontrol tasarım yöntemidir ve doğrusallaştırma ile ilişkili hata, yöntemin neden olduğu kontrol kanunu türü ile sınırlandırılabilir. Adından da anlaşılacağı gibi DFL, sistemin durumlarının iki farklı ilişkisini kullanarak sistemi doğrusallaştırır ve bunu yaparak sistemin doğrusallaştırılması söz konusu sisteme uygun bir şekilde yaklaşabilir [60].

Bu yaklaşımda kullanılan doğrusallaştırma yöntemlerinden biri de durum değişkeninin ortaya çıkan sistemin doğrusal bir biçimde ifade edilebilecek şekilde dönüştürülmesiyle elde edilen girdi-çıktı doğrusallaştırmasıdır. Bu doğrusallaştırma yöntemi, girdi-çıktı geri beslemeli doğrusallaştırmaya benzer, ancak genel yaklaşım oldukça farklıdır ve algoritmanın kendisi, geri beslemeli doğrusallaştırmadan daha güvenilirdir. Bu yöntemin aynı zamanda sistemi bir uzayda doğrusal bir şekilde davranmaya zorlamaya çalıştığı doğrudur. Ek olarak, verilen yöntem, geleneksel doğrusal olmayan kontrol yöntemlerine kıyasla farklı bir yaklaşım kullanarak bunu başarmaktadır.

DFL ile ilişkili ikinci doğrusallaştırma, dahili dinamik doğrusallaştırma olarak bilinir. Bu yaklaşım şu şekilde açıklanabilir. Sistem, belirtilen bir istenen nokta etrafında doğrusallaştırılır ve bu şekilde istatistiksel doğrusallaştırma yöntemleri kullanılır. İstatistiksel doğrusallaştırma, orijinal sistemin dinamiklerini geleneksel bir Taylor yaklaşım yöntemi kullanılarak elde edilebilecek olandan genellikle daha büyük bir bölgede temsil eden doğrusallaştırılmış bir model elde edilmesine izin vermesi açısından önemlidir.

DFL, MPC gibi geleneksel olmayan bir kontrol yöntemidir ve özellikle MPC problemlerinde yörünge optimizasyonu ile ilişkili optimizasyon probleminin dışbükey gevşemesinin güvenilir olmadığı ve sistem boyutunun yüksek olmadığı problemler için kullanılabilecek birçok yol vardır. Geleneksel olmayan istatistiksel doğrusallaştırma kullanımı ve bazı uzaylarda hata dinamiklerini doğrusal olmaya zorlama şekli, doğrusal olmayan kontrol problemlerinin çoğu için yeterli performans göstermesini sağlar.

DFL ifadesinin bir başka avantajı da şu anda yeterince güvenilir olan sayısal optimizasyon araçlarından yararlanma yeteneğidir. Yöntem, bu araçlardan yararlanarak, garantili kararlılık marjları ile yüksek performanslı bir kontrol yasasına sahip olunmasını sağlar.

2. KARARLILIK ANALİZİ VE İLGİLİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ

Stabilite problemleri ve ilgili optimizasyon problemleri bu bölümde ele alınmaktadır. Bu bölümde ele alınacak kısımlar, ilerleyen bölümlerde ele alınacak olan kontrol ve kontrol tabanlı gözlemci tasarım probleminin temelini oluşturmaktadır.

2.1 Lyapunov Fonksiyonu ve Kararlılık

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumlarını temsil eder. Stabilite analizi için aşağıdaki problem şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in \mathcal{C}^\infty}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) > 0, \forall x \neq 0 \\ -\dot{V}(x) > 0, \forall x \neq 0 \end{array} \end{array} \tag{2.2}$$

Ki burada, $V(x)$ Lyapunov fonksiyonu olarak bilinir. Bu sorunun lokal versiyonu için aşağıdakiler ifade elde edilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in \mathcal{C}^\infty}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) > 0, \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n | x \in \mathcal{S}, x \neq 0\} \\ -\dot{V}(x) > 0, \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n | x \in \mathcal{S}, x \neq 0\} \end{array} \end{array} \tag{2.3}$$

Ki burada, $\mathcal{S}$ soruda belirtilen denge noktasının komşuluğunu temsil etmektedir. Benzer bir amaç için, koşulların sağlanmasının daha kolay olduğu başka bir kararlılıkla ilgili problem belirtilebilir.

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in \mathcal{C}^\infty}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) > 0, \forall x \neq 0 \\ -\dot{V}(x) \geq 0, \forall x \neq 0 \end{array} \end{array} \tag{2.4}$$

Belirtilen problemin, sistemin davranışı ve durumların yakınsadığı küme hakkında bazı ipuçları veren bir fonksiyon elde edilebileceği durumlarda,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \in \{f(x) = 0\} \cap \{\dot{V}(x) = 0\} \tag{2.5}$$

Olarak ifade edilen, La Salle değişmezlik ilkesi olarak bilinir. Bu ifade, sistemin yörüngelerinin birleştiği seti analiz etmek için kullanılır ve tasarımcıya sistemin kararlılığı hakkında bir ipucu verir. Stabilite probleminin analizinde kullanılabilecek bir diğer yararlı bilgi, şu şekilde verilmektedir:

$$\{\{x(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty\} \wedge \{\dot{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty\} \rightarrow \left\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\right\} \tag{2.6}$$

Ki bu ifade Barbalat prensibi olarak bilinir. Özellikle otonom sistemlerde kullanılabileceği gibi ilk adımda zaman ifadesinin bulunduğu sistem stabilite analiz problemlerinde yaygın olarak kullanılır.

2.2 Lyapunov Fonksiyonları ve Ulaşılabilir Set $\mathcal{R}$

Ulaşılabilirlik analizi için aşağıdaki problem ifade edilebilir.

$$\begin{array}{cc} Find & \\ V \in \mathcal{C}^\infty & \Omega_c = \{x|V(x) < c\} \\ c \in \mathbb{R} & \\ & V(x) > 0, \forall x \neq 0 \\ & -\dot{V}(x) \geq 0, \forall x \neq 0 \\ s.t. & c > 0 \\ & V(x) = 0, x = 0 \\ & \dot{V}(x) = 0, x = 0 \end{array} \tag{2.7}$$

Ki burada, Ω_c önemli etkileri olan bir değişmezlik kümesi olarak bilinir. Ulaşılabilir küme analizi için kullanılabilecek bir diğer önemli araç, Nagumo değişmezliği ilkesi olarak bilinir ve şu şekilde verilir:

$$\begin{array}{cc} Find & \\ h \in \mathcal{C}^\infty & h(x) \\ \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n & \\ & \mathcal{C} = \{x|h(x) \geq 0\} \\ s.t. & h(x) \geq 0, \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n | x \in \mathcal{C}\} \\ & \dot{h}(x) \geq 0, \forall x \in \partial\mathcal{C} \end{array} \tag{2.8}$$

Ki burada C değişmez bir küme olarak belirtilir.

2.3 Lineer Kararlılık

Doğrusal dinamik sistemler için dinamikler şu şekilde yazılabilir.

$$\dot{x} = Ax \tag{2.9}$$

Ki burada, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve durum matrisini temsil eder. Sistemin kararlılığı için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonu kullanılır,

$$V(x) = x^T P x \tag{2.10}$$

Ki burada, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi Lyapunov matrisini temsil eder. Sistemin kararlılığı için bu matrise aşağıdaki kısıtlar uygulanmaktadır.

$$\begin{gathered} P = P^T \\ P > 0 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Bu matrisin özellikleri şu şekilde de ifade edilebilir.

$$\lambda_i(P) > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{2.12}$$

Bu pozitif tanımlılık kriteridir.

Lyapunov fonksiyon türevi şu şekilde verilir.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= [Ax]^T P x + x^T P [Ax] \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T [A^T P + PA] x \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bu aşamada yeni bir değişken şu şekilde tanımlanır:

$$Q \coloneqq A^T P + PA \tag{2.14}$$

Bu matris üzerindeki kısıtlamalar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{gathered} Q = Q^T \\ Q < 0 \end{gathered} \tag{2.15}$$

Verilen sistemin lineer kararlılığı için aşağıdaki problem oluşturulur.

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in C^{\infty}}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) = x^T P x \\ P = P^T > 0 \\ Q = A^T P + PA \\ Q = Q^T < 0 \end{array} \end{array} \tag{2.16}$$

Bu ifade de verilen ifade olarak basitleştirilebilir,

$$\begin{array}{cc} \underset{P \in \mathbb{R}^{n\times n}}{Find} & P \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{array} \end{array} \tag{2.17}$$

Bu problem, çözülebilir LMI formundadır.

2.4 Lineer Kararlılık ve Belirsizlik İçeren Sistemler

Verilen problem için,

$$\dot{x} = A(\delta)x \tag{2.18}$$

Ki burada, $\delta \in \mathbf{\Delta}$ sistemle ilgili belirsizliği temsil eder.

Genel olarak belirsizliğin 3 ana temsili vardır. Birincisi çarpımsal belirsizliktir ve şu şekilde verilir:

$$p = p_0(1 + \eta_p \delta_p), |\delta_p| < \delta_{p_{max}} \tag{2.19}$$

Burada, terimler, p_0, η_p, δ_p cebirsel işlemlerle hesaplanabilir.

İkincisi, şu şekilde verilen ek belirsizliktir:

$$p = p_0 + \eta_p \delta_p, |\delta_p| < \delta_{p_{max}} \tag{2.20}$$

Burada terimler, p_0, η_p, δ_p cebirsel işlemlerle verilen problem için ifade edildiği gibi hesaplanabilir.

Üçüncüsü, şu şekilde verilen ek belirsizliktir:

$$p \in \{p|p = \Sigma_i \delta_i p_i, \Sigma_i \delta_i = 1, \delta_i \geq 1\} \tag{2.21}$$

Burada, p açıklama tarafından verilen bir kümede olduğu bilinen bir parametre olarak ifade edilir.

Bununla birlikte, genel durumlar için, belirsizlik kümeleri aşağıdaki şekillerde tanımlanır.

$$\mathbf{\Delta} \coloneqq \left\{\Delta \in \mathcal{L}(L_2) | \|\Delta\|_{H_\infty} < 1\right\} \tag{2.22}$$

Burada bu tanım yapılandırılmamış, dinamik ve normlara bağlı belirsizliği temsil eder yapısı gereği genel bir ifadedir.

Yapılarda belirsizlik durumu için,

$$\mathbf{\Delta} \coloneqq \{\mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_K, \Delta_1, \dots, \Delta_N) | |\delta_i| < 1, \sigma_{max}(\Delta_i) < 1\} \tag{2.23}$$

Burada bu tanım, yapılandırılmış, statik ve norm-sınırlı belirsizliği temsil eder.

Bir başka yapısal belirsizlik durumu için,

$$\mathbf{\Delta} \coloneqq \left\{\mathrm{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_N) \in \mathcal{L}(L_2) | \|\Delta_\mathrm{i}\|_{H_\infty} < 1\right\} \tag{2.24}$$

Burada bu tanım, yapılandırılmış, dinamik ve normlara bağlı belirsizliği temsil eder.

Yapılandırılmamış belirsizlik durumu için,

$$\mathbf{\Delta} \coloneqq \{\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n} | \|\Delta\| \leq 1\} \tag{2.25}$$

Burada bu tanım yapılandırılmamış, parametrik ve norm-sınırlı belirsizliği temsil eder daha genel olarak da ifade edilebilir.

Parametrik durum için,

$$\mathbf{\Delta} \coloneqq \{\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n} | \Delta = \Sigma_\mathrm{i} \alpha_i H_i, \alpha_i \geq 0, \Sigma_i \alpha_i = 1\} \tag{2.26}$$

Burada bu tanım parametrik ve politopik belirsizliği temsil eder.

Parametrik ve aralık durumları için,

$$\mathbf{\Delta} \coloneqq \left\{\Sigma_\mathrm{i} \Delta_i \delta_i | \delta_i \in \left[\delta_{i_{min}}, \delta_{i_{max}}\right]\right\} \tag{2.27}$$

Burada bu tanım parametrik ve aralık belirsizliğini daha özel bir şekilde temsil eder. Ve bunların her biri zamanla değişen ve zamanla değişmeyen formda ifade edilebilir.

Bununla birlikte, bu kısım için, bu bölümün geri kalanında aşağıdakiler kullanılacaktır,

$$\dot{x} = \left(A_0 + \Delta A(t)\right)x(t) \tag{2.28}$$

Ki burada, $\Delta A(t)$ terimi, belirsizlik terimini temsil eder ve bu ifade şu şekilde ifade edilebilir:

$$\Delta A(t) = A_1\delta_1(t) + \cdots + A_k\delta_k(t) \tag{2.29}$$

Burada, $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve matrisler belirsiz terimlerin katsayıları olarak bilinir.

$$\delta_{i_{min}} < \delta_i < \delta_{i_{max}}, \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{2.30}$$

Ki burada, $\delta_{i_{min}}$ ve $\delta_{i_{max}}$ terimleri, belirsiz terimlerin sınırlarını temsil eder.

$$\delta(t) \in \{\alpha | \Sigma_i \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\} \tag{2.31}$$

Belirtilen katsayı matrisleri kullanılarak optimizasyon probleminde kullanılacak bölge şu şekilde gösterilir:

$$Co(A_1, \dots, A_k) \coloneqq \{\Sigma_i A_i \alpha_i | \alpha_i \geq 0, \Sigma_i \alpha_i = 1\} \tag{2.32}$$

Ki burada, $Co(\cdot)$ dışbükey gövde işlemini temsil eder.

Sağlam kararlılık için gerekli ifade şu şekilde verilir.

Açıklama 2.1: Verilen sistem

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \Delta(t)\right)x(t) \tag{2.33}$$

$A + \Delta$ Matrisi set üzerinde kararlı ise, Set $\boldsymbol{\Delta}$ üzerinde sistem gürbüz kararlıdır.

Bu tür belirsizliğin zamanla değişen durumu içermediğini belirtmek önemlidir. Bu tanımda belirtilen belirsiz terimler statiktir.

Bu problemin koşulları aşağıda belirtilmiştir.

Sağlam kararlılık için tanım verilmiştir.

Açıklama 2.2: Verilen sistem için sağlam kararlılık kavramı şu şekilde ifade edilir

$$\forall\Delta \in \Delta, \exists P_\Delta > 0 \ni [A+\Delta]^T P_\Delta + P_\Delta[A+\Delta] < 0 \tag{2.34}$$

Her belirsizliğe karşılık gelen sistem için bir matris bulunması gereklidir.

İfadesinin doğrudan Lyapunov fonksiyonları kullanılarak elde edildiğinin belirtilmesi bir önem taşımaktadır.

Lyapunov işlevini kullanarak,

$$V(x) = x^T P_\Delta x \tag{2.35}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t),t) &= x^T\big[[A+\Delta]^T P_\Delta + P_\Delta[A+\Delta]\big]x + x^T\left[\frac{d}{dt}P_\Delta\right]x \\ &\le x^T\left[\frac{d}{dt}P_\Delta\right]x \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ki burada, $V(x)$ sistem için bir Lyapunov fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

İkinci dereceden kararlılık için tanım şu şekilde verilir:

Açıklama 2.3: Verilen sistemde

$$\dot{x}(t) = \big(A_0 + \Delta(t)\big)x(t) \tag{2.37}$$

Q-Kararlılık için, $P > 0 \ni$

$$[A+\Delta]^T P_\Delta + P_\Delta[A+\Delta] < 0, \forall\Delta \in \boldsymbol{\Delta} \tag{2.38}$$

Şartı sağlanmalıdır.

Bu tür belirsizliğin zamanla değişen durumları da içerdiğini belirtmek önemlidir. Bu tanımda belirtilen belirsiz terimler sadece statik değildir. Bununla birlikte, bu tanım oldukça muhafazakardır ve burada bu şartın karşılanmasının zor olabileceği pek çok durum vardır.

Bir örnek olarak,

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.39}$$

$$A(t) = \delta_1(t)\begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \delta_2(t)\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 120 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\delta_i \geq 0, \Sigma_i \delta_i = 1$$

Sistemi gösterilebilir. Buradaki sistem, ikinci derecede kararlı bir sistem değildir, ancak, sistem asimptotik kararlılığı, verilen Lyapunov fonksiyonu ile,

$$V(x) = \max\{x^T P_1 x, x^T P_2 x\} \tag{2.40}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elde edilir. Burada, P_1 ve P_2 matrisler pozitif tanımlıdır.

Bir bölgede verilen bir sistemin kararlılığını kanıtlamak için aşağıdaki ifade kullanılır.

Teorem 2.1: Verilen 2 ifade birbirine denktir, H, L_i, R_i

$$H + \Sigma_i L_i \Delta R_i > 0, \forall \Delta \in Co(\Delta_1, \ldots, \Delta_k) \tag{2.41}$$

Ve buradan,

$$H + \Sigma_i L_i \Delta_j R_i > 0, \forall j \in \{1, \ldots, k\} \tag{2.42}$$

Olarak ifade edilirler.

Bu, temel olarak, politopik kümedeki LMI ifadesini kontrol etmek için, sadece politopik kümenin köşelerindeki LMI ifadelerinin kontrol edilmesi gerektiğini belirten bir ifadedir. Kanıt aşağıdaki gibi verilmiştir.

İspat: Tanım gereği 1, 2'yi ifade eder. Sonra, 2'yi göstermek 1'i ifade eder.

Verilen koşul ile,

$$(\Sigma_i \alpha_i) = 1 \tag{2.43}$$

İfade su sekilde belirtilir.

$$H + \Sigma_i L_i \Delta R_i = (\Sigma_i \alpha_i) H + H + \Sigma_i L_i \left(\Sigma_j \alpha_i \Delta_j\right) R_i, \alpha_i \geq 0, (\Sigma_i \alpha_i) = 1 \tag{2.44}$$

Son olarak su sekilde yazılır,

$$H + \Sigma_i L_i \Delta R_i = \Sigma_j \alpha_j \left(H + \Sigma_i L_i \Delta_j R_i\right) \geq 0, \alpha_i \geq 0, (\Sigma_i \alpha_i) = 1 \qquad (2.45)$$

Bu ifade cebirsel manipülasyonlar aracılığı ile elde edilir.

Verilen bir belirsizlik türünün kararlılığı için kullanılacak bir diğer önemli teorem ise aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2: $(A + \Delta, \boldsymbol{\Delta})$ ifadesi $\boldsymbol{\Delta} \coloneqq Co(A_1, \dots, A_k)$ setinde Q-kararlı ise,

$$(A + A_i)^T P + P(A + A_i) < 0, \forall i \in \{1, \dots, k\} \qquad (2.46)$$

Koşulunu saglayan bir $P = P^T > 0$ matrisi vardır.

Ek olarak bu ifade kullanılarak, eldeki analiz problemi, bir optimizasyon problemi haline getirilebilir.

Teorem 2.3: Verilen sistem için,

$$\dot{x} = \left(A_0 + \Delta(t)\right)x(t) \qquad (2.47)$$

Ki burada

$$\Delta(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i \delta_i(t) \qquad (2.48)$$

Ek olarak, burada belirsizlik ifadeleri,

$$\delta_i(t) \in [-1,1] \qquad (2.49)$$

Olarak verilir. Gerekli bölge için,

$$V \coloneqq \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i \delta_i \, , \delta_i \in \{-1,1\} \right\} \qquad (2.50)$$

$\boldsymbol{\Delta} \coloneqq Co(V)$ Bölgesinde, $(A + \Delta, \boldsymbol{\Delta})$ ifadesinin, Q-karalı olması, ancak ve ancak,

$P = P^T > 0$ matrisinin

$$\left(A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i\delta_i\right)^T P + P\left(A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i\delta_i\right) < 0, \forall\delta \in \{-1,1\}^k \tag{2.51}$$

Şartını sağlaması ile mümkündür.

Aynı şekilde, bu koşul da bir LMI optimizasyon problemi formundadır.

2.5 Pasiflik

Pasifliğin tanımı aşağıdaki gibidir.

Açıklama 2.4: Verilen sistem için

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.52}$$

Herhangi bir $T \geq 0$, için

$$\int_0^T u^T(t)y(t)dt \geq 0 \tag{2.53}$$

Sistem pasif olarak ifade edilir.

Pasiflik, genellikle gözlemci hata dinamiği formülasyonu için kullanılan bir araçtır.

Teorem 2.4 Verilen sistem için,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.54}$$

Belirli bir simetrik Q matrisi için ise,

$$s(u, y) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

Eğer bir $P = P^T \geq 0$ varsa, öyle ki

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ * & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{2.56}$$

Sistem, belirli bir Q matrisi için enerji tüketen olarak adlandırılır.

Disipatiflik için bu tanımın genelliği, tasarımcının kararlılıkla ilgili sorunları daha sistematik bir şekilde yeniden formüle etmesine izin verir.

İspat: Eğer verilen sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.57}$$

Disipatif ise, verilen eşitsizlik,

$$\int_{t_0}^{t_1} s(u,y)dt \geq x^T(t_1)Px(t_1) - x^T(t_0)Px(t_0) \tag{2.58}$$

$P = P^T \geq 0$ ve tüm $t_0 \leq t_1$ için geçerlidir. Eşitsizlik şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[s(u,y) - \frac{d}{dt}[x(t)^T P x(t)] \right] dt \geq 0 \tag{2.59}$$

Dinamikler kullanılarak,

$$s(u,y) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

$$= \begin{bmatrix} Cx(t) + Du(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} Cx(t) + Du(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

ve

$$\frac{d}{dt}[x(t)^T P x(t)] = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \tag{2.61}$$

$$= [Ax(t) + Bu(t)]^T P x(t) + x(t)^T P [Ax(t) + Bu(t)]$$

$$= x(t)^T [A^T P + PA] x(t) + u(t)^T B^T P x(t) + x(t)^T P B u(t)$$

$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Bu ifade ile,

$$s(u,y) - \frac{d}{dt}[x(t)^T P x(t)] = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T F(P) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

Ki burada,

$$F(P) \coloneqq -\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Olarak tanımlanır. Ardından,

$$\int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T F(P) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \geq 0 \tag{2.64}$$

İfadesi elde edilir. Bu eşitsizliğin tüm $t_0 \leq t_1$ için geçerli olması gerektiğinden, şu şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T F(P) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} > 0, \forall t \geq 0 \tag{2.65}$$

Sistemin kontrol edilebilir olduğu varsayıldığından,

$$F(P) \geq 0 \tag{2.66}$$

Olarak ifade edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Disipatiflik, pasiflikten daha geneldir, çünkü Q matrisi, özdeğerleri negatif ve pozitif değerler olabilecek şekilde seçilebilir. Ancak pasiflik için Q matrisi sabittir. Belirli bir Q matrisi için disipatiflik terimi şu şekilde yazılır:

$$s_Q(u,y) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

Özellikle Q matrisinin,

$$Q = Q_P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Formunda seçilmesi, pasiflik tanımına götürür.

Pasiflik kavramı için bir diğer önemli tanım ise aşağıda verilir.

Açıklama 2.5: Verilen sistem için

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.69)$$

Durum-uzay gösterimi,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.70)$$

Kare ise pozitif-gerçek olarak adlandırılır ve şu şekilde yazılabilir:

$$G^H(s) + G(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0 \quad (2.71)$$

Olarak ifade edilir.

Oluşturulacak konveks optimizasyon problemlerinde kullanılabilecek bir koşul için aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.5 Verilen sistem için

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.72)$$

Kontrol edilebilir, o zaman sistem ancak ve ancak bir matris

$$P = P^T > 0 \quad (2.73)$$

Varsa pasiftir, öyle ki,

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.74)$$

Olarak ifade edilir.

Bir sonraki bölümde kararlılıkla ilgili başka bir kavram verilmiştir.

2.6 Lineer Sistem Kazancı

Aşağıda, belirli bir lineer sistem için kazançla ilgili bir kavram yer almakta olup, özellikle geri besleme kararlılığı problemlerinde kullanışlıdır. Buna sınırlı gerçek lemma denir.

Teorem 2.6 Verilen sistem için

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.75}$$

Transfer fonksiyonu ifadesi,

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty \tag{2.76}$$

ve $\gamma > 0$, positif reel sayı ve matris $X = X^T > 0$ mevcuttur, ve verilen koşulu,

$$\begin{bmatrix} A^TX + XA & XB & C^T \\ * & -\gamma I & D^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.77}$$

Sağlar. Buradan,

$$\|G\|_\infty < \gamma \tag{2.78}$$

Olarak ifade edilen, terim sistem kazancı olarak da belirtilir.

Teorem, doğrusal kontrol problemini LMI optimizasyon araçlarına uygun bir şekilde oluşturmayı mümkün kıldığı için özellikle yararlıdır.

2.7 Sos Optimizasyon Problemi

SOS optimizasyonu, bu çalışmada yoğun olarak kullanılan bir optimizasyon türüdür. Özellikle dışbükey optimizasyon araçları için uygun olan daha genel bir çerçevede kararlılık problemlerini yeniden formüle etmek için kullanılır.

2.7.1 Pozitif polinomlar

Çok değişkenli bir polinom $p(x_1, \dots, x_n) = p(x)$ karelerin toplamıdır (SOS). Ek olarak aşağıdaki gibi $f_1(x), \dots, f_m(x)$ polinomları cinsinden ifade edilebilir.

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x) \tag{2.79}$$

Ve bu kavram, kontrol ve gözlemci tasarımı için kullanılan birçok optimizasyon probleminin oluşturulmasında kullanılır.

2.7.2 Pozitif matriksler

$S \in \mathbb{R}[x]^{m \times m}$ Olarak verilen bir polinom matrisi için, simetrik ve tüm $x \in \mathbb{R}^n$ için pozitif tanımlı olması için, aşağıdaki SOS kısıtlaması şu şekilde verilir:

$$y^T S y \in \Sigma(x, y) \tag{2.80}$$

Ki burada $y \in \mathbb{R}^n$, problemin SOS optimizasyon çerçevesine uygun bir şekilde formüle edilmesini sağlamak için sisteme dahil edilmektedir.

Ek olarak, burada $y = [y_1, \ldots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ ve $\Sigma(x, y)$ ifadeleri x ve y cinsinden SOS polinom kümesini ifade eder.

Bu, özellikle istikrar marjı analizi ile ilgili problemlerin oluşturulmasında yararlı olan bir kavramdır.

2.7.3 Polinom optimizasyonu

Verilen problem için,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{2.81}$$

Bu problem şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{array}{ll} \min & \\ x \in \mathbb{R}^n & \quad -\gamma \\ \gamma \in \mathbb{R} & \\ s.t. & f(x) - \gamma \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{2.82}$$

Ki buradan,

$$\begin{array}{ll} \min & \\ x \in \mathbb{R}^n & \quad -\gamma \\ \gamma \in \mathbb{R} & \\ s.t. & f(x) - \gamma \in \Sigma(x) \end{array} \tag{2.83}$$

Bu şekilde verilen bir basitleştirme ilerdeki problemler için çok faydalı olacaktır.

2.7.4 Kısıtlamalarla polinom optimizasyonu

Başka bir problem olarak,

$$\begin{array}{cc} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, M \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, N \end{array} \end{array} \tag{2.84}$$

Verilir, ki buradan,

$$f(x) - \gamma = \sigma_0(x) + \sum_j \lambda_j(x) h_j(x) + \sum_i \sigma_i(x) g_i(x) + A(x) \tag{2.85}$$

Elde edilir ve $A(x)$ yüksek dereceli terimleri ifade eder. Bu problem,

$$\begin{array}{cc} \min\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \gamma \in \mathbb{R}}} & -\gamma \\ s.t. & \begin{array}{c} f(x) - \gamma - \sigma_0(x) - \sum_j \lambda_j(x) h_j(x) - \sum_i \sigma_i(x) g_i(x) \in \Sigma(x) \\ \sigma_0(x) \in \Sigma(x) \\ \lambda_j(x) \in Poly(x), j = 1, \dots, N \\ \sigma_i(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \end{array} \end{array} \tag{2.86}$$

Olarak ifade edilir. Bu tanım, yerel kararlılık analizi problemlerinin LMI optimizasyonu için uygun bir şekilde ifade edilmesini mümkün kılar.

2.7.5 Küme tanımlı matris pozitifliği

Belirli bir $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin pozitif kadranda pozitif bir matris olması için değişken şu şekilde tanımlanabilir:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^m \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix}^T J \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix} := R(x) \tag{2.87}$$

Bu sorunun izlenebilir olması için aşağıdakiler gereklidir.

$$R(x) \in \Sigma(x) \tag{2.88}$$

Bu ifade, özellikle birinci kadrandaki kararlılık analizi için kullanışlıdır.

2.7.6 Kararlılık analizinde sos optimizasyonu

SOS optimizasyonu, kontrol tasarım problemlerini izlenebilir bir şekilde yeniden formüle etmek için kullanılabilecek bir araçtır.

2.7.7 Otonom nonlineer sistemler için küresel kararlılık analizi

Otonom sistemler için kararlılık problemi şu şekilde verilebilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in C^{\infty}}{Find} & V(x) \\ & V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ s.t. & V(x) = 0, x = \{0\} \\ & -\dot{V}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ & -\dot{V}(x) = 0, x = \{0\} \end{array} \tag{2.89}$$

Fonksiyonu verilen parametreler aracılığı ile,

$$V(x) = m_1(x)^T P m_1(x) \tag{2.90}$$

$$P = P^T > 0$$

$$m_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n^m \end{bmatrix}$$

Olarak ifade edilir. Bu parametreleştirmeyi kullanarak,

$$\dot{V}(x) = m_2(x)^T Q m_2(x) \tag{2.91}$$

$$Q = Q^T < 0$$

$$m_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$$

Terimi bulunur. İki matris arasındaki ilişki şu şekilde verilir:

$$Q_{ij} = L(P_{kl}) \tag{2.92}$$

Burada $L(\cdot)$ doğrusal bir işlemi temsil eder.

Bu formülasyonun bir sonucu olarak, problem şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ Q \in \mathbb{R}^{m\times m}}}{Find} & \begin{array}{c} P = P^T \geq 0 \\ Q = Q^T \leq 0 \end{array} \\ s.t. & Q_{ij} = L(P_{kl}), \forall i,j,k,l \in \{1,\dots,N_p\} \end{array} \tag{2.93}$$

Ki bu ifade istenen kriterlere uygun bir formatta ifade edilmiştir.

Diğer bir önemli konu ise, problemin yapısıdır. Verilen Çizelgede bu özetlenmiştir.

Çizelge 2.1 : Problem yapıları ve karşılık gelen optimizasyon problemleri

	Optimizasyon Problemi	Problem Türü
Lineer Analiz Problemi	Lineer	SDP
Lineer Sentez Problemi	Lineer	SDP
Nonlineer Analiz Problemi	Lineer	SDP

2.7.8 Otonom nonlineer sistemler için yerel kararlılık analizi

Aşağıdaki problem, bu konu ile ilgili optimizasyon problemidir.

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in C^{\infty}}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) > 0, \forall x \in \{x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1,\dots,N\}\} \\ -\dot{V}(x) \geq 0, \forall x \in \{x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1,\dots,N\}\} \end{array} \end{array} \tag{2.94}$$

Bu ifade gerekli düzenlemeler ile,

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in C^{\infty}}{Find} & V(x) \\ & V(x) - \sigma_{10}(x) - \sum_i \sigma_{1i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) \\ s.t. & -\dot{V}(x) - \sigma_{20}(x) - \sum_i \sigma_{2i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) \\ & \sigma_{10}(x), \sigma_{20}(x) \in \Sigma(x) \\ & \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1,\dots,M \\ & \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1,\dots,M \end{array} \tag{2.95}$$

olarak ifade edilebilir. Set odaklı kararlılık problemleri için,

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ V \in \mathcal{C}^{\infty} \end{array} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) > 0, \forall x \in \left\{ x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}, h_j(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \\ -\dot{V}(x) \geq 0, \forall x \in \left\{ x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}, h_j(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \end{array} \end{array} \tag{2.96}$$

ki buradan,

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ V \in \mathcal{C}^{\infty} \end{array} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) - \sigma_{10}(x) - \sum_i \sigma_{1i}(x) g_i(x) - \sum_j \lambda_{1j}(x) h_j(x) \in \Sigma(x) \\ -\dot{V}(x) - \sigma_{20}(x) - \sum_i \sigma_{2i}(x) g_i(x) - \sum_j \lambda_{2j}(x) h_j(x) \in \Sigma(x) \\ \sigma_{10}(x), \sigma_{20}(x) \in \Sigma(x) \\ \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \\ \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \\ \lambda_{1j} \in Poly(x), j = 1, \dots, N \\ \lambda_{2j} \in Poly(x), j = 1, \dots, N \end{array} \end{array} \tag{2.97}$$

Bu form, istenen optimizasyon problem formundadır ve gerekli işlemler yapılabilir.

2.7.9 Tanımlı bir kümede kararlılık analizi

Genellikle bir kümede kısıtlanmış doğrusal olmayan dinamik otonom bir sistemin kararlılık özelliklerini analiz etmek önemli bir problemdir. Bu tip analiz problemi genellikle anahtarlama ve kayan kipli kontrol problemlerinde ortaya çıkar.

$$\dot{x} = f(x), \forall x \in \left\{ x | h_j(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \tag{2.98}$$

Belirtilen problem için aşağıdaki optimizasyon formüle edilebilir.

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) \\ & V(x) - \sum_j \lambda_{1j}(x) h_j(x) \in \Sigma(x) \\ s.t. & -\dot{V}(x) - \sum_j \lambda_{2j}(x) h_j(x) \in \Sigma(x) \\ & \lambda_{1j} \in Poly(x), j = 1, \dots, N \\ & \lambda_{2j} \in Poly(x), j = 1, \dots, N \end{array} \tag{2.99}$$

Ki burada sisteminin ayrıca bir kontrol sinyali veya bozucu girişi olduğu durumlar için, aşağıdaki sistem tanımlanabilir.

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.100}$$

$$u = \begin{cases} u = 0, & \forall x \in \left\{ x | h_j(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \\ u = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{ x | h_j(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \end{cases}$$

Ki burada kontrol yasası $u_1(x)$, sistemin yörüngeleri sonlu bir zamanda belirtilen kümeye yakınsayacak şekilde tasarlanmıştır. Sistemin kararlılığını analiz etmek için aşağıdaki problem ifade edilebilir.

$$\dot{x} = f(x, 0), \forall x \in \left\{ x | h_j(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \tag{2.101}$$

Bunun için, $|\cdot|$ ve $sgn(\cdot)$ fonksiyonları sıklıkla kullanılır.

2.7.10 Yerel durum için sos optimizasyonu kullanılarak kararlılık analizi

Önceki bölümde belirtilen sorunun yerel sürümleri için,

$$\dot{x} = f(x, u), \forall x \in \left\{ x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}, h_{1j}(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\} \tag{2.102}$$

$$u = \begin{cases} u = 0, & \forall x \in \{ x | h_{2k}(x) = 0, k \in \{1, \dots, M\} \} \\ u = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{ x | h_{2k}(x) = 0, k \in \{1, \dots, M\} \} \end{cases}$$

Ki burada kontrol yasası $u_1(x)$, sistemin yörüngeleri sonlu bir zamanda belirtilen kümeye yakınsayacak şekilde tasarlanmıştır. Sistemin kararlılığını analiz etmek için aşağıdaki problem ifade edilebilir.

$$\dot{x} = f(x,0), \forall x \in \bigcap_{a=1}^{2} \Omega_a \tag{2.103}$$

$$\Omega_1 \coloneqq \left\{ x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}, h_{1j}(x) = 0, j \in \{1, \dots, M\} \right\}$$

$$\Omega_2 \coloneqq \left\{ x | h_{2k}(x) = 0, k \in \{1, \dots, M\} \right\}$$

Belirtilen problem için aşağıdaki optimizasyon elde edilebilir.

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) - \sigma_{10}(x) - \sum_i \sigma_{1i}(x) g_i(x) - \sum_j \lambda_{1j}(x) h_{1j}(x) - \sum_k \lambda_{2k}(x) h_{2k}(x) \in \Sigma(x) \\ -\dot{V}(x) - \sigma_{20}(x) - \sum_i \sigma_{2i}(x) g_i(x) - \sum_j \lambda_{3j}(x) h_{1j}(x) - \sum_k \lambda_{4k}(x) h_{2k}(x) \in \Sigma(x) \\ \lambda_{1j}, \lambda_{2k} \in Poly(x), \forall j, k = 1, \dots, N \\ \lambda_{3j}, \lambda_{4k} \in Poly(x), \forall j, k = 1, \dots, N \\ \sigma_{1i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \\ \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \\ \sigma_{10}(x), \sigma_{20}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \end{array} \end{array} \tag{2.104}$$

Bu optimizasyon problemi, LMI optimizasyon araçlarını kullanarak tanımlanmış bir set üzerindeki kararlılık problemlerini analiz etmek için oluşturulabilecek bir formülasyondur.

3. PARAMETRİK BELİRSİZLİK VE KONTROL LYAPUNOV FONKSİYONLARI

Parametrik belirsizlik, karar değişkenlerinde dışbükey olan bir optimizasyon problemi olarak yeniden formüle edilebilen bir problem türü olarak, doğrusal ve doğrusal olmayan otonom durumlarda analiz edilebilir. Bu durumda karar değişkenleri, verilen sistemin kararlılığını kanıtlamak için kullanılan Lyapunov Fonksiyonunu parametreleştirmek için kullanılan terimler olarak ifade edilebilir.

3.1 Doğrusal Kararlılık ve Parametrik Belirsizlik

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = Ax \tag{3.1}$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumlarını temsil eder.

Doğrusal kararlılık için Lyapunov fonksiyonu şu şekilde verilir:

$$V(x) = x^T P x \tag{3.2}$$

Ki burada, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V(x)$ ifadesini parametreleştirmek için kullanılır.

Stabilite problemi, şu şekilde verilen bir fizibilite problemi olarak yeniden formüle edilebilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{P \in \mathbb{R}^{n \times n}}{Find} & P \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{array} \end{array} \tag{3.3}$$

$V(x)$ İfadesini elde etmek için çözülebilen bir LMI formunda problemdir.

3.1.1 Lineer gürbüz kararlılık

Dinamikleri şu şekilde verilen lineer sistem için

$$\dot{x} = A(\delta)x \tag{3.4}$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumlarını ve δ belirsizliği temsil eder, belirsizlik statik ve sınırlı olduğu biliniyorsa, ikinci dereceden kararlılık kadar korunumlu olmayan bir kararlılık türü kullanılabilir.

Durum denklemini şu şekilde gösterelim:

$$\dot{x} = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i \delta_i(t)\right) x(t) \tag{3.5}$$

Ki burada, gerekli terimler,

$$\delta_i(t) \in [-1,1], \forall i \in \{1,..,k\} \tag{3.6}$$

Olarak verilir, LMI formülasyonu için,

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ P_{\delta_{i_{min}}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ P_{\delta_{i_{max}}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \end{array} & P_{\delta_{i_{min}}}, P_{\delta_{i_{max}}} \\ s.t. & \begin{array}{c} P_{\delta_{i_{min}}} = P_{\delta_{i_{min}}}{}^{T} > 0 \\ A^T_{\delta_{i_{min}}} P_{\delta_{i_{min}}} + P_{\delta_{i_{min}}} A_{\delta_{i_{min}}} < 0 \\ P_{\delta_{i_{max}}} = P_{\delta_{i_{max}}}{}^{T} > 0 \\ A^T_{\delta_{i_{max}}} P_{\delta_{i_{max}}} + P_{\delta_{i_{max}}} A_{\delta_{i_{max}}} < 0 \end{array} \end{array} \tag{3.7}$$

Ki burada problem tüm $i \in \{1, \dots, k\}$ için çözülmüştür. Bunun yalnızca parametre belirsizliğinde kullanılabileceği ifade edilir. Ek olarak, bilinmeyen terimin doğası gereği statik olduğu biliniyorsa, gerekli formülasyonunda işe yaradığına dikkat etmek önemlidir.

3.1.2 Doğrusal ikinci dereceden kararlılık

Zamanla değişen belirsizlikleri ele almak için geliştirilen bir kısıtlama amacı ile, ikinci dereceden belirsizlik, dışbükey bir optimizasyon problemi olarak yeniden formüle edilebilen bir problem türüdür.

Bu durumda, LMI formülasyonu şu şekilde verilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{P \in \mathbb{R}^{n\times n}}{Find} & P \\ & P = P^T > 0 \\ s.t. & A_{\delta_{i_{min}}}^T P + PA_{\delta_{i_{min}}} < 0, \forall i \in \{1, \dots, k\} \\ & A_{\delta_{i_{max}}}^T P + PA_{\delta_{i_{max}}} < 0, \forall i \in \{1, \dots, k\} \end{array} \tag{3.8}$$

Ki burada kısıtlamalar, yalnızca bir politop tarafından tanımlanan bölgenin köşelerinde kontrol edilir.

3.1.3 Doğrusal kazanç ve zamanla değişmeyen belirsizlik

Verilen sistem için,

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{gathered} \tag{3.9}$$

Kazanç ifadesi,

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ \gamma \in \mathbb{R}}}{min} & \gamma \\ & X = X^T > 0 \\ & \gamma > 0 \\ s.t. & \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ * & -\gamma I & D^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{array} \tag{3.10}$$

Bu ifade kontrol problemi için gereklidir.

3.2 Parametrik Belirsizlik Varlığında Pasiflik

Bir sistem, dışbükey bir küme üzerinde tanımlanan bir durum matrisinin tüm değerleri için pasifse ve genellikle yalnızca köşeler dikkate alınacak şekilde formüle edilmişse, sağlam bir şekilde pasif olarak belirlenir. Sabit belirsiz terimlere sahip verilen doğrusal sistem için,

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(\delta)x + B(\delta)u \\ y = C(\delta)x + D(\delta)u \end{gathered} \tag{3.11}$$

Aşağıdaki problem şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{P_{\delta_{i_{min}}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ P_{\delta_{i_{max}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}}}{Find} & P_{\delta_{i_{min}}}, P_{\delta_{i_{max}}} \\ s.t. & \begin{array}{c} P_{\delta_{i_{min}}} = P_{\delta_{i_{min}}}{}^{T} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_{\delta_{i_{min}}}^{T} P_{\delta_{i_{min}}} + P_{\delta_{i_{min}}} A_{\delta_{i_{min}}} & P_{\delta_{i_{min}}} B_{\delta_{i_{min}}} - C_{\delta_{i_{min}}}^{T} \\ * & -D_{\delta_{i_{min}}}{}^{T} - D_{\delta_{i_{min}}} \end{bmatrix} \leq 0 \\ P_{\delta_{i_{max}}} = P_{\delta_{i_{max}}}{}^{T} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_{\delta_{i_{max}}}^{T} P_{\delta_{i_{max}}} + P_{\delta_{i_{max}}} A_{\delta_{i_{max}}} & P_{\delta_{i_{max}}} B_{\delta_{i_{max}}} - C_{\delta_{i_{max}}}^{T} \\ * & -D_{\delta_{i_{max}}}{}^{T} - D_{\delta_{i_{max}}} \end{bmatrix} \leq 0 \end{array} \end{array} \tag{3.12}$$

Ki burada problem tüm $i \in \{1, \dots, k\}$ için çözülmüştür. Bunun yalnızca parametrenin, doğası gereği statik olduğu biliniyorsa işe yaradığına ve özellikle sistem başka bir pasif sisteme bağlıysa, pasifliğin kanıtlanmasının yararlı olduğuna dikkat etmek önemlidir. Pasiflik, tasarımcının kararlılık analizi problemini ayrıştırmasına yardımcı olabilecek bir araçtır.

3.3 Parametrik Belirsizlik Varlığında Lineer Sistemin Kazancı

Sistemin kazancı şu şekilde hesaplanır:

$$\max_{i\in\{1,\dots,k\}} \left\{ \begin{array}{cc} \underset{\substack{X_{\delta_{i_{min}}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ \gamma_{\delta_{i_{min}}} \in \mathbb{R} \\ X_{\delta_{i_{max}}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ \gamma_{\delta_{i_{max}}} \in \mathbb{R}}}{min} & max\left\{\gamma_{\delta_{i_{min}}}, \gamma_{\delta_{i_{max}}}\right\} \\ s.t. & \begin{array}{c} X_{\delta_{i_{min}}} = X_{\delta_{i_{min}}}^{T} > 0 \\ \gamma_{\delta_{i_{min}}} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_{\delta_{i_{min}}}^{T} X_{\delta_{i_{min}}} + X_{\delta_{i_{min}}} A_{\delta_{i_{min}}} & X_{\delta_{i_{min}}} B_{\delta_{i_{min}}} & C_{\delta_{i_{min}}}^{T} \\ * & -\gamma_{\delta_{i_{min}}} I & D_{\delta_{i_{min}}}^{T} \\ * & * & -\gamma_{\delta_{i_{min}}} I \end{bmatrix} < 0 \\ X_{\delta_{i_{max}}} = X_{\delta_{i_{max}}}^{T} > 0 \\ \gamma_{\delta_{i_{max}}} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_{\delta_{i_{max}}}^{T} X_{\delta_{i_{max}}} + X_{\delta_{i_{max}}} A_{\delta_{i_{max}}} & X_{\delta_{i_{max}}} B_{\delta_{i_{max}}} & C_{\delta_{i_{max}}}^{T} \\ * & -\gamma_{\delta_{i_{max}}} I & D_{\delta_{i_{max}}}^{T} \\ * & * & -\gamma_{\delta_{i_{max}}} I \end{bmatrix} < 0 \end{array} \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

Ve bu problem genellikle geribesleme kararlılık analizleri için kullanışlıdır, özellikle burada küçük kazanç teoremi verilen bir geribesleme sisteminin kararlılığını kanıtlamak için ana araç olarak kullanılan problemler için.

3.4 Daralma Teoremi

Daralma teoremi belirsizlikle ilgili kararlılık problemlerini dışbükey bir şekilde formüle etmek için kullanılabilmesi nedeniyle popülerlik kazanmış bir araçtır.

3.4.1 Otonom sistemler için kararlılık problemlerinde daralma teoremi

Verilen sistem için

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.14}$$

Kararlılık Lyapunov fonksiyonu yöntemi yerine daralma ile sistemin ispatı yapılabilir. Bununla birlikte, belirtilen yöntemler arasında bir bağlantı vardır. Daralma teoremi, aşağıdaki optimizasyon probleminin uygulanabilir olması durumunda, sistemin, üstel karalılık kavramına benzer bir kararlılık biçimi olan daralma olarak belirlendiğini ileri sürer.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \\ R(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \end{array} & M(x) \\ & \\ s.t. & \begin{array}{c} M(x)^T = M(x) \\ R(x)^T = R(x) \\ M(x) \geq \varepsilon_1 I > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ R(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x) + \beta M(x) \\ -R(x) \geq \varepsilon_2 I > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array} \end{array} \tag{3.15}$$

Problem uygulanabilir ise, sistem daralmalı sistem olarak ifade edilir. Daralma terimi $M(x)$ ile Lyapunov fonksiyonu $V(x)$ arasındaki ilişki şu şekilde verilir:

$$V(x) = [f(x)]^T M(x)[f(x)] \tag{3.16}$$

$V(x)$ İfadesinin türevi,

$$\dot{V}(x) = [f(x)]^T \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x)\right][f(x)] \tag{3.17}$$

Ki buradan,

$$\dot{V}(x) \leq -\beta V \tag{3.18}$$

Ve bu ifade üstel kararlılık içinde kullanılır.

3.4.2 Belirsizlik içeren sistemler için kararlılık problemlerinde daralma teoremi

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x, \delta), \delta \in \mathbf{\Delta} \tag{3.19}$$

Belirli bir sistemin belirsizlikle tutarlılığı, ikinci dereceden bir kararlılık argümanı kullanılarak Lyapunov fonksiyon yöntemi yerine daralma ile kanıtlanabilir.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \\ R(x,\delta) \in \mathbb{R}[x,\delta]^{n\times n} \end{array} & M(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} M(x)^T = M(x) \\ R(x,\delta)^T = R(x,\delta) \\ M(x) \geq \varepsilon_1 I > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in \mathbf{\Delta} \\ R(x,\delta) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x,\delta) + \beta M(x) \\ -R(x,\delta) \geq \varepsilon_2 I > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in \mathbf{\Delta} \end{array} \end{array} \tag{3.20}$$

Eğer problem uygulanabilir ise, sistem daralmaya sahip bir sistem olarak ifade edilir ve önemli olan, bunun belirsiz parametrelere sahip doğrusal olmayan sistemler için karalılık problemini ele alan bir algoritma olmasıdır. Bu problemin, bozucu faktörler karşısında sistemi stabilize etme yeteneğine sahip bir kontrol yasası türetmek için önemli bir araç olabilmesi özellikle önemlidir.

3.4.3 Nonlineer sistemlerde kararlılık marjini için daralma teoremi

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x, \delta), \delta \in \mathbf{\Delta} \tag{3.21}$$

Belirli bir sistem için belirsizlik marjı problemi, aşağıdaki optimizasyon problemi ile ele alınabilir ki burada belirsizlik seti genellikle bir politop ile tanımlanır ve problem ikiye bölme yöntemine benzer bir şekilde çözülebilir.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} min \\ \mathbf{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{k}} \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \\ R(x,\delta) \in \mathbb{R}[x,\delta]^{n\times n} \end{array} & -\mathrm{vol}(\mathbf{\Delta}) \\ s.t. & \begin{array}{c} M(x)^T = M(x) \\ R(x,\delta)^T = R(x,\delta) \\ M(x) \geq \varepsilon_1 I > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ R(x,\delta) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x,\delta) + \beta M(x) \\ -R(x,\delta) \geq \varepsilon_2 I > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in \mathbf{\Delta} \end{array} \end{array} \tag{3.22}$$

Bu problem iteratif olarak çözülür, ancak her bir alt problemin dışbükey bir şekilde temsil edilebileceğini not etmek önemlidir. Ek olarak, yöntemin bu özelliği de mevcut araçların varlığı göz önüne alındığında bu problemi sistematik kılar.

3.4.4 Nonlineer otonom sistemlerde global kararlılık

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \tag{3.23}$$

Kararlılık problemi verilen optimizasyon problemi olarak formüle edilebilir.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n \times n} \\ R(x) \in \mathbb{R}[x]^{n \times n} \end{array} & M(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} M(x)^T = M(x) \\ R(x)^T = R(x) \\ y^T[M(x)]y \in \Sigma(x,y) \\ R(x) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x) + \beta M(x) \\ y^T[-R(x)]y \in \Sigma(x,y) \end{array} \end{array} \tag{3.24}$$

Problem uygulanabilir ise, sistem daralmaya sahip olan sistem olarak ifade edilir. $M(x)$ ve $V(x)$ arasındaki bağlantı şu şekilde verilir:

$$V(x) = [f(x)]^T M(x)[f(x)] \tag{3.25}$$

Ve $\dot{V}(x)$ terimi,

$$\dot{V}(x) = [f(x)]^T \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x)\right][f(x)] \tag{3.26}$$

Buradan da,

$$\dot{V}(x) \leq -\beta V \tag{3.27}$$

Olarak ifade edilir.

3.4.5 Nonlineer otonom sistemlerde lokal kararlılık

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x), x \in \{x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \ldots, N\}\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.28}$$

Kararlılık problemi, aşağıdaki fizibilite problemi olarak yeniden formüle edilebilir.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \\ R(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \end{array} & M(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} M(x)^T = M(x) \\ R(x)^T = R(x) \\ y^T[M(x)]y - \sigma_{10}(x) - \sum_i \sigma_{1i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x,y) \\ R(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x) + \beta M(x) \\ y^T[-R(x)]y - \sigma_{20}(x) - \sum_i \sigma_{2i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x,y) \\ \sigma_{10}(x), \sigma_{20}(x) \in \Sigma(x) \\ \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \ldots, M \\ \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \ldots, M \end{array} \end{array} \tag{3.29}$$

Eğer problem uygulanabilir ise sistem belirtilen bölgede daralmaya sahip olan sistem olarak belirtilir.

3.4.6 Belirsizlik içerek nonlineer sistemlerde global kararlılık

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x, \delta), \delta \in \mathbf{\Delta} \tag{3.30}$$

Kararlılık, Sistemin yapısı da işlemlere dahil edilerek, aşağıdaki fizibilite problemi ile belirlenebilir.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \\ R(x,\delta) \in \mathbb{R}[x,\delta]^{n\times n} \end{array} & M(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} M(x)^T = M(x) \\ R(x,\delta)^T = R(x,\delta) \\ M(x) \in \Sigma(x) \\ R(x,\delta) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x,\delta) + \beta M(x) \\ -R(x,\delta) \in \Sigma(x,\delta) \\ \beta > 0 \end{array} \end{array} \tag{3.31}$$

Eğer problem uygulanabilir ise, sistem mevcut belirsiz terimli büzülmeli bir sistem olarak ifade edilir.

3.4.7 Belirsizlik içeren nonlineer otonom sistemlerde lokal kararlılık

Belirli bir doğrusal olmayan sistem için,

$$\dot{x} = f(x,\delta), \delta \in \mathbf{\Delta}, x \in \left\{x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.32}$$

Sistemin kararlılığı aşağıdaki fizibilite problemi ile belirlenebilir.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \\ R(x,\delta) \in \mathbb{R}[x,\delta]^{n\times n} \end{array} & M(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} M(x)^T = M(x) \\ R(x,\delta)^T = R(x,\delta) \\ y^T[M(x)]y - \sigma_{10}(x) - \sum_i \sigma_{1i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x,y) \\ R(x,\delta) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x,\delta) + \beta M(x) \\ y^T[-R(x,\delta)]y - \sigma_{20}(x) - \sum_i \sigma_{2i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x,y,\delta) \\ \sigma_{10}(x), \sigma_{20}(x) \in \Sigma(x) \\ \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \\ \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), i = 1, \dots, M \end{array} \end{array} \tag{3.33}$$

Eğer problem uygulanabilir ise, sistem, tanımı verilen durum uzayında bir bölgede mevcut belirsiz terim ile daralmaya sahip bir sistem olarak ifade edilir.

3.4.8 Belirsizlik içeren nonlineer sistemlerde lokal kararlılık problemi

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x,\delta), \delta \in \mathbf{\Delta}, x \in \left\{x | h_i(x) = 0, i \in \{1, \dots, N\}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.34}$$

Kararlılık problemi verilen formda ifade edilebilir.

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} Find \\ M(x) \in \mathbb{R}[x]^{n\times n} \\ R(x,\delta) \in \mathbb{R}[x,\delta]^{n\times n} \end{array} & M(x) & (3.35) \\
 & M(x)^T = M(x) & \\
 & R(x,\delta)^T = R(x,\delta) & \\
 & y^T[M(x)]y - \sigma_{10}(x) - \sum_i \lambda_{1i}(x)h_i(x) \in \Sigma(x,y,\delta) & \\
s.t. & R(x,\delta) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T M(x) + M(x)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] + \dot{M}(x,\delta) + \beta M(x) & \\
 & y^T[-R(x,\delta)]y - \sigma_{20}(x) - \sum_i \lambda_{2i}(x)h_i(x) \in \Sigma(x,y,\delta) & \\
 & \sigma_{10}(x), \sigma_{20}(x) \in \Sigma(x) & \\
 & \lambda_{1i}(x) \in Poly(x), i = 1, \dots, N & \\
 & \lambda_{2i}(x) \in Poly(x), i = 1, \dots, N &
\end{array}
$$

Eğer problem uygulanabilir ise, sistem, tanımı verilen durum uzayında bir bölgede mevcut belirsiz terim ile daralmalı bir sistem olarak ifade edilir.

3.4.9 Özel durumlar ve yapılar

Belirli bir doğrusal olmayan sistem için, süreci daha izlenebilir ve verimli hale getirebilecek daha küçük parçalara bölmek için oluşturulabilecek herhangi bir yapı olup olmadığını analiz etmek genellikle iyi bir fikirdir. Özellikle daralmalı sistemlerde kullanılabilecek bazı önemli araçlar vardır. Bunlardan biri daha sonra ifade edilecek zincir türü sistemlerdir. Genel sistem, sistem-1 ve sistem-2 olarak düşünülebilir ve sistem-1 otonomdur ve durumlarından biri sistem-2'ye girer, bu yapı ISS ve daralma araçları kullanılarak formüle edilebilir. ISS, ilerleyen bölümlerde tartışılan bir kavramdır.

Sistemin, özel bir yapıya sahip olduğu durumlar için kullanılabilecek bir diğer önemli araç ise disipatifliktir ve onun daha özel versiyonu olan pasiflik kavramı sıklıkla kullanılır. Geribesleme bağlantılı pasif sistemlerin pasif bir sistemle sonuçlanmasından dolayı pasifliğin, geribildirim bağlantılı bir sistemin kararlılığını doğrudan belirlemek için kullanılabilecek araçlardan biri olduğu bilinmektedir. Geri besleme ara bağlantı sisteminin kararlılığını belirlemek için daralma gibi bir araç bile doğrudan kullanılamaz.

3.4.10 Statik belirsizlik

Statik belirsizlik, özellikle ki burada terimlerin tasarımcı tarafından bilinen bir bölgede sınırlı olduğu bilinen durumlar için, bir dizi fizibilite tipi optimizasyon problemi aracılığıyla ele alınabilecek özel bir belirsizlik tipi olabilir. Bu konu, önceki bölümde verilen SOS optimizasyon araçlarıyla bağlantılı olarak daralma yöntemleri kullanılarak mümkündür.

4. ISS VE BOZUCU BASTIRIMI

Girdi-duruma yönelik karalılık (ISS), kontrol tabanlı gözlemci çerçevesini kullanan kontrol tasarım problemine benzer bir şekilde, özellikle gözlemci probleminin formülasyonu için bu çalışmanın dayandığı bir kavramdır. Bu bölümde, ISS ile ilgili kavramlar tartışılacak ve bunlardan bazıları ilerleyen bölümlerde kullanılacaktır.

4.1 ISS ve Kararlılık Marjin Kavramları

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x, w) \tag{4.1}$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumunu, $w \in \mathbb{R}^m$ ise sisteme giren harici bozucu sinyalleri temsil eder. Olarak verilen koşul

$$\|x(t)\| \leq \max\left\{\beta(\|x(t_0), t - t_0\|, t - t_0), \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right)\right\}, \forall t \geq t_0 \tag{4.2}$$

ISS ifadesinin genel bir tanımıdır. Probleminin ifade edilmesi kolay başka tanımları da vardır ancak önemli olan analiz için gerekli sistematik yaklaşımların nasıl optimizasyon problemi olarak oluşturulmasıdır.

4.1.1 ISS koşulları

ISS sorununu ele almanın genel yolu, bir Lyapunov fonksiyonu oluşturmaktır. Alabilecekleri tüm değerler için x ve u terimlerinde yerel olarak Lipschitz olan $f(x, w)$ için, bir ISS-Lyapunov fonksiyonu $V(x) \in \mathcal{C}^1$ olarak gösterilir.

Problemi formüle etmek için aşağıdaki ek kısıtlamalar getirilmiştir,

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \qquad (4.3)$$

$$\dot{V}(x,w) \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|w\|)$$

Ki burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$ fonksiyonlar, probleme bağlı olarak uygun şekilde seçilir. Bu formülasyona genellikle tip-I formülasyonu denir ve optimizasyon amaçları için daha kullanışlıdır.

Tip-II formülasyonu için kısıtlamalar şu şekilde verilir:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \qquad (4.4)$$

$$\|x\| \geq \chi(\|w\|) \rightarrow \dot{V}(x,w) \leq -\rho(\|x\|)$$

Ki burada $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\chi \in \mathcal{K}$ ve $\rho(\cdot)$ fonksiyonları pozitif tanımlı bir fonksiyondur. Belirtilen terimler, soruna bağlı olarak uygun bir şekilde seçilir. Bu formülasyona genellikle tip-I formülasyonu denir ve optimizasyon amaçları için daha kullanışlıdır.

Bu çerçevede kullanılarak, GAS ile ilgili Lyapunov kısıtlamaları da şu şekilde ifade edilir:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \qquad (4.5)$$

$$\dot{V}(x,w) \leq -\rho(\|x\|)$$

Ki burada, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ ve $\rho(\cdot)$fonksiyonları pozitif tanımlı bir fonksiyondur. Belirtilen terimler, probleme bağlı olarak uygun şekilde seçilir. Bu formülasyona genellikle tip-I formülasyonu denir ve optimizasyon amaçları için daha faydalıdırlar.

ISS sorunları için başka bir yararlı kavram, sıfır bozucu durumu için sistemin asimptotik kararlılığı olan 0-GAS'tır. $\dot{x} = f(x,w)$ 0-GAS olarak, $\dot{x} = f(x,0)$ GAS olarak belirlendiğinde ifade edilir.

Analiz çalışmasında kullanılabilecek başka bir yararlı ilişki şu şekilde verilmiştir:

$$\dot{x} = f\big(x, \delta(\|x\|)\tilde{d}\big), \delta \in \mathcal{K}_\infty, \forall \tilde{d} \in \{\tilde{d} | |\tilde{d}| \leq 1\} \qquad (4.6)$$

Burada verilen formülasyon, kullanılacak net bir δ fonksiyonu olduğu durumlar için yaralıdır. Bu ifade, ISS ifadesine eşdeğerdir ve bazı belirli doğrusal olmayan problemler için daha kolay bir çözüm sunar. Ek olarak, diferansiyel içerme tipi sistemlerin koruyuculuk ve kararlılık marjı çalışmalarında yararlıdır.

4.1.2 LTI sistemlerde ISS

ISS konseptinin LTI sistemleri için çalışılması kolaydır, ancak genel konsept için de önemlidir. Kararlılık durum matrislerine sahip girdili LTI sistemleri için, LTI sistemlerinin kararlılığı üstel kararlılık şeklinde olduğundan, sistemler doğrudan ISS olarak kabul edilir ve bu, daha güçlü bir kararlılık kavramıdır. Ek olarak verilen tanım gereği, ISS çalışması için yararlıdır. ISS kavramları ile aşağıdaki bölümde tartışılan üstel kararlılık arasında bir bağlantı vardır.

4.2 Lyapunov Fonksiyonları Kullanarak Nonlineer Sistemler İçin ISS Problemi

Bu alt bölümde, ISS problemi tartışılmakta ve ISS analizini ifade etmek amacı ile ilgili bir optimizasyon problemi oluşturulmaktadır.

ISS çalışmasına ilişkin sorun bildiriminin soyut bir ifadesi için aşağıdakiler verilmiştir. Burada problem bir optimizasyon problemi olarak ifade edilir.

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in C^{\infty}}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) - \alpha_1(\|x\|) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_2(\|x\|) - V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha, \sigma \in \mathcal{K}_\infty \end{array} \end{array} \tag{4.7}$$

Bu sorunun basitleştirilebileceği ve aşağıdaki bölümlerde fonksiyonlar üzerindeki daha fazla kısıtlamanın tartışıldığı durumlar olduğuna dikkat etmek önemlidir.

Önceki bölümde tartışılan bir kavram kullanılarak, bu problem şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{V \in C^{\infty}}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) - \alpha_1(\|x\|) \in \Sigma(x) \\ \alpha_2(\|x\|) - V(x) \in \Sigma(x) \\ -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) \in \Sigma(x,w) \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha, \sigma \in \mathcal{K}_\infty \end{array} \end{array} \tag{4.8}$$

Bu aşamada, tasarım fonksiyonları üzerindeki kısıtlamaların, problemin LMI ve SDP optimizasyon araçlarına uygun olacak şekilde yeniden formüle edilmesinin yollarını düşünmek genellikle iyi bir uygulamadır.

$$\begin{array}{ll} \underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) - \alpha_1(\|x\|) \in \Sigma(x) \\ \alpha_2(\|x\|) - V(x) \in \Sigma(x) \\ -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) \in \Sigma(x,w) \\ \alpha_1(s) = \sum_i c_{\alpha_{1_i}} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\alpha_1(s)}{ds} \geq 0 \\ \alpha_2(s) = \sum_i c_{\alpha_{2_i}} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\alpha_2(s)}{ds} \geq 0 \\ \alpha(s) = \sum_i c_{\alpha_i} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\alpha(s)}{ds} \geq 0 \\ \sigma(s) = \sum_i c_{\sigma_i} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\sigma(s)}{ds} \geq 0 \end{array} \end{array} \tag{4.9}$$

Ki bu ifade,

$$\begin{array}{ll} \underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) - \alpha_1(\|x\|) \in \Sigma(x) \\ \alpha_2(\|x\|) - V(x) \in \Sigma(x) \\ -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) \in \Sigma(x,w) \\ \alpha_1(s) = \sum_i^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\alpha_1(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ \alpha_2(s) = \sum_i^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\alpha_2(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ \alpha(s) = \sum_i^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\alpha(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ \sigma(s) = \sum_i^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i}\, ; s\dfrac{d\sigma(s)}{ds} \in \Sigma(s) \end{array} \end{array} \tag{4.10}$$

Olarak ifade edilebilir. Aşağıda, genellikle yerel olduğu için daha pratik olan sorunun lokal bir versiyonu tartışılmaktadır. Problemler kullanışlı özelliklerine göre formüle edilmiştir. Bu noktada verilen problemin bir analiz problemi olduğu ve gerekli işlemlerin, sistem analizinde veya sistem için tasarlanan bir kontrol sisteminin performansını değerlendirmek amacı ile oluşturulabileceği ifade edilmelidir. Bu analiz problemi gözleyici performansı için de gereklidir.

4.3 Nonlineer Sistemlerde Lokal Lyapunov Fonksiyonları ile ISS Analizi

ISS çalışmasına ilişkin yerel koruyuculuk sorunu problem ile ilgili verilen ifadenin soyut bir versiyonu için aşağıdakiler verilmiştir.

$$\begin{array}{ll} \underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) \\ & V(x) - \alpha_1(\|x\|) \geq 0, \forall x \in \{x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}\} \subseteq \mathbb{R}^n \\ s.t. & \alpha_2(\|x\|) - V(x) \geq 0, \forall x \in \{x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}\} \subseteq \mathbb{R}^n \\ & -\dot{V}(x, w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) \geq 0, \forall x \in \{x | g_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, N\}\} \subseteq \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \\ & \alpha_1, \alpha_2, \alpha, \sigma \in \mathcal{K}_{\infty} \end{array} \tag{4.11}$$

Burada sistemin belirli bir bölgedeki davranışı ele alınmıştır. Gerekli set ifadeleri genel olarak norm ile ifade edilen küresel bölgeler olarak karşımıza çıkar. Daha belirgin olması amacı ile,

$$\begin{array}{ll} \underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) \\ & V(x) - \alpha_1(\|x\|) - \sigma_{10}(x) - \sum_{i}^{N} \sigma_{1i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) \\ & \alpha_2(\|x\|) - V(x) - \sigma_{20}(x) - \sum_{i}^{N} \sigma_{2i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) \\ s.t. & -\dot{V}(x, w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) - \sigma_{30}(x) - \sum_{i}^{N} \sigma_{3i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x, w) \\ & \sigma_{j0}(x) \in \Sigma(x), \forall j \in \{1, \dots, 3\} \\ & \sigma_{1i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ & \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ & \sigma_{3i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} \\ & \alpha_1, \alpha_2, \alpha, \sigma \in \mathcal{K}_{\infty} \end{array} \tag{4.12}$$

İfadesi verilir, bu ifade istenen forma tam uymamak ile birlikte, gerekli düzenlemelerin yapılabileceği temeli oluşturur.

Ek olarak, eldeki problem, SOS ifadeleri kullanılarak,

$$
\begin{array}{lc}
\underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) \\
 & V(x) - \alpha_1(\|x\|) - \sigma_{10}(x) - \sum_{i}^{N} \sigma_{1i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) \\
 & \alpha_2(\|x\|) - V(x) - \sigma_{20}(x) - \sum_{i}^{N} \sigma_{2i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) \\
 & -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) - \sigma_{30}(x) - \sum_{i}^{N} \sigma_{3i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x,w) \\
 & \sigma_{j0}(x) \in \Sigma(x), \forall j \in \{1, \dots, 3\} \\
 & \sigma_{1i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
 & \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
s.t. & \sigma_{3i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
 & \alpha_1(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i} \, ; s \frac{d\alpha_1(s)}{ds} \geq 0 \\
 & \alpha_2(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i} \, ; s \frac{d\alpha_2(s)}{ds} \geq 0 \\
 & \alpha(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i} \, ; s \frac{d\alpha(s)}{ds} \geq 0 \\
 & \sigma(s) = \sum_{i}^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i} \, ; s \frac{d\sigma(s)}{ds} \geq 0
\end{array}
\tag{4.13}
$$

Olarak ifade edilen problem halini alır. Tasarım fonksiyonları için başka bir yeniden formüle etme, problemi belirli bir SOS optimizasyon problemine dönüştürür.

$$
\begin{array}{lll}
\underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(x) & (4.14) \\
& V(x) - \alpha_1(\|x\|) - \sigma_{10}(x) - \sum_i^N \sigma_{1i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) & \\
& \alpha_2(\|x\|) - V(x) - \sigma_{20}(x) - \sum_i^N \sigma_{2i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x) & \\
& -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) - \sigma_{30}(x) - \sum_i^N \sigma_{3i}(x) g_i(x) \in \Sigma(x,w) & \\
& \sigma_{j0}(x) \in \Sigma(x), \forall j \in \{1, \dots, 3\} & \\
& \sigma_{1i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} & \\
& \sigma_{2i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} & \\
s.t. & \sigma_{3i}(x) \in \Sigma(x), \forall i \in \{1, \dots, N\} & \\
& \alpha_1(s) = \sum_i^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i} \, ; s \frac{d\alpha_1(s)}{ds} \in \Sigma(s) & \\
& \alpha_2(s) = \sum_i^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i} \, ; s \frac{d\alpha_2(s)}{ds} \in \Sigma(s) & \\
& \alpha(s) = \sum_i^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i} \, ; s \frac{d\alpha(s)}{ds} \in \Sigma(s) & \\
& \sigma(s) = \sum_i^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i} \, ; s \frac{d\sigma(s)}{ds} \in \Sigma(s) &
\end{array}
$$

Bu aşamada, bu ifadenin bir SDP problemine dönüştürülebileceğine dikkat edilmelidir ve ilerleyen bölümlerde bununla ilgili tartışmalara yer verilmiştir.

4.4 Kararlılık Analiz Problemini Çözmek İçin ISS

ISS, önceki bölümde belirtildiği gibi, özellikle problem belirli bir kademeli ve/veya geri besleme bağlantılı yapıya sahipse, lineer olmayan otonom problemlerin kararlılığını ayrıştırma potansiyeline sahiptir.

4.5 SGT Kavramı ile Kararlılık Analizi

SGT genellikle birbirine bağlı LTI kararlılık analiz problemleri için kullanılır ve bu kavram kullanılarak sağlam kontrol tasarım problemleri resmi bir şekilde formüle edilebilir. Parametrik belirsizlik durumları için, bu araç aynı zamanda problemi optimal bir kontrol tasarım problemi olarak ifade etmek için de kullanılır.

4.6 Başka Kararlılık Çeşitleri

ISS ifadesinin yerine getirilmesinin zor olabileceği durumlar olduğu ve birtakım problemleri barındırdığı için bu kavramın doğrudan kullanılamayacağı, ancak sistemin gelen bir bozucu sinyaline karşı doğal bir gürbüzlük özelliği olduğu ve dış sinyale karşı belirli bir özelliği varsa, not edilmelidir. Bu gibi durumlarda, i-ISS kullanılabilir. Diğer bir ISS türü ise exp-ISS olarak literatürde yer almaktadır. Bu konu ile ilgili problemler ve gürbüzlük sorunları için de kullanılan exp-ISS ifadesidir.

4.6.1 iISS

Belirtilen i-ISS ifadesi için,

$$\alpha(\|x(t,x_0,w)\|) \leq \beta(\|x_0\|,t) + \int_0^t \gamma(\|w(s)\|)ds\,, \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \tag{4.15}$$

Ki burada, $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, $\beta \in \mathcal{KL}$ ve $\gamma \in \mathcal{K}$ tasarım parametreleri olarak seçilmiştir. Bu koşulun bir başka ifadesi ise şu şekildedir:

$$\|x(t,x_0,w)\| \leq \beta(\|x_0\|,t) + \gamma_1\left(\int_0^t \gamma_2(\|w(s)\|)ds\right), \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \tag{4.16}$$

Ki burada, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ tasarım parametreleri olarak seçilmiştir.

Bu problem için iISS-Lyapunov Fonksiyonu ile ilgili kısıtlamalar şu şekilde verilmiştir:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{4.17}$$

$$\dot{V}(x,w) \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|w\|), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m$$

Ki burada $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ ve , $\alpha, \sigma \in \mathcal{K}$ probleme göre uygun olarak seçilir. Bu formül genellikle $arctan(\cdot)$ ve $tanh(\cdot)$ fonksiyon içeren koruyuculuk problemlerinde kullanılır. Bu problem ile ilgili olarak, gelen bozucu sinyalinin belirli kısıtlamalar altında olduğu ifadesi kabul edilmiştir.

4.6.2 exp-ISS

Exp-ISS için gerekli koşul,

$$\|x(t,x_0,w)\| \leq \beta(\|x_0\|,t) + \gamma_1\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\gamma_2(\|w(s)\|)ds\right), \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \tag{4.18}$$

Ki burada, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ tasarım parametreleri olarak seçilir ve $\lambda > 0$ yakınsama oranını gösteren bir parametredir.

Bu problem için exp-ISS-Lyapunov Fonksiyonu ile ilgili kısıtlamalar şu şekilde verilmiştir:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{4.19}$$

$$\dot{V}(x,w) \leq -\lambda V(x) + \sigma(\|w\|), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m$$

Ki burada $\alpha_1, \alpha_2, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$ ve , $\lambda > 0$ gerekli şekilde seçilir.

4.7 IOS

IOS kavramı için,

$$\|h(x(t,x_0,w),w)\| \leq \beta(\|x_0\|,t) + \gamma(\|w(s)\|), \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \tag{4.20}$$

Ki burada, $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$,ve $\beta \in \mathcal{KL}$ gerekli parametrelerdir.

Bir sistemin bu özelliği genellikle sadece giriş ve çıkış sinyalleri arasındaki ilişki dikkate alındığında kullanılır ve bu formülasyonda sistem hakkında çok önemli olmadığı ifade edilen bir bilgi vardır.

4.8 OSS

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.21}$$

$$y = h(x)$$

OSS koşulu,

$$\|x(t, x_0, w)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma\left(\|y_{[0,t]}\|_\infty\right), \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \tag{4.22}$$

Ki burada, $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$,ve $\beta \in \mathcal{KL}$ gerekli parametrelerdir.

Bir sistemin bu özelliği genellikle, belirli bir çıkış sinyali ile verilen zamanla değişmeyen doğrusal olmayan otonom sistemin gözlenebilirlik özelliklerini analiz etmek için incelenir.

Karşılık gelen OSS-Lyapunov fonksiyonunun, aşağıdaki gibi verilen kısıtlamaları sağlayacak şekilde oluşturulması gerekir:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{4.23}$$

$$\dot{V}(x, w) \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|h(x)\|), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ki burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$ gerekli parametrelerdir.

4.9 IOSS

IOSS kavramı için,

$$\dot{x} = f(x, w) \tag{4.24}$$

$$y = h(x)$$

IOSS koşulu,

$$\|x(t, x_0, w)\| \leq \max\left\{\beta(\|x_0\|, t), \gamma_1\left(\sup_{0\leq\tau\leq t}\|w(\tau)\|\right), \gamma_2\left(\sup_{0\leq\tau\leq t}\|y(\tau)\|\right)\right\} \tag{4.25}$$

$$\forall t \geq t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m$$

Ki burada, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$,ve $\beta \in \mathcal{KL}$ gerekli parametrelerdir.

Bir sistemin bu özelliği genellikle, belirli bir çıkış sinyali ile verilen zamanla değişmeyen doğrusal olmayan otonom olmayan sistemin gözlenebilirlik özelliklerini analiz etmek için incelenir.

4.10 OIS

Belirli bir lineer olmayan otonom sistemin minimum faz özelliklerini analiz etmek için türetilen yeni bir kavram olan çıktıdan girdiye kararlık (OIS) ifadesi için aşağıdaki işlem şu şekilde belirtilir:

$$\boldsymbol{z^k} := \left[z_1, \dot{z}_1, \ddot{z}_1, \dots, z_1^{(k)}; \dots; z_1, \dot{z}_1, \ddot{z}_l, \dots, z_l^{(k)}\right] \tag{4.26}$$

Ki bu ifade bir operatördür, $z \in \mathbb{R}^l$ ifadesini alır ve çıkış olarak $\boldsymbol{z^k} \in \mathbb{R}^{l(k+1)}$ terimini verir. Sonraki ifadelerde gerekli bir operasyondur.

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x, w) \tag{4.27}$$

$$y = h(x)$$

OIS kavramı,

$$\left\| \begin{matrix} u(t) \\ x(t) \end{matrix} \right\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\boldsymbol{y^N}(\tau)\|\right), \forall t \geq t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^m \tag{4.28}$$

Ki burada, $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$, $\beta \in \mathcal{KL}$ ve N pozitif bir tamsayıdır. Verilen terimler tasarım parametreleri olarak seçilir.

Bir sistemin bu özelliği genellikle, belirli bir profilde bozulmaya sahip olan belirli bir sistemin minimum fazla ilgili karakteristiğini analiz etmek için incelenir.

5. SOS OPTİMİZASYONU İLE KONTROL TASARIMI

Bu bölümde, gözlemci tasarımı problemi için kontrol sentezi problemi tartışılmaktadır. Bu bölüm şu şekilde düzenlenmiştir. İlk olarak, LTI sistemleri için sentez problemi, optimizasyon problemi formülasyonunda kullanılan manipülasyonları sunmak için tartışılmaktadır. Daha sonra SOS optimizasyon yöntemleri kullanılarak doğrusal olmayan sentez problemi ele alınmıştır.

5.1 LTI Tam Durum Geri Besleme Stabilizasyonu

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5.1}$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumunu, $u \in \mathbb{R}^m$ ise sisteme giren kontrol sinyallerini temsil eder. Kontrol yasası şu şekilde verilir:

$$u = Kx \tag{5.2}$$

Sistemin durumlarında doğrusal olan. Bunun işe yaraması için kapalı döngü kararlılık analiz edilmelidir. Kapalı döngü dinamikleri şu şekilde verilir:

$$\dot{x} = (A + BK)x \tag{5.3}$$

Başlangıçta kontrol sentezi problemini bir optimizasyon problemi olarak oluşturmak için kullanılabilen,

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ K \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{array} & P, K \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ [A + BK]^T P + P[A + BK] < 0 \end{array} \end{array} \tag{5.4}$$

BMI formunda olan ve bu formda olan ifade dışbükey değildir. Ek olarak, tasarımcının bu sorunu dışbükey olarak ifade etmesini sağlayan bir değişken değişikliği vardır.

$$\begin{array}{ccc} \underset{\substack{P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ W \in \mathbb{R}^{m\times n}}}{Find} & P, K & \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ AP + PA^T + BW + W^T B^T < 0 \end{array} \end{array} \quad (5.5)$$

Ki burada kontrol ifadesi,

$$K = WP^{-1} \quad (5.6)$$

Olarak elde edilir.

Bu bölümde kullanılan yöntem, sonraki bölümler için bir temel teşkil etmektedir ki burada değişkenlerin değiştirilmesi veya problem yapısından yararlanarak, problemi konveks olarak yeniden düzenlemek mümkün olabilir.

5.2 LTI Tam Durum Geri Besleme Stabilizasyonu ve Bozucu Bastırımı

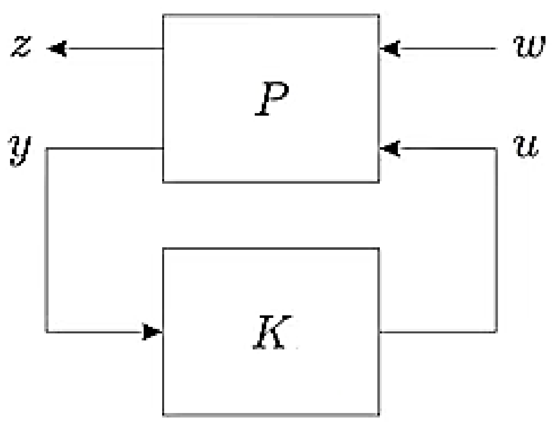
Verilen sistem için,

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (5.7)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumunu, $u \in \mathbb{R}^m$ ise sisteme giren kontrol sinyallerini temsil eder. Bu, genellikle $\mathcal{H}_\infty$ kontrol tasarımı çerçevesinde kullanılan genel doğrusal bozulma reddi temsilidir. Şekil 5.1'de giriş ve çıkışlar arasındaki ilişki verilmiştir.



Şekil 5.1 : Gürbüz kontrol kapalı çevrim blok diyagramı

Tam durum geri besleme formülasyonu için aşağıdakiler elde edilebilir:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{5.8}$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$

$$y = x$$

Kontrol ifadesi,

$$u = Ky \tag{5.9}$$

Ki burada K, durum-uzay gösterimi şu şekilde verilen dinamik bir sistemi temsil eder:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Ki burada bu doğrusal formdadır ve açıkça şu şekilde ifade edilebilir:

$$u = Fx \tag{5.11}$$

Bu ifade için verilen girdi ve çıktı terimleri arasındaki ilişki şu şekilde verilir:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Ki burada z, durum tahmini hata terimleri gibi en aza indirilecek terimleri belirtir. Bu genel sistemin durum uzayı gösterimi şu şekilde verilir:

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

Ki burada yapısından dolayı bazen 9-bloklu temsil olarak anılır. Bozucu ile objektif terimler arasındaki dinamik sistemi hesaplamak için LFT kullanılır ve dinamikler şu şekilde verilir:

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{bmatrix} A + B_2 F & B_1 \\ C_1 + D_{12} F & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Bu ifade kullanılarak optimizasyon problemi formunda şu şekilde yazılabilir:

$$\min_{F \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|\mathcal{F}_l(P,K)\|_{\mathcal{H}_\infty} \tag{5.15}$$

Buradaki norm, $\mathcal{H}_\infty$ normunu temsil eder. Problemin geometrik yeniden formülasyonu şu şekilde verilir:

$$\begin{array}{cc} \min & \\ \gamma \in \mathbb{R} & \gamma \\ F \in \mathbb{R}^{m \times n} & \\ s.t. & \|\mathcal{F}_l(P,K)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma \end{array} \tag{5.16}$$

KYP Lemma ile, problemin açık bir temsili şu şekilde elde edilebilir:

$$\begin{array}{cc} \min & \\ \gamma \in \mathbb{R} & \\ F \in \mathbb{R}^{m \times n} & \gamma \\ X \in \mathbb{R}^{n \times n} & \\ & X = X^T > 0 \\ s.t. & \begin{bmatrix} < X[A + B_2F] >_s & XB_1 \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} [C_1 + D_{12}F]^T \\ D_{11}^T \end{bmatrix} [[C_1 + D_{12}F] \quad D_{11}] < 0 \end{array} \tag{5.17}$$

Ancak bu bir LMI formülasyonu değildir, ikinci terim doğrusal değildir. Bununla birlikte, ikinci ifadedeki doğrusal olmama, ikinci dereceden bir doğrusal olmama türüdür ve Schur Lemma kullanılarak bir LMI biçiminde yeniden yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} M & R \\ * & Q \end{bmatrix} < 0 \leftrightarrow \begin{matrix} Q < 0 \\ M - RQ^{-1}R^T < 0 \end{matrix}, \forall S \in \mathbb{S}^n, Q \in \mathbb{S}^m, R \in \mathbb{R}^{n \times m} \tag{5.18}$$

Buradan da ikinci dereceden kısıtlama,

$$\begin{bmatrix} < XA >_s & XB \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} [C \quad D] < 0 \tag{5.19}$$

Ve bu ifade ile,

$$\begin{bmatrix} < XA >_s & XB & C^T \\ * & -\gamma I & D^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.20}$$

Bazen Seyreltilmiş KYP Lemma olarak da anılır. Bunu kullanarak, ikinci kısıtlama şu şekilde yazılır:

$$\begin{bmatrix} < X[A + B_2F] >_s & XB_1 & [C_1 + D_{12}F]^T \\ * & -\gamma I & D_{11}^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.21}$$

Kısıtlamanın X ve F ifadelerinde hala bilineer olduğu görülebilir. Bu, seyreltilmiş KYP Lemma ifadesinin ikili versiyonu kullanılarak aşılabilir.

Belirli bir sistem için

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Kazanç olarak verilirse

$$\|G\|_\infty < \gamma \tag{5.23}$$

Daha sonra şu şekilde verilen aşağıdaki optimizasyon problemi

$$\underset{Y \in \mathbb{R}^{n \times n}}{Find} \quad Y \tag{5.24}$$

$$s.t. \quad \begin{matrix} Y = Y^T > 0 \\ \begin{bmatrix} < AY >_s & B & YC^T \\ * & -\gamma I & D^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{matrix}$$

Olarak ifade edilmesi mümkündür. Ek olarak, bu orijinal problemi yeniden formüle etmek için de kullanılabilir.

Son olarak, sorun şu şekilde yeniden ifade edilebilir:

$$\underset{\substack{\gamma > 0 \\ Y \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ Z \in \mathbb{R}^{m \times n}}}{min} \quad \gamma \tag{5.25}$$

$$s.t. \quad \begin{matrix} Y = Y^T > 0 \\ \begin{bmatrix} < AY + B_2Z >_s & B_1 & YC_1^T + Z^T D_{12}^T \\ * & -\gamma I & D_{11}^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{matrix}$$

Daha sonra kontrol terimi $F = ZY^{-1}$ olarak geri alınabilir. Bu sorunu formüle etmek için yürütülen tipik manipülasyonların, bozucu bastırımı sorunuyla ilgili diğer birçok kontrol tasarımı probleminde ortak bir tema olduğu belirtilmelidir.

5.3 Karesel Kararlılık Kavramı ile LTI Kontrol Problemi

Verilen sistem için

$$\dot{x} = A(\delta)x + B(\delta)u \tag{5.26}$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin durumunu, $u \in \mathbb{R}^m$ ise sisteme giren kontrol sinyallerini temsil eder. δ Terimi, $\boldsymbol{\Delta}$ ile gösterilen bir dışbükey kümeden olduğu bilinen parametrik belirsizliği temsil eder. Aynı kontrol yasası yapısını kullanarak,

$$u = Kx \tag{5.27}$$

Durum açısından doğrusal olan kapalı döngü şu şekilde verilir:

$$\dot{x} = (A(\delta) + B(\delta)K)x \tag{5.28}$$

Ki burada, verilen ifade olarak basitleştirilebilir,

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ K \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{array} & P, K \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ [A(\delta) + B(\delta)K]^T P + P[A(\delta) + B(\delta)K] < 0, \forall \delta \in \boldsymbol{\Delta} \end{array} \end{array} \tag{5.29}$$

Ki buradaki ifade BMI formundadır ve bu formda, önceki bölümde tartışılan aynı değişken değiştirme kullanılarak, problem şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ W \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{array} & P, K \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ A(\delta)P + PA(\delta)^T + B(\delta)W + W^T B(\delta)^T < 0, \forall \delta \in \boldsymbol{\Delta} \end{array} \end{array} \tag{5.30}$$

İkinci dereceden kararlılık tanımını kullanarak,

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ W \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{array} & P, K \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ A(\delta_i)P + PA(\delta_i)^T + B(\delta_i)W + W^T B(\delta_i)^T < 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{array} \end{array} \tag{5.31}$$

Yeniden yazılabilir, ki burada kontrol yasası daha sonra şu şekilde kurtarılabilir:

$$K = WP^{-1} \tag{5.32}$$

Ancak bu tip formülasyon özellikle statik belirsizlikler için gerekli olmayabilir ki burada sağlam kararlılık ikinci dereceden kararlılığa göre daha uygun olabilir.

5.4 LTI Tam Durum Geri Besleme Stabilizasyonu ve İkinci Dereceden Kararlılık ile Bozucu Bastırımı

Bu, dışbükey bir politop biçimindeki bir kümeye ait parametrik belirsizlik sorununun genel bir temsilidir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\delta)x + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= x \end{aligned} \tag{5.33}$$

Kontrol ifadesi,

$$u = Ky \tag{5.34}$$

Ki burada durum uzayı gösterimi açıkça şu şekilde verilir:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

Verilen ifadede F tarafından parametreleştirilen doğrusal kontrol şu şekilde verilir:

$$u = Fx \tag{5.36}$$

KYP Lemma, Schur Lemma ve ikinci dereceden doğrusal olmayan terim manipülasyonları kullanılarak, kontrol sentezi problemine ilişkin optimizasyon problemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{gathered} \min_{\substack{\gamma > 0 \\ Y \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ Z \in \mathbb{R}^{m \times n}}} \gamma \\ s.t. \quad Y = Y^T > 0 \\ \begin{bmatrix} < A(\delta)Y + B_2 Z >_s & B_1 & YC_1^T + Z^T D_{12}^T \\ * & -\gamma I & D_{11}^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \forall \delta \in \mathbf{\Delta} \end{gathered} \tag{5.37}$$

Daha sonra kontrol terimi $F = ZY^{-1}$ olarak geri alınabilir. İkinci dereceden kararlılık tanımı ile bu problemin bir probleme dönüştürülebileceğini belirtmek gerekir ki burada sadece belirsizlik kümesi ile ilgili terimlerin köşeleri ortaya çıkan kısıtlar uygulanabilir bir işlem türüdür. İkinci dereceden kararlılık ifadesi kullanılarak verilen problem şuna indirgenmiştir.

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\gamma > 0 \\ Y \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ Z \in \mathbb{R}^{m\times n}}} \quad & \gamma \\ s.t. \quad & Y = Y^T > 0 \\ & \begin{bmatrix} < A(\delta_i)Y + B_2 Z >_s & B_1 & YC_1^T + Z^T D_{12}^T \\ * & -\gamma I & D_{11}^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \forall i \in \{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{N}\} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Ki burada belirsizlik kümesinin dışbükey bir politop olduğu varsayılır, ancak ki burada kümenin daha karmaşık olduğu durumlar için, problemi verilen form ile uyumlu bir şekilde yeniden düzenlemek için yapılabilecek bazı manipülasyonlar vardır. Bununla birlikte, her varsayımla probleme dahil edilecek muhafazakarlık derecesinin farkında olunması gerektiğine dikkat etmek önemlidir.

5.5 Nonlineer Sentez Problemi

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{5.39}$$

Ki burada u kontrol sinyali terimlerini temsil eder ve x durum terimlerini temsil eder. Daha yapılandırılmış dinamik gösterimi şu şekilde verilir:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{5.40}$$

Bu genellikle yararlıdır ve oldukça genel bir tanımdır. Giriş terimini parametreleştirerek,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x; \theta) \tag{5.41}$$

Yazılabilir.

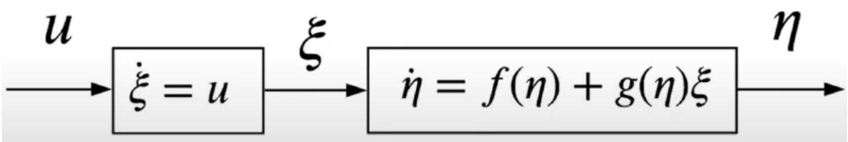
Kapalı döngü koruyuculuk analizi sorunu şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{V \in C^{\infty} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}}{Find} & (V(x), \theta) \\ & V(x) \in \Sigma(x) \\ s.t. & -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] \in \Sigma(x) \end{array} \tag{5.42}$$

Ki burada kontrol parametreleri için optimizasyon problemi SOS ifadeleri kullanılarak belirtilir. Bu problemin farklı formülasyonları aşağıdaki bölümlerde tartışılmaktadır.

5.6 Sentez Problemini Bölmek İçin Geri Adım Kontrol Metodu

Geri adım kontrolü, karşılık gelen sistemlerle ilişkili CLF ifadelerini sistematik olarak oluşturmak için kullanılan bir kontrol algoritmasıdır. Sıklıkla karşılaşılabilen bir tür modüler yapıya sahip problemler için özellikle önemlidir. Genel sistemi kararsız hale getirebilecek yüksek büyüklükte kontrol sinyalleri ürettiği bilindiğinden, kontrol yönteminin kendisinin bazı dezavantajları vardır. Bunun ile birlikte CLF ifadeleri oluşturma yöntemi, denetleyiciyi sistematik olarak parametrelendirmek için yararlıdır. Şekil 5.2'de, tasarım sürecini kolaylaştırmak için kullanılabilecek modüler bir yapı verilmiştir.



Şekil 5.2 : Kaskad yapılı nonlineer sistem

Sistemin durum uzayı gösterimi şu şekilde verilir:

$$\begin{gathered} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{gathered} \tag{5.43}$$

Ki burada ξ ikinci sisteme giren bir kontrol sinyali olarak kabul edilebilir. Sistem-1 için bir kontrol algoritması tasarlamak, böylece ξ sistem-2 ifadesinin dinamiklerini stabilize eder, sentez probleminin modüler forma getirilmesi olarak kabul edilir.

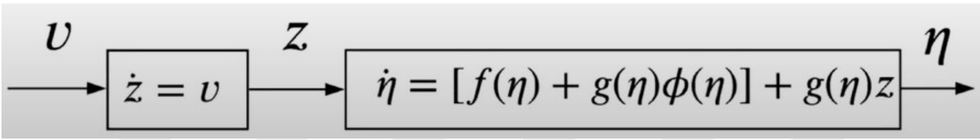
Problem, dinamikleri şu şekilde verilen bir probleme dönüştürülebilir:

$$\dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z \qquad (5.44)$$
$$\dot{z} = u$$

Ki burada bu uzayda z aşağıdaki gibi verilen izleme hatası olarak kabul edilebilir:

$$z = \xi - \phi(\eta) \qquad (5.45)$$

Ki burada, $\phi(\eta)$ terimi system-2 için tasarlanır. Şekil 5.3 bu yapıyı ifade eder.



Şekil 5.3 : Kaskad yapılı nonlineer sistem ve kontrol

Özellikle mekanik sistemlerde sıkça karşılaşılan bir form olan kaskad formlara sahip sistemlerde bu tip prosesler, proses sadeleştirmesi için kullanılabilir.

5.7 GAS İçin CLF Terimleri

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad (5.46)$$

Olarak yazılabileceğini varsayarsak

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad (5.47)$$

Ki burada bu temsilin, sonraki bölümlerde tartışılacak olan optimizasyon problemi formülasyonları için bazı faydaları vardır. Kontrol terimi açıkça, ek olarak verilen parametreler ile birlikte şu şekilde yazılabilir:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x; \theta) \qquad (5.48)$$

Ki burada, θ terimleri denetleyiciyi parametreleştirir ve bunlar tasarım parametreleridir. Önceki bölümde olduğu gibi, optimizasyon problemi şu şekilde oluşturulmuştur.

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{V \in \mathcal{C}^{\infty} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}}{Find} & (V(x), \theta) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) \in \Sigma(x) \\ -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] \in \Sigma(x) \end{array} \end{array} \tag{5.49}$$

Ki burada bilineer nonlineerlik, sürece engel teşkil eder. CLF terimini açıkça ifade etmek için,

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{P \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}}{Find} & (P, \theta) \\ s.t. & \begin{array}{c} m_1(x)^T P m_1(x) \in \Sigma(x) \\ -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] \in \Sigma(x) \end{array} \end{array} \tag{5.50}$$

Verilen parametreler kullanılabilir. Ek olarak, burada ilk kısıtlama yönetilebilir, ancak ikinci kısıtlamanın yeniden formüle edilmesi gerekir. Bu amaçla, ek parametreler kullanılarak, aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{P \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1} \\ Q \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}}{Find} & (P, Q, \theta) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) = m_1(x)^T P m_1(x) \\ P = P^T > 0 \\ -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] = -m_2(x)^T Q m_2(x) \end{array} \end{array} \tag{5.51}$$

Ki burada ikinci kısıtlama soyut olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{P \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1} \\ Q \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}}{Find} & (P, Q, \theta) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) = m_1(x)^T P m_1(x) \\ P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \\ \qquad\qquad i_1, i_2 \in \{1, \dots, N_2\} \\ L\left(Q_{i_1 i_2}, P_{i_3 i_4} \theta_{i_5}\right) = 0, i_3, i_4 \in \{1, \dots, N_1\} \\ \qquad\qquad i_5 \in \{1, \dots, M\} \end{array} \end{array} \tag{5.52}$$

Ki burada $L(\cdot,\cdot)$ lineer bir operatördür ve temel olarak doğrusal olmayan terimlerin $P_{i_3 i_4}\theta_{i_5}$ içinde olduğunu temsil eder.

Bu ifade verilen ilk problemin yapısından dolayı beklenen bir durumdur.

Bir sonraki aşamada problemi bir fizibilite problemi olarak ele almak yerine problem bir optimizasyon problemine dönüştürülür ki burada minimize edilecek terimler çift doğrusal terimleri içeren eşitlik kısıtlarının LHS ifadeleridir.

$$\min_{\substack{P \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1} \\ Q \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}} \quad \sum_{i}^{N_3} \left(L_{1_i}(Q,P,\theta)\right)^2 \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & P = P^T > 0 \\ & Q = Q^T > 0 \\ & L_{2_i}(Q,P) = 0, i \in \{1, \dots, N_4\} \end{aligned}$$

Ki burada $L_{1_i}(Q,P,\theta)$ terimleri doğrusal olarak Q ve P terimlerinin girişlerini içeren terimleri ve P ve θ girişlerinde çift doğrusal olan terimleri içerir. $L_{2_i}(Q,P)$ Terimleri, yalnızca doğrusal olarak Q ve P terimlerinin girişlerini içeren terimleri belirtir.

Bu optimizasyon problemi hala doğrusal değildir, ancak belirli bir θ terimi için bu bir dışbükey optimizasyon problemidir.

5.8 DCP İfadesinin Türevini Alma

DCP (Disciplined Convex Program) özel bir dışbükey optimizasyon problemi türüdür. DPP, tasarımcının bir dışbükey optimizasyon probleminin çözümünü, o problemin nesnel teriminde ve/veya eşitlik teriminde görünebilen bir parametreye göre ayırt etmesine izin veren bir problem türüdür. Yöntem, DCP ifadesinin yapısına ve örtük fonksiyon teoremine dayanmaktadır. Bu teknik, makine öğrenimi topluluklarının sayısal avantajları için makine öğrenimi modellerinde parametreden çözüme işlevlerini uyguladıkları gerçeği nedeniyle ciddi ilgi görmüştür. Yöntem, finans ve yöneylem araştırması alanlarında sıklıkla dile getirilen iki düzeyli optimizasyon problemlerinde kullanılmaktadır.

Söz konusu problem DCP olduğundan, optimallik koşulları doğrudan üretilir ve bu, parametrenin ve çözümün örtük bir fonksiyonuyla sonuçlanır. Kapalı fonksiyon teoremi kullanılarak, parametreye göre türev verimli bir şekilde hesaplanabilir.

5.9 Nonlineer Sentez Problemi ve Parametre Optimizasyonu

Bir önceki bölümde verildiği gibi, sentez problemi,

$$\left(P(\theta),Q(\theta)\right)=\begin{array}{cc} \begin{array}{c} argmin \\ P\in\mathbb{R}^{N_1\times N_1} \\ Q\in\mathbb{R}^{N_2\times N_2} \\ \theta\in\mathbb{R}^{M} \end{array} & \sum_{i}^{N_3}\left(L_{1_i}(Q,P,\theta)\right)^2 \\ s.t. & \begin{array}{c} P=P^T>0 \\ Q=Q^T>0 \\ L_{2_i}(Q,P)=0, i\in\{1,\dots,N_4\} \end{array} \end{array} \tag{5.54}$$

Ki burada verilen bir θ_0 değeri için problemin çözümü $\left(P(\theta_0),Q(\theta_0)\right)$ açıkça ifade edildiği şekliyle parametre terimine bağlıdır. Koni programlama nedeniyle, parametrelerden çözümlere bir geçiş vardır ve bu geçiş lineerdir.

$$\theta\rightarrow\boxed{\begin{array}{cc} \begin{array}{c} argmin \\ P\in\mathbb{R}^{N_1\times N_1} \\ Q\in\mathbb{R}^{N_2\times N_2} \\ \theta\in\mathbb{R}^{M} \end{array} & \sum_{i}^{N_3}\left(L_{1_i}(Q,P,\theta)\right)^2 \\ s.t. & \begin{array}{c} P=P^T>0 \\ Q=Q^T>0 \\ L_{2_i}(Q,P)=0, i\in\{1,\dots,N_4\} \end{array} \end{array}}\rightarrow\begin{array}{c}\left(P(\theta),Q(\theta)\right)\rightarrow \\ \theta\rightarrow\end{array}\boxed{\sum_{i}^{N_3}\left(L_{1_i}(Q,P,\theta)\right)^2}\rightarrow J\left(P(\theta),Q(\theta),\theta\right) \tag{5.55}$$

Bu ifadeden,

$$\left.\frac{\partial J(P(\theta),Q(\theta),\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = \left.\frac{\partial J(P(\theta),Q(\theta),\theta)}{\partial P(\theta)}\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} + \left.\frac{\partial J(P(\theta),Q(\theta),\theta)}{\partial Q(\theta)}\frac{\partial Q(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} + \left.\frac{\partial J(P(\theta),Q(\theta),\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} \tag{5.56}$$

Elde edilir.

Belirli bir parametre değeri için belirtilen gradyan üretimi kullanılarak, maliyet terimi $J(P(\theta),Q(\theta),\theta)$ azalacak şekilde parametreleri güncellemek için hesaplanan gradyan terimleri kullanılabilir. Bu formülasyon iki nedenden dolayı yararlıdır. Birincisi, problemi bu şekilde ifade etmek, hesaplama açısından daha verimlidir ve gradyan terimlerini verimli bir şekilde hesaplamak için kullanılabilecek birçok sayısal araç vardır. İkincisi, bu formülasyonla, J maliyet terimi, daha yapılandırılmış olan θ teriminin bir fonksiyonu olarak kabul edilir. $\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}$ Terimini elde etmek için nümerik türev almak yerine, $\frac{\partial J(P(\theta),Q(\theta),\theta)}{\partial \theta}$ teriminin yapısı kullanılarak, (P,Q) elde edilebilir.

5.10 Lokal Nonlineer Sentez Problemi ve Parametre Optimizasyonu

Lokal sentez problemi için formülasyonlar benzerdir ancak tasarlanacak daha fazla terim içerir. Belirli bir doğrusal olmayan sistem için,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x;\theta) \tag{5.57}$$

Buradan,

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{V \in \mathcal{C}^{\infty} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}}{Find} & (V(x),\theta) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) > 0, \forall x \in \{x \mid \|x\| \leq r\} \\ -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] > 0, \forall x \in \{x \mid \|x\| \leq r\} \end{array} \end{array} \tag{5.58}$$

İfadesi elde edilir. Ek olarak, burada verilen terimler, denge noktası etrafındaki bir küresel bölge için tanımlanır. Başka küme temsilleri de vardır, ancak genelliği kaybetmeden bu ifade, optimizasyon problemi yapısını göstermek için kullanılır. Önceki bölümde tartışılan SOS formülasyonlarıyla bağdaşmayan küme terimlerini ifadeye ekleyerek,

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{V \in \mathcal{C}^{\infty} \\ \theta \in \mathbb{R}^M}}{Find} & (V(x),\theta) \\ s.t. & \begin{array}{c} V(x) > 0, \forall x \in \{x \mid r - \|x\| \geq 0\} \\ -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] > 0, \forall x \in \{x \mid r - \|x\| \geq 0\} \end{array} \end{array} \tag{5.59}$$

Formundaki ifade elde edilebilir. Ek olarak, burada set ile ilgili terimler olarak verilir.

$$g_1(x) = r - \|x\| \tag{5.60}$$

SOS metodu kullanılarak,

$$\begin{array}{c} Find \\ V \in \mathcal{C}^{\infty} \\ \theta \in \mathbb{R}^{M} \end{array} \qquad (V(x), \theta) \tag{5.61}$$

$$s.t. \quad \begin{array}{c} V(x) - \sigma_1(x) g_1(x) \in \Sigma(x) \\ -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] - \sigma_2(x) g_1(x) \in \Sigma(x) \\ \sigma_1(x) \in \Sigma(x) \\ \sigma_2(x) \in \Sigma(x) \end{array}$$

Elde edilir ve CLF ifadesi,

$$\begin{array}{c} Find \\ V \in \mathcal{C}^{\infty} \\ \theta \in \mathbb{R}^{M} \end{array} \qquad (V(x), \theta) \tag{5.62}$$

$$s.t. \quad \begin{array}{c} V(x) - [m_{s1}(x)^T P_{s1} m_{s1}(x)] g_1(x) \in \Sigma(x) \\ -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] - [m_{s1}(x)^T P_{s2} m_{s1}(x)] g_1(x) \in \Sigma(x) \\ P_{s1} = P_{s1}^T > 0 \\ P_{s2} = P_{s2}^T > 0 \end{array}$$

Olarak yazılır. Verilen parametreler kullanılarak,

$$\begin{array}{c} Find \\ P \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1} \\ Q \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2} \\ P_{s1} \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_3} \\ P_{s2} \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_4} \\ \theta \in \mathbb{R}^{M} \end{array} \qquad (P, Q, P_{s1}, P_{s2}, \theta) \tag{5.63}$$

$$s.t. \quad \begin{array}{c} \sigma_1(x) = [m_{s1}(x)^T P_{s1} m_{s1}(x)] \\ \sigma_2(x) = [m_{s1}(x)^T P_{s1} m_{s1}(x)] \\ V_P(x) = m_1(x)^T P m_1(x) \\ V_P(x) - \sigma_1(x) g_1(x) \in \Sigma(x) \\ V_Q(x) = [m_2(x)^T Q m_2(x)] \\ \dot{V}_P(x) = \dfrac{\partial V_P(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u(x;\theta)] \\ -\dot{V}_P(x) - \sigma_2(x) g_1(x) = V_Q(x) \\ P_{s1} = P_{s1}^T > 0 \\ P_{s2} = P_{s2}^T > 0 \\ P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \end{array}$$

Elde edilir. Ancak, ikinci kısıtlama hala doğrusal değildir. İfadeyi basitleştirmek için, tanıtılan matrisler tarafından parametreleştirilmiş terimleri kullanarak,

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} Find \\ P \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1} \\ Q \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2} \\ P_{s1} \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_3} \\ P_{s2} \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_4} \\ \theta \in \mathbb{R}^M \end{array} & (P, Q, P_{s1}, P_{s2}, \theta) \\
s.t. & \begin{array}{c} \sigma_1(x) = [m_{s1}(x)^T P_{s1} m_{s1}(x)] \\ \sigma_2(x) = [m_{s1}(x)^T P_{s1} m_{s1}(x)] \\ V_P(x) = m_1(x)^T P m_1(x) \\ V_P(x) - \sigma_1(x) g_1(x) \in \Sigma(x) \\ V_Q(x) = [m_2(x)^T Q m_2(x)] \\ i_1, i_2 \in \{1, \dots, N_2\} \\ L\left(Q_{i_1 i_2}, P_{i_3 i_4} \theta_{i_5}\right) = 0, i_3, i_4 \in \{1, \dots, N_1\} \\ i_5 \in \{1, \dots, M\} \\ P_{s1} = P_{s1}^T > 0 \\ P_{s2} = P_{s2}^T > 0 \\ P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \end{array}
\end{array}
\tag{5.64}
$$

Elde edilir. Ki burada $L(\cdot,\cdot)$ lineer bir operatördür ve temel olarak $P_{i_3 i_4}\theta_{i_5}$ nonlineer terimlerini temsil eder. Bir sonraki aşamada, problemi bir fizibilite problemi olarak ele almak yerine problem bir optimizasyon problemine dönüştürülür ki burada minimize edilecek terimler çift doğrusal terimleri içeren eşitlik kısıtının LHS terimleridir.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} min \\ P \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1} \\ Q \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2} \\ P_{s1} \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_3} \\ P_{s2} \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_4} \\ \theta \in \mathbb{R}^M \end{array} & \sum_{i}^{N_5} \left(L_{1_i}(Q, P, \theta)\right)^2 \\
s.t. & \begin{array}{c} \sigma_1(x) = [m_{s1}(x)^T P_{s1} m_{s1}(x)] \\ \sigma_2(x) = [m_{s1}(x)^T P_{s1} m_{s1}(x)] \\ V_P(x) = m_1(x)^T P m_1(x) \\ V_P(x) - \sigma_1(x) g_1(x) \in \Sigma(x) \\ V_Q(x) = [m_2(x)^T Q m_2(x)] \\ L_{2_i}(Q, P) = 0, i \in \{1, \dots, N_6\} \\ P_{s1} = P_{s1}^T > 0 \\ P_{s2} = P_{s2}^T > 0 \\ P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \end{array}
\end{array}
\tag{5.65}
$$

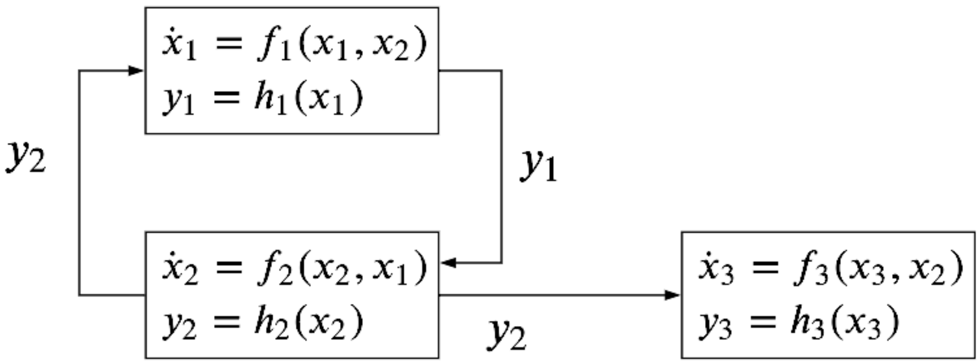
Ki burada $L_{1_i}(Q,P,\theta)$ terimleri P ve Q nonlineer elemanlarını temsil eder ve bu terimler bilineerdir. $L_{2_i}(Q,P)$ Terimi, P ve Q matris elemanlarının bulunduğu lineer eşitlikleri temsil eder.

Bu optimizasyon problemi hala doğrusal değildir, ancak belirli bir θ terimi için bu bir dışbükey optimizasyon problemidir. Optimizasyon problemi daha sonra önceki bölümde verildiği gibi formüle edilebilir.

5.11 Sentez Problemindeki Özel Durumlar ve Yapılar

Belirtilen optimizasyon problemlerinin, durum terimlerini elde etmek için geri adımlı kontrol yöntemi kullanılarak ve doğrusal olmayan sistemde modüler yapı kullanılarak boyut olarak önemli ölçüde azaltılabileceği belirtilmelidir. Sistemlerde bulunan modüler yapıları tespit etmek için grafik tabanlı yöntemler vardır. Bir diğer önemli araç pasifliktir, eğer problemin bir kısmı modüler ve pasif ise, bu tür bir bilgi tasarım sürecinin karmaşıklığını önemli ölçüde azaltabilir.

Bu teknikleri kullanarak koruyuculuk sorununu önemli ölçüde azaltabilirsiniz. Bunu göstermek için Şekil 5.4'teki bir yapıya sahip bir sistem verilmiştir.



Şekil 5.4 : Özel yapıya sahip genel nonlineer sistem

Genel sistem 3 alt sistemden oluşmaktadır. Sistem-1 ve sistem-2 ayrı ayrı daralmaya sahip ve sistem-3 0-GAS ve ISS olarak belirlenirse, genel sistemin GAS olduğu sonucuna varılabilir.

6. ISS İLE GÖZLEYİCİ SENTEZ PROBLEMİ

Bu bölümde gözlemci sentezi sorunu tartışılmaktadır. Bu bölüm şu şekilde düzenlenmiştir. İlk olarak lineer sisteme ilişkin gözlemci sentez problemi ele alınmıştır. Nominal durumlar, bozulma reddi ve parametrik belirsizlik durumları analiz edilir. Daha sonra doğrusal olmayan problemler kontrol tabanlı gözlemci çerçevesinde tartışılır.

6.1 Lineer Problemler İçin Kontrol Tabanlı Gözleyici Formülasyonu

Kontrol tabanlı gözlemci çerçevesi, problemi, bu bir tür bozucu reddi kontrol problemi olan bir şekilde formüle etmektir ki burada tam durum vektörü, kontrol yasası için mevcut değildir. Ek olarak bu durumda eldeki mevcut problemi zorlaştıran bir etmek olarak karşımıza çıkar. Çerçeve aynı zamanda bir bozunum gözlemcisi oluşturmak için bir problemi formüle etmeyi de sağlar.

Lineer durumlar için,

$$\dot{x} = Ax + Bv \tag{6.1}$$

$$y = Cx$$

Ki burada w gözlemci için mevcut olmayan bir bozucu sinyalidir.

Gözleyici için kullanılan model,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{v} \tag{6.2}$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

Ki burada bozulma tahmini, şu şekilde verilen bir kontrol yasası tarafından üretilir:

$$\hat{v} = K(\hat{x}, y) \tag{6.3}$$

Ki burada $K(\cdot)$ tahmini bozulma terimini üreten dinamik bir sistemi temsil eder.

Hata terimi şu şekilde verilir:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \tag{6.4}$$

Durum terimi, hata terimi ve tahmin edilen terim cinsinden şu şekilde yazılır:

$$x = \hat{x} + \tilde{x} \tag{6.5}$$

Bunu kullanarak hata dinamikleri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= [Ax + Bv] - [A\hat{x} + B\hat{v}] \\ &= [A(\hat{x} + \tilde{x}) + Bv] - [A\hat{x} + B\hat{v}] \\ &= A\hat{x} + A\tilde{x} + Bv - A\hat{x} - B\hat{v} \\ &= A\tilde{x} - B\hat{v} + Bv \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ki burada bozulma tahmini hata terimi şu şekilde verilir:

$$\tilde{v} = v - \hat{v} \tag{6.7}$$

Bu ifadeden,

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - B\hat{v} + Bv \\ \tilde{y} = C\tilde{x} \\ \hat{v} = K(\tilde{y}) \end{gathered} \tag{6.8}$$

Bu, şu şekilde verilebilecek olan bozucu reddi kontrol problemine benzer:

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + B_1 w + Bu \\ y = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ z = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ u = K(y) \end{gathered} \tag{6.9}$$

Bu daha genel bir problemdir.

Önceki gözlemci problemine benzer bir problem şu şekilde yazılır:

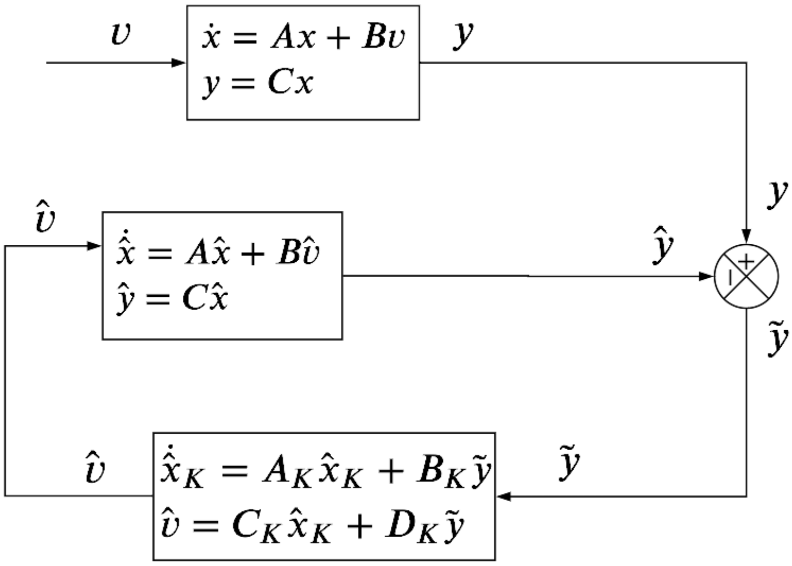
$$\dot{x} = Ax + B_1 w + Bu \tag{6.10}$$

$$y = C_1 x$$

$$z = x$$

$$u = K(y)$$

Ki burada, z terimleri minimize edilecek terimleri, bu durumda tahmin hata sinyallerini temsil eder. Kontrol yapısı ise Şekil 6.1'de verilmiştir.



Şekil 6.1 : Lineer bir sistem için kontrol tabanlı gözleyici sistemi

Sisteme ait blok diyagram Şekil 6.1'te verilmiştir.

6.2 LTI Sistemler İçin Gözleyici Sentez Problemi

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6.11}$$

$$y = Cx$$

Ki burada u tasarımcı ve gözlemci tarafından bilinen bir kontrol sinyalidir.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \tag{6.12}$$

Ki burada $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ gözleyici durumudur ve $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ifadesi gözleyici kazancını ifade eder.

Tahmin hata dinamikleri için,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \tag{6.13}$$

Hata terimlerinin probleme dahil edilmesi ile birlikte, yeniden formüle edilebilecek olan,

$$e = x - \hat{x} \tag{6.14}$$

Tahmin hatası dinamikleri şu şekilde verilir:

$$\dot{e} = (A + LC)e \tag{6.15}$$

Ki burada L terimi, aşağıdaki koşulun istenen bir şekilde karşılanması için tasarlanmış bir gözleyici parametresidir.

$$\lim_{t\to\infty}\big(x(t) - \hat{x}(t)\big) = 0 \tag{6.16}$$

Bu amaçla, problem şu şekilde verilen bir fizibilite problemi olarak yazılır:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ W \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{array} & P, W \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ AP + PA^T + WC + C^T W^T < 0 \end{array} \end{array} \tag{6.17}$$

Ve kazanç ifadesi $L = P^{-1}W$ olarak elde edilir.

6.3 Bozucu Etkili LTI Sistemlerde Gözleyici Sentez Problemi

Bir kontrol sinyali ve bir bozulma terimine sahip verilen sistem için,

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gv \tag{6.18}$$

$$y = Cx + Du + Jv$$

Olarak ifade edilir.

Gözlemcide kullanılacak model şu şekilde verilir:

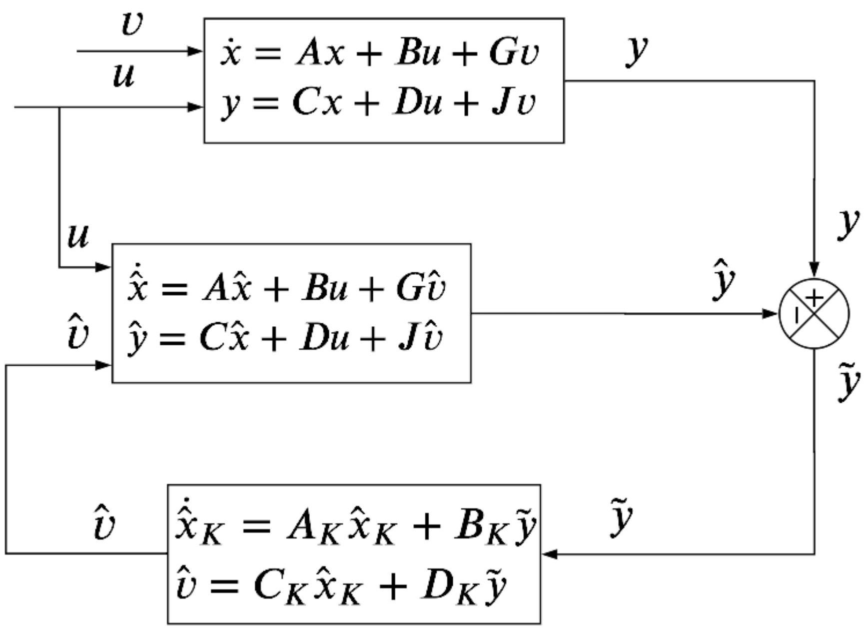
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G\hat{v} \tag{6.19}$$
$$\hat{y} = C\hat{x} + Du + J\hat{v}$$

Ki burada, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ ve $v \in \mathbb{R}^q$ durum, kontrol girişi, ölçülen çıkış ve bozulma olarak verilir. Sistem matrislerinin sistem dinamiklerini modellemek için yeterli olduğu bilinmektedir.

Kontrol ifadesi için,

$$\hat{v} = K(\hat{x}, y) \tag{6.20}$$

Ki burada modelin durumlarına ve sistemden gelen ölçülen çıktı terimlerine tam erişime sahiptir. Şekil 6.2'de model ve sistem arasındaki ilişki verilmiştir.



Şekil 6.2 : Bozucu içeren sistem için kontrol tabanlı gözleyici sistemi

Problem, durum veya bozulma tahminine uygun bir şekilde yeniden yapılandırılabilir. Ayrıca, bu tür bir çerçeve, tasarımcının durum ve bozulma tahmini ile ilgili frekansla ilgili spesifikasyonları dayatmasına izin verir. Ek olarak, birçok durumda belirli sinyallerin frekans aralığı tasarımcı tarafından önceden bilinir.

Bu tür problemlerin çözülebilir olması için sağlanması gereken koşullar aşağıdaki gibi verilmiş olup, sağlanması zor olmayan koşullardır.

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fw + Gv \tag{6.21}$$

$$y = Cx + Du + Hn + Jv$$

Ki burada $w \in \mathbb{R}^r$ ve $n \in \mathbb{R}^s$ işlem ve ölçüm gürültüsünü belirtir.

İki varsayım vardır. İlki, $\left(\begin{bmatrix} A & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & J \end{bmatrix}\right)$ ifadesinin gözlemlenebilir olmasıdır.

İkincisi, (A, G) kontrol edilebilir formda olmasıdır. Sistemin durum ve bozucu terimi yeniden oluşturması için ilk koşul gereklidir. İkinci koşul, hata dinamiğinin denetleyici tarafından üretilen v terimi kullanılarak dengelenebilmesidir.

6.4 Belirsizlik İçeren LTI Sistemlerde Gözleyici Sentez Problemi

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = A(\delta)x + Bu \tag{6.22}$$

$$y = Cx$$

Ki burada sistemin belirsizliği var, bu durum ikinci dereceden kararlılık çerçevesinde ele alınabilir. Gözlemci modeli şu şekilde verilir:

$$\dot{\hat{x}} = A_n\hat{x} + Bu + v \tag{6.23}$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

Ki burada, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ gözleyici durumlarını ve $v \in \mathbb{R}^n$ gözleyici kontrol terimini ifade eder.

Tahmin hata dinamikleri için,

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}; \hat{x}) \tag{6.24}$$

Hata terimi,

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \tag{6.25}$$

Durum tahmini ile hata terimi arasındaki ilişki şu şekilde verilir:

$$x = \tilde{x} + \hat{x} \tag{6.26}$$

Hata dinamikleri şu şekilde türetilir:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= [A(\delta)x + Bu] - [A_n\hat{x} + Bu + v] \\ &= A(\delta)x - A_n\hat{x} - v \\ &= A(\delta)[\tilde{x} + \hat{x}] - A_n\hat{x} - v \\ &= A(\delta)[\tilde{x} + \hat{x}] - A_n\hat{x} - LC\tilde{x} \\ &= [A(\delta) - LC]\tilde{x} + [A(\delta) - A_n]\hat{x}\end{aligned} \tag{6.27}$$

Bu, aşağıdaki optimizasyon problemi ile temsil edilebilir.

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ W \in \mathbb{R}^{m\times n}}}{Find} & P, W \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ A(\delta)P + PA(\delta)^T + WC + C^T W^T < 0, \forall \delta \in \mathbf{\Delta} \end{array} \end{array} \tag{6.28}$$

Belirsizliğin dışbükey bir kümede sınırlı olduğu bilindiğinden, problem şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{array}{cc} \underset{\substack{P \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ W \in \mathbb{R}^{m\times n}}}{Find} & P, W \\ s.t. & \begin{array}{c} P = P^T > 0 \\ A(\delta_i)P + PA(\delta_i)^T + WC + C^T W^T < 0, \forall i \in \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N}\} \end{array} \end{array} \tag{6.29}$$

Ve $L = P^{-1}W$ olarak gözleyici kazancı elde edilir.

İlerleyen bölümlerde, uygun parametreleri bulmak için optimizasyon probleminin yapımında benzer bir çerçeve kullanılmıştır.

6.5 Nonlineer Sistemlerde Gözleyici Sentez Problemi

Verilen sistem için,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{6.30}$$

$$y = Hx$$

İfadeleri yazılır, bu bölümde gözleyici tasarımı üzerinde durulacaktır.

Gözleyicide kullanılan model,

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + R(\hat{x}, u, y)H[x - \hat{x}] \tag{6.31}$$

$$\hat{y} = H\hat{x}$$

Hata terimi,

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \tag{6.32}$$

Hata dinamikleri için,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= [f(x) - f(\hat{x})] + [g(x) - g(\hat{x})]u - R(\hat{x}, u, y)H\tilde{x} \end{aligned} \tag{6.33}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = [f(\hat{x} + \tilde{x}) - f(\hat{x})] + [g(\hat{x} + \tilde{x}) - g(\hat{x})]u \\ - R(\hat{x}, u, H[\hat{x} + \tilde{x}])H\tilde{x} \end{aligned} \tag{6.34}$$

Elde edilen dinamikler,

$$\dot{\tilde{x}} = f_2(\tilde{x}; \hat{x}, u) \tag{6.35}$$

Problem, bu noktada, $R(\cdot)$ ifadesinin tasarımı olarak ifade edilir. Bu tasarım sonucunda, hata dinamikleri ISS olmalıdır ve burada sisteme girdi olarak tahmin $\hat{x}$ ve sistem giriş u sinyali olarak ifade edilir.

ISS problemindeki ifade kullanılarak,

$$\begin{array}{lc} \underset{V \in \mathcal{C}^{\infty}}{Find} & V(\tilde{x}) \\ & V(\tilde{x}) - \alpha_1(\|\tilde{x}\|) \in \Sigma(\tilde{x}) \\ & \alpha_2(\|\tilde{x}\|) - V(\tilde{x}) \in \Sigma(\tilde{x}) \\ & -\dot{V}(\tilde{x}, \hat{x}, u) + \alpha(\|\tilde{x}\|) - \sigma\left(\left\|\begin{matrix}\hat{x} \\ u\end{matrix}\right\|\right) \in \Sigma(\tilde{x}, \hat{x}, u) \\ & \alpha_1(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i}\, ; s\frac{d\alpha_1(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ s.t. & \alpha_2(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i}\, ; s\frac{d\alpha_2(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \alpha(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i}\, ; s\frac{d\alpha(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \sigma(s) = \sum_{i}^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i}\, ; s\frac{d\sigma(s)}{ds} \in \Sigma(s) \end{array} \tag{6.36}$$

Buradaki ifade, önceki bölümde tartışılan parametre optimizasyonu prosedürü için izlenebilir bir şekilde formüle edilebilen bir optimizasyondur.

6.6 Nonlineer Sistemler İçin Lokal Gözleyici Sentez Problemi

Bu bölümde, yerel bir gözlemci tasarım prosedürü tartışılmaktadır. Yerel gözlemciler, durum terimlerinin ve karşılık gelen bozunum terimlerinin sınırlı olduğu bilinen durumlar için kullanışlıdır ve bu bilgi genellikle tasarımda bir basitleştirmeye yol açabilir.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{6.37}$$

$$y = Hx$$

Gözleyici için gerekli model,

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + R(\hat{x}, u, y)H[x - \hat{x}] \tag{6.38}$$

$$\hat{y} = H\hat{x}$$

Olarak elde edilir.

Hata ifadesi,

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \tag{6.39}$$

Hata dinamikleri,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= [f(x) - f(\hat{x})] + [g(x) - g(\hat{x})]u - R(\hat{x}, u, y)H\tilde{x}\end{aligned} \tag{6.40}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} = [f(\hat{x} + \tilde{x}) - f(\hat{x})] + [g(\hat{x} + \tilde{x}) - g(\hat{x})]u \\ - R(\hat{x}, u, H[\hat{x} + \tilde{x}])H\tilde{x}\end{aligned} \tag{6.41}$$

Elde edilen dinamikler,

$$\dot{\tilde{x}} = f_2(\tilde{x}; \hat{x}, u),, \forall \tilde{x} \in \{\tilde{x} | g_1(\tilde{x}) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{6.42}$$

Aynı şekilde, problem $R(\cdot)$ ifadesinin tasarımı olarak ifade edilir. Bunun için ISS koşulları kullanılır.

ISS problemi ile gerekli optimizasyon problemi,

$$\begin{array}{cc}\underset{V \in C^{\infty}}{Find} & V(\tilde{x}) \\ & V(\tilde{x}) - \alpha_1(\|\tilde{x}\|) > 0, \forall \tilde{x} \in \{\tilde{x} | g_1(\tilde{x}) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \\ & \alpha_2(\|\tilde{x}\|) - V(\tilde{x}) > 0, \forall \tilde{x} \in \{\tilde{x} | g_1(\tilde{x}) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \\ & -\dot{V}(\tilde{x}, \hat{x}, u) + \alpha(\|\tilde{x}\|) - \sigma\left(\left\|\begin{matrix}\hat{x} \\ u\end{matrix}\right\|\right) > 0 > 0, \forall \tilde{x} \in \{\tilde{x} | g_1(\tilde{x}) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \\ & \alpha_1(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i}\,; s\frac{d\alpha_1(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ s.t. & \alpha_2(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i}\,; s\frac{d\alpha_2(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \alpha(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i}\,; s\frac{d\alpha(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \sigma(s) = \sum_{i}^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i}\,; s\frac{d\sigma(s)}{ds} \in \Sigma(s)\end{array} \tag{6.43}$$

Olarak elde edilir ve bu, önceki bölümde tartışılan parametre optimizasyonu prosedürü için izlenebilir bir şekilde formüle edilebilen bir optimizasyondur.

6.7 Kontrol Sentez Problemi İçin ISS ve Parametre Optimizasyonu

Bu bölümde ele alınan ve bu bölümde verilen gözlemci tasarımı için temel olan bozucu reddi sorunu için doğrusal olmayan sistemi göz önünde bulundurun.

$$\dot{x} = f(x, u, w) \tag{6.44}$$

Önceki durumda olduğu gibi, kontrol yasasını parametreleştirmek için $\theta \in \mathbb{R}^N$ terimleri kullanılır ve sistemin dinamiği şu şekilde verilir:

$$\dot{x} = f(x, u_\theta(x), w) \tag{6.45}$$

ISS kullanılarak aşağıdaki optimizasyon problemi oluşturulmuştur.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Find \\ V \in C^\infty \\ \theta \in \mathbb{R}^N \end{array} & V(x) \\ & V(x) - \alpha_1(\|x\|) \in \Sigma(x) \\ & \alpha_2(\|x\|) - V(x) \in \Sigma(x) \\ & -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) \in \Sigma(x,w) \\ & \alpha_1(s) = \sum_i^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i} \,; s\frac{d\alpha_1(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ s.t. & \alpha_2(s) = \sum_i^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i} \,; s\frac{d\alpha_2(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \alpha(s) = \sum_i^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i} \,; s\frac{d\alpha(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \sigma(s) = \sum_i^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i} \,; s\frac{d\sigma(s)}{ds} \in \Sigma(s) \end{array} \tag{6.46}$$

Ki burada, $\dot{V}(x,w)$ ifadesi, $V(x)$ teriminde elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,w) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} \\ &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u_\theta(x), w) \end{aligned} \tag{6.47}$$

Bu durumun küresel amaçlar için olduğu ve bu formülasyonda kullanılan herhangi bir sınır bilgisi olmadığı belirtilmelidir. Bununla birlikte, birçok mekanik ve elektrik sistemi için, tasarım sürecinde büyüklük sınır bilgilerinin kullanılması genellikle faydalıdır.

6.8 Lokal Kontrol Sentez Problemi İçin ISS ve Parametre Optimizasyonu

Önceki bozucu bastırımı probleminin yerel versiyonu için, problem formülasyonu bu bölümde verilmektedir. Verilen dinamik sistem için,

$$\dot{x} = f(x,u,w) \tag{6.48}$$

Önceki bölümde belirtilen parametreleştirme kullanılarak, dinamikler şu şekilde verilir:

$$\dot{x} = f(x,u_\theta(x),w) \tag{6.49}$$

Yerel sürüm için optimizasyon problemi olarak şu şekilde verilir:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} Find \\ V \in \mathcal{C}^\infty \\ \theta \in \mathbb{R}^N \end{array} & V(x) \\
s.t. & \begin{array}{c}
V(x) - \alpha_1(\|x\|) \in \Sigma(x) \\
\alpha_2(\|x\|) - V(x) \in \Sigma(x) \\
-\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \{w|g_1(w) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^m \\
\alpha_1(s) = \sum_i^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i}\,;\, s\frac{d\alpha_1(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\
\alpha_2(s) = \sum_i^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i}\,;\, s\frac{d\alpha_2(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\
\alpha(s) = \sum_i^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i}\,;\, s\frac{d\alpha(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\
\sigma(s) = \sum_i^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i}\,;\, s\frac{d\sigma(s)}{ds} \in \Sigma(s)
\end{array}
\end{array} \tag{6.50}$$

Ki burada, $\dot{V}(x,w)$ ifadesi, $V(x)$ teriminde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,w) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} \\
&= \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,u_\theta(x),w)
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Bu ifadede, CLF ve θ terimleri birlikte yer almaktadırlar.

$$\begin{array}{ll} \underset{\substack{V \in C^{\infty} \\ \theta \in \mathbb{R}^N}}{Find} & V(x) \\ & V(x) - \alpha_1(\|x\|) \in \Sigma(x) \\ & \alpha_2(\|x\|) - V(x) \in \Sigma(x) \\ & -\dot{V}(x,w) + \alpha(\|x\|) - \sigma(\|w\|) - \sigma_1(w) g_1(w) \in \Sigma(x,w) \\ & \alpha_1(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_1}} c_{\alpha_{1_i}} s^{2i}\,; s\frac{d\alpha_1(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ s.t. & \alpha_2(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha_2}} c_{\alpha_{2_i}} s^{2i}\,; s\frac{d\alpha_2(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \alpha(s) = \sum_{i}^{N_{\alpha}} c_{\alpha_i} s^{2i}\,; s\frac{d\alpha(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \sigma(s) = \sum_{i}^{N_{\sigma}} c_{\sigma_i} s^{2i}\,; s\frac{d\sigma(s)}{ds} \in \Sigma(s) \\ & \sigma_1(w) \in \Sigma(w) \end{array} \tag{6.52}$$

Unutulmamalıdır ki bu durumda bozucu terim üzerindeki sınırlar dikkate alınır ve bu durum tahmin açısından daha iyi bir gözlemci ile sonuçlanabilir. Ek olarak, burada tartışılan çerçeve oldukça geneldir ve ki burada durumları için durum terimlerinde de bir sınır vardır, bu tür bilgiler optimizasyon probleminin oluşturulmasında kullanılabilir.

6.9 Gözleyici Sentez Probleminde Özel Durumlar

Gözlemci sentezi problemi oldukça geneldir ve bu bölümde bu problem, karşılık gelen bir optimizasyon problemi oluşturmak için sistematik bir şekilde tartışılmaktadır. Bununla birlikte, ISS analiz problemleri için, sistem dinamiğinin yapısını kullanan bazı basitleştirmeler de vardır. Kontrol tasarımı durumunda olduğu gibi, burada da bazı modüler yapılar genellikle daha basit bir tasarıma yol açar, gözlemci sentez problemi için aynı yöntem kullanılabilir.

7. DİNAMİK SİSTEMLER İÇİN UYGULAMALAR

Bu bölümde, çalışılan yöntemin dinamik sistemlerle ilgili uygulamalarından bazıları incelenmektedir.

7.1 Kararlılık Analizi

Verilen sistem için,

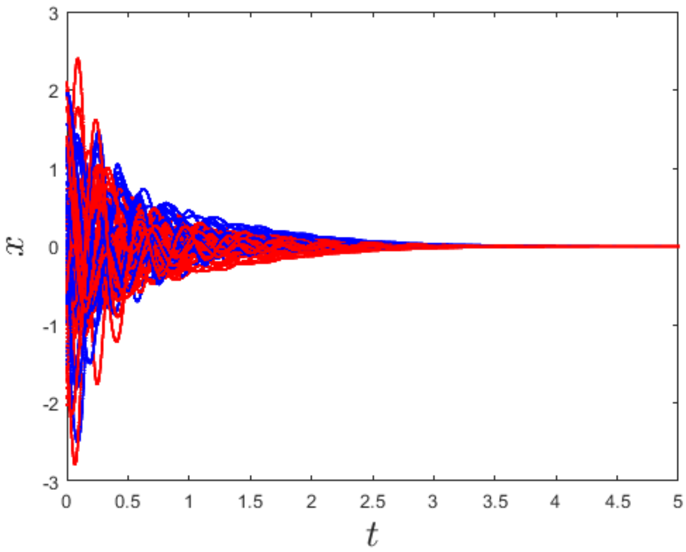
$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = (x_1)^2 - (x_1)^3 + x_5 + x_4 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = k_1^T m_1(x) \\ \dot{x}_4 = (x_4)^2 - (x_4)^3 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = k_2^T m_2(x) \end{gathered} \tag{7.1}$$

Ki burada (k_1, k_2) ve (m_1, m_2) terimleri,

$$\begin{gathered} k_1 = [0.2 \quad -1.2 \quad -1.1 \quad -0.1 \quad -0.9 \quad -0.8 \quad -0.2 \quad -1.8 \quad -1.1 \quad -0.65 \quad -1.1] \\ m_1(x) = [(x_1)^3 \quad (x_1)^2(x_5) \quad (x_1)^2 \quad x_1x_5 \quad x_1x_6 \quad x_1 \quad (x_5)^2 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_2 \quad x_4] \\ k_2 = [-0.3 \quad -1.1 \quad -1.0 \quad -0.2 \quad -1.1 \quad -1.0 \quad -0.1 \quad -2.0 \quad -1.2 \quad -0.51 \quad -0.9] \\ m_2(x) = [(x_4)^3 \quad (x_4)^2(x_2) \quad (x_4)^2 \quad x_4x_2 \quad x_4x_3 \quad x_4 \quad (x_2)^2 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_1 \quad x_5] \end{gathered} \tag{7.2}$$

Olarak verilir. Sistemin ifadesi, bir önceki bölümde anlatıldığı gibi yapılır ve kararlılığı kanıtlamak için Lyapunov Fonksiyonunu oluşturmak için verilen analiz yöntemleri kullanılır.

Sistemin simülasyon sonuçları Şekil 7.1'de verilmiştir. Açıkça kararlılık ile ilgili yorumlar buradan yapılabilir.



Şekil 7.1 : Sistem durumlarının sıfıra azalması

7.2 ISS Analizi

Verilen sistem için,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - w_1x_2 - w_2x_1 - x_1x_2 - k_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + w_1x_2 + w_2x_1 + x_1x_2 - k_2\end{aligned} \tag{7.3}$$

Ki burada, m ifadesi,

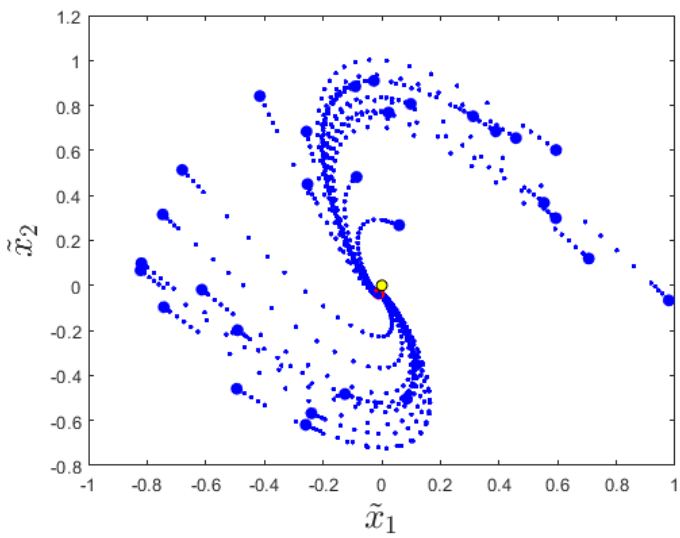
$$m(x) = [x_1 \quad w_1 \quad (x_1)^2 \quad x_1w_1 \quad x_1w_2] \tag{7.4}$$

Ve (k_1, k_2) terimleri,

$$\begin{aligned}k_1 &= [3.27 \quad 0.74 \quad 1 \quad 1 \quad -1] \\ k_2 &= [-2.74 \quad -0.43 \quad -1.76 \quad -1.76 \quad 1]\end{aligned} \tag{7.5}$$

Sistemin ISS ifadesi, bir önceki bölümde anlatıldığı gibi yapılır ve kararlılığı kanıtlamak için bir ISS-Lyapunov Fonksiyonu oluşturmak için yöntem kullanılır.

Sistemin simülasyon sonuçları Şekil 7.2'de verilmiştir. ISS kavramı ile kararlılık bilgisine hata dinamikleri için aynı şekilde ulaşılır.



Şekil 7.2 : Tahmin hata terimlerinin azalması

7.3 Kontrol Sentezi

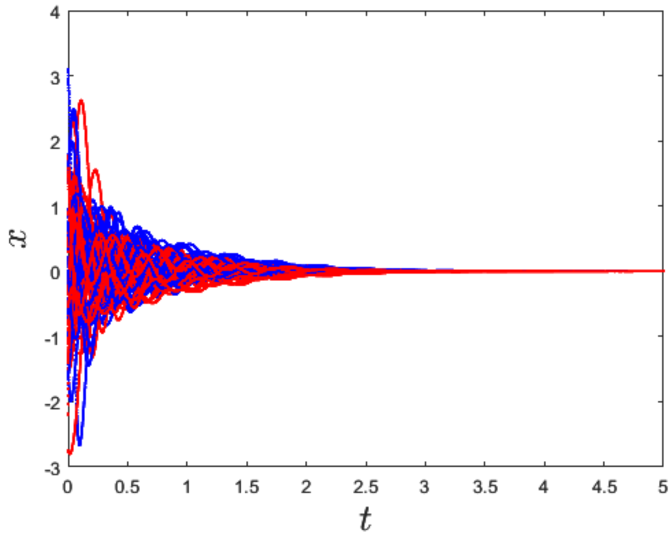
Verilen sistem için,

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (x_1)^2 - (x_1)^3 + x_5 + x_4 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= u_1(x) \\
\dot{x}_4 &= (x_4)^2 - (x_4)^3 + x_2 + x_3 \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= u_2(x)
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Ki burada, $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ sistem dinamiklerini kararlı hale getirmek için tasarlanmışlardır. Kontrol terimlerinin parametreleştirilmesi ve parametrelerin optimizasyonu önceki bölümde açıklandığı gibi yapılır.

Kalıcılığı kanıtlamak için, bir Lyapunov Fonksiyonu, önceki bölümde belirtildiği gibi kapalı döngü kararlılığını kanıtlamak için hesaplanır.

Sistemin simülasyon sonuçları Şekil 7.3'de verilmiştir. Bulunan Lyapunov fonksiyonu ifadesi kullanılarak kararlılık analizi yapılmıştır.



Şekil 7.3 : Sistem durum terimlerinin sıfıra azalması

7.4 Gözleyici Sentezi

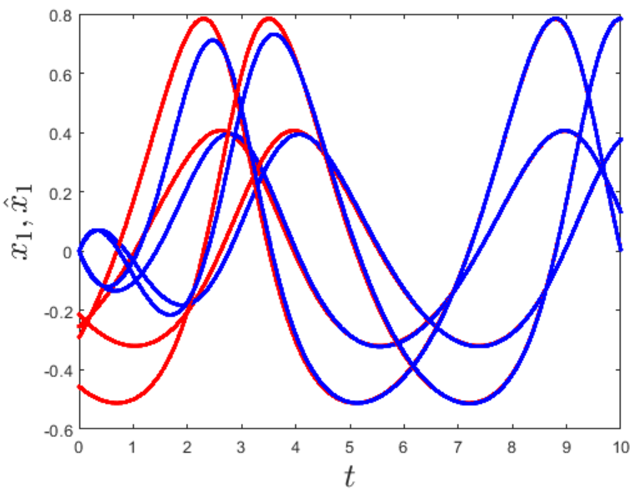
Verilen sistem için,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 x_2 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1 x_2 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{7.7}$$

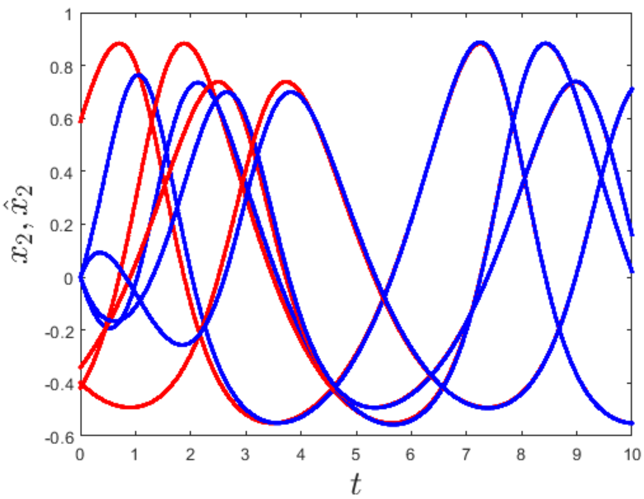
Ki burada y terimi, gözlemcinin elinde bulunan çıktıdır ve x_2 terimi tahmin edilmek istenmektedir.

Tahmin edici bir önceki bölümde belirtildiği gibi tasarlanır ve hata dinamiğinin ISS ifadesi için bir ISS-Lyapunov işlevi hesaplanır ki burada tahmin edilen terimler, gözlemciyi onaylamak için hata dinamiğine girdi olarak kabul edilir.

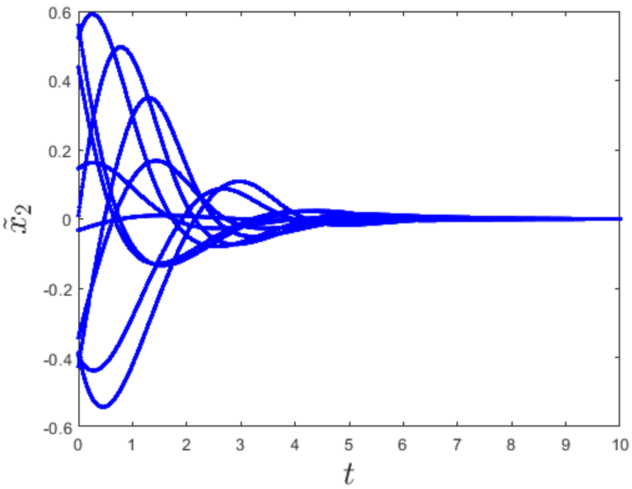
Sistemin simülasyon sonuçları ilk durum tahmini için, Şekil 7.4'de verilmiştir. İkinci durum tahmini Şekil 7.5'de verilmiştir ki burada, özel olarak tahminci performansı görülebilir. İkinci durum tahmin hata dinamikleri ise, Şekil 7.6’da yer almaktadır. Bulunan gözleyici terimi hata dinamiklerini ISS kararlı yapacak şekilde tasarlanmıştır.



Şekil 7.4 : Farklı noktalardaki sistem davranışı için durum tahmini



Şekil 7.5 : Farklı noktalardaki sistem davranışı için durum tahmini



Şekil 7.6 : Farklı noktalardaki sistem davranışı için tahmin hataları

Sistemin simülasyon sonuçları, hata terimleri için Şekil 7.6'de verilmiştir. Bulunan gözleyici terimi farklı durumlardaki sistem dinamikleri için uygun bir performans sergilemektedir.

8. SONUÇ

Doğrusal olmayan sistemlerin incelenmesi, mekanik ve endüstriyel otomasyon sistemlerinin geliştirilmesinde önemli olmuştur. Kontrol ve gözlemci problemlerinin sentezi, dinamik sistemlerin incelenmesine bağlıdır. Diğer çalışma alanlarında mevcut olan diğer yöntemlerden yararlanmak için yararlı olabileceğini kanıtlayabilecek, izlenebilir ve açıklanabilir bir şekilde zorlayıcı problemleri formüle etmek de önemlidir. Dinamik sistemlerin incelenmesi, sayısal hesaplama araçlarından etkilenmiştir ve bu eğilim günümüze kadar devam etmektedir. Güvenilir ve verimli optimizasyon araçları kullanılarak izlenebilir olmayan bazı problemler çözülebilecek şekilde formüle edilebilir. Ek olarak, belirtilen çerçeve ile tasarımcı tarafından bilinen ek kısıtlamalar da mevcut probleme dahil edilebilir ve bu tür bilgiler genellikle tasarım sürecini iyileştirebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Duan, G., Yu, H.** (2013). LMIs in Control Systems. In *CRC Press eBooks*. Informa.

[2] **Williams, R. L., II, & Lawrence, D. A.** (2007). *Linear State-Space Control Systems*. John Wiley & Sons.

[3] **Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., & Balakrishnan, V.** (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM.

[4] **Boyd, S., Boyd, S. P., & Vandenberghe, L.** (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

[5] **Hassan, K. K.** (2014). *NONLINEAR SYSTEMS.* Springer Science & Business Media.

[6] **Khalil, H. H.** (2017). *High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control*. SIAM.

[7] **Kokotovic, P., Khalil, H. K., O'Reilly, J.** (1999). *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. SIAM.

[8] **Isidori, A.** (2013). *Nonlinear Control Systems*. Springer Science & Business Media.

[9] **Astolfi, A.** (2006). *Nonlinear and Adaptive Control: Tools and Algorithms for the User*. World Scientific.

[10] **Liberzon, D.** (2012). *Switching in Systems and Control*. Springer Science & Business Media.

[11] **Liberzon, D.** (2012). *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton University Press.

[12] **Zhou, K., Doyle, J. C.** (1998). *Essentials of Robust Control*. Pearson.

[13] **Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K.** (1996). *Robust and Optimal Control*. Pearson.

[14] **Foias, C., Özbay, H., Tannenbaum, A.** (2014). *Robust Control of Infinite Dimensional Systems: Frequency Domain Methods*. Springer.

[15] **Dullerud, G. E., Paganini, F.** (2013). *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Springer Science & Business Media.

[16] **Giesl, P.** (2007). *Construction of Global Lyapunov Functions Using Radial Basis Functions*. Springer.

[17] **Malisoff, M., Mazenc, F.** (2009). *Constructions of Strict Lyapunov Functions*. Springer Science & Business Media.

[18] **Haddad, W. M., Chellaboina, V.** (2011). *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*. Princeton University Press.

[19] **Kharitonov, V.** (2012). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Springer Science & Business Media.

[20] **Chesi, G.** (2011). *Domain of Attraction: Analysis and Control via SOS Programming*. Springer Science & Business Media.

[21] **Lasserre, J. B.** (2015). *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*. Cambridge University Press.

[22] **Henrion, D., Garulli, A.** (2005). *Positive Polynomials in Control*. Springer Science & Business Media.

[23] **Slotine, J. E., Li, W.** (1991). *Applied Nonlinear Control*. Pearson Education.

[24] **Cheli, F., Diana, G.** (2015). *Advanced Dynamics of Mechanical Systems*. Springer.

[25] **Levi, M.** (2014). *Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal Control: An Intuitive Introduction*. American Mathematical Soc.

[26] **Urwin, K. M.** (2014). *Advanced Calculus and Vector Field Theory*. Elsevier.

[27] **Wiggins, S.** (2006). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer Science & Business Media.

[28] **Gallieri, M.** (2016). *Lasso-MPC – Predictive Control with l1-Regularised Least Squares*. Springer.

[29] **Camacho, E. F., & Bordons, C.** (1999). *Model Predictive Control*. Springer Verlag.

[30] **Bar-Shalom, Y., Li, X. R., & Kirubarajan, T.** (2001). *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. John Wiley & Sons.

[31] **Isermann, R., Münchhof, M.** (2010). *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Springer Science & Business Media.

[32] **Lei, B., Xu, G., Feng, M., Zou, Y., Van Der Heijden, F., De Ridder, D., & Tax, D. M. J.** (2017). *Classification, Parameter Estimation and State Estimation: An Engineering Approach Using MATLAB*. John Wiley & Sons.

[33] **Richards, J. A.** (2012). *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*. Springer Science & Business Media.

[34] **Kutz, J. N., Brunton, S. L., Brunton, B. W., & Proctor, J. L.** (2016). *Dynamic Mode Decomposition: Data-Driven Modeling of Complex Systems*. SIAM.

[35] **Simon, D.** (2006). *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons.

[36] **Kallrath, J.** (2013). *Modeling Languages in Mathematical Optimization*. Springer Science & Business Media.

[37] **Crassidis, J. L., Junkins, J. L.** (2011). *Optimal Estimation of Dynamic Systems, Second Edition*. CRC Press.

[38] **Ristic, B., Arulampalam, S.** (2004). *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House Publishers.

[39] **Bernal, M., Guerra, T. M.** (2010). Generalized Nonquadratic Stability of Continuous-Time Takagi–Sugeno Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *18*(4), 815–822.

[40] **Guerra, T. M., Bernal, M., Guelton, K., & Labiod, S.** (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi–Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, *201*, 40–54.

[41] **Besancon, G.** (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, *41*(4), 271–280.

[42] **Cui, H., Li, X., Wu, G., Song, Y., Liu, X., Luo, D.** (2021). MPC Based Coordinated Active and Reactive Power Control Strategy of DFIG Wind Farm with Distributed ESSs. *Energies*, *14*(13), 3906.

[43] **Nguyen, H. T., Vu, T. H., Slotine, J. E., Turitsyn, K.** (2021). Daralma Analysis of Nonlinear DAE Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *66*(1), 429–436.

[44] **Miguel, E., Plett, G. L., Trimboli, M. S., Lopetegi, I., Oca, L., Iraola, U., Bekaert, E.** (2021). Electrochemical Model and Sigma Point Kalman Filter Based Online Oriented Battery Model. *IEEE Access*, *9*, 98072–98090.

[45] **Plett, G. L., DeLima, P., & Pack, D.** (2007). Target Localization Using Multiple UAVs with Sensor Fusion via Sigma-Point Kalman Filtering. In *AIAA Infotech@Aerospace 2007 Conference and Exhibit*.

[46] **Slotine, J. E., Coetsee, J. A.** (1986). Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems. *International Journal of Control*, *43*(6), 1631–1651.

[47] **Stilwell, D. J. and Rugh, W. J.** (1999). Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. IEEE Transactions on Automatic Control, 44(6):1225–1229.

[48] **Cychowski, M.** (2009). Robust Model Predictive Control. VDM Publishing, Berlin, Germany.

[49] **Slotine, J. E., Coetsee, J. A.** (1986). Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems. *International Journal of Control*, *43*(6), 1631–1651.

[50] **Slotine, J. E.** (1985). The Robust Control of Robot Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, *4*(2), 49–64.

[51] **Papachristodoulou, A., Peet, M. M., Lall, S.** (2005). Constructing Lyapunov-Krasovskii functionals for linear time delay systems. In *American Control Conference*.

[52] **Choi, J. C., Lee, D., Sreenath, K., Tomlin, C. J., Herbert, S. L.** (2021). Robust Control Barrier–Value Functions for Safety-Critical Control. In *arXiv (Cornell University)*. Cornell University.

[53] **Khalil, H. K., Praly, L.** (2014). High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, *24*(6), 993–1015.

[54] **Sira-Ramírez, H., Agrawal, S. K.** (2004). Differentially Flat Systems. In *CRC Press eBooks*. Informa.

[55] **Çimen, T., Banks, S. P.** (2004). Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design. *Automatica*, *40*(11), 1845–1863.

[56] **Ahmadi, A. A., & Parrilo, P. A.** (2017). Sum of Squares Certificates for Stability of Planar, Homogeneous, and Switched Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *62*(10), 5269–5274.

[57] **Zhao, Y., Fu, Y. M., and Duan, G. R.** (2007). Robust passive filtering for switched systems with time-varying delays. In Proceedings of IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Harbin, China, pp. 1350–1354.

[58] **Manchester, I. R., & Slotine, J. E.** (2014). Control Daralma Metrics and Universal Stabilizability. *IFAC Proceedings Volumes*, *47*(3), 8223–8228.

[59] **Lagrioui, A., Mahmoudi, H., Abbou, A., & Zazi, M.** (2012). Backstepping control of the induction machine with a sliding mode observer. In *International Conference on Multimedia Computing and Systems*.

[60] **Asada, H. H., & Sotiropoulos, F. E.** (2019). Dual Faceted Linearization of Nonlinear Dynamical Systems Based on Physical Modeling Theory. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of the Asme*, *141*(2).

[61] **Agrawal, A., Amos, B., Barratt, S., Boyd, S., Diamond, S., & Kolter, J. Z.** (2019). Differentiable Convex Optimization Layers. In *Neural Information Processing Systems* (Vol. 32, pp. 9558–9570).