TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ YANSITAN BARİYERLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Başak GEVER

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

ARALIK 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

……….……………………

Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksininlerini sağladığını onaylarım.

……………………………..

Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 11131710 numaralı Doktora Öğrencisi **Başak GEVER**' in ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"GENELLEŞTİRİLMİŞ YANSITAN BARİYERLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ"** başlıklı tezi **07.12.2017** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Erdem ACAR (Başkan)** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR ....
Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR ....
Ortadoğu Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

.

Başak GEVER

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ YANSITAN BARİYERLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Başak GEVER

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

Tarih: Aralık 2017

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş yansıtan bariyerli bir rasgele yürüyüş süreci matematiksel olarak kurulmuş, analitik ve asimtotik yöntemlerle incelenmiştir. Sürecin bir boyutlu dağılımı incelendikten sonra, süreç için genel ergodik teorem ispat edilmiştir. Ergodikliği ispat edilen sürecin ergodik dağılımı ve bu dağılıma ait karakteristik fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra zayıf yakınsama teoremi ispat edilen süreç için ergodik dağılımının limitte yakınsadığı dağılım bulunmuştur. Bir sonraki bölümde ise sürecin ergodik dağılımının limitte yakınsadığı dağılımın yakınsama hızı hesaplanmış ve oldukça sade bir formül elde edilmiştir. Bunların yanı sıra sürecin bazı sınır fonksiyonellerinin beklenen değeri ve varyansı için kesin ifadeler; çeşitli momentleri için ise asimtotik açılımları hesaplanmıştır. Burada elde edilen sınır fonksiyonellerinin momentleri yardımıyla sürecin ergodik momentleri için kesin ve asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Daha sonra bu ergodik momentler için elde edilen asimtotik formüller bir problem üzerinde uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Rasgele yürüyüş süreci, Genelleştirilmiş yansıtan bariyer, Ergodik dağılım, Zayıf yakınsama, Yakınsama hızı, Sınır fonksiyonelleri.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

INVESIGATION OF A RANDOM WALK WITH

A GENERALIZED REFLECTING BARRIER

Başak GEVER

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Industrial Engineering Science Programme

Supervisor: Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

Date: December 2017

In this thesis, a random walk with a generalized reflecting barrier mathematically constructed and is investigated with analytic and asymptotic methods. After examining the one dimensional distribution of the process, the general ergodic theorem for the process is proved. Both the ergodic distribution and its characteristic function are obtained in this section. Next, the weak convergence theorem for the process is proved and the limit form of the ergodic distribution of the process is found. In the following chapter, the convergence rate of this limit distribution of the process is calculated and a quite practical formula is obtained. Moreover, for some boundary functionals of the process, the exact expression for the expected value and variance are obtained. Also, for some moments for the boundary functionals, the asymptotic expansions are calculated. With the help of these expressions, the exact expressions and asymptotic expansions for the ergodic moments of the process are obtained. Consecutively, the obtained formulae are applied to a problem.

Keywords: Random walk, Generalized reflecting barrier, Ergodic distribution, Weak convergence, The convergence rate, Boundary functional.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, sadece doktora tez çalışmalarım boyunca değil, 2004 yılında öğrencisi olduğum ilk günden bu yana, bana akademik anlamda her türlü desteği veren; bir öğretim üyesi ya da bir danışmandan daha çok, bilge bir rehber olarak tecrübe ışığıyla her türlü koşulda liderlik ederek sürekli yolumu aydınlatan; sadece akademik anlamda sınırlı kalmayıp umumi manada hayat anlayışımı olgunlaştıracak farklı bakış açıları kazanmamı sağlayan; herhangi aksi bir durumda ya da şartlar yetersiz olduğunda ya da hatta, gücüm tükenip ben vazgeçmişken bile benden vazgeçmeyerek adım adım ilim ve bilim edinme yolunda ilerlememe neden olan; bilim dünyasındaki varlığımı borçlu olduğum pek kıymetli hocam saygıdeğer Prof. Dr. Tahir Hanalioğlu (Khaniyev)' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Öğrencisi olduğum süre boyunca, bulanık mantık teorisine girmemi sağlayan ve bu konuda her zaman biz öğrencilerini motive eden, doktoramda da desteğini sürdüren, samimiyeti ve alçakgönüllüğü ile örnek aldığım değerli yüksek lisans tez danışmanım Prof. Dr. İ. Burhan Türkşen' e saygılarımı sunarım.

Bununla birlikte, doktora tez çalışmalarım boyunca beni yardımlarından hiçbir zaman mahrum bırakmayan, desteklerini her zaman hissettiğim, değerli tez izleme hocalarım Doç. Dr. Fikri Gökpınar ve Yrd. Doç. Dr. Salih Tekin' e kıymetli bilimsel katkılarının yanı sıra, anlayışlı davranışları için teşekkürü bir borç bilirim. Ek olarak, Prof. Dr. Erdem Acar ve Doç. Dr. Ceren Vardar Acar' a tez savunma jürimde yer almayı kabul ettikleri için içten teşekkür ederim.

TOBB ETÜ' ye geldiğim ilk günden itibaren buradaki günlerimi verimli kılan yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen tüm TOBB ETÜ Endüstri Mühendisliği Bölümü' ndeki değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, Savunma Teknolojileri Mühendisliği' nde çalışmaya başladığım ilk günden bu yana yeni başladığım iş hayatımda doktora çalışmalarım konusunda beni yüreklendirerek destek olan yöneticim Dr. M. Umut Demirezen' e teşekkürü bir borç bilirim.

Birlikte ilerlediğimiz bu bilim yolunu keyifli kılan, birçok güzel anılar biriktirdiğim TOBB ETÜ' lü sevgili arkadaşlarıma değerli eşliklerinden dolayı teşekkür ederim.

İlgi ve destekleriyle her zaman yanımda olan, hayatımın en karamsar anlarını bile neşeli kılan, varlıklarından güç aldığım pek kıymetli aileme hissettiğim minnetarlığı ifade etmede sözcükler hafif kalır. Hayatımdaki varlıkları için onlara sonsuz sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Son olarak, 110T559 nolu TÜBİTAK projesi kapsamında hazırlanan bu tez için desteğinden dolayı TÜBİTAK'a ve doktora çalışmalarım boyunca burs sağladığı için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi' ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
ξ_n	$(n-1)$. sıçrama ile n. sıçrama arası geçen süre
η_n	n. sıçrama miktarı
Ω	Bir stokastik deneyin örnek uzayı
$\mathcal{F}$	Ω' nın alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş bir σ cebir
$P(A)$	A olayının olasılığı
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Olasılık uzayı
ζ_n	n. yansıma miktarı
ζ	ζ_n' lerin limitte yakınsadığı rasgele değişken
$E(X)$	x rasgele değişkeninin beklenen değeri
$\mathrm{Var}(X)$	x rasgele değişkeninin varyansı
$I_A(t) = \begin{cases} 1, t \in A \\ 0, t \notin A \end{cases}$	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\varepsilon(x)$	Heaviside fonksiyonu (Basamak fonksiyonu)
τ_1	İlk yansıma anı
ν_1^+	İlk basamak anı
χ_1^+	İlk basamak yüksekliği
μ_1	χ_1^+' in beklenen değeri
$\pi_\lambda(z)$	Yansımaların limitteki ergodik dağılımı
$\hat{\chi}_1^+$	Basamak yüksekliklerinin ürettiği kalan ömür
$\hat{\mu}_1$	Basamak yüksekliklerinin kalan ömrünün beklenen değeri
β_1	ζ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$\widehat{m}_1$	η_n' lerin kalan ömrünün beklenen değeri
$\varphi_\zeta(\alpha)$	ζ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu
$\varphi_+(\alpha)$	χ_n^+ rasgele değişkenlerinin karakteristik fonksiyonu
$\hat{\varphi}_+(\alpha)$	$\hat{\chi}_n^+$' lerin karakteristik fonksiyonu
$\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)$	$\hat{\chi}_n^+$'lerin ürettiği kalan ömrün karakteristik fonksiyonu
$\forall$	Her
$\widetilde{M}(s)$	$M(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$M_1(x) * M_2(x)$	$\int_0^x M_1(x-y)dM_2(y)$' e eşit olan konvolüsyon çarpım
$M^*(s)$	$M(s)$ fonksiyonunun Laplace – Stiltijes dönüşümü
$a(x) \sim b(x)$	$a(x)$' in $b(x)$' e asimtotik denkliği
$g(x) = o(h(x))$	$\lim_{x \to a}[g(x)/h(x)] = 0$
$g(x) = O(h(x))$	$\lvert g(x)/h(x) \rvert \leq C < \infty$
$F^{*n}(x)$	$F(x)$ fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı

1. GİRİŞ VE GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Rasgeleliğin bilime girmesiyle, özellikle kuantum fiziği ve matematiksel biyolojinin yanı sıra güvenirlik, envanter ve kuyruk teorileri ile stokastik finans, bilgisayar bilimleri, çeşitli mühendislik dalları vs. gibi uygulama alanlarında, rasgele yürüyüş süreçlerinin teorik altyapısına oldukça fazla ihtiyaç olduğu ortaya çıkmıştır. Bu gelişmeler uygulamada daha farklı problemlerin ortaya çıkmasına ve rasgele yürüyüş süreçlerinin temel yapısına bazı modifikasyonların eklenmesine gereksinim doğurmuştur. Bu modifikasyonlar problemi tanımlamak veya daha iyi ifade etmek için gerekli olan bir takım olasılıksal gereçlerdir. Bu olasılıksal gereçler rasgele yürüyüş sürecindeki kesikli şans karışımlı müdahaleler olabileceği gibi, çeşitli tipte bariyerler de ifade edilebilir. Bu bariyerler incelenen problemin karakterine göre yansıtan, tutan, yutan, elastik veya gecikmeli gibi birçok farklı özelliğe sahip olabilir.

Teorik ve pratik önemlerine göre, bir veya iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri ile ilgili literatürde birçok çalışma bulunmaktadır (Afaneseva ve Bulinskaya (1984), Alsmeyer (1991), Aras ve Woodroofe (1993), Brown ve Solomon (1975), Borovkov (1984), Chang ve Peres (1997), Feller (1971), Gihman ve Skorohod (1975), Janseen ve Leewardeen (2007), Khaniyev ve diğ. (1995, 1998, 2001, 2004), Korshunov (1997), Korolyuk ve Borovskikh (1981), Lotov (1996), Nagaev (2010), Prabhu (1980), Siegmund (1979), Woodroofe (1982), vs.).

Bazı gerçek hayat problemlerinde özellikle yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin kuramsal altyapısına ihtiyaç duyulmuştur. Örneğin, kuantum fiziğinde seyreltilmiş bir ortamdaki yüksek enerjili bir partikülün hareketi için bu süreç kullanılmaktadır. Yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar şu şekilde sıralanabilir: Borovkov (1984), Feller (1971), Kastenbaum (1966), Khaniyev ve diğ. (2001), Spitzer (1964), Unver (1997), Weesakul (1997), Zhang (1992), vs. Bu konuda yapılan çalışmalar incelendiğinde, elde edilen sonuçların genellikle teorik karakterde olduğu ve uygulama alanlarında kullanılması mümkün olmayan ifadelere rastlandığı görülmektedir. Örneğin, Khaniyev ve diğ. (2001) çalışmasında iki yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreci ele alınmış ve bu sürecin bir boyutlu dağılımı için kesin ifadeler ortaya konmuştur. Ancak, elde edilen kesin ifadeler n katlı integrallerle ifade edildiği için uygulamada çok da yararlı olmamıştır. Bu durumda, uygulamada bu kadar önemli ve popüler olan bir süreç için hesaplanmaya elverişli sonuçların elde edilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu sebeple, bu tezde uygulamalı alanlarda karşılaşılan bu güç durumu aşmak için basit ancak yaklaşık ifadeler elde edilmeye çalışılmıştır.

Dolayısıyla, bu çalışmada genelleştirilmiş yansıtan bariyerli rasgele yürüyüşleri analitik ve asimtotik yöntemler yardımıyla incelenmiştir. Bu amaçla, bir stokastik sürecin en önemli karakteristiği olan bir boyutlu dağılımı incelenmiştir. Ardından süreç için genel ergodik teorem ispat edilmiş ve ergodik dağılımı ile ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu elde edilmiştir. Bunu takiben, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Bu teorem yardımıyla, sürecin ergodik dağılımının limitte yakınsadığı limit dağılımı elde edilmişir. Bir sonraki bölümde ise, bu yakınsama hızı incelenmiş ve oldukça pratik ve yorumlamaya müsait bir sonuç ortaya konmuştur. Bunların yanı sıra, sürecin bazı sınır fonksiyonelleri araştırılmış ve bu sınır fonksiyonellerinin momentleri için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar bulunmuştur. Daha sonra bu sonuçlar yardımıyla, sürecin ergodik momentlerinin kesin ifadeleri ve asimtotik açılımları elde edilmiştir. Asimtotik yöntemlerle elde edilen formüller özel bir durumda daha da sade bir hale getirilmiştir.

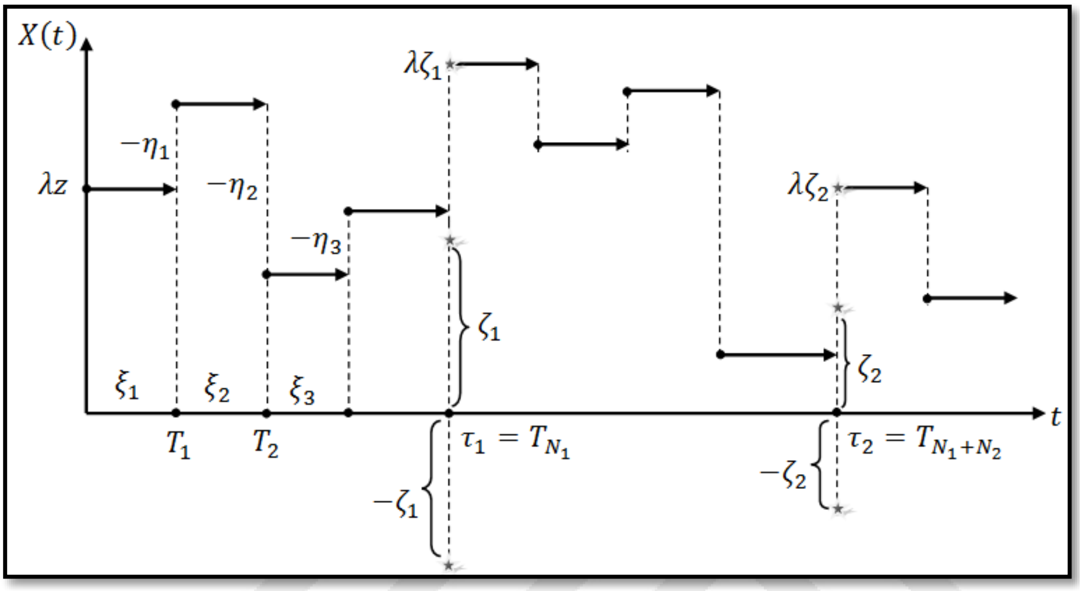
1.2. Literatür Taraması

Bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin literatüre dahil edilmesi 1960’ lı yıllara dayansa da, bu konu ile ilgili literatürdeki gelişmeler, tutan, gecikmeli ve elastik tipteki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri ile ödüllü yenileme süreçlerindeki gelişmeler birbirleri ile etkileşimli olarak meydana gelmiştir. Literatürdeki bu gelişmeler aşağıdaki gibi kısaca özetlenebilir.

Bariyerli rasgele yürüyüş süreci ilk olarak Spitzer, (1964) tarafından literatüre dahil edilmiştir. Daha sonra Feller (1971), bu süreclerin temel bazı olasılıksal karakteristiklerini tanımlamıştır. Şöyle ki, özel durumda (η_i ler simetrik Bernoulli dağılımına sahip) iki yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş sürecinin bir boyutlu dağılımı için kesin ifade elde etmiştir. Afaneseva ve Bulinskaya (1984) iki tutan bariyerli rasgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımı için iki terimli asimtotik açılım elde etmiştir. Borovkov (1984), bir tutan bariyerli rasgele yürüyüş süreci için Wiener – Hopf faktörizasyon yöntemini kullanarak, kesin ancak karmaşık matematiksel yapıya sahip bir formül elde etmiştir. Lotov (1996), Chang ve Peres (1997), Janseen ve Leewardeen (2007) ve Nagaev (2010) gibi araştırmacılar bir ve iki bariyerli Gauss rasgele yürüyüş süreçlerinin sınır fonksiyonellerini incelemişler ve bu sınır fonksiyonellerinin momentleri için üç terimli asimtotik açılımlar elde etmişlerdir. Korshunov (1997), Gauss rasgele yürüyüş sürecinin maksimumu için asimtotik açılım elde etmiştir. Alsmeyer (1991) çalışmasında rasgele yürüyüş süreçleri kuramında önemli bir rolü olan harmonik yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde edilmiştir. Siegmund (1979) simetrik olmayan Gauss rasgele yürüyüş süreçlerinin karakteristiklerini simetrik olan versiyonu ile ifade etmiştir. Aras ve Woodroofe (1993) ile Woodroofe (1982), rasgele yürüyüş süreçlerinin lineer olmayan sınıra ulaşma problemini ele almışlardır. Khaniyev ve diğ. (1995 – 2004) bir ve iki bariyerli yarı – Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin durağan karakteristikleri için iki ve üç terimli asimtotik açılımlar ortaya koymuşlardır.

Yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri de bazı özel gerçek hayat problemlerini ifade etmede kullanılır. Örneğin, kuantum fiziğinde seyreltilmiş ortamdaki yüksek enerjili bir partikülün hareketini ifade etmede yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreci kullanılır. Bu konuyla ilgili de literatürde çeşitli çalışmalar bulunmaktadır (örn., Borovkov (1984), El – Shehawey (1992), Feller (1971), Kastenbaum (1966), Khaniev ve diğ. (2001), Spitzer (1964), Unver (1997), Weesakul (1997), Zhang (1982), vs.). Ancak, bu çalışmalar genel olarak teorik karakterdedirler. Bu sebeple elde edilen sonuçların matematiksel yapılarının karmaşıklığı nedeniyle uygulamada kullanılması oldukça zor olmuştur. Bu zorluğu aşmak için son zamanlarda sade ancak yaklaşık formüller elde edilmeye başlanmıştır.

Model: Bu çalışmada, başlangıç anındaki kapital miktarı $\lambda z > 0$ $(\lambda > 0)$ seviyesinde olan bir firma ele alınmıştır. Rasgele anlarda $T_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_n$, $n = 1,2,\ldots$ gelen primler sayesinde bu kapital artmakta ya da kazalar sebebiyle firma para kaybetmektedir. Bu artış ve azalışların miktarı $\{\eta_n\}, n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenleri ile ifade edilmiştir. Sistemin kapital seviyesi sıfırın altına düşünceye kadar devam etmektedir. Kapital miktarı negatif olduğunda, firma kredi alıp almayacağına karar verir. Bu alacağı kredi miktarı, negatif kısmın $(-\zeta_1)$ λ katı kadardır. Bundan sonra firma aldığı kredi miktarı seviyesinden çalışmaya devam eder. Kapital seviyesindeki bu değişimler tekrar negatif bir değere düşünceye kadar devam eder. Tekrar negatife düştüğünde ise, süreç benzer şekilde hareketine devam eder. Bu şekilde çalışan bir sistemin kapital miktarındaki değişiklik genelleştirilmiş yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreci ile ifade edilir.



Şekil 1.1. : X(t) sürecinin örnek bir izdüşümü.

Bu çalışmanın amacı bu süreci matematiksel olarak inşa etmek ve sürecin olasılık ve sayısal karakteristiklerini hem analitik hem de asimtotik yöntemlerle incelemektir.

2. X(t) SÜRECİNİN MATEMATİKSEL KURULUŞU

$\{(\xi_n, \eta_n)\}$, $n = 1,2,3, \ldots$ rasgele değişken çiftleri bağımsız, aynı dağılıma sahip ve aynı $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış rasgele değişkenler olsun. Bununla birlikte, $\xi_n, n = 1,2, \ldots$ rasgele değişkenleri pozitif değerli olup, $\eta_n, n = 1,2, \ldots$' ler ise hem pozitif hem de negatif değerler alabilen rasgele değişkenler olsun. Ayrıca, ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri kendi aralarında da bağımsız olup, dağılım fonksiyonları biliniyor olsun:

$$\Phi(t) \equiv P\{\xi_1 \leq t\}; \quad F(x) \equiv P\{\eta_1 \leq x\}, t \geq 0, x \in (-\infty, +\infty).$$

$\{T_n\}$ yenileme dizisi ile $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_0 \equiv S_0 \equiv 0; \; T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, ; \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, , n = 1,2, \ldots$$

Bunlara ek olarak aşağıdaki tam değerli rasgele değişkenler verilsin:

$$N_0 = 0; N_1 \equiv N_1(\lambda z) = \inf\{k \geq 1 : \lambda z - S_k < 0\};$$

$$\zeta_0 = z \geq 0; \; \zeta_1 \equiv \zeta_1(\lambda z) = \left|\lambda z - S_{N_1}\right|;$$

$$N_2 \equiv N_2(\lambda \zeta_1) = \inf\left\{k \geq N_1 + 1 : \lambda \zeta_1 - \left(S_k - S_{N_1}\right) < 0\right\};$$

$$\zeta_2 \equiv \zeta_2(\lambda \zeta_1) = \left|\lambda \zeta_1 - \left(S_{N_2} - S_{N_1}\right)\right|;$$

$$\vdots$$

$$N_n \equiv N_n(\lambda \zeta_{n-1}) = \inf\left\{k \geq N_{n-1} + 1 : \lambda \zeta_{n-1} - \left(S_k - S_{N_{n-1}}\right) < 0\right\};$$

$$\zeta_n \equiv \zeta_n(\lambda \zeta_{n-1}) = \left|\lambda \zeta_{n-1} - \left(S_{N_n} - S_{N_{n-1}}\right)\right|; \quad n = 1,2, \ldots$$

Bu rasgele değişkenlerin yardımıyla aşağıdaki $\{\tau_n\}$, $n = 1,2, \ldots$ dizisi aşağıdaki gibi kurulsun:

$$\tau_0 \equiv 0;\ \tau_1 \equiv \tau_1(\lambda z) = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i\,;\ \tau_2 = \sum_{i=1}^{N_2} \xi_i\,; \dots;\ \tau_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i\,, n = 1,2 \dots$$

Ek olarak, $\nu(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\},\ t > 0$ rasgele değişkeni tanımlansın. Bu notasyonların yardımlarıyla $X(t)$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

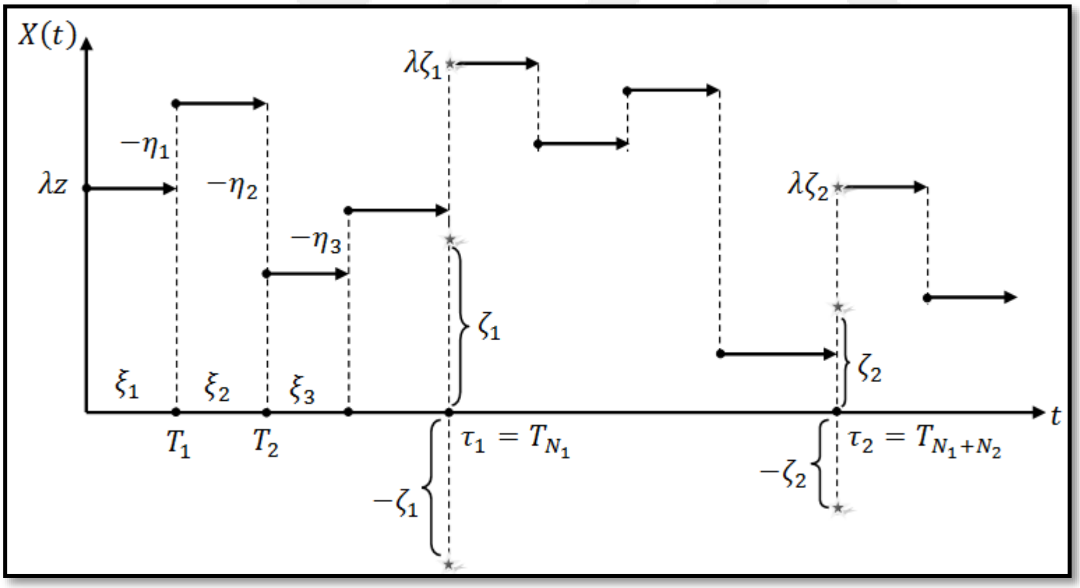
$$X(t) \equiv \lambda\zeta_n - \left(S_{\nu(t)} - S_{N_n}\right);\ \ \forall\, t \in [\tau_n, \tau_{n+1}), n = 0,1,2, \dots$$

Sürecin alternatif bir tanımı aşağıdaki gibi de verilebilir:

$$X(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda\zeta_n - \left(S_{\nu(t)} - S_{N_n}\right)\right) I_{[\tau_n\,;\,\tau_{n+1})}(t).$$

Burada $I_A(t)$, A kümesinin bir indikatör fonksiyonudur.

Sürecin örnek bir izdüşümü Şekil 2.1' de olduğu gibi verilebilir.



Şekil 2.1 : X(t) sürecinin örnek bir izdüşümü.

Bu şekilde tanımlanan $X(t)$ sürecine "Genelleştirilmiş Yansıtan Bariyerli Rasgele Yürüyüş Süreci" denir. Literatürde $\lambda = 1$ olduğunda bu süreç, "Yansıtan Bariyerli Rasgele Yürüyüş Süreci" olarak bilinir.

3. X(t) SÜRECİNİN BİR BOYUTLU DAĞILIMI

Bu bölümde yansıtan bariyerli bir rasgele yürüyüş sürecinin $\big(X(t)\big)$ bir boyutlu dağılımı incelenmiştir. Bu sonucu ifade etmeden önce, notasyon kolaylığı açısından bu bölümde özellikle kullanılacak olan aşağıdaki ifadeler verilsin:

$$a_0(x;\lambda z) = \varepsilon(x-\lambda z) = \begin{cases} 1, & x-\lambda z \geq 0 \\ 0, & x-\lambda z < 0 \end{cases};$$

$$a_n(x;\lambda z) = P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\};$$

$$b_n(dv;\lambda z) = P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n-1}; \lambda z - S_n \in dv; v < 0\};$$

$$\Delta\Phi_{\mathrm{n}}(t) = \Phi_{\mathrm{n}}(t) - \Phi_{\mathrm{n+1}}(t);\ \Phi_{\mathrm{n}}(t) = P\{T_n \leq t\}.$$

Şimdi bu bölümün esas amacı olan $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonunu ifade eden teorem verilsin:

Teorem 3.1: $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$P_{\lambda z}\{X(t) \leq x\} = G(t;x;\lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}; X(t) \leq x\}$$

$$= G(t;x;\lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{v_1=-\infty}^{0} \dots (k) \dots \int_{v_k=-\infty}^{0} R(t;dv_1;\lambda z) * R(t;dv_2;\lambda|v_1|)$$

$$* \dots * R(t;dv_k;\lambda|v_{k-1}|) * G(t;x;\lambda|v_k|) \qquad (3.1)$$

Burada

$$R(ds;dv;\lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 \in ds; X(\tau_1) \in dv\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(ds) b_n(dv;\lambda z);$$

$$G(t;x;\lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x;\lambda z) \text{ dır.}$$

İspat: $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılımı toplam olasılık formülünü kullanılarak aşağıdaki gibi gösterebilir:

$$P_{\lambda z}\{X(t) \leq x\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}; X(t) \leq x\}$$

Şimdi de, bu serinin her bir toplananı ayrı ayrı hesaplansın.Diğer bir değişle, $k = 0; k = 1$ ve $k = n$ genel durumu için $P_{\lambda z}\{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}; X(t) \leq x\}$ olasılıkları teker teker incelensin.

- $\boldsymbol{k = 0}$ **için:**

$$P_{\lambda z}\{0 \leq t < \tau_1; X(t) \leq x\} = P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\nu(t) = n; T_{N_1} > t; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \leq t < T_{n+1}; N_1 \geq n+1; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \leq t < T_{n+1}; N_1 > n; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \leq t < T_{n+1}; \lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Phi_{\mathrm{n}}(t) - \Phi_{\mathrm{n+1}}(t)\right) a_n(x; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_{\mathrm{n}}(t) a_n(x; \lambda z) \equiv G(t; x; \lambda z) \qquad (3.2)$$

- $\boldsymbol{k = 1}$ **için:**

$$P_{\lambda z}\{\tau_1 \leq t < \tau_2; X(t) \leq x\} = \int_{s=0}^{t} P_{\lambda z}\{\tau_1 \in ds; s \leq t < \tau_2; X(t) \leq x\}$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1, m-1}; \lambda z - S_m < 0;$$

$$\lambda z - S_m \in dv; T_m \in ds; T_n \leq t < T_{m+1}; t - s < \tau_2 - \tau_1;$$

$$\lambda |v| - (S_n - S_m) \leq x\}$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1, m-1}; \lambda z - S_m < 0;$$

$$\lambda z - S_m \in dv; T_m \in ds; T_n - T_m \le t - s < T_{n+1} - T_m;$$

$$t - s < \tau_2 - \tau_1; \lambda|v| - (S_n - S_m) \le x\}$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1, m-1}; \lambda z - S_m < 0;$$

$$\lambda z - S_m \in dv; T_m \in ds; T_n - T_m \le t - s < T_{n+1} - T_m; t - s < \sum_{i=m+1}^{N_2} \xi_i ;$$

$$\lambda|v| - (S_n - S_m) \le x\}$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1, m-1}; \lambda z - S_m < 0;$$

$$\lambda z - S_m \in dv; T_m \in ds\}$$

$$P_{\lambda|v|}\{T_{n-m} \le t - s < T_{n-m+1}; t - s < T_{N_2 - m} ; \lambda|v| - S_{n-m} \le x\}$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1, m-1};$$

$$\lambda z - S_m < 0; \lambda z - S_m \in dv; T_m \in ds\}$$

$$P_{\lambda|v|}\{T_n - T_m \le t - s < T_{n+1} - T_m; \lambda|v| - S_i > 0;$$

$$i = \overline{1, n-m} ; \lambda|v| - S_{n-m} \le x\}$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} P\{T_m \in ds\}$$

$$P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1, m-1}; \lambda z - S_m < 0; \lambda z - S_m \in dv\}$$

$$P_{\lambda|v|}\{T_n - T_m \le t - s < T_{n+1} - T_m\}$$

$$P_{\lambda|v|}\{\lambda|v| - S_i > 0; i = \overline{1, n-m} ; \lambda|v| - S_{n-m} \le x\}$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \Phi_m(ds) b_m(dv; \lambda z) \Delta\Phi_{\mathrm{n-m}}(t-s)\, a_{n-m}(x; \lambda|v|)$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \Phi_m(ds) b_m(dv; \lambda z) \Delta\Phi_{\mathrm{n-m}}(t-s)\, a_{n-m}(x; \lambda|v|)$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(ds) b_m(dv; \lambda z) \sum_{n=m}^{\infty} \Delta\Phi_{\mathrm{n-m}}(t-s)\, a_{n-m}(x; \lambda|v|)$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(ds) b_m(dv; \lambda z) \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\Phi_{\mathrm{k}}(t-s)\, a_k(x; \lambda|v|)$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{v=-\infty}^{0} R(ds; dv; \lambda z) G(t-s; x; \lambda|v|)$$

$$= \int_{v=-\infty}^{0} R(t; dv; \lambda z) * G(t; x; \lambda|v|) \tag{3.3}$$

Burada

$$R(ds; dv; \lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 \in ds; X(\tau_1) \in dv\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(ds) b_n(dv; \lambda z)\,;$$

$$G(t; x; \lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x; \lambda z) \quad \text{dır.}$$

Benzer şekilde, $k = n$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_{\lambda z}\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}; X(t) \leq x\}$$

$$= \int_{v_1=-\infty}^{0} \dots (n) \dots \int_{v_n=-\infty}^{0} R(t; dv_1; \lambda z) * R(t; dv_2; \lambda|v_1|) * \dots$$

$$* R(t; dv_n; \lambda|v_{n-1}|) * G(t; x; \lambda|v_n|) \tag{3.4}$$

(3.2) – (3.4) eşitliklerinin yardımıyla $X(t)$ sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_{\lambda z}\{X(t) \leq x\} = G(t; x; \lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}; X(t) \leq x\}$$

$$= G(t; x; \lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{v_1=-\infty}^{0} \cdots \int_{v_k=-\infty}^{0} R(t; dv_1; \lambda z) * R(t; dv_2; \lambda|v_1|) * \cdots$$

$$* R(t; dv_k; \lambda|v_{k-1}|) * G(t; x; \lambda|v_k|)$$

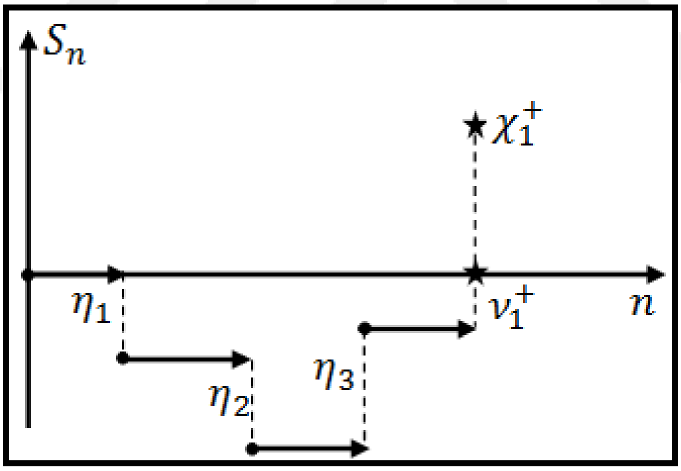
Böylece Teorem 3.1 ispat edilmiş olur.

4. X(t) SÜRECİNİN ERGODİKLİĞİ

Sürecin durağan karakteristiklerini incelemeden önce bu sürecin ergodik olup olmadığının ispat edilmesi gereklidir. Ergodikliğin ispatlanmasında yardımcı olması açısından $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı (ν_1^+) ile birinci basamak yüksekliği (χ_1^+) aşağıdaki gibi verilsin:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1: S_n > 0\}\,;\ \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i\,;$$

Ayrıca, $\{(\nu_n^+;\chi_n^+), n = 2,3,\ldots\}$ rasgele değişken çiftleri, $(\nu_1^+;\chi_1^+)$ rasgele değişken çifti ile aynı dağılma sahip, bağımsız rasgele değişken çiftleri olsun (Feller, (1971)). ν_1^+ ve χ_1^+ rasgele değişkenlerinin örnek bir izdüşümü Şekil 4.1' de verilmiştir.



Şekil 4.1 : Birinci basamak yüksekliği ve birinci basamak anı

Bu durumda Dynkin prensibine göre (Rogozin, (1964)) $N_1(\lambda z)$ ile $S_{N_1(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelleri aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$N_1(\lambda z) = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \nu_i^+\,;\quad S_{N_1(\lambda z)} = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+$$

Burada $H(x) = \min\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > x\}$' tir. Başka bir değişle, $H(x)$ süreci basamak yüksekliklerinin $(\{\chi_n^+\}, n = 1,2,\ldots)$ oluşturduğu bir yenileme sürecidir.

Bu notasyonların yardımıyla $X(t)$ süreci için aşağıdaki genel ergodik teoremi verilsin.

Teorem 4.1: Başlangıç $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenleri aşağıdaki ek koşulları da sağlamış olsun:

i. $0 < E(\xi_1) < +\infty$;
ii. $E(\eta_1) > 0$;
iii. $E(\eta_1^2) < \infty$;
iv. η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve her ölçülebilir ve sınırlı $f(x)(f:[0,\infty) \to R)$ fonksiyonu için aşağıdaki ilişki 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)du = \frac{1}{E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)}\int_0^\infty f(x)d_xE\big(A(x,\lambda\zeta)\big) \qquad (4.1)$$

Burada

$$E\big(N_1(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty E\big(N_1(\lambda z)\big)d\pi_\lambda(z)\,; \;\; E\big(A(x,\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty A(x,\lambda z)d\pi_\lambda(z)\,;$$

$$A(x,\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,\lambda z)\,;$$

$$a_n(x,\lambda z) = P\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \le x\};\; n \ge 1, x > 0$$

ve $\pi_\lambda(z)$, $\{\zeta_n\}, n = 0,1,...$, Markov zincirinin ergodik dağılımıdır. Ayrıca, ζ rasgele değişkeni $\pi_\lambda(z)$ dağılımına sahip bir rasgele değişkendir, yani, $P\{\zeta \le z\} \equiv \pi_\lambda(z) \equiv \lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n \le z\}$' dir.

İspat: İncelenen süreç, literatürde "Kesikli müdahaleli yarı – Markov sınıfı" diye bilinen büyük bir sınıfın üyesidir. Bu sınıf için genel ergodik teorem Gihman ve Skorohod tarafından ispat edilmiştir (bkz., Gihman ve Skorohod, (1975), s. 243). Bu teoremin uygulanması için aşağıdaki iki varsayımın sağlanmış olması gereklidir.

Varsayım 1: *Öyle bir artan rasgele zaman anları* $(\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \infty)$ *dizisi seçilmelidir ki, bu anlarda sürecin aldığı değerler* $\big(X(\tau_n)\big)$ *ergodik bir Markov zinciri oluştursun.*

Bunun için sürecin kuruluşunda tanımlanan $\{\tau_n\}$ dizisini seçmek yeterlidir. Çünkü bu rasgele artan zaman anlarında sürecin değeri $X(\tau_n) = \lambda\zeta_n$ olur. Sürecin tanımına göre $\{\zeta_n\}$ dizisi bir ergodik Markov zincirdir. Böylece ilk varsayım sağlanmış olur.

Varsayım 2: *Teorem 4.1' in koşulları altında* $\forall\, z \in (0;\infty)$ *için,* $E(\tau_1) \equiv E\big(\tau(z)\big) < \infty$ ve

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) = \int_0^\infty E\big(\tau_1(z)\big)d\pi_\lambda(z) < \infty; n = 2,3,\ldots \tag{4.2}$$

olduğu sağlanmalıdır. Burada $\pi_\lambda(z)$, $\{\zeta_n\}, n = 0,1,2,\ldots$ *Markov zincirinin ergodik dağılımıdır.*

$\{\tau_n - \tau_{n-1}\}, n = 2,3,\ldots$ rasgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılıma sahip oldukları göz önünde bulundurursak, bu takdirde (4.2) eşitliğini ispatlamak için aşağıdakilerin sağlandığını göstermek yeterlidir:

$$E\big(\tau_1(\lambda z)\big) < \infty;\ E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv E\big(\tau_1(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty E\big(\tau_1(\lambda z)\big)d\pi_\lambda(z) < \infty \tag{4.3}$$

Wald özdeşliğine göre (Feller, (1971)),

$$E\big(\tau_1(\lambda z)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{N_1(\lambda z)} \xi_i\right) = E(\xi_1)E\big(N_1(\lambda z)\big) \tag{4.4}$$

Buradan (4.4) eşitliği (4.3)' te yerine yazılırsa:

$$E\big(\tau_1(\lambda\zeta)\big) = E(\xi_1)\int_0^\infty E\big(N_1(\lambda z)\big)d\pi_\lambda(z) \tag{4.5}$$

elde edilir. Teorem 4.1' in varsayımlarına göre $E(\xi_1) < \infty$' dir. Dolayısıyla, (4.2) koşulunun sağlanması için

$$\int_0^\infty E\big(N_1(\lambda z)\big)d\pi_\lambda(z) < \infty \tag{4.6}$$

olmalıdır. Yine Wald özdeşliğine göre (Feller, (1971)):

$$E\big(N_1(\lambda z)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \nu_i^+\right) = E(\nu_1^+)E\big(H(\lambda z)\big) = U_+(\lambda z)E(\nu_1^+) \tag{4.7}$$

olur. $H(\lambda z)$ fonskiyonu bir yenileme süreci olduğundan onun beklenen değeri $\big(U_+(\lambda z)\big)$ her $0 < z < \infty$ için $U_+(\lambda z) < \infty$ 'dur (Feller, (1971)). Diğer taraftan $m_1 \equiv E(\eta_1) > 0$ olduğundan, $E(\nu_1^+) < \infty$ olur (Feller, (1971), böl. 11). Dolayısıyla, $E\big(N_1(\lambda z)\big) < \infty$ olmuş olur. (4.6)' nın sağlandığını göstermek için ise

$$E\big(U_+(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty U_+(\lambda z)d\pi_\lambda(z) < \infty \tag{4.8}$$

olduğu gösterilmelidir. Teorem 4.1' in koşulları altında $0 < \mu_1 \equiv E(\chi_1^+) < \infty$ olduğunu sağlanmaktadır. Bu durumda, yenileme teoremine göre (Feller, (1971), böl. 11, altbaşlık 1), $z \to \infty$ iken $U_+(\lambda z)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$U_+(\lambda z) = \frac{\lambda z}{\mu_1} + \hat{\mu}_1 + g(\lambda z) \tag{4.9}$$

Burada $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1^+) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$; $\mu_k = E(\chi_1^+), k = 1,2$; $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$' dır. Buna göre, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $b \equiv b(\varepsilon)$ sayısı vardır ki $(0 < b(\varepsilon) < \infty)$, her $z \geq b(\varepsilon)$ için

$$|g(\lambda z)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.10}$$

olur. Bu durumda (4.8) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\big(U_+(\lambda\zeta)\big) = \int_0^{b(\varepsilon)} U_+(\lambda z)d\pi_\lambda(z) + \int_{b(\varepsilon)}^\infty U_+(\lambda z)d\pi_\lambda(z)$$

$$\equiv J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) \tag{4.11}$$

Burada $J_1(\varepsilon) \equiv \int_0^{b(\varepsilon)} U_+(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$ ve $J_2(\varepsilon) \equiv \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_+(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$' dir.

$U_+(\lambda z)$ fonksiyonu monoton azalmayan fonksiyon olduğundan, her $z \leq b(\varepsilon)$ için, $U_+(\lambda z) \leq U_+\big(\lambda b(\varepsilon)\big)$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla,

$$J_1(\varepsilon) = \int_0^{b(\varepsilon)} U_+(\lambda z) d\pi_\lambda(z) \leq U_+\big(\lambda b(\varepsilon)\big) \int_0^{b(\varepsilon)} d\pi_\lambda(z) \leq U_+\big(\lambda b(\varepsilon)\big) \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan (4.10) ilişkisi ve $b(\varepsilon)$ sayısının tanımından λ' nın yeterince büyük değerlerinde,

$$U_+\big(\lambda b(\varepsilon)\big) = \frac{\lambda b(\varepsilon)}{\mu_1} + \hat{\mu}_1 + g\big(\lambda b(\varepsilon)\big) \leq \frac{\lambda b(\varepsilon)}{\mu_1} + \hat{\mu}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.13}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece, (4.12) ve (4.13)' ten aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J_1(\varepsilon) \leq \frac{\lambda b(\varepsilon)}{\mu_1} + \hat{\mu}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.14}$$

Şimdi de (4.11)' de ikinci terim olan $J_2(\varepsilon)$' u ele alalım ve değerlendirelim:

$$J_2(\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{\mu_1} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} z d\pi_\lambda(z) + \hat{\mu}_1 \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} d\pi_\lambda(z) + \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$$

$$\leq \frac{\lambda E(\zeta)}{\mu_1} + \hat{\mu}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.15}$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta) = \int_0^{\infty} \big(1 - \pi_\lambda(v)\big) dv$' dir. (4.14) ile (4.15)' i (4.11)' de yerine yazarsak:

$$E\big(U_+(\lambda\zeta)\big) \leq \frac{\lambda\big(\beta_1 + b(\varepsilon)\big)}{\mu_1} + 2\hat{\mu}_1 + \varepsilon \tag{4.16}$$

olur. Teorem 4.1' in varsayımları altında $\mu_2 < \infty$ olduğu için $\beta_1 \equiv E(\zeta) < \infty$' dur. Ayrıca, her $0 < \lambda < \infty$ için ve herhangi $\varepsilon > 0$ için, $0 < b(\varepsilon) < \infty$' dir. Bu sebeple,

$$E\big(U_+(\lambda\zeta)\big) < \infty \tag{4.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $E(\tau_1) < \infty$ ve $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ $(n = 2,3,\dots)$ sağlanmış olur. İkinci varsayım da sağlandığından süreç için genel ergodiklik teoremi ispatlanmış olur. Dolayısıyla, $X(t)$ süreci ergodiktir ve her ölçülebilir ve sınırlı $f(x)$ $(f{:}\,[0,\infty) \to R)$ fonksiyonu için aşağıdaki ilişki 1 olasılığı ile doğrudur (Gihman ve Skrohod, (1975)):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)du$$

$$= \frac{1}{E(\tau_1)}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dt d\pi_\lambda(z)$$

$$= \frac{1}{E(\tau_1)}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)d_x G(t,x,\lambda z)\, dt d\pi_\lambda(z) \tag{4.18}$$

Burada $G(t,x,\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} \equiv P\{\tau_1 > t; X(t) \leq x | X(0) = \lambda z\}$' dir ve $\{S_n\}; n \geq 1$ rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilebilir. $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}; n = 1,2,\dots$ dizileri bağımsız olduklarından:

$$G(t,x,\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\nu(t) = n; T_{N_1} > t; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n < t \leq T_{n+1}; N_1 > n; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \leq t < T_{n+1}; \lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Phi^{*(n)}(t) - \Phi^{*(n+1)}(t)\right) a_n(x,\lambda z) \tag{4.19}$$

olur. Burada $\Phi^{*(n)}(t) = P\{T_n \le t\}$; $\Phi^{*(0)}(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1; & t \ge 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$; $a_0(x, \lambda z) = \varepsilon(x - \lambda z)$; $a_n \equiv P\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \le x\}$; $n \ge 1$' dir.

(4.19) eşitliğine Laplace dönüşümü uygulayarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tilde{G}(\beta, x, \lambda z) = \frac{1 - \varphi(\beta)}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi(\beta)\right)^n a_n(x, \lambda z) \tag{4.20}$$

Burada $\tilde{G}(\beta, x, \lambda z) = \int_0^\infty e^{-\beta t} G(t, x, \lambda z) dt$ ve $\varphi(\beta) = E\left(e^{-\beta \xi_1}\right)$, $\beta > 0$' dır. Her $\beta > 0$ için $|\varphi(\beta)| = \left|E\left(e^{-\beta \xi_1}\right)\right| \le 1$ olduğundan:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi(\beta)\right)^n a_n(x, \lambda z)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(\beta)|^n a_n(x, \lambda z) \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\infty, \lambda z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}; (\lambda z - S_n < \infty) = \Omega\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0; i = \overline{1,n}\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N_1(\lambda z) > n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{N_1(\lambda z) \ge (n+1)\} = \sum_{m=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{N_1(\lambda z) \ge m\} \le E\left(N_1(\lambda z)\right) < \infty \tag{4.21}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, (4.20) eşitliğinden $\beta \to \infty$ iken, limite geçebiliriz. $\lim_{\beta \to 0} \frac{(1-\varphi(\beta))}{\beta} = E(\xi_1)$ ve $\lim_{\beta \to 0} \varphi(\beta) = 1$ oldukları göz önüne alınırsa, (4.20)' den aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_0^\infty G(t, x, \lambda z) dt = \lim_{\beta \to 0} \tilde{G}(\beta, x, \lambda z) = E(\xi_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, \lambda z) = E(\xi_1) A(x, \lambda z) \tag{4.22}$$

Son olarak, (4.5) ve (4.22) eşitlikleri (4.18)' de yerlerine yazılırsa, Teorem 4.1' de verilen ifade ede edilir. Böylece Teorem 4.1 ispatlanmış olur.

(4.1) eşitliğinde $f(x) = e^{i\alpha x}$; $a \in R$ olarak alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1: Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $(\varphi_X(\alpha))$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_X(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\alpha X(t)}\right) = \frac{E\left(A^*(\alpha,\lambda\zeta)\right)}{E\left(N_1(\lambda\zeta)\right)} \tag{4.23}$$

Burada, $E\left(A^*(\alpha,\lambda\zeta)\right) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} d_x E\left(A(x,\lambda\zeta)\right)$' dır.

Önerme 4.1: Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olsun. Bu durumda, $X(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\alpha X(t)}\right)$, $N_1(\lambda z)$ ile $S_{N_1(\lambda z)}$ sınır fonksiyonellerinin karakteristikleri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_X(\alpha) = \frac{1}{E\left(N_1(\lambda\zeta)\right)} \int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z} \frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} d\pi_\lambda(z)\,; \alpha \neq 0 \tag{4.24}$$

Burada

$$\varphi_\eta(-\alpha) = E\left(e^{-i\alpha\eta_1}\right);\ \ \varphi_{S_{N_1(\lambda\zeta)}}(-\alpha) = E\left(e^{-i\alpha S_{N_1(\lambda\zeta)}}\right);$$

$$S_{N_1(\lambda\zeta)} = \sum_{i=1}^{N_1(\lambda\zeta)} \eta_i\,;\ E\left(N_1(\lambda\zeta)\right) = \int_0^\infty E\left(N_1(\lambda z)\right) d\pi_\lambda(z).$$

İspat: $N_1(\lambda z)$ tanımından da anlaşılacağı üzere $\{S_n\}; n \geq 1$ rasgele değişkeninin $B_{\lambda z} = (-\infty; \lambda z]$ aralığından ilk çıkış anını ifade eder. $d_n(I,\lambda z) = P\left\{N_1(\lambda z) = n; S_{N_1(\lambda z)} \in I\right\}$, $I \subseteq B'_{\lambda z}$ olarak gösterilsin. Burada $B'_{\lambda z}$, $B_{\lambda z}$ kümesinin tümleyicisidir. Her $n \geq 0$ ve $I \subset B_{\lambda z}$ için $d_n(I,\lambda z) = 0$ olsun. $N_1(\lambda z)$' in tanımından her $I \subseteq B'_{\lambda z}$ için

$$d_n(I,\lambda z) = P\{S_k \in B_{\lambda z}; k = \overline{1, n-1}; S_n \in I\} \tag{4.25}$$

olur. Her $n \geq 0$ ve $I \subset B_{\lambda z}$ için,

$$c_n(I,\lambda z) = P\{S_1 \in B_{\lambda z}; \dots; S_{n-1} \in B_{\lambda z}; S_n \in I\};\ \ I \subset B_{\lambda z};$$

$$c_n(I,\lambda z) = 0; I \subseteq B'_{\lambda z} \tag{4.26}$$

olsun. Aşağıdaki dönüşümler de dahil edilsin:

$$\tilde{d}^*(s,\alpha,\lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{B'_{\lambda z}} e^{i\alpha x} d_n(dx,\lambda z)\,;$$

$$\tilde{c}^*(s,\alpha,\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{B_{\lambda z}} e^{i\alpha v} c_n(dv,\lambda z). \tag{4.27}$$

Rasgele yürüyüş sürecinin temel özdeşliğine göre (bkz., Feller (1971), böl. 18, altbaşlık 1)

$$1 - \tilde{d}^*(s,\alpha,\lambda z) = \tilde{c}^*(s,\alpha,\lambda z)\left(1 - s\varphi_\eta(\alpha)\right). \tag{4.28}$$

‘dir. Aşağıdaki dönüşüm tanımlansın:

$$E\big(\psi(s,\alpha,\lambda\zeta)\big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} d\pi_\lambda(z) \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} P\{\lambda z - S_k \geq 0; k = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \in dx\} \tag{4.29}$$

(4.29) eşitliğinden,

$$E\big(\psi(s,\alpha,\lambda\zeta)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} d\pi_\lambda(z) \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} P\{S_k \leq \lambda z; k = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \in dx\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} d\pi_\lambda(z) \int_{-\infty}^{\lambda z} e^{i\alpha(\lambda z - v)} P\{S_k \leq \lambda z; k = \overline{1,n}; S_n \in dv\}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{i\alpha\lambda z} d\pi_\lambda(z) \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{B_{\lambda z}} e^{-i\alpha v} P\{S_k \in B_{\lambda z}; k = \overline{1,n}; S_n \in dv\} \tag{4.30}$$

olarak elde edilir. Burada $B_{\lambda z} = (-\infty; \lambda z]$ aralığıdır. (4.25), (4.26) ve (4.27) eşitlikleri (4.30)’ da göz önüne alındığında,

$$E\big(\psi(s,\alpha,\lambda\zeta)\big) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha\lambda z} \tilde{c}^*(s,-\alpha,\lambda z) d\pi_\lambda(z) \tag{4.31}$$

olur. (4.28) eşitliği (4.31) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$E\big(\psi(s,\alpha,\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z} \frac{1-\tilde{d}^*(s,-\alpha,\lambda z)}{\big(1-s\varphi_\eta(-\alpha)\big)} d\pi_\lambda(z) \qquad (4.32)$$

$\tilde{c}^*(s,-\alpha,\lambda z) \le E\big(N_1(\lambda z)\big) < \infty$ olduğu için, $E\big(N_1(\lambda z)\big)$' in sonluluğunu sağlayan koşul aynı zamanda $\tilde{c}^*(s,-\alpha,\lambda z)$' nın $s \to 1$ iken limitinin mevcut ve sonlu olduğunu da sağlar. Dolayısıyla, (4.32) eşitliğinin $s \to 1$ iken limiti alındığında,

$$E\big(A^*(\alpha,\lambda\zeta)\big) = \lim_{s\to 1} E\big(\psi(s,\alpha,\lambda\zeta)\big)$$

$$= \int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z} \frac{1-\tilde{d}^*(1,-\alpha,\lambda z)}{\big(1-s\varphi_\eta(-\alpha)\big)} d\pi_\lambda(z) \qquad (4.33)$$

olur. Burada

$$\tilde{d}^*(1,-\alpha,\lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-i\alpha x} P\big\{N_1(\lambda z) = n; S_{N_1(\lambda z)} \in dx\big\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-i\alpha x} P\big\{S_{N_1(\lambda z)} \in dx\big\} = E\big(e^{-i\alpha S_{N_1(\lambda z)}}\big) = \varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) \qquad (4.34)$$

olur. (4.34) eşitliği (4.33)' te yerine yazılırsa:

$$E\big(A^*(\alpha,\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z} \frac{1-\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha)}{\big(1-s\varphi_\eta(-\alpha)\big)} d\pi_\lambda(z); \;\; a \neq 0 \qquad (4.35)$$

olur. Sonuç olarak, (4.35) eşitliği (4.23)' te yerine yazıldığında Önerme 4.1 ispatlanmış olur.

5. X(t) SÜRECİNİN ZAYIF YAKINSAMASI

$X(t)$ süreci için zayıf yakınsama teoremini vermeden önce aşağıdaki standartlaştırılmış süreci dahil edelim:

$$Y_\lambda(t) \equiv \frac{X(t)}{\lambda};\ t \geq 0;\ \ \lambda > 0.$$

Bu bölümdeki amacımız, $\lambda \to \infty$ iken, $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremini ispat etmektir. Bu sebeple, öncelikle aşağıdaki ilk önerme verilsin.

Hatırlatmak gerekirse, $\pi_\lambda(z)$ dağılımı $\{\zeta_n\}; n = 1,2, \ldots$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır.

Önerme 5.1: $g(x): R^+ \to R$ ölçülebilir fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) = 0.$$

İspat: $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olduğuna göre her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $x^*(\varepsilon) < \infty$ vardır ki, her $x \geq x^*(\varepsilon)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.1}$$

$\delta > 0$ olmak üzere $\int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$ integrali aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) = \int_0^\delta g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) + \int_\delta^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z). \tag{5.2}$$

Şimdi de λ parametresi aşağıdaki gibi seçilsin:

$$\lambda \equiv \lambda_*(\varepsilon, \delta) = \frac{x^*(\varepsilon)}{\delta}.$$

Her $\lambda \geq \lambda_*(\varepsilon, \delta)$ için $\lambda\delta \geq x^*(\varepsilon)$ olacaktır. Bu sebeple gerekli hesaplamalar yapıldığında her $\lambda \geq \lambda_*(\varepsilon, \delta)$ için

$$\left|\int_\delta^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)\right| \leq \int_\delta^\infty |g(\lambda z)|\, d\pi_\lambda(z) \leq \int_\delta^\infty \frac{\varepsilon}{2} d\pi_\lambda(z) = \frac{\varepsilon}{2}\int_\delta^\infty d\pi_\lambda(z)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \pi_\lambda(\delta)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, Önerme 5.1' in koşullarına göre $g(x)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup $\sup_{x\in R}|g(x)| \leq M < \infty$' dır. Dolayısıyla her $z \geq 0$ için $|g(\lambda z)| \leq M$ olur. Bu takdirde,

$$\left|\int_0^\delta g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)\right| \leq \int_0^\delta |g(\lambda z)| d\pi_\lambda(z) \leq M\pi_\lambda(\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. δ parametresi öyle seçilsin ki, $\pi_\lambda(\delta) = \varepsilon/2M$ olsun. δ' nın bu değeri δ^* ile gösterilsin. Başka bir deyişle, $\delta^* \equiv \delta^*(\varepsilon)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\delta^* \equiv \delta^*(\varepsilon) = \sup\left\{\delta > 0 : \pi_\lambda(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2M}\right\} > 0.$$

$\pi_\lambda(z)$ fonksiyonu z parametresine göre monoton azalmayan bir fonksiyon olduğundan her $\delta \leq \delta^*(\varepsilon)$ için $\pi_\lambda(\delta) \leq \varepsilon/2M$ olacaktır. Bu takdirde,

$$\left|\int_0^\delta g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)\right| \leq M\pi_\lambda(\delta) \leq M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.4}$$

olur. Dolayısıyla, (5.3) ve (5.4) eşitsizlikleri (5.2)' de göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)\right| \leq \left|\int_0^{\delta(\varepsilon)} g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)\right| + \left|\int_{\delta(\varepsilon)}^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Özetle, her $\varepsilon > 0$ için $\lambda \to \infty$ iken

$$\left|\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\right| \leq \varepsilon$$

olur. Bu ise $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) \to 0$$

olduğu anlamına gelir. Yani, $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) = 0$' dır. Bu da Önerme 5.1' i ispatlar.

Aşağıda $\{S_n\},\ n \geq 0$ rasgele yürüyüş sürecinin basamak yükseklikleri ile basamak anlarından yararlanılacaktır. Dolayısıyla, 4. bölümde tanımlanan ilk basamak yüksekliği (χ_1^+) ile ilk basamak anı (ν_1^+) rasgele değişkenlerini tekrar hatırlatalım:

$$\nu_1^+ = \inf\{n \geq 1: S_n > 0\};\ \ \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} \equiv \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i.$$

Ayrıca, $(\nu_n^+, \chi_n^+), n \geq 2$ ikilileri (ν_1^+, χ_1^+) ile aynı dağılıma sahip, bağımsız ve pozitif değerli rasgele değişken çiftleri olsun. $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme süreci $H(z)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$H(z) = \inf\left\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \chi_1^+ > z\right\}, z \geq 0.$$

Dynkin prensibine göre, $N_1(z)$ ve $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelleri $\{\nu_n^+\}$ ve $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ rasgele değişken dizileri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$N_1(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+\ ; \qquad S_{N_1(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+$$

Yukarıdaki tanımlardan ve Önerme 5.1' den yararlanarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 5.2: $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$ koşulu sağlandığında, $x \to \infty$ iken aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$M_1(x) \equiv E\left(S_{N_1(x)}\right) = x + \hat{\mu}_1 + o(1).$$

Burada χ_1^+rasgele değişkeni S_n rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak yüksekliği, $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1^+) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, $\mu_k = E(\chi_1^{+k}), k = 1,2$' dir.

İspat: $M_1(x)$ tanımı gereği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_1(x) \equiv E\left(S_{N_1(x)}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{H(x)} \chi_i^+\right)$$

Wald özdeşliğine göre

$$E\left(\sum_{i=1}^{H(x)} \chi_i^+\right) = \mu_1 E\big(H(x)\big) = \mu_1 U_+(x)$$

olarak yazılabilir. $U_+(x)$ yenileme fonksiyonunun asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$U_+(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1)$$

$U_+(x)$' in asimtotik açılımı yerine yazılırsa $M_1(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım elde edilir:

$$M_1(x) = x + \hat{\mu}_1 + o(1).$$

Burada $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1^+) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$' dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.2 ve Önerme 5.1' den yararlanarak aşağıdaki Önerme 5.3 elde edilebilir.

Önerme 5.3: $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$ ve $\beta_1 \equiv E(\zeta) < \infty$ koşulları altında, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1).$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta)$, $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1^+) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$; $\mu_k \equiv E(\chi_1^{+k}), k = 1,2$' dir. Ayrıca, ζ, $\pi_\lambda(z)$ dağılımına sahip bir rasgele değişkendir, yani $P\{\zeta \leq z\} \equiv \pi_\lambda(z) = \lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n \leq z\}$' dir.

Şimdi de, $\lambda \to \infty$ iken, $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunun limit formu elde edilsin. Bunun için aşağıdaki notasyonlar dahil edilsin:

$$\varphi_\zeta(\alpha) \equiv \varphi_\zeta(\alpha;\lambda) \equiv E\left(e^{i\alpha\zeta}\right) \equiv \int_0^\infty e^{i\alpha z} d\pi_\lambda(z).$$

Burada, $\varphi_\zeta(\alpha) \equiv \varphi_\zeta(\alpha;\lambda)$, ζ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu olup, λ' ya bağlı bir fonskiyondur. Bu detayı ifade etmek amacıyla, sadece bu bölümde $\varphi_\zeta(\alpha;\lambda) \equiv \varphi_\zeta(\alpha)$ olarak kullanılacak olup, diğer bölümlerde $\varphi_\zeta(\alpha)$ notasyonu kullanılmaya devam edilecektir. Ayrıca, $\pi_\lambda(z)$, $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılım fonksiyonudur. Bunlara ek olarak, $\pi_\lambda(z)$ dağılım fonksiyonunun ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımı $\hat{\pi}_\lambda(x)$ olsun, yani,

$$\hat{\pi}_\lambda(x) = \frac{1}{\beta_1}\int_0^x \left(1 - \pi_\lambda(v)\right) dv.$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta)$' dır. $\hat{\pi}_\lambda(x)$ dağılımına ait karakteristik fonksiyonu $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)$ olsun. Bu durumda $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} d\hat{\pi}_\lambda(x).$$

Bu notasyonlar kullanılarak aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 5.1: Başlangıç rasgele değişkenleri $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ aşağıdaki koşulları da sağlamış olsun.

i. $E(\xi_1) < \infty;$
ii. $m_1 \equiv E(\eta_1) > 0;$
iii. $E(|\eta_1|^3) < \infty;$
iv. η_1 aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun.

Bu durumda, $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\left(\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha)\right)$ ile $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun arasındaki fark, $\lambda \to \infty$ iken, sıfıra yakınsar. Yani,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) - \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)\right] = 0.$$

Burada, $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) = \frac{\varphi_\zeta(\alpha;\lambda)-1}{i\alpha\beta_1}$ olup, $\beta_1 \equiv E(\zeta)$ ve $\varphi_\zeta(\alpha;\lambda)$, $\pi_\lambda(x)$ dağılımına sahip ζ rasgele değişkeninin sırasıyla, beklenen değeri ve karakteristik fonksiyonudur $(\alpha \in R\backslash\{0\})$.

İspat: Teorem 5.1' i ispatlamak için (4.24)' te verilen temel eşitlik kullanılacaktır. Tanıma göre

$$\varphi_{Y_\lambda(t)}(\alpha) = E\{\exp(i\alpha Y_\lambda(t))\} = E\left\{\exp\left(i\frac{\alpha}{\lambda}X(t)\right)\right\} = \varphi_{X(t)}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \tag{5.5}$$

olur. (5.5) eşitliğinin her iki tarafından $t \to \infty$ iken limit alındığında, $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\left(\varphi_X(\alpha) \equiv E\left(e^{i\alpha X}\right)\right)$ ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) = \varphi_X\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \tag{5.6}$$

Burada $\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} \varphi_{Y_\lambda(t)}(\alpha)$' dır. (5.6) eşitliği (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) = \frac{1}{E\left(N_1(\lambda\zeta)\right)} \int_0^\infty e^{i\alpha z} \frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1}{\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1} d\pi_\lambda(z) \tag{5.7}$$

$\hat{S}_{N_1(\lambda z)} \equiv S_{N_1(\lambda z)} - \lambda z$ olsun. Notasyon kısalığı için:

$$I_1(\lambda) = \varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) = E\left(\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}S_{N_1(\lambda z)}\right)\right)$$

olsun. Bu durumda,

$$I_1(\lambda) = E\left(\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}\left(\lambda z + \hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right)\right)\right) = e^{-i\alpha z} E\left(\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right)\right)$$

olarak gösterilebilir. Teorem 5.1' in şartları altında $\hat{S}_{N_1(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin birinci başlangıç momenti sonlu olduğu için (Rogozin, (1964)), aşağıdaki Taylor açılımı yazılabilir (Feller, (1971)):

$$E\left\{\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right)\right\} = 1 - i\frac{\alpha}{\lambda}E\left(\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right) + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z) \tag{5.8}$$

Burada, $g(x)$ bir sınırlı fonksiyon olup, $x \to \infty$ iken $g(x) \to 0$ olur. $C_1(\lambda z) \equiv E\left(\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right)$ olsun. Bu takdirde,

$$I_1(\lambda) = e^{-i\alpha z}\left\{1 - i\frac{\alpha}{\lambda}C_1(\lambda z) + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z)\right\}. \tag{5.9}$$

olur. Kolaylık açısından $I_2(\lambda, z) \equiv e^{-i\alpha z}(I_1(\lambda) - 1)$ notasyonunu dahil edelim:

$$I_2(\lambda, z) = e^{-i\alpha z}I_1(\lambda) - e^{i\alpha z} = 1 - \ i\frac{\alpha}{\lambda}C_1(\lambda z) + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z) - e^{i\alpha z}$$

$$= \left(1 - e^{i\alpha z}\right) - i\frac{\alpha}{\lambda}C_1(\lambda z) + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z). \tag{5.10}$$

Rogozin (1964)' e göre $\lim\limits_{\lambda\to\infty} C_1(\lambda z) = \hat{\mu}_1 \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1}$' dir. Burada $\mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right), k = 1{,}2$' dir. (5.10) eşitliğinin her iki tarafını $d\pi_\lambda(z)$ ile çarpıp integrallediğimizde, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^\infty I_2(\lambda, z)d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - e^{i\alpha z}\right)d\pi_\lambda(z) - i\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\infty \hat{\mu}_1 d\pi_\lambda(z) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty g(\lambda z)\,d\pi_\lambda(z)$$

$$= \left(1 - \varphi_\zeta(\alpha;\lambda)\right) - i\frac{\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) \tag{5.11}$$

Önerme 5.1' e göre $\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) = o(1)$' dir. Bu takdirde, (5.11) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_0^\infty I_2(\lambda, z)d\pi_\lambda(z) = \left(1 - \varphi_\zeta(\alpha;\lambda)\right) - i\frac{\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{5.12}$$

Şimdi ise, (5.7) eşitliğinin paydasını $\lambda \to \infty$ iken inceleyelim ve bu kısmı $I_3(\lambda)$ notasyonu ile aşağıdaki gibi gösterelim:

$$I_3(\lambda) = E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)\left[\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1\right]$$

$$= E\big(N_1(\lambda z)\big)\left\{1 - \frac{i\alpha}{\lambda}m_1 + \frac{(i\alpha)^2}{2\lambda^2}m_2 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) - 1\right\}$$

$$= -m_1 E\big(N_1(\lambda z)\big)\frac{i\alpha}{\lambda}\left\{1 - \frac{i\alpha}{2\lambda}\frac{m_2}{m_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= -E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\frac{i\alpha}{\lambda}\left\{1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\widehat{m}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{5.13}$$

Burada $E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) \equiv \int_0^\infty M_1(\lambda z)d\pi_\lambda(z)$; $M_1(\lambda z) \equiv E\big(S_{N_1(\lambda z)}\big)$ ve $\widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$' dır. Önerme 5.2 ve Önerme 5.3 dikkate alındığında, (5.13) açılımı aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$I_3(\lambda) = -[\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1)]\frac{i\alpha}{\lambda}\left\{1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\widehat{m}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= -i\alpha\left\{\beta_1 + \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda} - \frac{i\alpha}{\lambda}\widehat{m}_1\beta_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= -i\alpha\beta_1\left\{1 + \frac{D}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{5.14}$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta)$, $D \equiv \frac{\widehat{\mu}_1}{\beta_1} - i\alpha\widehat{m}_1$; $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$; $\widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$; $\mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big)$; $m_k = E\big(\eta_1^k\big)$, $k = 1,2,...$' dir. (5.12) ve (5.14) açılımlarını (5.7) açılımında yerlerine yazdığımızda, aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) = \frac{\int_0^\infty I_2(\lambda, z)d\pi_\lambda(z)}{I_3(\lambda)} = \frac{\Big(1 - \varphi_\zeta(\alpha;\lambda)\Big) - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{-i\alpha\beta_1\left\{1 + \frac{D}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}}$$

$$= \frac{\varphi_\zeta(\alpha;\lambda) - 1}{i\alpha\beta_1} + \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1} - D\frac{\varphi_\zeta(\alpha;\lambda) - 1}{i\alpha\beta_1}\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Burada $D = \frac{\widehat{\mu}_1}{\beta_1} - i\alpha\widehat{m}_1$'dır. Başka bir deyişle, $\lambda \to \infty$ iken, $\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha)$ için aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) = \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) + \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1} - \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)D\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{5.15}$$

Burada $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) \equiv \frac{\varphi_\zeta(\alpha;\lambda)-1}{i\alpha\beta_1}$ olup, $\beta_1 \equiv E(\zeta)$ ve $\varphi_\zeta(\alpha;\lambda)$ sırasıyla $\pi_\lambda(x)$ dağılımına sahip ζ rasgele değişkeninin beklenen değeri ve karakteristik fonksiyonudur ($\alpha \in R\backslash\{0\}$). Teorem 5.1' in koşullarına göre $\mu_2 < \infty,\ \beta_1 \equiv E(\zeta) > 0$ ve $m_2 < \infty$ sağlandığından,

$$\left|\frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1} - \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)D\right| \leq \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1} + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1} + \alpha\widehat{m}_1 = \frac{2\hat{\mu}_1}{\beta_1} + \alpha\widehat{m}_1 < \infty.$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) - \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Burada $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) \equiv \frac{\varphi_\zeta(\alpha;\lambda)-1}{i\alpha\beta_1}$ olup, $\varphi_\zeta(\alpha;\lambda)$ fonksiyonu ise $\pi_\lambda(x)$ dağılımının karakteristik fonksiyonudur. Böylece, Teorem 5.1 ispatlanmış olur.

Yorum 5.1: Kalan ömür teorisine göre $\pi_\lambda(x)$ dağılımı $\lambda \to \infty$ iken

$$\pi_+(x) \equiv \hat{F}_+(x) \equiv \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \big(1 - F_+(v)\big)dv$$

limit dağılımına zayıf yakınsamaktadır (Feller, (1971)). Kalan ömrün limit dağılımı ve zayıf yakınsama hakkındaki bilgilerden yola çıkılarak (Rogozin, (1964); Feller, (1971)) aşağıdaki önermeler verilebilir.

Önerme 5.4: Teorem 5.1'in koşulları altında, $\varphi_\zeta(\alpha;\lambda) \equiv E\big(e^{i\alpha\zeta}\big)$ için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik ilişki doğrudur:

$$\varphi_\zeta(\alpha;\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \hat{\varphi}_+(\alpha).$$

Burada $\hat{\varphi}_+(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha t} d\pi_+(t),\ \pi_+(t) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^t \big(1 - F_+(x)\big)dx;\ F_+(x) \equiv P\{\chi_1^+ \leq x\};\ \mu_1 = E(\chi_1^+)$' dır.

İspat: ζ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu $\lambda \to \infty$ iken süreklilik teoremine göre $\{\chi_n^+\}, n = 1,2,...$ basamak yüksekliklerinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün karakteristik fonksiyonuna zayıf yakınsar (Lukac, (1970)). Dolayısıyla,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_\zeta(\alpha;\lambda) \equiv \hat{\varphi}_+(\alpha) \equiv \frac{\varphi_+(\alpha)-1}{i\alpha\mu_1}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.4' ün yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.5: Teorem 5.1'in koşulları altında $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)$ için $\lambda\to\infty$ iken aşağıdaki asimtotik ilişki doğrudur:

$$\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv \frac{\hat{\varphi}_+(\alpha)-1}{i\alpha\hat{\mu}_1}.$$

Burada $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) \equiv \frac{\varphi_\zeta(\alpha;\lambda)-1}{i\alpha\beta_1}$, $\hat{\varphi}_+(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha t} d\pi_+(t), \pi_+(t) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^t \big(1-F_+(x)\big)dx$ ve $\hat{\mu}_1 = \int_0^\infty x d\pi_+(x) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, $\mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big), k = 1,2,\ldots$' dir.

İspat: $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)$ fonksiyonu ζ rasgele değişkeninin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımının karakteristik fonksiyonudur. Bu takdirde, Önerme 5.4 ve karakteristik fonksiyonlar için süreklilik teoremi göz önüne alındığında (Lukac, (1970))

$$\lim_{\lambda\to\infty} \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) = \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv \frac{\hat{\varphi}_+(\alpha)-1}{i\alpha\hat{\mu}_1}$$

olarak elde edilir. Bu da Önerme 5.5' i ispatlar.

Teorem 5.1 ile Önerme 5.5' ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1: Teorem 5.1' in koşulları altında aşağıdaki asimtotik sonuç yazılabilir:

$$\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0.$$

İspat: Sonuç 5.1' de verilen ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) = \big[\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) - \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda)\big] + \big[\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)\big]$$

$\lambda\to\infty$ iken, Teorem 5.1' e göre $\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) - \hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) \to 0$; Önerme 5.5' e göre ise $\hat{\varphi}_\zeta(\alpha;\lambda) - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \to 0$' dır. Dolayısıyla, $\lambda\to\infty$ iken, $\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha) - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \to 0$ olur.

Yorum 5.2: Sonuç 5.1 şu şekilde yorumlanabilir.

$Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\left(\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha)\right)$ $\lambda \to \infty$ iken,

$$\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv \frac{\hat{\varphi}_+(\alpha) - 1}{i\alpha\hat{\mu}_1}$$

fonksiyonuna yakınsar. Yani, limitte $\{\chi_n^+\}, n = 1,2,...$ basamak yüksekliklerinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömürlerinin, tekrar ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün karakteristik fonksiyonuna $\left(\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)\right)$ yakınsar. Burada $\hat{\varphi}_+(\alpha)$ fonksiyonu $\pi_+(x)$ dağılımının karakteristik fonksiyonu, $\hat{\mu}_1 = \mu_2/(2\mu_1)$ ise $\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x\left(1 - F_+(v)\right)dv$ dağılımının beklenen değeridir. Tanımından da görüldüğü gibi $\pi_+(x)$ dağılımı $\{\chi_n^+\}, n = 1,2,...$ basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımıdır. Diğer taraftan $\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv \frac{\hat{\varphi}_+(\alpha)-1}{i\alpha\hat{\mu}_1}$ ifadesi $\pi_+(x)$ dağılımına sahip olan rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme sürecinin kalan ömrünün limitteki karakteristik fonksiyonudur. Bu durumda kalan ömür teoremine (Feller, (1970)) göre $\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv \frac{\hat{\varphi}_+(\alpha)-1}{i\alpha\hat{\mu}_1}$ fonksiyonu bir karakteristik fonksiyondur ve kendisi "bir kalan ömrün kalan ömrünün limitteki karakteristik fonksiyonu" gibi yorumlanabilir. Başka bir deyişle, $\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)$ fonksiyonu

$$\hat{\pi}_+(x) \equiv R_+(x) \equiv \frac{2}{\mu_2}\int_0^x \left\{\int_v^\infty \left(1 - F_+(u)\right)du\right\} dv$$

dağılımının karakteristik fonksiyonudur. Dolayısıyla, $\varphi_{Y(\lambda)}(\alpha)$ karakteristik fonksiyonlar ailesi $\lambda \to \infty$ iken $\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)$ karakteristik fonksiyonuna yakınsamaktadır ve bu karakteristik fonksiyon $R_+(x)$ dağılım fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Bu durumda süreklilik teoremine göre (Lukac, (1970)) standartlaştırılmış sürecin $\left(Y_\lambda(t)\right)$ ergodik dağılım fonksiyonunun, $\lambda \to \infty$ iken, yakınsadığı limit dağılım fonksiyonunun $R_+(x)$ olduğu görülmektedir. Bu sonucu aşağıdaki teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem 5.2: Teorem 5.1' in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $Y_\lambda(t)$ süreci ergodik olup, onun ergodik dağılım fonksiyonu $\left(Q_Y(x)\right)$, her $x > 0$ için $\lambda \to \infty$ iken, $R_+(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar, yani:

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_Y(x) = R_+(x) \equiv \frac{2}{\mu_2}\int_0^x \left\{\int_v^\infty \big(1 - F_+(u)\big)du\right\} dv$$

olur. Burada, $\mu_2 = E(\chi_1^{+2})$ ve $F_+(u) \equiv P\{\chi_1^+ \leq u\}$' dır.

İspat: $R_+(x)$ dağılımının karakteristik fonksiyonu tanımı gereği aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^\infty e^{i\alpha x} dR_+(x) = \int_{x=0}^\infty e^{i\alpha x} \left\{\frac{2}{\mu_2}\int_{y=x}^\infty \big(1 - F_+(y)\big)dy\right\} dx$$

$$= \frac{2}{\mu_2}\int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^y e^{i\alpha x}\big(1 - F_+(y)\big)dydx = \frac{2}{\mu_2}\int_{y=0}^\infty \big(1 - F_+(y)\big)\left\{\int_{x=0}^y e^{i\alpha x}dx\right\} dy$$

$$= \frac{2}{\mu_2}\int_{y=0}^\infty \big(1 - F_+(y)\big)\frac{\left(e^{i\alpha y} - 1\right)}{i\alpha} dy$$

Burada aşağıdaki değişken dönüşümü yapılsın:

$$u = 1 - F_+(v)\, ; dv = \frac{\left(e^{i\alpha y} - 1\right)}{i\alpha} dy$$

Bu durumda

$$\int_0^\infty e^{i\alpha x} dR_+(x)$$

$$= \frac{2}{\mu_2}\left\{\big(1 - F_+(y)\big)\frac{\left(e^{i\alpha y} - 1 - i\alpha y\right)}{(i\alpha)^2}\Big|_0^\infty + \int_{y=0}^\infty \frac{\left(e^{i\alpha y} - 1 - i\alpha y\right)}{(i\alpha)^2} dF_+(y)\right\}$$

$$= \frac{2}{\mu_2 (i\alpha)^2}\left\{\int_{y=0}^\infty e^{i\alpha y} dF_+(y) - \int_0^\infty dy F_+(y) - \int_0^\infty i\alpha y dF_+(y)\right\}$$

$$= \frac{2}{\mu_2 (i\alpha)^2}\left(\varphi_+(\alpha) - 1 - i\alpha\mu_1\right) \qquad (5.16)$$

elde edilir. Burada $\varphi_+(\alpha) = E\left(e^{i\alpha\chi_1^+}\right)$ basamak yüksekliğinin karakteristik fonksiyonu, $\mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right), k = 1,2$ ise momentlerini ifade etmektedir. Diğer taraftan, $\pi_+(x)$ limit dağılımının ürettiği yenileme sürecinin kalan ömür dağılımına ait karakteristik fonksiyonu $\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)$ ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) = \frac{\hat{\varphi}_+(\alpha) - 1}{i\alpha\hat{\mu}_1} \tag{5.17}$$

Burada, $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1^+) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ olup, $\hat{\varphi}_+(\alpha)$ fonksiyonu $\pi_+(x)$ limit dağılımının karakteristik fonksiyonudur, yani,

$$\varphi_+(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} d\pi_+(x).$$

$\pi_+(x)$ limit dağılımı ise basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımıdır. Bu durumda

$$\hat{\varphi}_+(\alpha) = \frac{\varphi_+(\alpha) - 1}{i\alpha\mu_1} \tag{5.18}$$

olarak tanımlanır. Burada $\mu_1 = E(\chi_1^+)$ ve $\varphi_+(\alpha)$ fonksiyonu $\{\chi_n^+\}$, $n = 1,2, \ldots$ basamak yüksekliklerinin karakteristik fonksiyonudur, yani,

$$\varphi_+(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} dF_+(x).$$

(5.18) eşitliği (5.17)' de yerine yazılıp gerekli sadeleştirilmeler yapıldığında aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur, yani

$$\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) = \frac{\frac{\varphi_+(\alpha)-1}{i\alpha\mu_1} - 1}{i\alpha\hat{\mu}_1} = \frac{2}{\mu_2(i\alpha)^2}(\varphi_+(\alpha) - 1 - i\alpha\mu_1) \tag{5.19}$$

olur. (5.19) eşitliği (5.16)' da elde edilen sonuçla aynıdır. Burada, $Y_\lambda(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonun yakınsadığı $\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)$ karakteristik fonksiyonuna karşılık gelen dağılım fonksiyonu $R_+(x)$ olarak elde edilmiş olur. Dolayısıyla, $\lambda \to \infty$ iken $Y_\lambda(t)$ sürecinin dağılımının $(Q_Y(x))$ $R_+(x)$ dağılımına yakınsadığı sonucuna ulaşılır. Böylece Teorem 5.2 ispat edilmiş olur.

6. X(t) SÜRECİNİN ERGODİK DAĞILIMININ ZAYIF YAKINSAMASININ ASİMTOTİK HIZI

Bu bölümde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının zayıf yakınsamasının asimtotik hızı incelenecektir. Dolayısıyla, öncelikle sürecin ergodik dağılımı için bir limit form elde edilecektir. Bunun için aşağıda verilen standartlaştırılmış $X(t)$ sürecinden faydalanılacaktır:

$$Y_\lambda(t) = \frac{X(t)}{\lambda};\ \lambda > 0.$$

Buradaki amaç sürecin ergodik dağılımının $\lambda \to \infty$ iken, limit formunu hesaplamaktır. Bu sebeple, öncelikle aşağıdaki önermeler ve yardımcı teoremler verilsin.

Önerme 6.1: $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olsun. Bu durumda, her $x \geq 0$ için

$$\bar{a}_n(x) = \int_x^\infty v^{n-1}\big(1 - F_+(v)\big)dv < \infty; n = 1,2,3$$

Burada, $F_+(x) \equiv P\{\chi_1^+ \leq x\}$' dır.

İspat: Notasyon kolaylığı açısından $\bar{F}_+(t) \equiv 1 - F_+(t)$ olsun. $\{\chi_n^+\}, n = 1,2, \ldots$ rasgele değişken dizisi pozitif değerli oldukları için, $n.$ momenti

$$\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}) = n\int_0^\infty v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv \tag{6.1}$$

olarak yazılabilir (Feller, (1971)). Bu tanımdan yararlanılarak, $n = 1,2,3$ için aşağıdaki değerlendirmeler yapılabilir.

- $n = 1$ iken,

$$\mu_1 = \int_0^\infty \bar{F}_+(v)dv = \int_0^x \bar{F}_+(v)dv + \int_x^\infty \bar{F}_+(v)dv \geq \int_x^\infty \bar{F}_+(v)dv = \bar{a}_1(x)$$

olur. Özetle, $\bar{a}_1(x) \leq \mu_1$ olur. $\mu_3 < \infty$ olduğu için $\mu_1 < \infty$' dir. Dolayısıyla, $\forall x \geq 0$ için $\bar{a}_1(x) < \infty$'dir.

- $n = 2$ iken,

$$\frac{\mu_2}{2} = \int_0^\infty v\bar{F}_+(v)dv = \int_0^x v\bar{F}_+(v)dv + \int_x^\infty v\bar{F}_+(v)dv \geq \int_x^\infty v\bar{F}_+(v)dv = \bar{a}_2(x)$$

olur. Buradan, $\bar{a}_2(x) \leq \frac{\mu_2}{2}$ olur. $\mu_3 < \infty$ olduğu için $\mu_2 < \infty$' dir. Dolayısıyla, $\forall\ x \geq 0$ için $\bar{a}_2(x) < \infty$ olur.

- $n = 3$ iken,

$$\frac{\mu_3}{3} = \int_0^\infty v^2\bar{F}_+(v)dv = \int_0^x v^2\bar{F}_+(v)dv + \int_x^\infty v^2\bar{F}_+(v)dv \geq \int_x^\infty v^2\bar{F}_+(v)dv = \bar{a}_3(x)$$

Özetle, $\bar{a}_3(x) \leq \frac{\mu_3}{3}$ olur. $\mu_3 < \infty$ olduğu için benzer şekilde, $\forall x \geq 0$ için $\bar{a}_3(x) < \infty$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 6.1' den aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilebilir.

Sonuç 6.1: Önerme 6.1' in koşulları altında,

$$x\bar{a}_1(x) < \infty;\ x^2\bar{a}_1(x) < \infty \text{ ve } x\bar{a}_2(x) < \infty$$

olur.

İspat: $\{\chi_n^+\}, n = 1,2, \ldots$ rasgele değişken dizisi pozitif değerli olduğu için (6.1) tanımından yararlanılarak aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir:

$$\frac{\mu_2}{2} = \int_0^\infty v\bar{F}_+(v)dv = \int_0^x v\bar{F}_+(v)dv + \int_x^\infty v\bar{F}_+(v)dv \geq \int_x^\infty v\,\bar{F}_+(v)dv$$

$$\geq \int_x^\infty x\,\bar{F}_+(v)dv = x\bar{a}_1(x)$$

Özetle, $x\bar{a}_1(x) \leq \frac{\mu_2}{2}$ olur. $\mu_3 < \infty$ olduğu için $\mu_2 < \infty$' dir. Dolayısıyla, $\forall x \geq 0$ için $x\bar{a}_1(x) < \infty$ olur. Aynı yöntemle,

$$\frac{\mu_3}{3} = \int_0^\infty v^2\bar{F}_+(v)dv = \int_0^x v^2\bar{F}_+(v)dv + \int_x^\infty v^2\bar{F}_+(v)dv \geq \int_x^\infty v^2\,\bar{F}_+(v)dv$$

$$\geq \int_x^\infty x^2\,\bar{F}_+(v)dv = x^2\bar{a}_1(x)$$

olur. Özetle, $x^2\bar{a}_1(x) \leq \frac{\mu_3}{3}$ olur. $\mu_3 < \infty$ olduğundan $\forall\ x \geq 0$ için, $x^2\bar{a}_1(x) < \infty$ olur.

Benzer şekilde,

$$\frac{\mu_3}{3} = \int_0^\infty v^2 \bar{F}_+(v)dv = \int_x^\infty v^2 \bar{F}_+(v)dv \geq \int_x^\infty xv\, \bar{F}_+(v)dv = x\bar{a}_2(x)$$

olur. Dolayısıyla, $\forall x \geq 0$ için $x\bar{a}_2(x) \leq \frac{\mu_3}{3} < \infty$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 6.2: $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$$\lim_{x\to\infty} a_n(x) = \frac{\mu_n}{n}$$

olur. Burada $a_n(x) \equiv \int_0^x v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv$ ve $\bar{F}_+(x) = 1 - F_+(x)$' tir.

İspat: Pozitif rasgele değişkenlerin n. momentleri üzerine verilen alternatif tanımdan yararlanarak aşağıdaki sonuç elde edilir (Feller, (1971)):

$$\lim_{x\to\infty} a_n(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv = \int_0^\infty v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv = \frac{\mu_n}{n}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur

Önerme 6.3: $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$$\lim_{x\to\infty} \bar{a}_n(x) = 0$$

olur. Burada $\bar{a}_n(x) \equiv \int_x^\infty v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv$ ve $\bar{F}_+(x) = 1 - F_+(x)$' tir.

İspat: $\bar{a}_n(x)$' nin tanımından,

$$\bar{a}_n(x) \equiv \int_x^\infty v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv = \int_0^\infty v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv - \int_0^x v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv = \frac{\mu_n}{n} - a_n(x)$$

olur. Önerme 6.2' de ispat edildiği üzere,

$$\lim_{x\to\infty} \bar{a}_n(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\mu_n}{n} - a_n(x)\right] = \frac{\mu_n}{n} - \frac{\mu_n}{n} = 0$$

olur.

Önerme 6.4: $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olsun. Bu takdirde,

a) $\lim_{x\to\infty} x^2\bar{a}_1(x) = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} x\bar{a}_1(x) = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} x\bar{a}_2(x) = 0$

olur. Burada $\bar{a}_n(x) \equiv \int_x^\infty v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv\,; n = 1{,}2$ ve $\bar{F}_+(x) = 1 - F_+(x)$' tir.

İspat:

a) $\mu_3 < \infty$ olduğundan aşağıdaki değerlendirme yapılabilir:

$$\int_0^\infty x\bar{a}_1(x)dx = \int_0^\infty x\int_{v=x}^\infty \bar{F}_+(v)dv\,dx = \int_{v=0}^\infty \bar{F}_+(v)dv\int_{x=0}^v x\,dx$$
$$= \int_{v=0}^\infty \frac{v^2}{2}\bar{F}_+(v)dv = \frac{1}{2}\frac{\mu_3}{3} = \frac{\mu_3}{6} < \infty$$

Dolayısıyla, $x \to \infty$ iken, $x\bar{a}_1(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$' tir. Bu takdirde, $\lim_{x\to\infty} x^2\bar{a}_1(x) = 0$ sağlanmış olur.

b) a şıkkının ispatında $x\bar{a}_1(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ olduğu elde edilmişti. Bu ifadenin her iki tarafı x ile genişletildiğinde $x^2\bar{a}_1(x) = o(1)$ elde edilir. Bu da $\lim_{x\to\infty} x\bar{a}_1(x) = 0$ demektir. Böylece, önermenin b şıkkı sağlanmış olur.

c) Benzer şekilde,

$$\int_0^\infty \bar{a}_2(x)dx = \int_0^\infty dx\int_{v=x}^\infty v\bar{F}_+(v)dv\,dx = \int_{v=0}^\infty v\bar{F}_+(v)dv\int_{x=0}^v dx$$
$$= \int_{v=0}^\infty v^2\bar{F}_+(v)dv = \frac{\mu_3}{3} < \infty$$

değerledirmesi yapılabilir. Dolayısıyla, $\bar{a}_2(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$' tir. Bu açılımın her iki tarafı x ile genişletilirse $x\bar{a}_2(x) = o(1)$ elde edilir. Bu da $\lim_{x\to\infty} x\bar{a}_2(x) = 0$ demektir. Bu durumda önermenin c şıkkı da sağlanmış olur.

Tüm şıklar sağlandığından önermenin ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 6.5: $g(x): R^+ \to R$ ölçülebilir fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup, $g(0) = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$' dır. Bu takdirde, aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d_x g(x) = o(1)$$

İspat:

$$\left|\int_0^T e^{i\alpha x} d_x g(x)\right| \leq \left|\int_0^T 1 d_x g(x)\right| = |g(T) - g(0)| = g(T)$$

Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir T_0 bulmak mümkündür ki, her $T \geq T_0$ için $|g(T)| < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla,

$$\left|\int_0^T e^{i\alpha x} d_x g(x)\right| < \varepsilon$$

olur. Bu durumda, $\lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{i\alpha x} d_x g(x) = o(1)$' dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$W(t)$ stokastik süreci, $\{\chi_n^+\}, n = 1,2, ...$ pozitif rasgele değişken dizisinin ürettiği bir kalan ömür olsun. $H(t; x) \equiv P\{W(t) \leq x\}$ ile de bu kalan ömrün bir boyutlu dağılım fonksiyonu gösterilsin. Bu takdirde, $H(t; x)$ için aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 6.1: $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olsun. Bu durumda, $H(t; x)$ dağılım fonksiyonu için $t \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$H(t; x) \equiv P\{W(t) \leq x\} = \pi_+(x) + o\left(\frac{1}{t}\right) \tag{6.2}$$

Burada $\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \big(1 - F_+(t)\big)dt$; $\mu_1 = E(\chi_1^+)$; $F_+(t) \equiv P\{\chi_1^+ \leq t\}$' dir.

İspat: Kalan ömrün bir boyutlu dağılım fonksiyonunun kesin ifadesi aşağıdaki gibidir (Feller, (1971), s.369):

$$H(t; x) \equiv P\{W(t) \leq x\} = \int_{0^-}^{t} [F_+(t + x - v) - F_+(t - v)] dU_+(v) \tag{6.3}$$

Burada $U_+(t)$ ile $\{\chi_n^+\}, n = 1,2,\dots$ basamak yüksekliklerinin ürettiği yenileme fonksiyonu ifade edilmiştir, yani $U_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{*(n)}(t)$' dir. $F_+^{*(n)}(t)$ ile $n.$ dereceden konvolüsyon çarpım ifade edilmiştir, yani $F^{*(n)}(t) = \int_0^t F_+^{*(n-1)}(t-v)dF_+(v)$ 'dır. Amacımız $\lim_{t\to\infty} t[H(t,x) - \pi_+(x)] = 0$ olduğunu göstermektir. Bu sebeple, aşağıdaki notasyonları dâhil edelim:

$$K(t;x) \equiv t[H(t;x) - \pi_+(x)] \tag{6.4}$$

$$\widetilde{K}(s;x) \equiv L_s\big(K(t;x)\big) \equiv \int_{t=-0}^{\infty} e^{-st}K(t;x)dt \tag{6.5}$$

Burada $\widetilde{K}(s;x)$ ile $K(t;x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ifade edilmiştir. $\lim_{t\to\infty} K(t;x)$ limitini elde etmek için Tauber – Abel Teoremi' nden yararlanılacaktır. Tauber – Abel Teoremi' ne göre,

$$\lim_{t\to\infty} K(t;x) = \lim_{s\to 0} s\widetilde{K}(s;x)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla, öncelikle $\widetilde{K}(s;x)$ fonksiyonunu elde edelim. Laplace dönüşümünün özelliğine göre $\widetilde{K}(s;x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\widetilde{K}(s;x) = -\left[\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{H}(s;x) + \frac{1}{s^2}\pi_+(x)\right] \tag{6.6}$$

Burada $\widetilde{H}(s;x)$ ile $H(t;x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ifade edilmiştir, yani $\widetilde{H}(s;x) \equiv L_s\big(H(t;x)\big) = \int_{t=-0}^{\infty} e^{-st}H(t;x)dt$' dir. Notasyon kolaylığı açısından

$$G(t;x) \equiv \bar{F}_+(t) - \bar{F}_+(t+x)$$

olsun. Burada $\bar{F}_+(t) = 1 - F_+(t)$' dir. (6.3)' te verilen $H(t;x)$ fonksiyonu Lebesgue – Stiltijes konvolüsyon çarpımının tanımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H(t;x) = G(t;x) * U_+(t) \tag{6.7}$$

(6.7) eşitliğinin her iki tarafına t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa, $\widetilde{H}(s;x)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{H}(s;x) = \tilde{G}(s;x)U_+^*(s) \tag{6.8}$$

Burada $\tilde{G}(s;x) \equiv \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt$ ve $U_+^*(s) = \int_{-0}^\infty e^{-st}dU_+(t)$ 'dir. Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğinden

$$\tilde{G}(s;x) = \tilde{\bar{F}}_+(s) - L_s\{\bar{F}_+(t+x)\} \tag{6.9}$$

olarak yazılabilir. Burada, $\tilde{\bar{F}}_+(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st}\bar{F}_+(t)dt$ ve $L_s\{\bar{F}_+(t+x)\} \equiv \int_0^\infty e^{-st}\bar{F}_+(t+x)dt$' dir. Diğer taraftan,

$$\tilde{\bar{F}}_+(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st}\bar{F}_+(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-st}F_+(t)dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dF_+(t)$$

olarak elde edilir. Kolaylık açısından $\varphi_+(s) \equiv E\left(e^{-s\chi_1^+}\right) = \int_0^\infty e^{-st}dF_+(t)$ notasyonunu dahil edersek, o zaman,

$$\tilde{\bar{F}}_+(s) = \frac{1-\varphi_+(s)}{s} \tag{6.10}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde, $L_s\{\bar{F}_+(t+x)\}$ dönüşümü

$$L_s\{\bar{F}_+(t+x)\} = \int_0^\infty e^{-st}\bar{F}_+(t+x)dt = \int_{v=x}^\infty e^{-s(v-x)}\bar{F}_+(v)dv$$

$$= e^{sx}\left[\int_{v=0}^\infty e^{-sv}\bar{F}_+(v)dv - \int_{v=0}^x e^{-sv}\bar{F}_+(v)dv\right]$$

olarak elde edilir. Notasyon kolaylığı açısından $M(s;x) \equiv \int_{v=0}^x e^{-sv}\bar{F}_+(v)dv$ notasyonunu dahil edelim. Bu durumda, (6.10) ifadesinin de yardımıyla, $L_s\{\bar{F}_+(t+x)\}$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_s\{\bar{F}_+(t+x)\} = e^{sx}\left[\tilde{\bar{F}}_+(s) - M(s;x)\right] = e^{sx}\left[\frac{1-\varphi_+(s)}{s} - M(s;x)\right] \tag{6.11}$$

(6.10) ve (6.11) ifadelerinin yardımıyla $\tilde{G}(s;x)$ dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{G}(s;x) = \frac{1-\varphi_+(s)}{s} - e^{sx}\left[\frac{1-\varphi_+(s)}{s} - M(s;x)\right]$$

$$= \frac{[1-\varphi_+(s)][1-e^{sx}]}{s} + e^{sx}M(s;x) \quad (6.12)$$

Burada $M(s;x) = \int_{v=0}^{x} e^{-sv}\bar{F}_+(v)dv$' dir. Diğer taraftan, $U_+^*(s)$ ise aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_+^*(s) = \int_{-0}^{\infty} e^{-st}dU_+(t) = s\widetilde{U}_+(s) - U_+(-0) = s\widetilde{U}_+(s)$$

$$= \frac{s}{s\big(1-\varphi_+(s)\big)} = \frac{1}{1-\varphi_+(s)} \quad (6.13)$$

Bu durumda (6.12) ve (6.13) ifadeleri (6.8) ifadesinde yerine yazılırsa $\widetilde{H}(s;x)$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\widetilde{H}(s;x) = \widetilde{G}(s;x)U_+^*(s) = \left\{\frac{[1-\varphi_+(s)][1-e^{sx}]}{s} + e^{sx}M(s;x)\right\}\frac{1}{1-\varphi_+(s)}$$

$$= \frac{1-e^{sx}}{s} + \frac{e^{sx}}{1-\varphi_+(s)}M(s;x) \quad (6.14)$$

Şimdi (6.14)' te elde edilen $\widetilde{H}(s;x)$ fonksiyonunun s' ye göre türevini inceleyelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$J_1(s;x) = \frac{1-e^{sx}}{s}; \qquad J_2(s;x) = \frac{e^{sx}}{1-\varphi_+(s)}M(s;x)$$

Burada $\varphi_+(s) \equiv E\big(e^{-s\chi_1^+}\big)$ ve $M(s,x) = \int_{v=0}^{x} e^{-sv}\bar{F}(v)dv$' dir. Bu durumda, $\widetilde{H}(s;x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\widetilde{H}(s;x) = J_1(s;x) + J_2(s;x) \quad (6.15)$$

(6.15) ifadesinden türev aldığımızda

$$\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{H}(s;x) = J_1'(s;x) + J_2'(s;x) \quad (6.16)$$

olur. Burada $J_i'(s,x) = \frac{d}{ds}J_i(s), i = 1{,}2$' dir ve aşağıdaki gibi elde edilir:

$$J_1'(s;x) = \frac{e^{sx}(1-sx)-1}{s^2} \tag{6.17}$$

$$J_2'(s;x) = \frac{xe^{sx}M(s;x)}{1-\varphi_+(s)} + \frac{e^{sx}\varphi_+'(s)M(s;x)}{\left(1-\varphi_+(s)\right)^2} + \frac{e^{sx}M'(s;x)}{1-\varphi_+(s)} \tag{6.18}$$

Burada $\varphi_+'(s) = \frac{d}{ds}\varphi_+(s)$ ve $M'(s;x) = \frac{d}{ds}M(s;x)$' dır.

Öncelikle $J_1'(s;x)$ ifadesini inceleyelim. Taylor açılımı yardımıyla $s \to 0$ iken aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$e^{sx}(1-sx)-1 = -\frac{s^2x^2}{2}\left\{1+\frac{2}{3}sx+o(s)\right\} \tag{6.19}$$

(6.19) açılımı (6.17) ifadesinde yerine yazılırsa $J_1'(s;x)$ fonksiyonu için $s \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir:

$$J_1'(s;x) = \frac{e^{sx}(1-sx)-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}\left\{-\frac{s^2x^2}{2}\left\{1+\frac{2}{3}sx+o(s)\right\}\right\} = -\frac{x^2}{2}+o(1) \tag{6.20}$$

Şimdi de $J_2'(s;x)$ ifadesini araştıralım. Notasyon kolaylığı açısından $J_2'(s;x)$' i aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$J_2'(s;x) = R_1(s;x) + R_2(s;x) + R_3(s;x) \tag{6.21}$$

Burada

$$R_1(s;x) = \frac{xe^{sx}M(s;x)}{1-\varphi_+(s)}; \quad R_2(s,x) = \frac{e^{sx}\varphi_+'(s)M(s;x)}{\left(1-\varphi_+(s)\right)^2}; \quad R_3(s,x) = \frac{e^{sx}M'(s;x)}{1-\varphi_+(s)}$$

‘dir. Şimdi sırasıyla $R_i(s;x)$, $i = 1,2,3$ fonksiyonlarının $s \to 0$ iken asimtotik açılımlarını inceleyelim. $R_1(s;x)$ fonksiyonunun asimtotik açılımını elde etmek için aşağıdaki Taylor açılımlarından yararlanalım. $\mu_3 < \infty$ olduğundan, $s \to 0$ iken aşağıdaki Taylor açılımları yazılabilir:

$$e^{sx} = 1 + sx + \frac{s^2x^2}{2} + o(s^2) \tag{6.22}$$

$$\frac{1}{1-\varphi_+(s)} = \frac{1}{s\mu_1}\left\{1 + s\hat{\mu}_1 - s^2\left(\frac{\hat{\mu}_2}{2} - \hat{\mu}_1^2\right) + o(s^2)\right\} \tag{6.23}$$

$$M(s;x) = a_1(x)\left\{1 - sa_{21}(x) + \frac{s^2}{2}a_{31}(x) + o(s^2)\right\} \tag{6.24}$$

Burada $a_1(x) = \int_{v=0}^{x} \bar{F}_+(v)dv$, $a_{21}(x) = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}$, $a_{31}(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)}$, $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\hat{\mu}_2 = \frac{\mu_3}{3\mu_1}$ ’ dir.

(6.22) – (6.24) açılımları yardımıyla, $R_1(s;x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_1(s;x) = \frac{xe^{sx}M(s;x)}{1-\varphi_+(s)} = \frac{xa_1(x)}{s\mu_1}\{1 + s[\hat{\mu}_1 + x - a_{21}(x)] + o(s)\}$$

$$= \frac{x\pi_+(x)}{s} + C_{21}(x) + o(1) \tag{6.25}$$

Burada $C_{21}(x) = \frac{xa_1(x)}{\mu_1}[\hat{\mu}_1 + x - a_{21}(x)]$; $a_n(x) = \int_{v=0}^{x} v^{n-1}\bar{F}_+(v)dv$, $n = 1,2$; $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $a_{21}(x) = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}$, dir.

Benzer şekilde, $\mu_3 < \infty$ olduğundan, $s \to 0$ iken aşağıdaki Taylor açılımı yazılabilir:

$$\varphi_+'(s) = -\mu_1\left\{1 - 2\hat{\mu}_1 s + \frac{3\hat{\mu}_2}{2}s^2 + o(s^2)\right\} \tag{6.26}$$

(6.26) açılımı yardımıyla,

$$\frac{\varphi_+'(s)}{\left(1-\varphi_+(s)\right)^2} = -\frac{1}{s^2\mu_1}\left\{1 + s^2\left(\frac{\hat{\mu}_2}{2} - \hat{\mu}_1^2\right) + o(s^2)\right\} \tag{6.27}$$

elde edilir. (6.22), (6.24) ve (6.27) açılımları yardımıyla, $s \to 0$ iken, $R_2(s;x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_2(s;x) = \frac{e^{sx}\varphi_+'(s)M(s;x)}{\left(1-\varphi_+(s)\right)^2}$$

$$= -\frac{\pi_+(x)}{s^2}\left\{1 + s[x - a_{21}(x)] + s^2\left[\frac{x^2}{2} + d_1 - xa_{21}(x) + a_{31}(x)\right]\right.$$

$$+o(s^2)\} = -\frac{\pi_+(x)}{s^2} - \frac{\pi_+(x)}{s}[x - a_{21}(x)] + C_{22}(x) + o(1) \tag{6.28}$$

Burada $C_{22}(x) = -\frac{a_1(x)}{\mu_1}\left[\frac{x^2}{2} + d_1 - xa_{21}(x) + a_{31}(x)\right]$; $d_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{2} - \hat{\mu}_1^2$; $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}, n = 1,2$; $a_{ij}(x) = \frac{a_i(x)}{a_j(x)}, i,j = 1,2,3$' tür. $R_3(s,x)$ fonksiyonu için ise, yukarıdakilere ek olarak aşağıdaki Taylor açılımını verelim. (6.24) ifadesinin yardımıyla, $s \to 0$ iken, aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$M'(s;x) = -a_2(x)\{1 - sa_{32}(x) + o(s)\} \tag{6.29}$$

Bu durumda, (6.22), (6.23) ve (6.29) açılımları yardımıyla $R_3(s;x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_3(s;x) = \frac{e^{sx}M'(s;x)}{1-\varphi_+(s)} = -\frac{a_2(x)}{s\mu_1}\{1 + s[\hat{\mu}_1 + x - a_{32}(x)] + o(s)\}$$

$$= -\frac{\pi_+(x)}{s\mu_1}a_{21}(x) + C_{23}(x) + o(1) \tag{6.30}$$

Burada $C_{23}(x) = -\frac{a_2(x)}{\mu_1}[\hat{\mu}_1 + x - a_{32}(x)]$' dir. (6.25), (6.28) ve (6.30) ifadeleri (6.21) ifadesinde yerine yazılırsa, $J_2'(s;x)$ için, $s \to 0$ iken aşağıdaki asimtotik açılım elde edilebilir:

$$J_2'(s;x) = R_1(s;x) + R_2(s;x) + R_3(s;x)$$

$$= -\frac{\pi_+(x)}{s^2} + C_2(x) + o(1) \tag{6.31}$$

Burada

$$C_2(x) = C_{21}(x) + C_{22}(x) + C_{23}(x);\ \ C_{21}(x) = x\pi_+(x)[\hat{\mu}_1 + x - a_{21}(x)];$$

$$C_{22}(x) = -\pi_+(x)\left[\frac{x^2}{2} + d_1 - xa_{21}(x) + a_{31}(x)\right]; d_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{2} - \hat{\mu}_1^2;$$

$$C_{23}(x) = -\frac{a_2(x)}{\mu_1}[\hat{\mu}_1 + x - a_{32}(x)]$$

‘dır. (6.20) ve (6.31) açılımlarını (6.16) eşitliğinde yerine yazarsak, $s \to 0$ iken aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{H}(s;x) = J_1'(s;x) + J_2'(s;x) = \left\{-\frac{x^2}{2} + o(1)\right\} + \left\{-\frac{\pi_+(x)}{s^2} + C_2(x) + o(1)\right\}$$

$$= -\frac{\pi_+(x)}{s^2} + C(x) + o(1) \qquad (6.32)$$

Burada

$$C(x) = -\frac{x^2}{2} + C_2(x);\ C_2(x) = C_{21}(x) + C_{22}(x) + C_{23}(x);$$

$$C_{21}(x) = x\pi_+(x)[\hat{\mu}_1 + x - a_{21}(x)];$$

$$C_{22}(x) = -\pi_+(x)\left[\frac{x^2}{2} + d_1 - xa_{21}(x) + a_{31}(x)\right]; d_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{2} - \hat{\mu}_1^2;$$

$$C_{23}(x) = -\frac{a_2(x)}{\mu_1}[\hat{\mu}_1 + x - a_{32}(x)]$$

‘dır. (6.32) ifadesini (6.6) ifadesinde yerine yazarsak,

$$\widetilde{K}(s,x) = -\left[\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{H}(s,x) + \frac{1}{s^2}\pi_+(x)\right] = -C(x) + o(1)$$

olur. Burada $C(x) = -\frac{x^2}{2} + C_2(x)$; $C_2(x) = C_{21}(x) + C_{22}(x) + C_{23}(x)$’ tir.

$\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}a_1(x)$ olduğu göz önünde bulundurularak $C_{2j}(x),\ j = 1,2,3$ fonksiyonları için gerekli hesaplamalar yapıldığında $C_{2j}(x),\ j = 1,2,3$ için aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$C_{21}(x) = x\pi_+(x)[\hat{\mu}_1 + x - a_{21}(x)] = \frac{x^2a_1(x)}{\mu_1} - \frac{xa_2(x)}{\mu_1} + xa_1(x)C_F \qquad (6.33)$$

$$C_{22}(x) = -\pi_+(x)\left[\frac{x^2}{2} + d_1 - xa_{21}(x) + a_{31}(x)\right]$$

$$= -\frac{x^2a_1(x)}{2\mu_1} + \frac{xa_2(x)}{\mu_1} - \frac{a_3(x)}{\mu_1} - \pi_+(x)d_1 \qquad (6.34)$$

$$C_{23}(x) = -\frac{a_2(x)}{\mu_1}[\hat{\mu}_1 + x - a_{32}(x)] = -\frac{xa_2(x)}{\mu_1} + \frac{a_3(x)}{\mu_1} - a_2(x)C_F \qquad (6.35)$$

Burada $d_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{2} - \hat{\mu}_1^2; \hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}; C_F = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2};\ \mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3$' tür. (6.33) – (6.35) ifadeleri $C_2(x)$ fonksiyonunun tanımında yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$C_2(x) = \frac{x^2 a_1(x)}{2\mu_1} - \frac{xa_2(x)}{\mu_1} - a_2(x)C_F + xa_1(x)C_F - \frac{a_1(x)}{\mu_1}d_1 \qquad (6.36)$$

olarak elde edilir. Önerme 6.1' e göre, her $x \geq 0$ için $\bar{a}_n(x) < \infty, n = 1,2,3$' tür. Buna göre $a_n(x) = \frac{\mu_n}{n} - \bar{a}_n(x)$ dönüşümünü (6.36) ifadesine uygulayalım. Bu takdirde,

$$C_2(x) = -\frac{\mu_3}{6\mu_1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2\bar{a}_1(x)}{2\mu_1} + \frac{x\bar{a}_2(x)}{\mu_1} + \bar{a}_2(x)C_F$$

$$-x\bar{a}_1(x)C_F + \frac{\bar{a}_1(x)d_1}{\mu_1} \qquad (6.37)$$

elde edilir. (6.37) ifadesi $C(x)$' in tanımında yerine yazılırsa:

$$C(x) = -\frac{\mu_3}{6\mu_1} - \frac{x^2\bar{a}_1(x)}{2\mu_1} + \frac{x\bar{a}_2(x)}{\mu_1} + \bar{a}_2(x)C_F - x\bar{a}_1(x)C_F - \frac{\bar{a}_1(x)d_1}{\mu_1} \qquad (6.38)$$

olur. Sonuç 6.1' e göre,

$$x^2\bar{a}_1(x) \leq \frac{\mu_3}{3};\ \ x\bar{a}_2(x) \leq \frac{\mu_3}{3};\ \ \bar{a}_2(x) \leq \frac{\mu_2}{2};\ \ x\bar{a}_1(x) \leq \frac{\mu_2}{2};\ \ \bar{a}_1(x) \leq \mu_1$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda, $|C(x)|$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$|C(x)| = \left|\frac{\mu_3}{6\mu_1}\right| + \left|\frac{x^2\bar{a}_1(x)}{2\mu_1}\right| + \left|\frac{x\bar{a}_2(x)}{\mu_1}\right| + |\bar{a}_2(x)C_F| + |x\bar{a}_1(x)C_F|$$

$$+\left|\frac{\bar{a}_1(x)d_1}{\mu_1}\right| \leq \frac{\mu_3}{6\mu_1} + \frac{\mu_3}{6\mu_1} + \frac{\mu_3}{3\mu_1} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} + \frac{\mu_3}{6\mu_1} + \frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2} = \frac{5\mu_3}{6\mu_1} + \frac{3\mu_2^2}{4\mu_1^2} \qquad (6.39)$$

olur. $\mu_3 < \infty$ olduğu için $|C(x)| < \infty$ olur. Önerme 6.4'e göre

$$\lim_{x\to\infty} x^2\bar{a}_1(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} x\bar{a}_1(x) = 0 \text{ ve } \lim_{x\to\infty} x\bar{a}_2(x) = 0$$

olduğundan, $\forall\, x \in R$ için

$$\lim_{x\to\infty} C(x) = -\frac{\mu_3}{6\mu_1}$$

elde edilir. $\forall\, x \in R$ için, $|C(x)| < \infty$ olduğundan (6.32) ifadesinden yararlanılarak,

$$\lim_{s\to 0} s\widetilde{K}(s,x) = \lim_{s\to 0} s\big(-C(x)\big) = 0$$

olur. Dolayısıyla Tauber – Abel Teoremine göre, $\lim_{s\to 0} s\widetilde{K}(s;x) = 0$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} K(t;x) = 0$ olur. Buradan, $K(t;x)$ ifadesini yerine yazarsak,

$$\lim_{t\to\infty} K(t;x) = \lim_{t\to\infty} t[H(t;x) - \pi_+(x)] = 0$$

olur. Böylece, $t \to \infty$ iken, aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$t[H(t;x) - \pi_+(x)] = o(1) \;\; \Rightarrow \; H(t;x) - \pi_+(x) = o\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow H(t;x) = \pi_+(x) + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1' in koşulları altında, $Y_\lambda(0) = z; Y_\lambda(\tau_n) = \zeta_n; n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenleri, durağan dağılımı $\pi_\lambda(x)$ olan gömülü bir Markov zinciri oluşturur. Buna göre aşağdıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 6.2: Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olsun. Bu durumda, $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki gösterim yazılabilir:

$$\pi_\lambda(x) \equiv \lim_{n\to\infty} P_\lambda\{\zeta_n \le x\} = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g(\lambda;x) \tag{6.40}$$

Burada $\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \big(1 - F_+(t)\big)dt$; $\mu_1 = E(\chi_1^+)$; $F_+(t) = P\{\chi_1^+ \le t\}$ ve $g(\lambda;x)$ ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda;x) = 0$' dır.

İspat: ζ_1 rasgele değişkeni $\{\chi_n^+\}, n = 1,2,\ldots$ basamak yüksekliklerinin λz başlangıç noktasından başlayarak oluşturduğu bir kalan ömürdür. Bu durumda, Yardımcı

Teorem 6.1' e göre ζ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $\pi_{1\lambda}(z)$ için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir.

$$H(\lambda z; x) \equiv P\{\zeta_1(\lambda z) \le x\} = \pi_{1\lambda}(\lambda z; x) = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g_1(\lambda z; x) \qquad (6.41)$$

Burada, $\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \big(1 - F_+(t)\big)dt$; $\mu_1 = E(\chi_1^+)$; $F_+(t) = P\{\chi_1^+ \le t\}$ ve her $z, x > 0$ için, $g_1(\lambda z; x)$ fonksiyonu ölçülebilir ve sınırlı olup, $\lim_{\lambda\to\infty} g_1(\lambda z; x) = 0$' dır.

Şimdi ζ_2 rasgele değişkenin dağılımı hesaplansın:

$$\pi_{2\lambda}(\lambda z; x) \equiv P\{\zeta_2(\lambda\zeta_1) \le x\} = \int_{v=+0}^{\infty} P\{\zeta_1 \in dv; \zeta_2(\lambda\zeta_1) \le x\}$$

$$= \int_{v=+0}^{\infty} P\{\zeta_1 \in dv\} P\{\zeta_2(\lambda\zeta_1) \le x\} = \int_{v=+0}^{\infty} H(\lambda v; x) d_v H(\lambda z; v) \qquad (6.43)$$

Burada, $\lambda \to \infty$ iken, $H(\lambda v; x) = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g_1(\lambda v; x)$ olur. $H(\lambda v; x)$ ifadesi (6.43)' te yerine yazılırsa:

$$\pi_{2\lambda}(\lambda z; x) = \int_{v=+0}^{\infty} \left\{\pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g_1(\lambda v; x)\right\} d_v H(\lambda z; v)$$

$$= \pi_+(x) \int_{v=+0}^{\infty} d_v H(\lambda z; v) + \frac{1}{\lambda}\int_{v=+0}^{\infty} g_1(\lambda v; x) d_v H(\lambda z; v)$$

$$= \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g_2(\lambda z; x) \qquad (6.44)$$

elde edilir. Burada $g_2(\lambda z; x) \equiv \int_{v=+0}^{\infty} g_1(\lambda v; x) d_v H(\lambda z; v)$ fonksiyonu ölçülebilir ve sınırlı olup, Önerme 5.1' e göre $\lim_{\lambda\to\infty} g_2(\lambda z; x) = 0$' dır.

Şimdi de ζ_2 rasgele değişkenin dağılımı hesaplansın:

$$\pi_{3\lambda}(\lambda z; x) \equiv P\{\zeta_3(\lambda\zeta_2) \le x\} = \int_{v=+0}^{\infty} P\{\zeta_2 \in dv; \zeta_3(\lambda\zeta_2) \le x\}$$

$$= \int_{v=+0}^{\infty} P\{\zeta_2 \in dv\} P\{\zeta_3(\lambda\zeta_2) \le x | \zeta_2 = v\} = \int_{v=+0}^{\infty} H(\lambda v; x) \pi_{2\lambda}(\lambda z; dv)$$

$$= \int_{v=+0}^{\infty} \left\{\pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g_1(\lambda v; x)\right\} \pi_{2\lambda}(\lambda z; dv)$$

$$= \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda}\int_{v=+0}^{\infty} g_1(\lambda v; x)\pi_{2\lambda}(\lambda z; dv) = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g_3(\lambda z; x) \tag{6.45}$$

olur. Burada $g_3(\lambda v; x) = \int_{v=+0}^{\infty} g_1(\lambda v; x)\pi_{2\lambda}(\lambda z; dv)$ ölçülebilir ve sınırlı bir fonksiyon olup, Önerme 5.1' e göre, $\lim_{\lambda\to\infty} g_3(\lambda z; x) = 0$' dır. Benzer şekilde, tümevarım yöntemiyle, $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\pi_{n\lambda}(\lambda z; x) = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g_n(\lambda z; x); \;\; n = 1,2,3, \ldots$$

Burada $\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \big(1 - F_+(v)\big)dv$ ve her $n = 1,2, \ldots$ için $g_n(\lambda z; x)$ ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olup, Önerme 5.1' e göre her $n = 1,2,3, \ldots$ için $\lim_{\lambda\to\infty} g_n(\lambda z; x) = 0$' dır. (6.45) eşitliğinden $n \to \infty$ iken limit alındığında, aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\pi_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \pi_{n\lambda}(\lambda z; x) = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty} g_n(\lambda z; x) \tag{6.46}$$

Açıklık amacıyla, $g(\lambda; x) \equiv \lim_{n\to\infty} g_n(\lambda z; x)$ notasyonu dahil edilsin. Hatırlatmak gerekirse, $g(\lambda; x)$ fonksiyonu ölçülebilir ve sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda; x) = 0$' dır. Bu takdirde,

$$\pi_\lambda(x) = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g(\lambda; x)$$

olur. Böylece, Yardımcı Teorem 6.2 ispatlanmış olur.

Yardımcı Teorem 6.3: Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olsun. $\pi_\lambda(x)$ dağılımına sahip olan ζ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu için aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\varphi_\zeta(\alpha) \equiv E\left(e^{i\alpha\zeta}\right) = \hat{\varphi}_+(\alpha) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Burada $\hat{\varphi}_+(\alpha) = \frac{\varphi_+(\alpha) - 1}{i\alpha\mu_1}$; $\varphi_+(\alpha) \equiv E\left(e^{i\alpha\chi_1^+}\right)$ ve $\mu_1 = E(\chi_1^+)$' dır.

İspat: ζ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu $\varphi_\zeta(\alpha)$ tanımı gereği

$$\varphi_\zeta(\alpha) \equiv E\left(e^{i\alpha\zeta}\right) = \int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d\pi_\lambda(x) \tag{6.47}$$

'dir. Yardımcı Teorem 6.2' ye göre $\lambda \to \infty$ iken, $\pi_\lambda(x)$ dağılım fonksiyonu için aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\pi_\lambda(x) = \pi_+(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.48}$$

Burada $\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \left(1 - F_+(u)\right) du$; $F_+(x) \equiv P\{\chi_1^+ \leq x\}$ ve $\mu_1 \equiv E(\chi_1^+)$' dir. (6.48) ifadesindeki asimtotik açılım (6.47) ifadesinde göz önüne alınırsa, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\varphi_\zeta(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d\left[\pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g(\lambda z; x)\right]$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d\pi_+(x) + \frac{1}{\lambda}\int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d_x g(\lambda z; x)$$

Önerme 6.5' e göre $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d_x g(\lambda z; x) = o(1).$$

Bu durumda,

$$\varphi_\zeta(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d\pi_+(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} d_x\left\{\frac{1}{\mu_1}\int_0^x \left(1 - F_+(u)\right) du\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_1}\int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x}\left(1 - F_+(x)\right) dx + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

elde edilir. Burada $u = 1 - F_+(x)$ ve $v = e^{i\alpha x}$ dönüşümü yapıldığında,

$$\varphi_\zeta(\alpha) = \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha x}\left(1 - F_+(x)\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{i\alpha}\int_{x=0}^{\infty} e^{i\alpha x} dF_+(x)\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{\varphi_+(\alpha) - 1}{i\alpha\mu_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

olur. Tanımı gereği, $\{\chi_1^+\}$ basamak yüksekliklerinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün karakteristik fonksiyonu $\hat{\varphi}_+(\alpha) \equiv \frac{\varphi_+(\alpha)-1}{i\alpha\mu_1}$' dir. Dolayısıyla,

$$\varphi_\zeta(\alpha) = \hat{\varphi}_+(\alpha) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ζ rasgele değişkeni, dağılım fonksiyonu $\pi_\lambda(x)$ olan bir rasgele değişken olsun, yani $\zeta: P\{\zeta \leq x\} \equiv \pi_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n \leq x\}$. Bu durumda aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 6.4: Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken, ζ rasgele değişkeninin beklenen değeri için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\beta_1 \equiv E(\zeta) = \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Burada $\mu_k \equiv E(\chi_1^+);\ k = 1{,}2$' dir.

İspat: İspat: Yardımcı Teorem 6.2' de

$$\pi_\lambda(x) = \pi_+(x) + \frac{1}{\lambda} g(\lambda, x)$$

olduğu gösterilmiştir. Bu eşitlikten yararlanılarak $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki alternatif gösterim yazılabilir:

$$\bar{\pi}_\lambda(x) = \bar{\pi}_+(x)\left(1 + \frac{1}{\lambda} h(\lambda, x)\right) \tag{6.49}$$

Burada $\bar{\pi}(x) = 1 - \pi(x)$ ve $h(\lambda, x)$ fonksiyonu ölçülebilir, sınırlı ve $\lim_{\lambda\to\infty} h(\lambda, x) = 0$ olan bir fonksiyondur. Bu özelliğine göre, $\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle bir yeterince büyük $L > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, her $\lambda \geq L$ ve $x > 0$ için $|h(\lambda, x)| \leq \frac{2\mu_1}{\mu_2}\varepsilon$ olsun. Bu eşitsizlikten yararlanılarak, aşağıdaki yazılabilir:

$$\left|\int_0^\infty \bar{\pi}_+(x) g(\lambda, x) dx\right| \leq \int_0^\infty \bar{\pi}_+(x)|g(\lambda, x)|dx \leq \frac{2\mu_1}{\mu_2}\varepsilon \int_0^\infty \bar{\pi}_+(x) dx$$

$$= \frac{2\mu_1}{\mu_2} \varepsilon \frac{\mu_2}{2\mu_1} = \varepsilon \tag{6.50}$$

Özetlersek, $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle bir yeterince büyük $L > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, her $\lambda \geq L$ ve $x > 0$ için

$$\left| \int_0^\infty \bar{\pi}_+(x) g(\lambda, x) dx \right| \leq \ \varepsilon$$

olur. Buradan, $\lambda \to \infty$ iken,

$$\int_0^\infty \bar{\pi}_+(x) g(\lambda, x) dx = o(1) \tag{6.51}$$

'dır. Dolayısıyla, (6.49) – (6.51)' in yardımıyla,

$$\beta_1 \equiv E(\zeta) = \int_0^\infty x d\pi_\lambda(x) = \int_0^\infty \big(1 - \pi_\lambda(x)\big) dx = \int_0^\infty \bar{\pi}_\lambda(x) dx$$

$$= \int_0^\infty \bar{\pi}_+(x) dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \bar{\pi}_\lambda(x) h(\lambda, x) dx = \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 6.5: Varsayalım ki, $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$ olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \hat{\mu}_1 \lambda + o(\lambda).$$

Burada $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, $M_1(x) \equiv E\big(S_{N_1(x)}\big)$; $\mu_k \equiv E\big(\chi_1^{+k}\big); k = 1{,}2$ ve $E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty M_1(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$'dir.

İspat: Wald özdeşliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitlik yazılabilir (Feller, (1971), böl. 18, alt başlık 2):

$$M_1(\lambda z) \equiv E\big(S_{N_1(\lambda z)}\big) = E\left(\sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+ \right) = E(\chi_1^+) E\big(H(\lambda z)\big) = \mu_1 U_+(\lambda z)$$

Burada $U_+(\lambda z) \equiv E\big(H(\lambda z)\big)$' dir. $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$ olduğu için kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre (Feller, (1971), böl. 9), aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$M_1(\lambda z) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + g(\lambda z) \tag{6.52}$$

Burada $\hat{\mu}_1 \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$' dır. (6.52) ifadesi göz önüne alınarak,

$$E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty M_1(\lambda z)d\pi_\lambda(z) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + J(\lambda) \tag{6.53}$$

elde edilir. Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta)$ ve $J(\lambda) = \int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)$' dir. Önerme 5.1' e göre, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} J(\lambda) = 0$ olur. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 6.4' e göre, $\lambda \to \infty$ iken

$$\beta_1 \equiv E(\zeta) = \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.54}$$

olduğu bilinmektedir. (6.54) ifadesi (6.53) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1 + o(1)$$

olur. Yukarıdaki asimtotik aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda\hat{\mu}_1 + o(\lambda)$$

Burada $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$' dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.1: Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$|Q_Y(x) - R(x)| \leq \frac{2\mu_1 m_1\big(1-\pi_+(x)\big) + m_2\big(1-F_+(x)\big)}{\lambda m_1\mu_2}$$

Burada,

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_Y(x) = R(x) = \frac{2}{\mu_2}\int_0^x \left\{\int_v^\infty \big(1-F_+(u)\big)du\right\}dv\,;$$

$$\pi_+(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \big(1-F_+(t)\big)\,dt;$$

$$F_+(x) \equiv P\{\chi_1^+ \leq x\};\ \mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big), k = 1{,}2;\ m_1 = E(\eta_1)$$

‘dir.

İspat: Tanımı gereği $Y_\lambda(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonu $X(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonu yardımı ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_Y(\alpha) = \varphi_X\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$$

Dolayısıyla, $\varphi_Y(\alpha)$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\varphi_Y(\alpha) = \frac{1}{I_2(\lambda)}\int_0^\infty I_1(\lambda, z)d\pi_\lambda(z)$$

Burada,

$$I_1(\lambda, z) \equiv e^{i\alpha z}\left[\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1\right]; I_2(\lambda) \equiv E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)\left[\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1\right]$$

'tir. Öncelikle $\varphi_Y(\alpha)$ için iki terimli asimtotik açılım bulalım. Bunun için $\hat{S}_{N_1(\lambda z)} = S_{N_1(\lambda z)} - \lambda z$ notasyonunu tanımlayalım. O zaman:

$$\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) \equiv E\left(\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}S_{N_1(\lambda z)}\right)\right) = e^{-i\alpha z}E\left(\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right)\right) \qquad (6.55)$$

olur. Dolayısıyla,

$$E\left(\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right)\right) = E\left(1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{S}_{N_1(\lambda z)} + \frac{(i\alpha)^2}{\lambda^2}\hat{S}^2_{N_1(\lambda z)} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{i\alpha}{\lambda}E\big(\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\big) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (6.56)$$

olarak hesaplanabilir. Burada, $E\big(\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\big) = E\big(S_{N_1(\lambda z)} - \lambda z\big) = E\big(S_{N_1(\lambda z)}\big) - \lambda z$' dir. $E\big(S_{N_1(\lambda z)}\big)$ için ise aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\big(S_{N_1(\lambda z)}\big) = E\left(\sum_{i=1}^{H(\lambda z)}\chi_i^+\right) = E\big(H(\lambda z)\big)\mu_1 = \left(\frac{\lambda z}{\mu_1} + \hat{\mu}_1 + o(1)\right)\mu_1$$

$$= \lambda z + \hat{\mu}_1 + o(1)$$

Burada $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$' dir. Belirtmek gerekirse, $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1^+)$ basamak yüksekliklerinin $(\chi_i^+, i = 1,2, \dots)$ oluşturduğu kalan ömrün beklenen değeridir. Buradan

$$E\left(\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right) = \hat{\mu}_1 + o(1) \tag{6.57}$$

olur. (6.57) eşitliği (6.56) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$E\left\{\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}\,\hat{S}_{N_1(\lambda z)}\right)\right\} = 1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\left(\hat{\mu}_1 + o(1)\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.58}$$

(6.58) açılımı (6.55) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)$ için aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) = e^{-i\alpha z}\left\{1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} = e^{-i\alpha z} - e^{-i\alpha z}\frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.59}$$

(6.59) asimtotik açılımın yardımıyla $\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1$ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1 = e^{-i\alpha z} - 1 - e^{-i\alpha z}\frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.60}$$

(6.60) açılımı $I_1(\lambda, z)$' in tanımında yerine yazılırsa:

$$I_1(\lambda, z) = e^{i\alpha z}\left\{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1\right\}$$

$$= e^{i\alpha z}\left\{e^{-i\alpha z} - 1 - e^{-i\alpha z}\frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} = 1 - e^{i\alpha z} - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.61}$$

elde edilir. Şimdi (6.61) açılımını $\pi_\lambda(z)$' e göre $[0, \infty]$ aralığında integralleyelim:

$$\int_0^\infty I_1(\lambda, z)d\pi_\lambda(z) = \int_0^\infty \left\{1 - e^{i\alpha z} - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z)\right\}d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty d\pi_\lambda(z) - \int_0^\infty e^{i\alpha z}d\pi_\lambda(z) - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1\int_0^\infty d\pi_\lambda(z) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z)$$

$$= 1 - \varphi_\zeta(\alpha) - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) \tag{6.62}$$

Önerme 5.1' e göre, $\lambda \to \infty$ iken, $\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi_\lambda(z) \to 0$ olduğundan:

$$\int_0^\infty I_1(\lambda, z)d\pi_\lambda(z) = 1 - \varphi_\zeta(\alpha) - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.63}$$

olarak elde edilir. Burada $\varphi_\zeta(\alpha) \equiv E\left(e^{i\alpha\zeta}\right)$; $\zeta: P\{\zeta \leq x\} = \pi_\lambda(x)$' tir. Yardımcı Teorem 6.3' e göre, $\lambda \to \infty$ iken (6.63) açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_0^\infty I_1(\lambda, z)d\pi_\lambda(z) = 1 - \hat{\varphi}_+(\alpha) - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.64}$$

Burada $\hat{\varphi}_+(\alpha) = \frac{\varphi_+(\alpha)-1}{i\alpha\mu_1}$; $\varphi_+(\alpha) \equiv E\left(e^{i\alpha\chi_1^+}\right)$; $\mu_1 \equiv E(\chi_1^+)$' dir.

Şimdi de $I_2(\lambda)$ için iki terimli asimtotik açılım elde edelim. Tanımı gereği $I_2(\lambda)$ aşağıdaki gibidir:

$$I_2(\lambda) \equiv E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)\left[\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1\right]$$

Buradaki $\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) = E\left\{\exp\left(-\frac{i\alpha}{\lambda}\eta_1\right)\right\} = 1 - \frac{i\alpha}{\lambda}E(\eta_1) + \frac{(i\alpha)^2}{\lambda^2}E(\eta_1^2) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{i\alpha}{\lambda}m_1 + \frac{(i\alpha)^2}{\lambda^2}m_2 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{6.65}$$

Burada $m_1 \equiv E(\eta_1)$; $m_2 \equiv E(\eta_1^2)$' dir. Buradan

$$\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1 = 1 - \frac{i\alpha}{\lambda}m_1 + \frac{(i\alpha)^2}{\lambda^2}m_2 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - 1$$

$$= -\frac{i\alpha}{\lambda}m_1 + \frac{(i\alpha)^2}{\lambda^2}m_2 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = -\frac{i\alpha}{\lambda}m_1\left\{1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\frac{m_2}{2m_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{6.66}$$

elde edilir. $E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)$ için ise Wald özdeşliğine göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$E\big(N_1(\lambda\zeta)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{H(\lambda\zeta)} \nu_i^+\right) = E\big(H(\lambda\zeta)\big)E(\nu_1^+) \tag{6.67}$$

Burada $E\big(H(\lambda\zeta)\big)$, χ_1^+ rasgele değişkenlerinin ürettiği bir yenileme fonksiyonudur ve kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre aşağıdaki asimtotik açılım ile ifade edilebilir:

$$E\big(H(\lambda\zeta)\big) = \frac{\lambda\beta_1}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1) \tag{6.68}$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta)$' dır. Yardımcı Teorem 6.2' ye göre $\lambda \to \infty$ iken $\beta_1 \to \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ olur. Bu durumda, (6.68) açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\big(H(\lambda\zeta)\big) = \frac{\lambda\frac{\mu_2}{2\mu_1}}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1) = \lambda\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1)$$

$$= \lambda\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\left\{1 + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{6.69}$$

Diğer taraftan $m_1 \neq 0$ iken

$$E(\nu_1^+) = \frac{\mu_1}{m_1} \tag{6.70}$$

olur. (6.69) açılımı ile (6.70) eşitliği (6.67) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$E\big(N_1(\lambda\zeta)\big) = E\big(H(\lambda\zeta)\big)E(\nu_1^+) = \lambda\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\left\{1 + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\frac{\mu_1}{m_1}$$

$$= \lambda\frac{\mu_2}{2m_1\mu_1}\left\{1 + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{6.71}$$

açılımı elde edilir. (6.66) ve (6.71) açılımları $I_2(\lambda)$' nın tanımında yerlerine yazılırsa $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$I_2(\lambda) = E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)\left[\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1\right]$$

$$= \lambda\frac{\mu_2}{2m_1\mu_1}\left\{1 + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\frac{(-i\alpha)}{\lambda}m_1\left\{1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\frac{m_2}{2m_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= (-i\alpha)\frac{\mu_2}{2\mu_1}\left\{1 - \frac{i\alpha}{\lambda}\widehat{m}_1 + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= (-i\alpha\hat{\mu}_1)\left\{1 + \frac{1 - i\alpha\widehat{m}_1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{6.72}$$

$I_2(\lambda)$' nin tersi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{I_2(\lambda)} = -\frac{1}{i\alpha\hat{\mu}_1}\left\{1 - \frac{1 - i\alpha\widehat{m}_1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \tag{6.73}$$

Burada $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}; \widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$' dir. (6.64) ve (6.73) açılımları, $\varphi_Y(\alpha)$' nın tanımında yerlerine yazılırsa,

$$\varphi_Y(\alpha) = -\frac{1}{i\alpha\hat{\mu}_1}\left\{1 - \frac{1 - i\alpha\widehat{m}_1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{1 - \hat{\varphi}_+(\alpha) - \frac{i\alpha}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{i\alpha\hat{\mu}_1}\left\{1 - \hat{\varphi}_+(\alpha) - \frac{i\alpha\hat{\mu}_1}{\lambda} - \frac{(1 - i\alpha\widehat{m}_1)\big(1 - \hat{\varphi}_+(\alpha)\big)}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= \frac{\hat{\varphi}_+(\alpha) - 1}{i\alpha\hat{\mu}_1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{(1 - i\alpha\widehat{m}_1)\big(1 - \hat{\varphi}_+(\alpha)\big)}{i\alpha\hat{\mu}_1\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) + \frac{1}{\lambda} - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)\frac{(1 - i\alpha\widehat{m}_1)}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) + \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)\frac{(i\alpha\widehat{m}_1 - 1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.74}$$

olur.

$$\varphi_Y(\alpha) - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) = \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)\frac{(i\alpha\widehat{m}_1 - 1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1 - \hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)}{\lambda} + \frac{\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha)i\alpha\widehat{m}_1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{-\big(\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) - 1\big)}{i\alpha\hat{\hat{\mu}}_1}\frac{i\alpha\hat{\hat{\mu}}_1}{\lambda} + \frac{i\alpha\widehat{m}_1}{\lambda}\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= -\frac{\hat{\hat{\mu}}_1}{\lambda}i\alpha\hat{\hat{\hat{\varphi}}}_+(\alpha) + \frac{\widehat{m}_1}{\lambda}i\alpha\hat{\hat{\varphi}}_+(\alpha) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{i\alpha\hat{\hat{\varphi}}_{+}(\alpha)\widehat{m}_1 - i\alpha\hat{\hat{\hat{\varphi}}}_{+}(\alpha)\hat{\hat{\mu}}_1\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.75}$$

Burada

$$\hat{\hat{\hat{\varphi}}}_{+}(\alpha) \equiv \frac{\hat{\hat{\varphi}}_{+}(\alpha) - 1}{i\alpha\hat{\hat{\mu}}_1} = \frac{2}{(i\alpha)^3\mu_3}[\varphi_{+}(\alpha) - i\alpha\mu_1 - 1];$$

$$\hat{\hat{\varphi}}_{+}(\alpha) \equiv \frac{\hat{\varphi}_{+}(\alpha) - 1}{i\alpha\hat{\mu}_1} = \frac{2}{(i\alpha)^2\mu_2}[\varphi_{+}(\alpha) - i\alpha\mu_1 - 1];$$

$$\hat{\varphi}_{+}(\alpha) \equiv \frac{\varphi_{+}(\alpha) - 1}{i\alpha\mu_1};\ \hat{\hat{\mu}}_1 \equiv E\left(\hat{\hat{\chi}}_1^{+}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_2};\ \widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1};$$

$$\varphi_{+}(\alpha) \equiv E\left(e^{i\alpha\chi_1^{+}}\right);\ \mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right); m_k \equiv E\left(\eta_1^k\right); k = 1,2,3$$

'dir. Lukacs, (1970, s.33, Teorem 3.22)' a göre (6.75) ifadesinden gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$Q_Y(x) - R(x) = \frac{\hat{\hat{\mu}}_1}{\lambda}\hat{R}'(x) - \frac{\widehat{m}_1}{\lambda}R'(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6.76}$$

Burada

$$\hat{R}(x) = \frac{1}{\hat{\hat{\mu}}_1}\int_0^x \big(1 - R(t)\big)dt = \frac{3\mu_2}{\mu_3}\int_0^x \big(1 - R(t)\big)dt\,;$$

$$R(x) = \frac{1}{\hat{\mu}_1}\int_0^x \big(1 - \pi_{+}(v)\big)dv = \frac{2}{\mu_2}\int_0^x \left\{\int_v^\infty \big(1 - F_{+}(u)\big)du\right\} dv\,;$$

$$\hat{\hat{\mu}}_1 \equiv E\left(\hat{\hat{\chi}}_1^{+}\right) = \frac{\mu_3}{3\mu_2};\ \widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$$

'dır. $R'(x)$ ve $\hat{R}'(x)$ ifadeleri χ_1^{+} basamak yüksekliğinin olasılık ve sayısal karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$R'(x) = \frac{1}{\hat{\mu}_1}\big(1 - \pi_{+}(x)\big) = \frac{2\mu_1}{\mu_2}\big(1 - \pi_{+}(x)\big) \tag{6.77}$$

$$\hat{R}'^{(x)} = \left\{\frac{1}{\hat{\hat{\mu}}_1}\int_0^x \big(1 - R(t)\big)dt\right\}_x' = \frac{3\mu_2}{\mu_3}\big(1 - R(x)\big) \tag{6.78}$$

(6.77) ve (6.78) ifadeleri (6.76) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$Q_Y(x) - R(x) = \frac{1}{\lambda}\left\{\hat{\mu}_1 \hat{R}'(x) - \widehat{m}_1 R'(x)\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\mu_3}{3\mu_2}\frac{3\mu_2}{\mu_3}\big(1 - R(x)\big) - \frac{m_2}{2m_1}\frac{2\mu_1}{\mu_2}\big(1 - \pi_+(x)\big)\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\big(1 - R(x)\big) - \frac{m_2\mu_1}{m_1\mu_2}\big(1 - \pi_+(x)\big)\right\} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{m_1\mu_2\big(1 - R(x)\big) - m_2\mu_1\big(1 - \pi_+(x)\big)}{m_1\mu_2\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

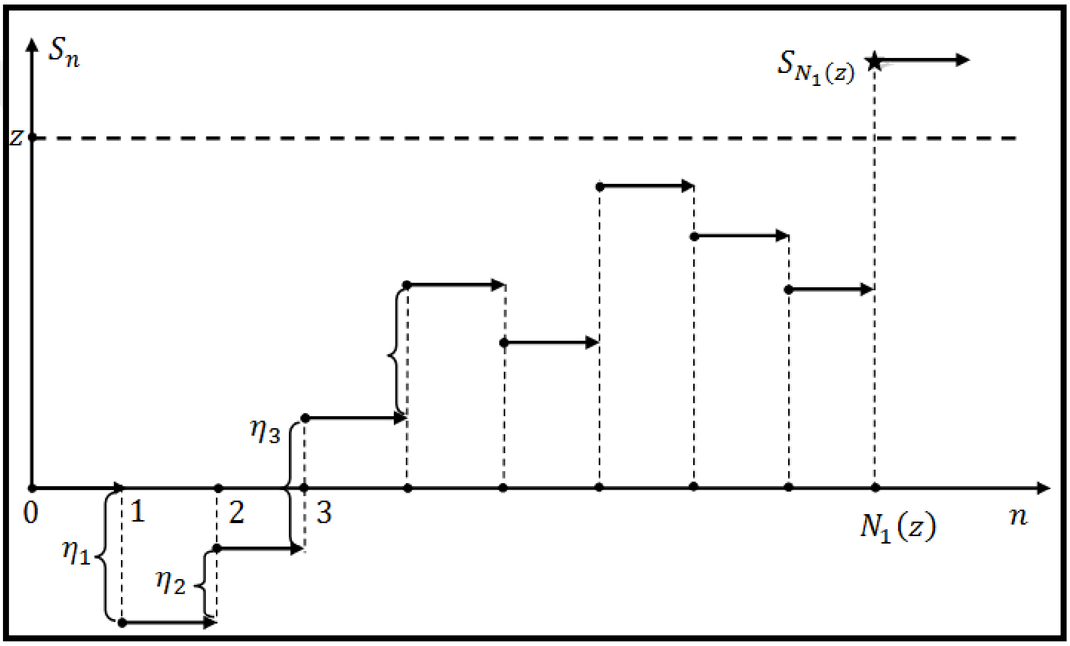
Mutlak farka geçildiğinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|Q_Y(x) - R(x)| \leq \frac{m_1\mu_2\big(1 - R(x)\big) + m_2\mu_1\big(1 - \pi_+(x)\big)}{m_1\mu_2\lambda}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

7. X(t) SÜRECİNİN SINIR FONKSİYONELLERİNİN İNCELENMESİ

Bir önceki bölümde, $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti kullanılarak, sürecin ilk dört momenti ifade edilmişti. Dolayısıyla, sürecin $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri bilindiğinde ergodik momentler de edilmiş olacaktır. $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelinin temsili bir izdüşümü Şekil 7.1' deki gibi gösterilebilir:



Şekil 7.1 : $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelinin örnek bir izdüşümü.

Ergodik momentlerin elde edilmesinin yanı sıra sürecin sınır fonksiyonelleri süreç hakkında birçok bilgi verir. Örneğin, sürecin ilk kez ne zaman bariyeri aşacağını $(\tau_1(\lambda z))$, kaç sıçramadan sonra aşacağını $(N_1(\lambda z))$ ve ne kadar aşacağını $(S_{N_1(\lambda z)})$ bu sınır fonksiyonelleri sayesinde öğrenebiliriz. Sürecin uygulandığı gerçek hayat problemine göre bu sınır fonksiyonellerinden herhangi biri güçlü bir öneme sahip olabilir. Mesela süreç bir envanter problemine uygulanmışsa, o zaman stok sahibine göre stoksuz kalmamak için ne zaman sipariş vermesi gerektiği $(\tau_1(\lambda z))$ önem taşıyabilir. Bu bilgi sayesinde stok sahibi tedarikçi firma ile düşük maliyetli anlaşmalara imza atabilir ve böylece karını arttırabilir. Bununla birlikte stoktaki ürününün bitmesi halinde taleplere göre ne kadar ürüne ihtiyaç duyacağı da ortalama olarak bilinecektir. Bu durumda stok sahibi durum analizini daha gerçekçi bir şekilde yapabilecek ve böylece oluşabilecek risk hallerine karşı önceden önlem alabilecektir. Bu türlü örnekler çoğaltılabilir.

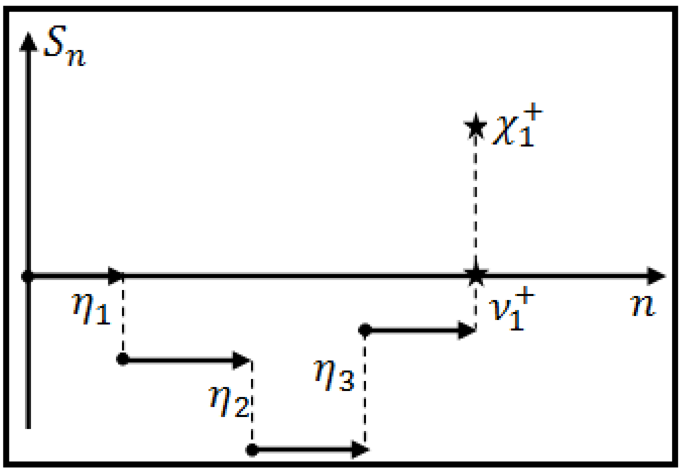
Dolayısıyla, sınır fonksiyonellerinin beklenen değer ve varyanslarının incelenmesi ele alınan gerçek hayat problemine göre önem arz etmektedir. Bu bölümde ilk önce sınır fonksiyonellerinin beklenen değer ve varyansları için kesin ifadeler elde edilmiştir. Ardından pratik hayatta daha kullanışlı olması açısından yaklaşık ancak daha sade ifadeler asimtotik yöntemlerle elde edilmiştir.

7.1. X(t) Sürecinin Sınır Fonksiyonellerinin Beklenen Değer ve Varyanslarının Kesin İfadeleri

Sınır fonksiyonellerinin momentlerinin incelenmesi için ilk kez 4. Bölüm' de kısaca bahsedilen $\{S_n\}$, $n \geq 0$ rasgele yürüyüş sürecinin basamak yükseklikleri ile basamak anlarından yararlanılacaktır. Bu bölümde bu basamak değişkenleri daha ayrıntılı incelenecektir. Aşağıda ilk basamak yüksekliği (χ_1^+) ile ilk basamak anı (ν_1^+) tanımlarını hatırlatalım:

$$\nu_1^+ = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}; \;\; \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} \equiv \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i .$$

Birinci basamak yüksekliği ve birinci basamak anının örnek bir izdüşümü Şekil 7.2' deki grafikte görülebilir:



Şekil 7.2 : Birinci basamak yüksekliği ve birinci basamak anı.

Basamak değişkenleri ile ilgili literatürde $m_1 \equiv E(\eta_1) > 0$ iken ν_1^+ ve χ_1^+ nın 1 olasılığı ile sonlu oldukları bilinmektedir (Feller, (1971)). Ayrıca, $(\nu_n^+, \chi_n^+), n = 2,3, \ldots$ rasgele değişken çifti, (ν_1^+, χ_1^+) ile aynı dağılıma sahiptir (Feller, (1971)). Bu durumda, $H(z)$, χ_n^+ , $n \geq 1$ basamak yüksekliklerinin ürettiği ödüllü yenileme sürecinin tanımı aşağıdaki gibidir:

$$H(z) = \inf\left\{n \geq 1 \colon \sum_{i=1}^{n} \chi_1^+ > z\right\}, z \geq 0.$$

E. Dynkin prensibine göre, $N_1(z)$ ve $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelleri $\{\nu_n^+\}$ ve $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ rasgele değişken dizileri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$N_1(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+ ; \qquad S_{N_1(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \tag{7.1}$$

Burada $H(x)$ basamak yüksekliklerinin $\{\chi_n^+\}$ ürettiği yenileme sürecidir:

$$H(x) \equiv \min\left\{n \geq 1 \colon \sum_{i=1}^{n} \chi_1^+ > x\right\}; \quad x > 0 \tag{7.2}$$

(7.2) tanımından görüldüğü üzere $N_1(x)$ bir ödüllü yenileme sürecidir. χ_1^+ tanımından ve Wald özdeşliğinden yararlanılarak, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E(\chi_1^+) = E(\eta_1)E(\nu_1^+) \tag{7.3}$$

(7.3) eşitliğinden, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$E(\nu_1^+) = \frac{E(\chi_1^+)}{E(\eta_1)} = \frac{\mu_1}{m_1} \qquad (m_1 \equiv E(\eta_1) \neq 0) \tag{7.4}$$

(7.1) ve Wald özdeşliği kullanılarak, $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri şu şekilde yazılabilir:

$$E\big(N_1(x)\big) = \frac{\mu_1}{m_1} E\big(H(x)\big) \tag{7.5}$$

Burada, $\mu_1 = E(\chi_1^+)$ ve $m_1 = E(\eta_1)$. Ayrıca, $E\big(H(x)\big)$, $\{\chi_n^+\}$ basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme fonksiyonudur.

$$E\big(H(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{+}^{*n}(x) \tag{7.6}$$

Burada, $F_{+}(x) \equiv P\{\chi_1^{+} \leq x\}$ birinci basamak yüksekliğinin (χ_1^{+}) dağılımıdır. (7.1) eşitliği ile Borovkov özelliği kullanılarak, $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin varyansı (7.7) eşitliğinde verildiği gibidir:

$$\mathrm{Var}\big(N_1(x)\big) = E\big(H(x)\big)\mathrm{Var}(\nu_1^{+}) + \big(E(\nu_1^{+})\big)^2 \mathrm{Var}\big(H(x)\big) \tag{7.7}$$

Borovkov özdeşliğine göre, birinci basamak yüksekliği χ_1^{+}' in varyansı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathrm{Var}(\chi_1^{+}) = E(\nu_1^{+})\mathrm{Var}(\eta_1) + E(\eta_1)^2 \mathrm{Var}(\nu_1^{+}) \tag{7.8}$$

(7.8) eşitliğinden yararlanılarak, birinci basamak anı ν_1^{+}' in varyansı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathrm{Var}(\nu_1^{+}) = \frac{\sigma_{+}^2}{m_1^2} - \frac{\mu_1 \sigma_{\eta}^2}{m_1^3} \tag{7.9}$$

Burada, $m_1 = E(\eta_1)$; $\mu_1 = E(\chi_1^{+})$ ve $\sigma_{\eta}^2 = \mathrm{Var}(\eta_1)$; $\sigma_{+}^2 = \mathrm{Var}(\chi_1^{+})$' dır. (7.7) ve (7.9) eşitliğini, (7.5) eşitliğinde yerine koyarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\mathrm{Var}\big(N_1(x)\big) = \frac{\big(m_1 \sigma_{+}^2 - \mu_1 \sigma_{\eta}^2\big)}{m_1^3} E\big(H(x)\big) + \frac{\mu_1^2}{m_1^2} \mathrm{Var}\big(H(x)\big) \tag{7.10}$$

Burada, $E\big(H(x)\big)$ $H(x)$ yenileme sürecinin beklenen değeri ve $\mathrm{Var}\big(H(x)\big)$ ise varyansıdır.

Önerme 7.1: $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansının kesin ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir (Feller, (1971)):

$$E\big(N_1(x)\big) = \frac{\mu_1}{m_1} E\big(H(x)\big);$$

$$\mathrm{Var}\big(N_1(x)\big) = \frac{\big(m_1 \sigma_{+}^2 - \mu_1 \sigma_{\eta}^2\big)}{m_1^3} E\big(H(x)\big) + \frac{\mu_1^2}{m_1^2} \mathrm{Var}\big(H(x)\big)$$

Burada $\sigma_+^2 = \mathrm{Var}(\chi_1^+); \sigma_\eta^2 = \mathrm{Var}(\eta_1);\ \mu_1 = E(\chi_1^+);\ m_1 = E(\eta_1)$' dır.

Önerme 7.1'in yardımıyla sürecin $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki önerme ile verilebilir.

Önerme 7.2: $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansının kesin ifadeleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E\big(N_1(\lambda\zeta)\big) = \frac{\mu_1}{m_1} E\big(H(\lambda\zeta)\big);$$

$$\mathrm{Var}\big(N_1(\lambda\zeta)\big) = \frac{\left(m_1\sigma_+^2 - \mu_1\sigma_\eta^2\right)}{m_1^3} E\big(H(\lambda\zeta)\big) + \frac{\mu_1^2}{m_1^2} Var\big(H(\lambda\zeta)\big).$$

Burada, $E\big(H(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty E\big(H(\lambda z)\big) d\pi_\lambda(z)$ ve $\mathrm{Var}\big(H(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty \mathrm{Var}\big(H(\lambda z)\big) d\pi_\lambda(z)$, $P\{\zeta \leq z\} \equiv \pi_\lambda(z) \to \frac{1}{\mu_1}\int_0^z \big(1 - F_+(x)\big)dx\ , z \geq 0, \lambda \to \infty$' dır.

Önerme 7.3: $S_{N_1(\lambda\zeta)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansının kesin ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\big(S_{N_1(\lambda\zeta)}\big) = \mu_1 E\big(H(\lambda\zeta)\big);$$

$$\mathrm{Var}\big(S_{N_1(\lambda\zeta)}\big) = \sigma_+^2 E\big(H(\lambda\zeta)\big) + \mu_1^2 \mathrm{Var}\big(H(\lambda\zeta)\big).$$

Burada $\sigma_+^2 = \mathrm{Var}(\chi_1^+);\ \mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big)$.

Önerme 7.4: $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansının kesin ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$E\big(\tau_1(\lambda\zeta)\big) = \frac{\alpha_1\mu_1}{m_1} E\big(H(\lambda\zeta)\big);$$

$$\mathrm{Var}\big(\tau_1(\lambda\zeta)\big) = \frac{\left(\mu_1 m_1^2\sigma_\xi^2 + m_1\sigma_+^2\alpha_1^2 - \mu_1\sigma_\eta^2\alpha_1^2\right)}{m_1^3} E\big(H(\lambda\zeta)\big) + \left(\frac{\mu_1\alpha_1}{m_1}\right)^2 \mathrm{Var}\big(H(\lambda\zeta)\big).$$

Burada, $\alpha_1 = E(\xi_1)$ ve $\sigma_\xi^2 = \mathrm{Var}(\xi_1)$' dir.

Şimdi de sınır fonksiyonellerinin beklenen değer ve varyansları için asimtotik açılımlar elde edilsin.

7.2. X(t) Sürecinin Sınır Fonksiyonellerinin Çeşitli Momentleri için Asimtotik Açılımlar

Yukarıdaki bölümde elde edildiği üzere, sınır fonksiyonellerinin momentlerinin kesin ifadeleri $H(x)$ yenileme sürecinin beklenen değer ve varyansı ile ifade edilmektedir. Bu nedenle, bu fonksiyonellerin momentlerinin asimtotik açılımlarını yazmak için, literatürde verilen $H(x)$ yenileme sürecinin beklenen değer ve varyansını hesaplayıp, asimtotik açılımlarını elde edelim.

Önerme 7.5 (Feller, (1971)) $E(\chi_1^{+2}) < \infty$ sağlansın. Bu takdirde, $H(x)$ yenileme sürecinin beklenen değer ve varyansının asimtotik açılımı $x \to \infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(H(x)) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + g_1(x).$$

Burada, $\mu_k = E(\chi_1^{+k}), k = 1,2, \ldots$ ve $g_1(x)$ sınırlı fonksiyonu $x \to \infty$ iken sıfıra gider: $\lim\limits_{x\to\infty} g_1(x) = 0.$

Önerme 7.6. (Smith, (1959)) $E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olsun. Bu durumda, $x \to \infty$ iken, $H(x)$ yenileme sürecinin varyansı için aşağıdaki asimtotik ilişki yazılabilir:

$$\mathrm{Var}(H(x)) = \frac{\sigma_+^2}{\mu_1^3} x + B_1 + g_2(x).$$

Burada, $\sigma_+^2 = \mathrm{Var}(\chi_1^+)$, $B_1 \equiv \frac{5\mu_2^2}{4\mu_1^4} - \frac{2\mu_3}{3\mu_1^3} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$ ve $g_2(x)$ sınırlı fonksiyonu $x \to \infty$ iken, sıfıra gider: $\lim\limits_{x\to\infty} g_2(x) = 0.$

Önerme 7.5, Önerme 7.6 ve Önerme 5.1' in kullanımıyla, bu bölümün sonuçlarını aşağıdaki teoremlerle ifade edebiliriz.

Teorem 7.1. Varsayalım ki, $\mu_3 = E(\chi_1^{+3}) < \infty$ sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to +\infty$ iken, $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansı için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılımlar yazılabilir:

$$E(N_1(\lambda\zeta)) = \frac{\beta_1}{m_1}\lambda + \frac{\mu_2}{2\mu_1 m_1} + o(1); \quad \mathrm{Var}(N_1(\lambda\zeta)) = \frac{A\beta_1}{m_1^2}\lambda + B_2 + o(1).$$

Burada, $\beta_n \equiv E(\zeta^n)$; $n = 1,2,\ldots$; $A = (m_1+\mu_1)C_v^2(\chi_1^+) - m_1 C_v^2(\eta_1)$; $B_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 m_1}\right)^2 - \frac{\mu_2}{2m_1^2} - \frac{\mu_2 m_2}{2\mu_1 m_1^3} + \frac{5\mu_2^2}{4\mu_1^3 m_1} - \frac{2\mu_3}{3\mu_1^2 m_1}$; $C_v(\chi_1^+) = \frac{\sigma_+}{\mu_1}$; $C_v(\eta_1) = \frac{\sigma_\eta}{m_1}$; $\sigma_\eta^2 = \mathrm{Var}(\eta_1)$; $\sigma_+^2 = Var(\chi_1^+)$; $\mu_k = E(\chi_1^+)$; $m_k = E(\eta_1^k)$; $\alpha_k = E(\xi_1^k), k = 1,2,\ldots$

Teorem 7.2. Varsayalım ki, $\mu_3 = E(\chi_1^{+3}) < \infty$ sağlansın. Bu durumda, $\lambda \to +\infty$ iken, $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değer ve varyansı için aşağıdaki asimtotik açılımlar yazılabilir:

$$E(\tau_1(\lambda\zeta)) = \frac{\alpha_1\beta_1}{m_1}\lambda + \frac{\alpha_1\mu_2}{2\mu_1 m_1} + o(1); \quad \mathrm{Var}(\tau_1(\lambda\zeta)) = \frac{D\beta_1\alpha_1^2}{m_1}\lambda + K\alpha_1^2 + o(1).$$

Burada,

$$D \equiv C_v^2(\xi_1) - C_v^2(\eta_1) + \frac{2\mu_1}{m_1}C_v^2(\chi_1^+);$$

$$K \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1 m_1}C_v^2(\xi_1) + \frac{\mu_2}{2m_1^2}C_v^2(\chi_1^+) - \frac{\mu_2}{2\mu_1 m_1}C_v^2(\eta_1) + \frac{5\mu_2^2}{4\mu_1^2 m_1^2} - \frac{2\mu_3}{3\mu_1 m_1^2} + \frac{\mu_2}{2m_1^2};$$

$$C_v(\xi_1) = \frac{\sigma_\xi}{\alpha_1};\ C_v(\chi_1^+) = \frac{\sigma_+}{\mu_1};\ C_v(\eta_1) = \frac{\sigma_\eta}{m_1}; \sigma_\xi^2 = \mathrm{Var}(\xi_1);\ \sigma_\eta^2 = \mathrm{Var}(\eta_1);$$

$$\sigma_+^2 = \mathrm{Var}(\chi_1^+);\ \beta_k \equiv E(\zeta^k);\ \mu_k = E(\chi_1^+);\ m_k = E(\eta_1^k); \alpha_k = E(\xi_1^k).$$

Bunlara ek olarak, bu bölümde sürecin ergodik momentlerinin hesaplanması amacıyla aşağıdaki integral için asimtotik sonuçlar elde edilsin:

$$E(\lambda^n\zeta^n M_k(\lambda\zeta)) = \int_{z=0}^{\infty}(\lambda z)^n M_k(\lambda z)d\pi_\lambda(z)\,;\ n = 0,1,2,\ldots; k = 1,2,\ldots \qquad (7.11)$$

Burada $\pi_\lambda(z)$, $\{\zeta_n\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımı olup, aynı zamanda ζ rasgele değişkeninin de dağılımıdır. Ayrıca, $M_k(z) \equiv E(S_{N_1(z)}^k)$; $k = \overline{1,5}$' dır.

Kovalenko ve diğ. (1983) ve Rogozin (1964) çalışmaları kullanılarak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 7.1: $E(|\eta_1^3|) < +\infty$ olsun. Bu takdirde, $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti için $(M_k(z))$ iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_n(z) \equiv E(S_{N_1(z)}^n) = z^n + n\hat{\mu}_1 z^{n-1} + o(z^{n-1});\ n = \overline{1,5}$$

Burada $\mu_k \equiv E(\chi_1^{+k})$, $k = 2,3$, $\hat{\mu}_1 \equiv \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve χ_1^+, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ilk basamak yüksekliğidir (Gever, (2011)).

Bizim amacımız ise (7.11) eşitliğindeki integral için $\lambda \to \infty$ iken iki terimli asimtotik açılım elde etmektir. Böylece, öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremler verilmelidir:

Yardımcı Teorem 7.2: $E(\eta_1) > 0$ ve $E(\chi_1^{+3}) < \infty$ sağlanmış olsun. Bu takdirde, her $n = 0,1,2,3, \ldots$ için, $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki iki terimli asimtotik açılımlar yazılabilir:

$$E\big(\lambda^n \zeta^n M_k(\lambda\zeta)\big) = \lambda^{n+k}\beta_{n+k} + k\hat{\mu}_1\lambda^{n+k-1}\beta_{n+k-1} + o(\lambda^{n+k-1}), k = \overline{1,5}$$

Burada, $\beta_r \equiv E(\zeta^r)$; $\hat{\mu}_r = \frac{\mu_{r+1}}{(r+1)\mu_1}$, $r = 0,1,2,3$' tür.

İspat:

1) Yardımcı Teorem 7.1' e göre aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$M_1(\lambda z) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda z} g_1(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} \lambda z g_1(\lambda z) = 0$' dir. Bu açılım göz önüne alındığında,

$$E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) \equiv \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

açılımı elde edilir. Burada $\beta_n \equiv E(\zeta^n)$, $n = 1,2,3, \ldots$; $\beta \equiv \beta_1 \equiv E(\zeta)$; $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ 'dır. Diğer taraftan, her $n = 1,2,3, \ldots$ için, aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$E\big(\lambda^n \zeta^n M_1(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n \left(\lambda z + \hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda z} g_1(\lambda z)\right) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{n+1} z^{n+1} d\pi(z) + \hat{\mu}_1 \int_0^\infty \lambda^n z^n d\pi(z) + \int_0^\infty \lambda^{n-1} z^{n-1} g_1(\lambda z) d\pi(z))$$

$$= \lambda^{n+1} E(\zeta^{n+1}) + \lambda^n \hat{\mu}_1 E(\zeta^n) + 0\lambda^{n-1} E(\zeta^{n-1}) + o(\lambda^{n-1})$$

$$= \lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \lambda^n \hat{\mu}_1 \beta_n + o(\lambda^n).$$

Burada, $\beta_k \equiv E(\zeta^k), k = 1,2, \ldots$ ve $E(\zeta^k) = \int_0^\infty z^k d\pi_\lambda(z)$' dir.

2) Yardımcı Teorem 7.1' e göre, aşağıdaki açılım gösterilebilir:

$$M_2(\lambda z) = (\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1(\lambda z) + g_2(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} \frac{g_2(\lambda z)}{\lambda z} = 0$' dır. Bu durumda, her $n = 0,1,2,3, \dots$ için, aşağıdaki açılım hesaplanabilir:

$$E\big(\lambda^n \zeta^n M_2(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_2(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n \{(\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1 \lambda z + g_2(\lambda z)\} d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2} d\pi_\lambda(z) + 2\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1} d\pi_\lambda(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^n g_2(z) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \lambda^{n+2} E(\zeta^{n+2}) + 2\hat{\mu}_1 \lambda^{n+1} E(\zeta^{n+1}) + o(\lambda^{n+1})$$

$$= \lambda^{n+2} \beta_{n+2} + 2\hat{\mu}_1 \lambda^{n+1} \beta_{n+1} + o(\lambda^{n+1})$$

Böylece, ispatın ikinci kısmı da tamamlanmış olur.

3) Yardımcı Teorem 7.1' de aşağıdaki açılım ifade edilmiştir:

$$M_3(\lambda z) = (\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + g_3((\lambda z)^2)$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} \frac{g_3(\lambda z)}{(\lambda z)^2} = 0$' dır. Bu durumda, her $n = 0,1,2,3$ için, aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$E\big(\lambda^n \zeta^n M_3(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_3(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n \big((\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + g_3(\lambda z^2)\big) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \lambda^{n+3} \int_0^\infty z^{n+3} d\pi_\lambda(z) + 3\hat{\mu}_1 \lambda^{n+2} \int_0^\infty z^{n+2} d\pi_\lambda(z) + \int_0^\infty z^{n+1} g_3(\lambda z^2) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \lambda^{n+3} E(\zeta^{n+3}) + 3\hat{\mu}_1 \lambda^{n+2} E(\zeta^{n+2}) + o(\lambda^{n+2})$$

$$= \lambda^{n+3} \beta_{n+3} + 3\hat{\mu}_1 \lambda^{n+2} \beta_{n+2} + o(\lambda^{n+2})$$

Böylece, ispatın üçüncü kısmı tamamlanmış olur.

4) Yardımcı Teorem 7.1' de, aşağıdaki açılım gösterilmiştir:

$$M_4(\lambda z) = (\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + g_4((\lambda z)^3).$$

Burada, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g_4(\lambda z)}{(\lambda z)^3} = 0$' dır. Bu durumda, her $n = 0,1,2,3$ için, aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$E\big(\lambda^n \zeta^n M_4(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_4(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n\big((\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + g_4(\lambda z^3)\big) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \lambda^{n+4}\int_0^\infty z^{n+4} d\pi(z) + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}\int_0^\infty z^{n+3} d\pi(z) + \int_0^\infty z^{n+2} g_4(\lambda z^3) d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+4}E(\zeta^{n+4}) + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}E(\zeta^{n+3}) + o(\lambda^{n+3})$$

$$= \lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}\beta_{n+3} + o(\lambda^{n+3})$$

Bu da ispatın dördüncü kısmını tamamlar.

5) Yardımcı Teorem 7.1' de, $M_5(\lambda z) = (\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1(\lambda z)^4 + g_5(\lambda z)$ olduğu gösterilmiştir.

Burada, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g_5(\lambda z)}{(\lambda z)^4} = 0$ ' dır. Bu durumda her $n = 0,1,2,3,\ldots$ için

$$E\big(\lambda^n \zeta^n M_5(\lambda\zeta)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_5(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n\{(\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1(\lambda z)^4 + g_5(\lambda z)\} d\pi_\lambda(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+5} d\pi_\lambda(z) + 5\hat{\mu}_1\int_0^\infty (\lambda z)^{n+4} d\pi_\lambda(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^n g_5(z) d\pi_\lambda(z)$$

$$= \lambda^{n+5}E(\zeta^{n+4}) + 5\hat{\mu}_1\lambda^{n+4}E(\zeta^{n+4}) + o(\lambda^{n+4})$$

$$= \lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 5\hat{\mu}_1\lambda^{n+4}\beta_{n+4} + o(\lambda^{n+4})$$

olur, bu da ispatın beşinci kısmını tamamlar.

İspatın beş kısmı da tamamlandığı için Yardımcı Teorem 7.2 ispat edilmiş olur.

Böylece, $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyoneli ile ifade edilen integrallerin davranışı incelenmiş oldu. $S_{N_1(z)}$ sınır fonskiyonelinin momentlerinin asimtotik açılımları kullanılarak, $X(t)$ sürecinin ergodik momentleri için asimtotik açılımlar elde etmek mümkündür. Bu sonuçlar bir sonraki bölümde araştırılacaktır.

8. X(t) SÜRECİNİN ERGODİK DAĞILIMININ MOMENTLERİ İÇİN KESİN İFADELER

Bu bölümün amacı sürecin ergodik momentleri için kesin ifadeler elde etmektir. Bunun için aşağıdaki notasyonları tanımlamak faydalı olacaktır.

$$m_n \equiv E(\eta_1^n);\ \widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1};\ \ M_n(z) \equiv E\left(S_{N_1(z)}^n\right);$$

$$\widehat{M}_n(z) = \frac{M_{n+1}(z)}{(n+1)M_1(z)}\ \ , n = 0,1,2,\dots;\ \ E(X^n) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(X^n(t)\right), n = 1,2,3,\dots$$

$$E\left(\zeta^r M_n(\zeta)\right) \equiv \int_0^\infty z^r\, M_n(z) d\pi_\lambda(z);\ r = 0,1,2,3,\dots;\ \ n = 1,2,3,\dots$$

Teorem 8.1: Teorem 4.1' in koşullarının yanı sıra $E(|\eta_1|^5) < +\infty$ koşulu da sağlanmış olsun. Bu takdirde, sürecin n. ergodik momenti $E(X^n), n = 1,2,3,4$ mevcuttur ve ilk dört ergodik moment aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X) = \frac{1}{E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)}\left\{E\left(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\lambda\zeta)\right) + A_1 E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)\right\} \tag{8.1}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)}\left\{E\left((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\right) - E\left(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3(\lambda\zeta)\right)\right.$$

$$\left. + A_1\left[2E\left(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\right) - E\left(M_2(\lambda\zeta)\right)\right] + A_2 E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)\right\} \tag{8.2}$$

$$E(X^3) = \frac{1}{E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)}\left\{E\left((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\right) - \frac{3}{2}E\left((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\right)\right.$$

$$+ E\left(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\right) - \frac{1}{4}E\left(M_4(\lambda\zeta)\right)$$

$$+ A_1\left[3E\left((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\right) - 3E\left(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\right) + E\left(M_3(\lambda\zeta)\right)\right]$$

$$\left. + 3A_2\left[E\left(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\lambda\zeta)\right)\right] + A_3 E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)\right\} \tag{8.3}$$

$$E(X^4) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^4 M_1(\lambda\zeta)\big) - 2E\big((\lambda\zeta)^3 M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+2E\big((\lambda\zeta)^2 M_3(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta)\big) + A_1\big[4E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$-6E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_4(\lambda\zeta)\big) + 4E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+2A_2\big[3E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - 3E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+2A_3\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big] + \frac{1}{2}A_4\, E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\} + o(\alpha^4) \qquad (8.4)$$

Burada

$$A_1 \equiv \widehat{m}_1;\ A_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2;\ A_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3;$$

$A_4 \equiv -\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2\widehat{m}_1^2 + 24\widehat{m}_1^4;\ \widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}; k = 1,2,3,4$’ tür.

İspat: Hatırlanacak olursa, Önerme 4.1’ de $X(t)$ sürecinin ergodik karakteristik fonksiyonu için $t \to \infty$ iken elde edilen (4.24) eşitliği aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_X(\alpha) \equiv \frac{1}{E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)} \int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z} \frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1}\, d\pi_\lambda(z).$$

Burada $\varphi_X(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} E\big(e^{i\alpha X(t)}\big)$’ dir ve Taylor açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_X(\alpha) = 1 + i\alpha E(X) + \frac{(i\alpha)^2}{2!}E(X^2) + \frac{(i\alpha)^3}{3!}E(X^3) + \frac{(i\alpha)^4}{4!}E(X^4) + o(\alpha^4)$$

(8.5)

Burada $E(X^k); k = 1,2,3,4$ momentleri $t \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ilk dört ergodik momentlerini ifade etmektedir.

$$\varphi_\eta(-\alpha) \equiv E\big(e^{-i\alpha\eta_1}\big)$$

$$= 1 + i\alpha m_1 + \frac{(i\alpha)^2}{2!}m_2 + \frac{(i\alpha)^3}{3!}m_3 + \frac{(i\alpha)^4}{4!}m_4 + \frac{(i\alpha)^5}{5!}m_5 + o(\alpha^5) \qquad (8.5)$$

Burada $m_k \equiv E\big(\eta_1^k\big), k = 1,2, \ldots$’dir.

$$\frac{1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1} = -\frac{1}{i\alpha m_1}\left\{1 + i\alpha\widehat{m}_1 + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2]\right.$$

$$+\frac{(i\alpha)^3}{3!}[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3]$$

$$\left.+\frac{(i\alpha)^4}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 24\widehat{m}_1^4] + o(\alpha^4)\right\} \qquad (8.7)$$

Burada $\widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$, $k = 1,2,\ldots$ olup $\{\eta_n\}, n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenlerinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün ergodik momentlerini ifade etmektedir.

$$\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) \equiv E\left(e^{-i\alpha\eta_1}\right) = 1 + i\alpha M_1(\lambda z) + \frac{(i\alpha)^2}{2!}M_2(\lambda z) + \frac{(i\alpha)^3}{3!}M_3(\lambda z)$$

$$+\frac{(i\alpha)^4}{4!}M_4(\lambda z) + \frac{(i\alpha)^5}{5!}M_5(\lambda z) + o(\alpha^5) \qquad (8.8)$$

Burada $M_k(\lambda z) \equiv E\left(S_{N_1(\lambda z)}^k\right), k = 1,2,\ldots$' dır. (8.8) ifadesinden aşağıdaki açılım elde edilir.

$$\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) - 1 = E\left(e^{-i\alpha\eta_1}\right) = -i\alpha M_1(\lambda z)\left\{1 - i\alpha\widehat{M}_1(\lambda z)\right.$$

$$\left.+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\widehat{M}_2(\lambda z) - \frac{(i\alpha)^3}{3!}\widehat{M}_3(\lambda z) + \frac{(i\alpha)^4}{4!}\widehat{M}_4(\lambda z) + o(\alpha^4)\right\} \qquad (8.9)$$

Burada $\widehat{M}_k(\lambda z) = \frac{M_{k+1}(\lambda z)}{(k+1)M_1(\lambda z)}$' dir. (8.7) ve (8.9) açılımlarının yardımıyla aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$\frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1} = \frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\left\{1 - i\alpha\widehat{M}_1(\lambda z) + \frac{(i\alpha)^2}{2!}\widehat{M}_2(\lambda z)\right.$$

$$\left.-\frac{(i\alpha)^3}{3!}\widehat{M}_3(\lambda z) + \frac{(i\alpha)^4}{4!}\widehat{M}_4(\lambda z) + o(\alpha^4)\right\}\left\{1 + i\alpha\widehat{m}_1 + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2]\right.$$

$$+\frac{(i\alpha)^3}{3!}[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3]$$

$$\left.+\frac{(i\alpha)^4}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 24\widehat{m}_1^4] + o(\alpha^4)\right\}$$

$$= \frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\Big\{1 + i\alpha\left(\widehat{m}_1 - \widehat{M}_1(\lambda z)\right)$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\left(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2 - 2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z) + \widehat{M}_2(\lambda z)\right)$$

$$+\frac{(i\alpha)^3}{3!}\big[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3 - 3(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)\widehat{M}_1(\lambda z) + 3\widehat{m}_1\widehat{M}_2(\lambda z)$$

$$-\widehat{M}_3(\lambda z)\big] + \frac{(i\alpha)^4}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2\widehat{m}_1^2 + 24\widehat{m}_1^4$$

$$-4(\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3)\widehat{M}_1(\lambda z) + 6(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)\widehat{M}_2(\lambda z) - 4\widehat{m}_1\widehat{M}_3(\lambda z)$$

$$+\widehat{M}_4(\lambda z)\big] + o(\alpha^4)\Big\} \tag{8.10}$$

Şimdi de $e^{i\alpha\lambda z}$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken asimtotik açılımını yazalım:

$$e^{i\alpha\lambda z} = 1 + i\alpha\lambda z + \frac{(i\alpha)^2}{2!}(\lambda z)^2 + \frac{(i\alpha)^3}{3!}(\lambda z)^3 + \frac{(i\alpha)^4}{4!}(\lambda z)^4 + o(\alpha^4) \tag{8.11}$$

(8.10) ve (8.11) açılımlarının yardımıyla aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$e^{i\alpha\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} = \frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\Big\{1 + i\alpha\left(\widehat{m}_1 - \widehat{M}_1(\lambda z)\right)$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\left(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2 - 2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z) + \widehat{M}_2(\lambda z)\right)$$

$$+\frac{(i\alpha)^3}{3!}\big[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3 - 3(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)\widehat{M}_1(\lambda z) + 3\widehat{m}_1\widehat{M}_2(\lambda z)$$

$$-\widehat{M}_3(\lambda z)\big] + \frac{(i\alpha)^4}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2\widehat{m}_1^2 + 24\widehat{m}_1^4$$

$$-4(\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3)\widehat{M}_1(\lambda z) + 6(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)\widehat{M}_2(\lambda z) - 4\widehat{m}_1\widehat{M}_3(\lambda z)$$

$$+\widehat{M}_4(\lambda z)\big] + o(\alpha^4)\Big\}\Big\{1 + i\alpha\lambda z + \frac{(i\alpha)^2}{2!}(\lambda z)^2 + \frac{(i\alpha)^3}{3!}(\lambda z)^3 + \frac{(i\alpha)^4}{4!}(\lambda z)^4 + o(\alpha^4)\}$$

$$= \frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\{1 + i\alpha\big[\widehat{m}_1 - \widehat{M}_1(\lambda z) + \lambda z\big] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}\big[2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2 - 2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z)$$

$$+\widehat{M}_2(\lambda z) + 2\lambda z\left(\widehat{m}_1 - \widehat{M}_1(\lambda z)\right) + (\lambda z)^2\big] + \frac{(i\alpha)^3}{3!}[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3$$

$$-3(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)\widehat{M}_1(\lambda z) + 3\widehat{m}_1\widehat{M}_2(\lambda z) - \widehat{M}_3(\lambda z)$$

$$+3(\lambda z)\left(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2-2\hat{m}_1\hat{M}_1(\lambda z)+\hat{M}_2(\lambda z)\right)$$

$$+3(\lambda z)^2\left(\hat{m}_1-\hat{M}_1(\lambda z)\right)+(\lambda z)^3\Big]$$

$$+\frac{(i\alpha)^4}{4!}[-\hat{m}_4+8\hat{m}_3\hat{m}_1+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_2\hat{m}_1^2+24\hat{m}_1^4$$

$$-4(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_1^3)\hat{M}_1(\lambda z)+6(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_2(\lambda z)-4\hat{m}_1\hat{M}_3(\lambda z)$$

$$+\hat{M}_4(\lambda z)+4\lambda z\big(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_1^3-3(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_1(\lambda z)$$

$$+3\hat{m}_1\hat{M}_2(\lambda z)-\hat{M}_3(\lambda z)\Big)+6(\lambda z)^2\left(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2-2\hat{m}_1\hat{M}_1(\lambda z)+\hat{M}_2(\lambda z)\right)$$

$$+4(\lambda z)^3\left(\hat{m}_1-\hat{M}_1(\lambda z)\right)+(\lambda z)^4\Big]+o(\alpha^4)$$

$$=\frac{1}{m_1}\Bigg\{M_1(\lambda z)+i\alpha\left[\hat{m}_1M_1(\lambda z)-\frac{M_2(\lambda z)}{2}+\lambda zM_1(\lambda z)\right]$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\Bigg[2\hat{m}_1^2M_1(\lambda z)-\hat{m}_2M_1(\lambda z)-\hat{m}_1M_2(\lambda z)+\frac{M_3(\lambda z)}{3}+2\lambda z\hat{m}_1M_1(\lambda z)$$

$$-\lambda zM_2(\lambda z)+(\lambda z)^2M_1(\lambda z)]+\frac{(i\alpha)^3}{3!}[(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_1^3)M_1(\lambda z)$$

$$-\frac{3}{2}(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)M_2(\lambda z)+\hat{m}_1M_3(\lambda z)-\frac{M_4(\lambda z)}{4}$$

$$+3(\lambda z)(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)M_1(\lambda z)-3\lambda z\hat{m}_1M_2(\lambda z)+\lambda zM_3(\lambda z)$$

$$+3(\lambda z)^2\hat{m}_1M_1(\lambda z)-\frac{3}{2}(\lambda z)^2M_2(\lambda z)+(\lambda z)^3M_1(\lambda z)]$$

$$+\frac{(i\alpha)^4}{4!}[(-\hat{m}_4+8\hat{m}_3\hat{m}_1+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_2\hat{m}_1^2+24\hat{m}_1^4)M_1(\lambda z)$$

$$-2(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_3)M_2(\lambda z)+2(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)M_3(\lambda z)-\hat{m}_1M_4(\lambda z)$$

$$+\frac{M_5(\lambda z)}{5}+4\lambda z(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_1^3)M_1(\lambda z)-6\lambda z(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)M_2(\lambda z)$$

$$+4(\lambda z)\hat{m}_1M_3(\lambda z)-\lambda zM_4(\lambda z)+6(\lambda z)^2(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)M_1(\lambda z)$$

$$-6(\lambda z)^2\hat{m}_1M_2(\lambda z)+2(\lambda z)^2M_3(\lambda z)+4(\lambda z)^3\hat{m}_1M_1(\lambda z)$$

$$-2(\lambda z)^3M_2(\lambda z)+(\lambda z)^4M_1(\lambda z)]+o(\alpha^4)\} \qquad (8.12)$$

(8.12) açılımından $d\pi_\lambda(z)$' e göre integral alınırsa aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}d\pi_\lambda(z)=\frac{1}{m_1}\{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)$$

$$+i\alpha\left[\hat{m}_1E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)+E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big)\right]$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\big[2\hat{m}_1^2E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)-\hat{m}_2E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)-\hat{m}_1E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+\frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)+2\hat{m}_1E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big)-E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big)+E\big((\lambda\zeta)^2M_1(\lambda\zeta)\big)\Big]$$

$$+\frac{(i\alpha)^3}{3!}\big[(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_1^3)E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)$$

$$-\frac{3}{2}(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)+\hat{m}_1E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta)\big)$$

$$+3(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big)-3\hat{m}_1\,E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big)+E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$+3\hat{m}_1E\big((\lambda\zeta)^2M_1(\lambda\zeta)\big)-\frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta)^2M_2(\lambda\zeta)\big)+E\big((\lambda\zeta)^3M_1(\lambda\zeta)\big)\Big]$$

$$+\frac{(i\alpha)^4}{4!}\big[(-\hat{m}_4+8\hat{m}_3\hat{m}_1+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_2\hat{m}_1^2+24\hat{m}_1^4)E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)$$

$$-2(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_1^3)E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+4(\hat{m}_3-6\hat{m}_2\hat{m}_1+6\hat{m}_1^3)E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big)$$

$$+2(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)-6(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+6(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)E\big((\lambda\zeta)^2M_1(\lambda\zeta)\big)-\hat{m}_1E\big(M_4(\lambda\zeta)\big)+4\hat{m}_1E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$+4\hat{m}_1E\big((\lambda\zeta)^3M_1(\lambda\zeta)\big)-E\big(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\big)+6\hat{m}_1E\big((\lambda\zeta)^2M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+2E\big((\lambda\zeta)^2M_3(\lambda\zeta)\big)-2E\big((\lambda\zeta)^3M_2(\lambda\zeta)\big)+E\big((\lambda\zeta)^4M_1(\lambda\zeta)\big)$$

$$+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta)\big)\Big]+o(\alpha^4) \qquad (8.13)$$

Wald Özdeşliğinden (Feller, (1971)):

$$\varphi_X(\alpha)=\frac{1}{E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)}\int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}d\pi_\lambda(z)$$

$$= 1 + \frac{i\alpha}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big) + \widehat{m}_1 E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$+\widehat{m}_1\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big] + (2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^3}{3!}\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\{E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta)\big) + \widehat{m}_1\big[3E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - 3E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)\left[3E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{3}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\right]$$

$$+(\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3)E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^4}{4!}\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\{E\big((\lambda\zeta)^4 M_1(\lambda\zeta)\big) - 2E\big((\lambda\zeta)^3 M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+2E\big((\lambda\zeta)^2 M_3(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta)\big)\Big\} + \widehat{m}_1\big[4E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$-6E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_4(\lambda\zeta)\big) + 4E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+(2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2)\big[6E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - 6E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + 2E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+(\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3)\big[4E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - 2E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+\frac{1}{2}(-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2\widehat{m}_1^2 + 24\widehat{m}_1^4)\, E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\} + o(\alpha^4) \qquad (8.14)$$

Notasyon kolaylığı açısından aşağıdaki gösterimleri dahil edelim:

$$A_1 \equiv \widehat{m}_1;\ A_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2;\ A_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3;$$

$$A_4 \equiv -\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2\widehat{m}_1^2 + 24\widehat{m}_1^4$$

Bu durumda, (8.14) açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_X(\alpha) = \frac{1}{E\big(N_1(\lambda\zeta)\big)}\int_0^\infty e^{i\alpha\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1}d\pi_\lambda(z)$$

$$= 1 + \frac{i\alpha}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big) + A_1 E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2!}\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$+A_1\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big] + A_2 E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^3}{3!}\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta)\big) + A_1\big[3E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - 3E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+3A_2\left[E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\right] + (\hat{m}_3 - 6\hat{m}_1\hat{m}_2 + 6\hat{m}_1^3)E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^4}{4!}\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^4 M_1(\lambda\zeta)\big) - 2E\big((\lambda\zeta)^3 M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+2E\big((\lambda\zeta)^2 M_3(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta)\big)\Big\} + A_1\big[4E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$-6E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_4(\lambda\zeta)\big) + 4E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+2A_2\big[3E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - 3E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+2A_3\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+\frac{1}{2}A_4\, E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\} + o(\alpha^4) \qquad (8.15)$$

olur. (8.15) açılımı, (8.5) açılımı ile birebir karşılaştırıldığında $X(t)$ sürecini ilk dört ergodik momenti elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 8.1' de ilk dört moment için kesin ifadeler yazılmıştır. Ancak bu formülleri pratikte uygulamak oldukça zordur. Bu durumda, ergodik momentlerin kesin ifadeleri yerine asimtotik veya yaklaşık ifadelerinin kullanılması tavsiye edilir. Bu yaklaşık veya asimtotik ifadeleri elde etmede, $S_{N_1(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri önemli bir rol oynamaktadır.

9. X(t) SÜRECİNİN ERGODİK DAĞILIMININ MOMENTLERİ İÇİN ASİMTOTİK AÇILIMLAR

Bu bölümün amacı $X(t)$ sürecinin ilk dört momenti $(E(X^k),\ k=\overline{1,4}\ )$ için $\lambda \to \infty$ iken, iki terimli asimtotik açılımlar elde etmektir. Bu amaca ulaşabilmek için bu bölümde sıklıkla kullanılacak olan aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$\beta_n \equiv E(\zeta^n);\ \hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1};\ c_{n1} = \frac{\beta_n}{n\beta_1^2};\ \hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1};$$

$$\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1};\ \mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}); m_n \equiv E(\eta_1^n);\ n = 1,2,3,\dots;$$

Bu notasyonların yardımıyla, $X(t)$ sürecinin ilk dört ergodik momenti için iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

Teorem 9.1: $E(\eta_1) > 0$ ve $E(|\eta_1^3|) < \infty$ koşulları $\lambda \to \infty$ iken sağlanmış olsun. Bu takirde,

$$E(X^n) = \lambda^n \hat{\beta}_n + \lambda^{n-1} D_n + o(\lambda^{n-1});\ n = \overline{1,4}.$$

Burada, $D_n = n\widehat{m}_1 \hat{\beta}_{n-1} - c_{(n+1),1}\hat{\mu}_1;\ n = \overline{1,4};\ \beta_n = E(\zeta^n)\ ;\ \hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}\ ;\ c_{n1} = \frac{\beta_n}{n\beta_1^2},\ n = \overline{2,5};\ \widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}; \hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1};\ m_n = E(\eta_1)^n\ ;\ \mu_n = E(\chi_1^{+n})$' dır.

İspat: $X(t)$ sürecinin her bir ilk dört ergodik momenti için teker teker asimtotik açılımları elde edelim. Öncelikle, 8. bölümde Teorem 8.1' de verilen $X(t)$ sürecinin birinci ergodik momentinin kesin ifadesini hatırlatalım:

$$E(X) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big) + A_1 E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\} \qquad (9.1)$$

Burada $M_n(z) \equiv E\big(S_{N_1(z)}^n\big); E\big(\zeta^r M_n(\zeta)\big) \equiv \int_0^\infty z^r\, M_n(z) d\pi_\lambda(z); r = 0,1,2,\dots;\ n = 1,2,3,\dots$ ve $A_1 = \widehat{m}_1;\ \widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$' dir.

Yardımcı Teorem 7.2.2' de $\lambda \to \infty$ iken elde edilen iki terimli asimtotik açılımı hatırlatalım:

$$E\big(\lambda^n \zeta^n M_k(\lambda\zeta)\big) = \lambda^{n+k}\beta_{n+k} + k\hat{\mu}_1\lambda^{n+k-1}\beta_{n+k-1} + o(\lambda^{n+k-1}), k = \overline{1,5} \qquad (9.2)$$

(9.2) açılımından $E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1) \qquad (9.3)$$

(9.3)' açılımından aşağıdaki iki terimli açılım elde edilebilir:

$$\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)} = \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \qquad (9.4)$$

Benzer şekilde (9.2) açılımı yardımıyla aşağıdaki asimtotik açılımları yazmak mümkündür:

$$E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda) \qquad (9.5)$$

$$-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big) = -\frac{\lambda^2\beta_2}{2} - \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda) \qquad (9.6)$$

(9.1) eşitliğindeki $A_1E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)$ ifadesinin asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$A_1E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) = \widehat{m}_1\lambda\beta_1 + \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 + o(1) \qquad (9.7)$$

$o(\lambda)$ fonksiyonunun tanımına göre aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$A_1E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) + o(\lambda) = \widehat{m}_1\lambda\beta_1 + \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 + o(1) + o(\lambda) = \widehat{m}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda) \qquad (9.8)$$

Bu durumda,(9.4), (9.5), (9.6) ve (9.8) açılımları (9.1) eşitliğinde göz önüne alındığında $E(X)$ için aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$E(X) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\left\{E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big) + A_1E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 - \frac{\lambda^2\beta_2}{2} - \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \widehat{m}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^2\beta_2}{2} + \widehat{m}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda)\right\}$$

$$\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\frac{\lambda^2\beta_2}{2}\left\{1 + \frac{2\widehat{m}_1\beta_1}{\lambda\beta_2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1}\left\{1 + \frac{2\widehat{m}_1\beta_1}{\lambda\beta_2} - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} = \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1}\left\{1 + \left(\frac{2\widehat{m}_1\beta_1}{\beta_2} - \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}\right)\frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1} + \widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\beta_2}{2\beta_1^2} + o(1) = \lambda\hat{\beta}_1 + \widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1 c_{21} + o(1)$$

$$= \lambda\hat{\beta}_1 + D_1 + o(1) \tag{9.9}$$

Burada $D_1 = \widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1 c_{21}$; $c_{21} = \frac{\beta_2}{2\beta_1^2}$; $\hat{\beta}_1 = \frac{\beta_2}{2\beta_1}$' dir.

Teorem 8.1' de sürecin ikinci ergodik momenti $\left(E(X^2)\right)$ için verilen kesin ifade aşağıdaki gibidir:

$$E(X^2) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$+A_1\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big] + A_2 E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\} \tag{9.10}$$

Burada, $A_1 = \widehat{m}_1$; $A_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$; $\widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$; $k = 1,2$' dir. (9.2) açılımından yararlanarak aşağıdaki ifadelerin asimtotik açılımları yazılabilir:

$$E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2) \tag{9.11}$$

$$-E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) = -\lambda^3\beta_3 - 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2) \tag{9.12}$$

$$\frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta)\big) = \frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2) \tag{9.13}$$

(9.11), (9.12) ve (9.13) açılımlarının toplamı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$= \lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 - \lambda^3\beta_3 - 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)$$

$$= \frac{\lambda^3 \beta_3}{3} + o(\lambda^2) \tag{9.14}$$

Şimdi de (9.10) eşitliğindeki $A_1\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big]$ ifadesinin asimtotik açılımını inceleyelim. (9.2) açılımının yardımıyla aşağıdaki açılımlar verilebilir:

$$2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) = 2\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda) \tag{9.15}$$

$$-E\big(M_2(\lambda\zeta)\big) = -\lambda^2\beta_2 - 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda) \tag{9.16}$$

(9.15) ve (9.16) ifadeleri toplanıp $A_1 \equiv \widehat{m}_1$ ile çarpıldığında aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$A_1\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$= \widehat{m}_1\{2\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 - \lambda^2\beta_2 - 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(\lambda)\} = \widehat{m}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda) \tag{9.17}$$

$A_2E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)$ ifadesinin asimtotik açılımı $o(\lambda^2)$ olarak alınabilir. Dolayısıyla, (9.4), (9.14) ve (9.17) ifadeleri (9.10) ifadesinde yerine yazıldığında sürecin ikinci ergodik momenti için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım elde edilir:

$$E(X^2) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^2M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$+A_1\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big] + A_2E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \widehat{m}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \widehat{m}_1\lambda^2\beta_2 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \left[\widehat{m}_1\beta_2 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1}\right]\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{\lambda^2\beta_3}{3\beta_1} + \left[\frac{\widehat{m}_1\beta_2}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1^2}\right]\lambda + o(\lambda) = \lambda^2\hat{\beta}_2 + \big[2\widehat{m}_1\hat{\beta}_1 - \hat{\mu}_1c_{31}\big]\lambda + o(\lambda)$$

$$= \lambda^2\hat{\beta}_2 + D_2\lambda + o(\lambda) \tag{9.18}$$

Burada $D_2 = 2\widehat{m}_1\hat{\beta}_1 - \hat{\mu}_1 c_{31}$; $c_{31} = \frac{\beta_3}{3\beta_1^2}$; $\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}; n = 1,2, \ldots$' dir. Böylece sürecin ikinci ergodik momenti için iki terimli asimtotik açılım elde edilmiş olur. Teorem 8.1' de sürecin 3. ergodik momenti için aşağıdaki kesin ifade verilmiştir:

$$E(X^3) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta)\big)$$

$$+A_1\big[3E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - 3E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+3A_2\left[E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\right] + A_3 E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)\Big\} \tag{9.19}$$

Burada $A_1 \equiv \widehat{m}_1$; $A_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$; $A_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2\widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3$; $\widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$; $k = 1,2, \ldots$'dir. (9.2) açılımından yararlanarak aşağıdaki ifadelerin asimtotik açılımlarını verelim:

$$E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3) \tag{9.20}$$

$$-\frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) = -\frac{3}{2}\lambda^4\beta_4 - 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3) \tag{9.21}$$

$$E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big) = \lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3) \tag{9.22}$$

$$-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta)\big) = -\frac{\lambda^4\beta_4}{4} - \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3) \tag{9.23}$$

(9.20) – (9.23) açılımları toplandığında aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big) - \frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big) - \frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta)\big)$$

$$= \lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 - \frac{3}{2}\lambda^4\beta_4 - 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3\lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 - \frac{\lambda^4\beta_4}{4} - \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3$$

$$+o(\lambda^3) = \frac{\lambda^4\beta_4}{4} + o(\lambda^3) \tag{9.24}$$

Şimdi de $A_1\left[3E\left((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\right) - 3E\left(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\right) + E\left(M_3(\lambda\zeta)\right)\right]$ ifadesinin asimtotik açılımını inceleyelim. Bunun için bu ifade içerisinde yer alan terimlerin asimtotik açılımları (9.2) açılımı yardımıyla aşağıdaki gibi verilsin:

$$3E\left((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\right) = 3\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2) \tag{9.25}$$

$$-3E\left(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\right) = -3\lambda^3\beta_3 - 6\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2) \tag{9.26}$$

$$E\left(M_3(\lambda\zeta)\right) = \lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2) \tag{9.27}$$

(9.25) – (9.27) açılımlarını toplayıp $A_1 \equiv \widehat{m}_1$ ile çarptığımızda aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$A_1\left[3E\left((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\right) - 3E\left(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\right) + E\left(M_3(\lambda\zeta)\right)\right]$$
$$= \widehat{m}_1\{3\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 - 3\lambda^3\beta_3 - 6\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)\}$$
$$= \widehat{m}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^2) \tag{9.28}$$

(9.19) eşitliğindeki $3A_2\left[E\left(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\lambda\zeta)\right)\right] + (\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3)E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)\Big\}$ ifadesinin asimtotik açılımı $o(\lambda^3)$ olur. Bu takdirde, (9.4), (9.24) ve (9.28) açılımları yardımıyla, $E(X^3)$ için aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$E(X^3) = \frac{1}{E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)}\Big\{E\left((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\right) - \frac{3}{2}E\left((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\right)$$
$$+E\left(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\right) - \frac{1}{4}E\left(M_4(\lambda\zeta)\right)$$
$$+A_1\left[3E\left((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\right) - 3E\left(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\right) + E\left(M_3(\lambda\zeta)\right)\right]$$
$$+3A_2\left[E\left(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\lambda\zeta)\right)\right] + (\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3)E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)\Big\}$$
$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + \widehat{m}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3)\right\}$$
$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + \widehat{m}_1\lambda^3\beta_3 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1}\lambda^3 + o(\lambda^3)\right\}$$
$$= \frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta_1} + \left[\frac{\widehat{m}_1\beta_3}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1^2}\right]\lambda^2 + o(\lambda^2) = \lambda^3\hat{\beta}_3 + \left[3\widehat{m}_1\hat{\beta}_2 - \hat{\mu}_1 c_{41}\right]\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

$$= \lambda^3 \hat{\beta}_3 + D_3 \lambda^2 + o(\lambda^2) \tag{9.29}$$

Burada $D_3 = 3\widehat{m}_1 \hat{\beta}_2 - \hat{\mu}_1 c_{41}$; $c_{41} \frac{\beta_4}{4\beta_1^2}$; $\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$; $n = 1,2, \dots$' dır. Şimdi de Teorem 8.1' de verilen sürecin 4. ergodik momenti için kesin ifadeyi hatırlatalım:

$$E(X^4) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)} \Big\{ E\big((\lambda\zeta)^4 M_1(\lambda\zeta)\big) - 2E\big((\lambda\zeta)^3 M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+2E\big((\lambda\zeta)^2 M_3(\lambda\zeta)\big) - E\big(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\big) + \frac{1}{5} E\big(M_5(\lambda\zeta)\big) + A_1 \big[4E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$-6E\big((\lambda\zeta)^2 M_2(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_4(\lambda\zeta)\big) + 4E\big((\lambda\zeta)^3 M_1(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+2A_2 \big[3E\big((\lambda\zeta)^2 M_1(\lambda\zeta)\big) - 3E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$+2A_3 \big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big] + \frac{1}{2} A_4\, E\big(M_1(\lambda\zeta)\big) \Big\} + o(\alpha^4) \tag{9.30}$$

Burada

$$A_1 \equiv \widehat{m}_1;\ A_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2;\ A_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_2 \widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_1^3;$$

$$A_4 \equiv -\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_3 \widehat{m}_1 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_2 \widehat{m}_1^2 + 24\widehat{m}_1^4;\ \widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1};$$

$k = 1,2, \dots$'dir. (9.2) açılımından yararlanarak aşağıdaki ifadelerin asimtotik açılımlarını verelim:

$$E\big((\lambda\zeta)^4 M_1(\lambda\zeta)\big) = \lambda^5 \beta_5 + \hat{\mu}_1 \lambda^4 \beta_4 + o(\lambda^4) \tag{9.31}$$

$$-2E\big((\lambda\zeta)^3 M_2(\lambda\zeta)\big) = -2\lambda^5 \beta_5 - 4\hat{\mu}_1 \lambda^4 \beta_4 + o(\lambda^4) \tag{9.32}$$

$$2E\big((\lambda\zeta)^2 M_3(\lambda\zeta)\big) = 2\lambda^5 \beta_5 + 6\hat{\mu}_1 \lambda^4 \beta_4 + o(\lambda^4) \tag{9.33}$$

$$-E\big(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\big) = -\lambda^5 \beta_5 - 4\hat{\mu}_1 \lambda^4 \beta_4 + o(\lambda^4) \tag{9.34}$$

$$\frac{1}{5} E\big(M_5(\lambda\zeta)\big) = \frac{\lambda^5 \beta_5}{5} + \hat{\mu}_1 \lambda^4 \beta_4 + o(\lambda^4) \tag{9.35}$$

(9.31) – (9.35) açılımlarını topladığımızda aşağıdaki açılım elde edilir:

$$E\big((\lambda\zeta)^4 M_1(\lambda\zeta)\big) - 2E\big((\lambda\zeta)^3 M_2(\lambda\zeta)\big) + 2E\big((\lambda\zeta)^2 M_3(\lambda\zeta)\big)$$

$$-E\big(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\big)+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta)\big)=\lambda^5\beta_5+\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4-2\lambda^5\beta_5-4\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4$$

$$+2\lambda^5\beta_5+6\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4-\lambda^5\beta_5-4\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4)$$

$$=\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+o(\lambda^4) \tag{9.36}$$

Şimdi $A_1\big[4E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)-6E\big((\lambda\zeta)^2M_2(\lambda\zeta)\big)-E\big(M_4(\lambda\zeta)\big)+4E\big((\lambda\zeta)^3M_1(\lambda\zeta)\big)\big]$ ifadesinin asimtotik açılımını inceleyelim. Bunun için bu ifade içerisinde yer alan terimlerin asimtotik açılımları (9.2) açılımı yardımıyla aşağıdaki gibi verilsin:

$$4E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)=4\lambda^4\beta_4+12\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3) \tag{9.37}$$

$$-6E\big((\lambda\zeta)^2M_2(\lambda\zeta)\big)=-6\lambda^4\beta_4-12\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3) \tag{9.38}$$

$$-E\big(M_4(\lambda\zeta)\big)=-\lambda^4\beta_4-4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3) \tag{9.39}$$

$$4E\big((\lambda\zeta)^3M_1(\lambda\zeta)\big)=4\lambda^4\beta_4+4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3) \tag{9.40}$$

(9.37) – (9.40) ifadelerini toplayıp $A_1\equiv\widehat{m}_1$ ile çarptığımızda aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$A_1\big[4E\big(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\big)-6E\big((\lambda\zeta)^2M_2(\lambda\zeta)\big)-E\big(M_4(\lambda\zeta)\big)+4E\big((\lambda\zeta)^3M_1(\lambda\zeta)\big)\big]$$

$$=\widehat{m}_1\{4\lambda^4\beta_4+12\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3-6\lambda^4\beta_4-12\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3-\lambda^4\beta_4-4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3$$

$$+4\lambda^4\beta_4+4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3)\}=\widehat{m}_1\lambda^4\beta_4+o(\lambda^3) \tag{9.41}$$

(9.30) eşitliğindeki $2A_2\big[3E\big((\lambda\zeta)^2M_1(\lambda\zeta)\big)-3E\big(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\big)+E\big(M_3(\lambda\zeta)\big)\big]$; $2A_3\big[2E\big(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\big)-E\big(M_2(\lambda\zeta)\big)\big]$ ve $\frac{1}{2}A_4\,E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)$ ifadelerinin asimtotik açılımı $o(\lambda^4)$ olur. Bu takdirde, (9.4), (9.36) ve (9.41) açılımları yardımıyla, $E(X^4)$ için aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$E(X^4)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta)\big)}\{E\big((\lambda\zeta)^4M_1(\lambda\zeta)\big)-2E\big((\lambda\zeta)^3M_2(\lambda\zeta)\big)$$

$$+2E\left((\lambda\zeta)^2M_3(\lambda\zeta)\right)-E\left(\lambda\zeta M_4(\lambda\zeta)\right)+\frac{1}{5}E\left(M_5(\lambda\zeta)\right)\ +A_1\left[4E\left(\lambda\zeta M_3(\lambda\zeta)\right)\right.$$

$$\left.-6E\left((\lambda\zeta)^2M_2(\lambda\zeta)\right)-E\left(M_4(\lambda\zeta)\right)+4E\left((\lambda\zeta)^3M_1(\lambda\zeta)\right)\right]$$

$$+2A_2\left[3E\left((\lambda\zeta)^2M_1(\lambda\zeta)\right)-3E\left(\lambda\zeta M_2(\lambda\zeta)\right)+E\left(M_3(\lambda\zeta)\right)\right]$$

$$\left.+2A_3\left[2E\left(\lambda\zeta M_1(\lambda\zeta)\right)-E\left(M_2(\lambda\zeta)\right)\right]+\frac{1}{2}A_4\,E\left(M_1(\lambda\zeta)\right)\right\}+o(\alpha^4)$$

$$=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1-\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+\widehat{m}_1\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4)\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+\left[\widehat{m}_1\beta_4-\frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1}\right]\lambda^4+o(\lambda^4)\right\}$$

$$=\frac{\lambda^4\beta_5}{5\beta_1}+\left[\frac{\widehat{m}_1\beta_4}{\beta_1}-\frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1^2}\right]\lambda^3+o(\lambda^3)=\lambda^4\hat{\beta}_4+\left[4\widehat{m}_1\hat{\beta}_3-\hat{\mu}_1c_{51}\right]\lambda^3+o(\lambda^3)$$

$$=\lambda^4\hat{\beta}_4+D_4\lambda^3+o(\lambda^3) \tag{9.42}$$

Burada $D_4=4\widehat{m}_1\hat{\beta}_3-\hat{\mu}_1c_{51}$; $c_{51}\frac{\beta_5}{5\beta_1^2}$; $\hat{\beta}_n=\frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$; $n=1,2,\ldots$' dır.

Böylece sürecin ilk dört ergodik momenti için asimtotik açılımlar elde edilmiş olur. Bu durumda Teorem 9.1 ispatlanmış olur.

ζ rasgele değişkeni, dağılım fonksiyonu $\pi_\lambda(x)$ olan bir rasgele değişken olsun, yani $\zeta: P\{\zeta\le x\}\equiv\pi_\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}P\{\zeta_n\le x\}$. Bu durumda aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 9.1: Teorem 4.1' in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $\lambda\to\infty$ iken, ζ rasgele değişkeninin n. momenti için $\lambda\to\infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılım yazılabilir:

$$\beta_n\equiv E(\zeta^n)=\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right);n=1,2,\ldots$$

Burada $\mu_k\equiv E(\chi_1^+)$; $k=1,2,\ldots$' dir.

İspat: (6.49) gösterimi göz önünde bulundurularak β_n aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\beta_n = n\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{\lambda}(x)dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{+}(x)dx + \frac{n}{\lambda}\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{+}(x)h(\lambda,x)dx$$

$$= \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1} + \frac{n}{\lambda}\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{+}(x)h(\lambda,x)dx \qquad (9.43)$$

$h(\lambda,x)$ fonksiyonu ölçülebilir, sınırlı ve $\lim_{\lambda\to\infty} h(\lambda,x) = 0$ olan bir fonksiyon olduğuna göre, $\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle bir yeterince büyük $L > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, her $\lambda \geq L$ ve $x > 0$ için $|h(\lambda,x)| \leq \frac{(n+1)\mu_1}{\mu_{n+1}}\varepsilon$ olsun. Bu eşitsizlikten yararlanılarak, aşağıdaki yazılabilir:

$$\left|n\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{+}(x)h(\lambda,x)dx\right| \leq \frac{(n+1)\mu_1}{\mu_{n+1}}\varepsilon n\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{+}(x)dx$$

$$= \frac{(n+1)\mu_1}{\mu_{n+1}}\varepsilon\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1} = \varepsilon$$

Özetlersek, $\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle bir yeterince büyük $L > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, her $\lambda \geq L$ ve $x > 0$ için

$$\left|n\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{+}(x)h(\lambda,x)dx\right| \leq \varepsilon \qquad (9.44)$$

olur. Buradan, $\lambda \to \infty$ iken,

$$n\int_0^{\infty} x^{n-1}\bar{\pi}_{+}(x)h(\lambda,x)dx = o(1) \qquad (9.45)$$

'dır. Dolayısıyla, (*2) –(*4) gösterimleri yardımıyla,

$$\beta_n \equiv E(\zeta^n) = n\int_0^{\infty} x^{n-1}d\pi_{\lambda}(x) = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 9.1: Yardımcı Teorem 9.1' in koşulları altında aşağıdaki ilişki yazılabilir:

$$\hat{\beta}_n \equiv E(\hat{\zeta}^n) = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1} = \frac{2\mu_{n+2}}{(n+1)(n+2)\mu_2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Burada $\hat{\zeta}$ rasgele değişkeni $\{\zeta_n\}, n = 1,2, ...$ ergodik Markov zincirinin ürettiği kalan ömür ve $\mu_n = E(\chi_1^{+n})$' dır.

Teorem 9.2: Varsayalım ki, $E\left(\chi_1^{+(n+2)}\right) < \infty$ sağlanmış olsun. O zaman, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki açılım yazılabilir $(n = 1,2,3,4)$:

$$E(X^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)\mu_2}\{\mu_{n+2}\lambda^n + [(n+2)\widehat{m}_1\mu_{n+1} - \mu_{n+2}]\lambda^{n-1}\} + o(\lambda^{n-1})$$

Burada $\widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$' dir.

İspat: Sonuç 9.1' de elde edilen asimtotik açılımlar Teorem 9.1' de $E(X^n)$ için verilen açılımda göz önüne alındığında,

$$E(X^n) = \lambda^n\hat{\beta}_n + \lambda^{n-1}D_n + o(\lambda^{n-1})$$

$$= \lambda^n\frac{2\mu_{n+2}}{(n+1)(n+2)\mu_2} + \lambda^{n-1}D_n + o(\lambda^{n-1}) \qquad (9.46)$$

Burada, $D_n = n\widehat{m}_1\hat{\beta}_{n-1} - c_{(n+1),1}\hat{\mu}_1$; $n = \overline{1,4}$; $\beta_n = E(\zeta^n)$; $\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$; $c_{n1} = \frac{\beta_n}{n\beta_1^2}$, $n = \overline{2,5}$; $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$; $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$; $m_n = E(\eta_1)^n$; $\mu_n = E(\chi_1^{+n})$' dır.

Yardımcı Teorem 9.1' de $\beta_n \equiv E(\zeta^n)$ için verilen asimtotik açılım ile Sonuç 9.1' de verilen açılım göze alındığında D_n aşağıdaki gibi elde edilir:

$$D_n = n\widehat{m}_1\hat{\beta}_{n-1} - c_{(n+1),1}\hat{\mu}_1 = n\widehat{m}_1\frac{2\mu_{n+1}}{n(n+1)\mu_2} - \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1^2}\hat{\mu}_1$$

$$= \widehat{m}_1\frac{2\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_2} - \frac{\frac{\mu_{n+2}}{(n+2)\mu_1}}{(n+1)\hat{\mu}_1^2}\hat{\mu}_1 = \widehat{m}_1\frac{2\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_2} - \frac{2\mu_{n+2}}{(n+1)(n+2)\mu_2}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)\mu_2}\left((n+2)\widehat{m}_1\mu_{n+1} - \mu_{n+2}\right) \qquad (9.47)$$

(9.47), (9.46)' da yerine yazılırsa:

$$E(X^n) = \lambda^n\frac{2\mu_{n+2}}{(n+1)(n+2)\mu_2} + \lambda^{n-1}D_n + o(\lambda^{n-1}) = \lambda^n\frac{2\mu_{n+2}}{(n+1)(n+2)\mu_2}$$

$$+\lambda^{n-1}\left[\frac{2}{(n+1)(n+2)\mu_2}\left((n+2)\widehat{m}_1\mu_{n+1} - \mu_{n+2}\right)\right] + o(\lambda^{n-1})$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)\mu_2}\{\mu_{n+2}\lambda^n + [(n+2)\widehat{m}_1\mu_{n+1} - \mu_{n+2}]\lambda^{n-1}\} + o(\lambda^{n-1})$$

olur. Böylece Teorem 9.2' nin ispatı tamamlanmış olur.

10. TALEPLERİN GAUSS DAĞILIMINA SAHİP OLDUĞU ÖZEL DURUM

$E(X^n)$ momentlerini hesaplamak için, $\mu_n = E(\chi_1^{+n})$ momentleri bilmek gereklidir. χ_1^+ rasgele değişkeni dördüncü ve altıncı bölümlerde de tanımlandıklarına göre, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$ rasgele yürüyüş sürecinin basamak yükseklikleridir. Bu çalışmada $m_1 = E(\eta_1) \equiv \alpha > 0$' dir. Bilindiği üzere, basamak yüksekliklerinin momentlerinin hesaplanması oldukça karmaşık bir problemdir. Ancak, bazı durumlar için (örn., Gauss rasgele yürüyüş süreçlerinde) $\alpha = 0$ iken, ilk basamak yüksekliğinin (χ_1^+) ilk beş momenti için kesin ifadeler elde edilmiştir. Bu sonuçları kullanabilmek için $\mu_n \equiv \mu_n(\alpha),\ \alpha > 0$ momentlerini, $\mu_n(0) \equiv \mu_n(\alpha)|_{\alpha=0}$' nin yardımıyla ifade edelim. Siegmund (1979) çalışmasında, bu iki tip moment arasında aşağıdaki gibi bir ilişki kurulmuştur:

$$\mu_n(\alpha) = \mu_n(0) + \frac{n}{n+1}\mu_{n+1}(0)\alpha + o(\alpha),\ \ n = 1,2,\ldots \tag{10.1}$$

Diğer taraftan, Spitzer (1964), Chang and Peres (1997), Lotov (1996) ve Nagaev (2010) çalışmalarında $\mu_n(0), n = \overline{1,5}$ momentleri için aşağıdaki kesin ifadeler elde edilmiştir:

$$\mu_1(0) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ (\text{Spitzer (1964)});\quad \mu_2(0) = A,\quad (\text{Lotov (1996)});$$

$$\mu_3(0) = \frac{3\sqrt{2}}{8}(1 + 2A^2),\quad (\text{Chang ve Peres (1997)});$$

$$\mu_4(0) = \frac{3}{2}A + A^3 + B,\qquad (\text{Chang ve Peres (1997)});$$

$$\mu_5(0) = \frac{5\sqrt{2}}{32}\{5 + 12A^2 + 4A^4 + 16AB\}\ \ (\text{Nagaev (2010)}).$$

Burada, $A = -\frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{\pi}};\ \ B = \frac{\zeta(3/2)}{\pi^{3/2}}$. Ayrıca, $\zeta(x)$ bir Riemann Zeta fonksiyonudur.

Bu kesin ifadeler kullanılarak, $\mu_n(0), n = \overline{1,5}$ momentleri için aşağıdaki değerler elde edilebilir:

$$\mu_1(0) = 0.707106781 \ldots; \ \mu_2(0) = 0.823893771 \ldots;$$

$$\mu_3(0) = 1.250307211 \ldots; \mu_4(0) = 2.264330947 \ldots;$$

$$\mu_5(0) = 4.678835252 \ldots$$

Teorem 10.1: $E\left(\chi_1^{+(n+3)}\right) < \infty$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, her $n = 1,2,3,4$ için $\alpha \to 0$ ve $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki yaklaşık katsayılı asimtotik açılımlar sağlanır:

$$E(X^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)\mu_2(0)}\{[A_n + \alpha B_n]\lambda^n - [C_n + \alpha D_n]\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1})\}.$$

Burada,

$$A_n = \mu_{n+2}(0); \ \ B_n = \frac{n+2}{n+3}\mu_{n+3}(0) - \frac{2\mu_3(0)}{3\mu_2(0)}\mu_{n+2}(0);$$

$$C_n = \mu_{n+2}(0) - (n+2)\widehat{m}_1\mu_{n+1}(0);$$

$$D_n = \frac{n+2}{n+3}\mu_{n+3}(0) - \left((n+1)m_{21} + \frac{2\mu_3(0)}{3\mu_2(0)}\right)\mu_{n+2}(0)$$

$$+\frac{2\mu_3(0)}{3\mu_2(0)}(n+2)\widehat{m}_1\mu_{n+1}(0); \widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}; m_k = E\left(\eta_1^k\right);$$

$$\mu_k(0) = E\left(\chi_1^{+k}\right)|_{\alpha=0}, k = 1,2, \ldots$$

‘dır.

İspat: 9. bölümde verilen Teorem 9.2’ deki asimtotik açılım ile yukarıda verilen $\mu_k(0) = E\left(\chi_1^{+k}\right)|_{\alpha=0}, k = 1,2, \ldots$ ‘ lar kullanıldığında Teorem 10.1’ de verilen asimtotik açılım elde edilir.

11. SONUÇ

Yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin 1960' lardan itibaren temelleri atılmış olmasına rağmen, yansıtan bariyer özelliği sebebiyle, doğası gereği içerisinde bağımlılık barındırması, ortaya çıkan matematiksel hesaplamanın güçlüğü ve buna rağmen elde edilen bazı analitik sonuçların uygulamada kullanılmaya elverişli olmaması nedeni ile o yıllardan bu yana yeteri kadar incelenmemiştir. Ancak, gelişen teknoloji ve değişen ihtiyaçlar sebebiyle, envanter, kuyruk modelleri ve güvenirlik teorilerinin yanı sıra, bu tip süreçlerin stokastik finans, matematiksel biyoloji, kuantum fiziği, bilgisayar bilimleri vb. gibi birçok alanda ortaya çıkma sıklığı arttığı için bu sürecin araştırılması bir ihtiyaç haline gelmiştir. Öte yandan, çeşitli bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin, ödüllü yenileme süreçlerinin ve sınır fonksiyonellerinin literatürde yoğun bir şekilde araştırılması, yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin de incelenmesine vesile olmuştur. Bu bağlamda, bu tezde genelleştirilmiş yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin olasılık ve sayısal karakteristikleri analitik ve asimtotik yöntemlerle incelenmiş ve uygulanması kolay, sade ve pratik sonuçlar elde etmek amaç edinilmiştir.

Öncelikle, genelleştirilmiş yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri ile ilgili literatür bilgisi verildikten sonra, süreç matematiksel olarak kurulmuştur. Daha sonra 3. bölümde bir stokastik sürecin en temel karakteristiği olan bir boyutlu dağılımları araştırılmıştır. Elde edilen bu sonuç $2k$ katlı integraller içeren ve matematiksel olarak çok karmaşık bir yapı ile ifade edilmektedir. 4. Bölümde, sürecin ergodikliği incelenmiştir. Ayrıca, sürecin ergodik dağılımı ile ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonun aşikar şekli ortaya konmuştur. Bunun için Dynkin prensibinden yararlanılmıştır.

5. bölümde ise, ergodik dağılım için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Bunun için 4. bölümde elde edilen ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu, kalan ömür teorisi (Feller, (1971); Rogozin, (1964)) ve Lukac, (1970)' te verilen süreklilik teoreminden yararlanılmıştır.

6. bölümde, zayıf yakınsamanın hızı araştırılmıştır. Bunun için kalan ömür dağılımının kesin ifadesi ve asimtotik açılımı kullanılmıştır.

7. bölümde sürecin sınır fonksiyonelleri incelenmiştir. Belirtmek gerekirse, önceki bölümlerde yapılan hesaplamalarda yapılan gözlemlere göre sürecin yansımaları limitte öyle bir rasgele değişkene yakınsar ki, bu rasgele değişken yansımaların ergodik dağılımının limit dağılımına sahiptir. Buna göre, yansımalar birbirlerinin olasılıksal kopyalarıdır. Bu durumda ilk yansımaya ait sınır fonksiyonellerinin incelenmesi sürecin tüm sınır fonksiyonelleri hakkında genel bir fikir vermesi açısından önemlidir. Ayrıca, bazı gerçek hayat problemlerinde ilk yansımaya ait sonuçlar önem arzedebilir. Dolayısıyla, öncelikle sürecin ilk yansıma anına kadar geçen sıçrama sayısını ifade eden $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansının kesin ifadeleri elde edilmiştir. Daha sonra da, sürecin ilk yansıma anında hangi pozisyonda olduğunu ifade eden $S_{N_1(\lambda\zeta)}$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansının kesin ifadeleri ortaya konmuştur. Son olarak da, sürecin ilk yansıma anına kadar geçen süreyi ifade eden $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyonelinin beklenen değeri ve varyansının kesin ifadeleri verilmiştir. 7. bölümün ikinci alt başlığında ise, bu sınır fonksiyonelleri için elde edilen kesin ifadelerin asimtotik açılımları ortaya konmuştur. Özellikle bu bölümde $S_{N_1(\lambda\zeta)}$ sınır fonksiyoneli ile ifade edilen $E\left(\lambda^n\zeta^n M_k(\lambda\zeta)\right); n = \overline{1,5}$ ifadesi için asimtotik sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar daha sonra sürecin ergodik momentlerini elde etmede kullanılmıştır.

8. bölümde sürecin ilk dört ergodik momenti için kesin ifadeler ortaya konmuştur. Bunun için 4. bölümde elde edilen ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonuna Taylor açılımı uygulanmıştır. Asimtotik yöntemler kullanılarak sürecin ergodik momentleri için kesin ifadeler elde edilmiştir.

9. bölümde ise, bir önceki bölümde elde edilen sürecin ergodik momentlerinin kesin ifadelerinin iki terimli asimtotik açılımlar verilmiştir. Bunun için 7. bölümde elde edilen asimtotik açılımlardan yararlanılmıştır.

10. bölümde ise, 9. bölümde elde edilen asimtotik sonuçlar, sıçramalar Gauss dağılımına sahip olduğu durumda elde edilmiştir. Böylece elde edilen asimtotik açılımların uygulamadaki elde edilebilirliği incelenmiştir. Bunun için Siegmund formülü kullanı-

larak sürecin ilk dört momenti için yaklaşık katsayılı asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Uygulama için oldukça kullanışlı olan temel sonuç Teorem 10.1' de verilmiştir. Özellikle asimtotik açılımın ilk terimi kalan ömrün momenti ile üst üste düşmektedir.

KAYNAKLAR

Afanasyeva, L.G., Bulinskaya, E.V.,(1984). Some asymptotic results for random walks in a strip, *Theory of Probability and Its Applications*, 29(4), 654 – 668.

Aras G., Woodroofe, M.,(1993). Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, *Annals of Statistics*, 21, 503 – 519.

Borovkov, A.A.,(1984). Asymptotic Methods in Queuing Theory, John Wiley, N.Y.

Brown, M., Solomon, H.,(1975) A second – order approximation for the variance of a renewal-reward process, *Stochastic Processes and Applications*, 3, 301 – 314.

Chang, J.T., Peres, Y.,(1997). Ladder heights, Gaussian random walks and the Riemann zeta function, *Annals of Probability*, 25, 787 – 802.

El-Shehawey, M.A.,(1992). Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, *J. Ind. Soc. Oper. Res.*, 13(1-4), 63-72.

Feller, W.,(1971) An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, John Wiley, New York.

Gever, B.,Genelleştirilmiş Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Sürecinin Asimtotik Yöntemlerle İncelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi,* TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara (2011).

Gihman, I.I., Skorohod, A.V.,(1975) Theory of Stochastic Processes II, Springer – Verlag , Berlin.

Janssen, A.J.E.M., Leeuwarden, J.S.H.,(2007a). Cumulants of the maximum of the Gaussian random walk, *Stochastic Processes and Their Applications*, 117, 1928–1959.

Janssen, A.J.E.M., Leeuwarden, J.S.H.,(2007b). On Lerch's transcendent and the Gaussian random walk, *Annals of Applied Probability*, 17, 421 – 439.

Kastenbaum, M.A.,(1966). A dialysis system with one absorbing and one semi – reflecting state, *Journal of Applied Probability*, 3, 363–371.

Khaniev, T.A., Ozdemir, H.,(1995). On the Laplace transform of finite dimensional distribution functions of semi- continuous random process with reflecting and delaying screens, *In: Exploring Stochastic Laws*, A. V. Skorohod and Yu. V. Borovskikh (Eds.), VSP, Zeist, The Netherlands, 167-17.

Khaniev, T.A., Özdemir, H., Maden, S.,(1998). Calculating the probability characteristics of a boundary functional of a semi- continuous random process with reflecting and delaying screens, *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 14, 117 – 123.

Khaniev, T.A., Unver, I., Maden, S.,(2001). On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, *Stochastic Analysis and Applications*, 19(5), 799 – 819.

Khorsunov, D.,(1997). On distributon tail of the maximum of a random walk, *Stochastic Processes and Applications*, 72, 97 – 103.

Korolyuk, V.S., Borovskikh, Y. V.,(1981). Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev.

Kovalenko, I. N., Kuznetchov, N., Shurenkov, V. M.,(1983). Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev.

Lotov, V.I.,(1996). Some boundary crossing problems for Gaussian random walks, *The Annals of Probability*, 24(4), 2154 – 2171.

Lukac, E.,(1970) Characteristics Function, Griffin, London.

Nagaev, S.V.,(2010). Exact Expressions for the moments of ladder heights, Siberian Mathematical Journal, 51(4), 675 – 695.

Prabhu, N.U.,(1980). Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk, and Dams, Springer, New York.

Rogozin, B.A.,(1964). On the distribution of the first jump, *Theory of Probability and Its Applications*, 9, 450 – 464.

Siegmund, D.,(1979). Corrected diffusion approximations in certain random walk problems, *Adv. Appl. Prob.*, 11(4), 701–719.

Smith, W.L.,(1959). On the cumulants of renewal process, *Biometrika*, 46 (1-2), 537 – 552.

Spitzer, F.,(1964). Principles of Random Walk, Princeton, N. J., D. Van Nostrand.

Unver, I.,(1997). On distributions of the semi-Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 89, 231 – 242.

Weesakul, B.,(1997). The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, *Ann. Math. Statist.*, 23, 765 – 774.

Woodroofe, M.,(1982). Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis, SIAM, Philadelphia.

Zhang, Y. L.,(1982). Some problems on a one-dimensional correlated random walk with various type of barrier, *Journal of Applied Probability*, 29, 196 – 201.

EKLER

EK A: Stokastik Süreçler

EK B: Kesikli Müdahaleli Yarı – Markov Süreçleri İçin Genel Ergodik Teoremi

EK C: Wald Özdeşliği

EK D: Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi

EK E: Tauber – Abel Teoremi

EK F: Carleman Koşulu

EK G: Yakınsama Çeşitleri

EK H: Rasgele Yürüyüş Süreçleri İçin Temel Özdeşlik

EK A: STOKASTİK SÜREÇLER

Tanım A.1 (Rasgele Fonksiyon): $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı ve T bir indeksler kümesi, (U, R) herhangi bir ölçülebilir uzay olsun. İki değişkenli f fonksiyonu

$$f: \Omega \; x \; T \to U$$

tanımlanmış olsun. Eğer her $A \in R$ için

$$\{(\omega, t): f(\omega, t) \in A\} \in \sigma(\mathcal{F} \otimes B_T)$$

ise, bu takdirde $f(\omega, t)$ fonksiyonuna rasgele fonksiyon denir.

Burada, B_T sigma cebri T' nin alt kümeleri üzerinde tanımlanmış bir σ – cebir ve $\sigma(\mathcal{F} \otimes B_T)$ ise T ve B_T sigma cebirlerin kartezyen çarpımlarını içeren en küçük bir σ cebirdir.

Rasgele fonksiyonları en genel şekli ile incelemek bazen çok zordur. Bu nedenle, mevcut literatürde T indeksler kümesinin özel durumları ele alınmıştır. Özellikle, $T \subseteq [0, +\infty)$ ve $U = R = (-\infty, +\infty)$ olduğunda ve $t \in T$ değişkeni zaman parametresi olarak yorumlandığında, yukarıda tanımlanan $f(\omega, t)$ rasgele fonksiyonuna stokastik süreç denir.

Bu durumda $U = R$ ve $T \subseteq [0, +\infty)$ olduğu için yukarıdaki genel tanımın daha basit bir şekilde ifadesi mümkündür.

Tanım A.2 (Stokastik Süreç): Eğer $f: \Omega \; x \; T \to R$ fonksiyonu her $A \in B_R$ için $\{(\omega, t): f(\omega, t) \in A\} \in \sigma(\mathcal{F} \otimes B_T)$ ise, bu takdirde $f(\omega, t)$ fonksiyonuna bir stokastik süreç denir.

EK- B: KESİKLİ MÜDAHALELİ YARI – MARKOV SÜREÇLERİ İÇİN GENEL ERGODİK TEOREMİ

Teorem B.1 (Genel Ergodik Teorem, Gihman ve Skorohod, (1975), s. 243):

$X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı – Markov süreci olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1. **Varsayım:** $X(t)$ sürecinin $\tau_1, \tau_2, ...$ anlarındaki değerleri $(X(\tau_n), n = 1,2, ...)$ ergodik bir Markov zinciri olacak şekilde $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots < \infty$ artan zaman anları bulunsun.
2. **Varsayım:** $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ anları arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu olmuş olsun, yani her $n = 1,2, ...$ için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem B.2 (Gihman ve Skorohod, (1975), s. 243): Teorem B.1' in varsayımları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f\big(X(s)\big) ds = S_f.$$

Burada S_f fonksiyoneli aşağıdaki gibidir:

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} f(x) P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z).$$

Burada, $\pi(z)$ dağılımı $\{X(\tau_n)\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır.

Not: Bu teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığını ifade eden bir önermedir ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

EK – C: WALD ÖZDEŞLİĞİ

ν tam değerli rasgele değişkeni ve $\{\xi_n\}$ dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış olsunlar. Ayrıca $\nu \geq 0$ ve ξ_n rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsun. $\mathfrak{I}_{k,n}$ ile $\xi_k, \dots, \xi_n$ rasgele değişkenlerinin ürettiği sigma cebir, yani $\mathfrak{I}_{k,n} = \sigma(\xi_k, \dots, \xi_n)$ gösterilsin.

Tanım C.1: Her $n = 1,2, \dots$ için $\{\nu \leq n\}$ olayı, $\mathfrak{I}_{n+1,\infty}$, sigma cebrinden bağımsız olduğunda ν rasgele değişkenine "gelecekten bağımsız" rasgele değişken denir.

Tanım C.2: Her $n = 1,2, \dots$ için $\{\nu \leq n\} \in \mathfrak{I}_{1,n}$ olduğunda ν rasgele değişkenine Markov rasgele değişkeni veya durdurma anı denir.

Başka bir deyişle, bu durumda $\xi_1, \dots, \xi_n$ rasgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde $\{\nu \leq n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Markov rasgele değişkeni ν, ξ_k rasgele değişkenler dizisi için "gelecekten bağımsız" rasgele değişkendir (Borovkov, (1984), s.86).

$S_\nu = \xi_1 + \dots + \xi_\nu$ olsun. S_ν, ν rasgele değişken sayısında rasgele değişkenlerin toplamıdır.

Teorem C.1 (Wald Özdeşliği, Borovkov, (1984), s.88): $\xi_1, \xi_2, \dots$ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılıma sahip, ν rasgele değişkeni ise "gelecekten bağımsız" bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $E(\xi_k) < \infty$ ve $E(\nu) < \infty$ sağlansın. Bu takdirde,

$$E(S_\nu) = E\left(\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k\right) = E(\xi_1)E(\nu) \qquad (C.1)$$

olur. (C.1) eşitliğine Wald Özdeşliği denir.

EK – D: KESİNLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME TEOREMİ

$\{\eta_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ ‘ ler bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizinin yardımı ile aşağıdaki stokastik süreç inşa edilsin:

$$N(t) = \min\left\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \eta_i > t\right\}, t > 0. \qquad (D.1)$$

$N(t)$ sürecine literatürde “Yenileme Süreci” denir. $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine “Yenileme Fonksiyonu” denir ve genellikle $U(t)$ sembolü ile, yani

$$U(t) \equiv E\big(N(t)\big) \qquad (D.2)$$

şeklinde gösterilir. η_n, $n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(t)$, yani $F(t) = P\{\eta_1 \leq t\}$ şeklinde olsun. Bu takdirde, $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t). \qquad (D.3)$$

Burada $F^{*n}(t)$ ile $F(t)$ dağılım fonksiyonunun n. konvolüsyon çarpımı gösterilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$F^{*0}(t) = \varepsilon(t) \equiv \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}; \; F^{*1}(t) \equiv F(t);$$

$$F^{*n}(t) = F^{*(n-1)}(t) * F(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s)\, dF(s), n = 2,3,\ldots$$

$U(t)$ fonksiyonu, monoton azalmayan, pozitif değerli bir fonksiyondur ve $U(0) = 1$’ dir. Ayrıca, her sonlu t için $U(t) < \infty$’ dur (Feller, (1971), s.185). $U(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemini sağlamaktadır (Feller, (1971), s.186):

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)dF(s), t \geq 0. \qquad (D.4)$$

$U(t)$ fonksiyonunun asimtotik davranışını incelemek, olasılık teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, $U(t)$' nin $t \to \infty$ iken asimtotik davranışı ile ilgili literatürde birçok önemli sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçların en önemlilerinden birisi "Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi" adı ile bilinmekte olup, Feller (1971) tarafından ispatlanmıştır. Aşağıda, bu teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem D.1 (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi): $F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, bu dağılımın beklenen değeri (μ) ve varyansı (σ^2) sonlu olsun. Bu takdirde, $t \to \infty$ iken

$$0 \leq U(t) - \left(\frac{t}{\mu}\right) \to \frac{(\mu^2 + \sigma^2)}{2\mu^2} \qquad (D.5)$$

olur (Feller, (1971), s.366).

Not: "Birinci Yenileme Teoremi" olarak bilinen aşağıdaki Teorem D.1' den sadece $U(t) \sim (t/\mu)$ sonucuna ulaşılır. (D.5) sonucu bu sonuçtan çok daha güçlü bir sonuçtur. Tezin daha rahat anlaşılabilmesi için Birinci Yenileme Teoremi aşağıdaki Teorem D.2 şeklinde verilebilir (Feller, (1971), s.360).

Teorem D.2 (Birinci Yenileme Teoremi): $F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, $F(.)$ dağılımının beklenen değeri (μ) sonlu olsun. Bu takdirde, her $h > 0$ sabiti için $t \to \infty$ iken,

$$U(t) - U(t-h) \to \frac{h}{\mu} \qquad (D.6)$$

olur (Feller, (1971), s. 360).

EK – E: TAUBER – ABEL TEOREMİ

$F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut olsun (en azından öyle bir $(-\alpha, \beta)$ aralığı mevcut olsun ki, her $\lambda \in (-\alpha, \beta);\ \alpha, \beta > 0$ için $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut ve sonlu olsun).

Ayrıca $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olsun. Bu taktirde, $\lambda \to 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ olur. Bu önermenin tersi de doğrudur, yani eğer $\lambda \to 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ ise $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olur.

Burada "~" simgesi ile iki fonksiyonun asimtotik denkliği gösterilmiştir, yani "$F(t) \sim G(t)$" yazılabilmesi için $\lim_{t\to\infty} F(t)/G(t) = 1$ ve "$\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$" yazılabilmesi için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{G}(\lambda)} = 1$$

olmalıdır.

Bu önerme literatürde Tauber – Abel teoremi olarak bilinmektedir (Feller, (1971), s. 498).

EK F: YAKINSAMA ÇEŞİTLERİ

$\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$ rasgele değişken dizisi ve X_0 rasgele dğeişkeni aynı br olasılık uzayında $((\Omega, \mathcal{F}, P))$ tanımlanmış olsun. Bu takdirde, aşağıdaki yakınsaklık çeşitleri verilebilir.

Tanım F.1 (Olasılığa göre Yakınsama): Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega: |X_n(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

olduğunda, "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine olasılığa göre yakınsar" denir. Kısaca $n \to \infty$ iken $X_n \xrightarrow{P} X_0$ ile gösterilir.

Tanım F.2 (1 Olasılığı ile Yakınsama): Her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega: |X_n(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} < \infty$$

olduğunda "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine 1 olasılığına göre yakınsar" denir. Kısaca $n \to \infty$ iken $X_n \xrightarrow{1} X_0$ gösterim ile gösterilir. Bu yakınsama türüne bazen hemen hemen her yerde yakınsama da denir.

Not: 1 olasılığı ile yakınsamadan olasılığa göre yakınsama elde edilir. Fakat tersi her zaman doğru olmaya da bilir.

Tanım F.3 (Zayıf Yakınsama): Eğer

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$$

oluyor ise, "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine zayıf yakınsar" denir. Kısaca "$F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F_0$" veya $n \to \infty$ iken "$X_n \xrightarrow{d} X_0$" ile gösterilir. Burada $F_n(x) \equiv P\{X_n \leq x\}, n = 1,2, \ldots; F_0(x) \equiv P\{X_0 \leq x\}$' dır. Ayrıca, x noktası $F_0(x)$ dağılımının süreklilik noktasıdır. Bu yakınsama çeşidine bazen "noktasal yakınsama" da denir. Ayrıca, "zayıf yakınsama" nın farklı bir tanımı da mevcuttur:

Tanım F.4: Her sınırlı ölçülebilir $g(x)$ fonksiyonu için

$$\int_R g(x)dF_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_R g(x)dF_0(x)$$

oluyorsa, "X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine zayıf yakınsar" denir.

Not: Hem 1 olasılığı ile, hem de olasılığa göre yakınsamadan zayıf yakınsama elde edilir. Fakat tersi doğru olmaya dabilir.

EK G: RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ İÇİN TEMEL ÖZDEŞLİK

$\{X_n\}, n = 1,2, \ldots$ dizisi $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ olasılık uzayında tanımlı bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. X_n rasgele değişkenleri hem pozitif hem de negatif değerler alabilsin. X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile, karakteristik fonksiyonu ise $\varphi(\theta)$ ile gösterilsin, yani $F(x) = P\{X_1 \leq x\}; \varphi(\theta) = E\left(e^{i\theta X_1}\right)$ olsun. $\{X_n\}, n = 1,2, \ldots$ dizisinin yardımı ile aşağıdaki rasgele yürüyüş süreci tanımlansın:

$$S_0 = 0; \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \, , n = 1,2, \ldots$$

$A \subseteq R$ reel sayılar kümesinin keyfi bir alt kümesi olsun. A' ile A kümesinin tümleyicisi gösterilsin, yani $A' = R \backslash A$ olsun (Genellikle A' sonlu veya sonsuz aralık şeklinde ortaya çıkar). $I \subseteq A'$ olsun. Eğer $S_1 \in A;\ S_2 \in A; \ldots ; S_{n-1} \in A; S_n \in I \quad (I \subseteq A')$ ise, bu takdirde, "Rasgele Yürüyüş Süreci ilk kez A' kümesine $n.$ adımda ulaşmış ve bu andaki değeri I kümesindedir." denir. A' kümesine ilk kez ulaşma anını N ile, sürecin bu andaki değerini ise S_N ile gösterelim. Dolayısıyla,

$$N = \min\{n \geq 1 \colon S_1 \in A;\ S_2 \in A; \ldots ; S_{n-1} \in A; S_n \in A'\}\, ;\ S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (G.1)$$

olsun. $(N; S_N)$ ikilisinin ortak dağılımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P\{N = n; S_N \in I\} \equiv H_n\{I\}; \quad I \subseteq A', n = 1,2, \ldots$$

Tanımı gereği $H_n\{I\}$ aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$H_n\{I\} = P\{S_1 \in A; S_2 \in A; \ldots ; S_{n-1} \in A; S_n \in I\}$$

Ayrıca, $I \subseteq A$ için $H_n\{I\} = 0$ olarak kabul edelim. Bu durumda, her $I \subseteq R$ için $H_n\{I\} = P\{S_1 \in A; S_2 \in A; \ldots ; S_{n-1} \in A; S_n \in A'; S_n \in I\}$ şeklinde gösterilebilir.

$H_n\{I\}$ olasılıklarına "ilk kez ulaşma" olasılıkları denir. $H_n\{I\}$ olasılıklarının incelenmesi, rasgele yürüyüş süreçlerinin A' kümesine ilk kez ulaşmasına kadar olan davranışı ile bağlantılıdır.

Ayrıca, her $I \subseteq A$ ve $n = 1,2,\ldots$ için $G_n\{I\} = P\{S_1 \in A; S_2 \in A; \ldots; S_{n-1} \in A; S_n \in I\}$ olsun. $G_n\{I\}$, ilk n adımda sürecin A' kümesine ulaşmaması ve n. adımda I kümesinde olması olasılığıdır. $I \subseteq A'$ olduğunda $G_n\{I\} = 0$ olsun. Bu takdirde, $G_n\{I\}$ olasılıkları tüm $I \subseteq R$' ler için tanımlanmış olur ve aşağıdaki şekilde göstermek daha uygundur:

$$G_n\{I\} = P\{S_1 \in A; S_2 \in A; \ldots; S_n \in A; S_n \in I\}$$

Tanıma göre, $G_n\{A\} = P\{S_1 \in A; S_2 \in A; \ldots; S_n \in A\} = P\{N > n\} = 1 - P\{N \leq n\}$ olur.

Yardımcı Teorem G.1: Rasgele yürüyüş sürecinin n. andaki pozisyonu (S_n) göz önüne alınırsa, $I \subseteq A'$ için

$$H_{n+1}\{I\} = \int_A G_n\{dy\}F\{I - y\} \qquad (G.2)$$

ve $I \subseteq A$ için

$$G_{n+1}\{I\} = \int_A G_n\{dy\}F\{I - y\} \qquad (G.3)$$

ifadeleri elde edilir.

İspat: Her $I \subseteq A'$ iken,

$$H_{n+1}\{I\} = P\{S_1 \in A; S_2 \in A; \ldots; S_n \in A; S_{n+1} \in I\}$$

$$= \int_{y \in A} P\{S_1 \in A; S_2 \in A; \ldots; S_n \in A; S_n \in dy; S_{n+1} \in I\}$$

$$= \int_{y \in A} P\{S_i \in A; i = \overline{1,n};\ S_n \in dy; S_n + X_{n+1} \in I\}$$

$$= \int_{y \in A} P\{S_i \in A; i = \overline{1,n};\ S_n \in dy; y + X_{n+1} \in I\}$$

$$= \int_{y \in A} P\{S_i \in A; i = \overline{1,n};\ S_n \in dy\} P\{y + X_{n+1} \in I\}$$

$$= \int_{y \in A} G_n\{dy\} F\{I - y\}$$

olur. Benzer yöntemle, $I \subseteq A$ için,

$$G_{n+1}\{I\} = \int_{y \in A} G_n\{dy\} F\{I - y\}$$

olduğu ispat edilebilir.

Yardımcı Teorem G.2: Keyfi I kümesi için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$H_{n+1}\{I\} + G_{n+1}\{I\} = \int_{y \in A} G_n\{dy\} F\{I - y\} \qquad (G.4)$$

İspat: Keyfi bir I kümesi, IA' ve IA olarak ayrıştırabilir. Bu durumda, $H_{n+1}\{I\} = H_{n+1}\{IA'\}$ ve $G_{n+1}\{I\} = G_{n+1}\{IA\}$ olur.

$$H_{n+1}\{I\} + G_{n+1}\{I\} = H_{n+1}\{IA'\} + G_{n+1}\{IA\}$$

$$= \int_{y \in A} G_n\{dy\} F\{IA' - y\} + \int_{y \in A} G_n\{dy\} F\{IA - y\}$$

$$= \int_{y \in A} G_n\{dy\} [F\{IA' - y\} + F\{IA - y\}]$$

$$= \int_{y \in A} G_n\{dy\} F\{I(A' \cup A) - y\} = \int_{y \in A} G_n\{dy\} F\{I - y\}$$

elde edilir. Böylece (G.4) eşitliği ispatlanmış oldu.

Amaç, $(N; S_N)$ ikilisinin dağılımını incelemektir (Feller, (1971)). Bu amaca ulaşmak için Fourier analizi yöntemi kullanılır. N tam değerli rasgele değişken olduğu için N' nin moment çıkaran fonksiyonu, S_N' nin ise karakteristik fonksiyonu kullanılsın. Bunun için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\chi(s, \theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{A'} e^{i\theta x} H_n\{dx\}; \;\; \gamma(s, \theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{A} e^{i\theta x} G_n\{dx\} \qquad (G.5)$$

($n = 0$. terim 2. seride $\big(\gamma(s, \theta)\big)$ 1' dir.)

$|s| < 1$ olduğunda her iki seri de yakınsak olur. Rasgele yürüyüş süreçleri için temel özdeşlik $\chi(s, \theta)$ ve $\gamma(s, \theta)$ arasında kurulan bir ilişkiyi ifade eder (Feller, (1971)).

Teorem G.1 (Temel Özdeşlik): Her $\theta \in R$ ve $|s| < 1$ için

$$1 - \chi(s,\theta) = \gamma(s,\theta)[1 - s\varphi(\theta)] \qquad (G.6)$$

’dır.

İspat: Yardımcı Teorem G.2’ de ifade edilen (G.4) eşitliği aşağıdaki gibidir:

$$H_{n+1}\{I\} + G_{n+1}\{I\} = \int_{y\in A} G_n\{dy\}F\{I - y\}$$

Burada $H_n\{I\} = P\{N = n; S_N \in I\}$’ dır. $I = (-\infty, x]$ iken $H_n(x) \equiv H_n\{I\} = P\{N = n; S_N \leq x\}$ olur. $H_n(x)$ olasılığına Fourier dönüşümü uygulansın:

$$H_n^*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} dH_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} dH_n\{dx\}$$

olur. Burada, $H_n\{dx\} \equiv P\{N = n; S_N \in dx\}$’ dır.

Not: $H_n(x) \equiv P\{N = n; S_N \leq x\}$’ tir.

(H.4) eşitliğinin her iki tarafı $e^{i\theta x}$ ile çarpılıp, $x \in R$ de integrallensin:

$$\int_{x\in R} e^{i\theta x} H_{n+1}\{dx\} + \int_{x\in R} e^{i\theta x} G_{n+1}\{dx\} = \int_{x\in R}\int_{y\in A} G_n\{dy\} e^{i\theta x} F\{dx - y\} \qquad (G.7)$$

elde edilir. (G.7) eşitliğinin sağ tarafı, Fubini Teoremine göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{x\in R}\int_{y\in A} G_n\{dy\} e^{i\theta x} F\{dx - y\} = \int_{y\in A} G_n\{dy\} \int_{x\in R} e^{i\theta x} F\{dx - y\}$$

$$= \int_{y\in A} G_n\{dy\} \int_{z\in R} e^{i\theta(z+y)} F\{dz\} = \int_{y\in A} G_n\{dy\} e^{i\theta y} \int_{z\in R} e^{i\theta z} F\{dz\}$$

$$= \int_{y\in A} G_n\{dy\} e^{i\theta y} \varphi_X(\theta)$$

elde edilir. Burada $\{dx - y\} \approx [x - y; x - y + \delta)|_{x-y=z} = [z; z + \delta) = dz$ olur. Ayrıca, $\varphi_X(\theta) \equiv E(e^{i\theta X})$’ tir. Dolayısıyla,

$$\int_{x\in A'} e^{i\theta x} H_{n+1}\{dx\} + \int_{x\in A} e^{i\theta x} G_{n+1}\{dx\} = \varphi_X(\theta) \int_{y\in A} e^{i\theta y} G_n\{dy\} \qquad (G.8)$$

olur. (G.8) eşitliği, (G.5) notasyonları ile ifade edilecek olursa,

$$\chi_{n+1}(\theta) + \gamma_{n+1}(\theta) = \varphi_X(\theta)\gamma_n(\theta) \qquad (G.9)$$

ifadesi elde edilmiş olur. (G.9) eşitliğinin her iki tarafı s^{n+1} ile çarpılıp, $n = 1,2, \ldots$ üzerine seriye açılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} \int_{x\in A'} e^{i\theta x} H_{n+1}\{dx\} + \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} \int_{x\in A'} e^{i\theta x} G_{n+1}\{dx\}$$

$$= \varphi_X(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} \int_{y\in A} e^{i\theta y} G_n\{dy\} \qquad (G.10)$$

olur. Tanımı gereği,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} \int_{x\in A'} e^{i\theta x} H_{n+1}\{dx\} |_{n+1=m} = \sum_{m=1}^{\infty} s^{m} \int_{x\in A'} e^{i\theta x} H_{m}\{dx\} = \chi(z,\theta) \qquad (G.11)$$

olur. Diğer taraftan, $\sum_{m=0}^{\infty} s^m \int_{x\in A'} e^{i\theta x} G_m\{dx\}$ ifadesinin 0. terimi 1' e eşittir. Bu sebeple,

$$\sum_{m=1}^{\infty} s^{m} \int_{x\in A} e^{i\theta x} G_{m}\{dx\} = \gamma(s,\theta) - 1 \qquad (G.12)$$

olur. (G.9) ifadesinin sağ tarafı (G.5) ifadesinde tanımlanan notasyonlar yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_X(\theta) s \sum_{n=0}^{\infty} s^{n} \int_{y\in A} e^{i\theta y} G_{n}\{dy\} = s\varphi_X(\theta)\gamma(s,\theta) \qquad (G.13)$$

(G.11), (G.12) ve (G.13) eşitlikleri, (G.10)' da yerlerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\chi(s,\theta) + \gamma(s,\theta) - 1 = s\varphi(\theta)\gamma(s,\theta) \Rightarrow 1 - \chi(s,\theta) = \gamma(s,\theta)[1 - s\varphi(\theta)].$$

Böylece Temel Özdeşlik elde edilmiş olur.

(G.6) özdeşliğinden birçok önemli sonuçlar elde edilebilmektedir (Feller, (1971)). Temel özdeşlik bazı karakteristikleri elde etmede önemli bir matematiksel araçtır. Örneğin, $X_i, i = 1,2, \ldots$ bağımsız ve iki taraflı üstel dağılıma sahip rasgele değişkenler iken, bu değişkenlerin ürettiği rasgele yürüyüş sürecinin ilk kez A' dan çıkması için gerekli olan sıçrama sayısını ifade eden $N = \min\{n \geq 1: S_n \notin A\}$ rasgele değişkeninin beklenen değerini ve varyansını hesaplamada önemli bir rol oynar.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad	**: Başak GEVER**
Uyruğu	**: T.C.**
Doğum Tarihi ve Yeri	**: 12.06.1987, Fatih**
E-posta	**: gever.basak@gmail.com**

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans :** 2008, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü
- **Yüksek Lisans :** 2011, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, Doktora Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009 – 2011	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2012 – 2017	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Doktora Öğrencisi
2016	The University of Edinburgh	Araştırmacı

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Khaniyev, T., **Gever, B.** and Mammadova, Z., (2012). Approximation Formulas for the Ergodic Moments of Gaussian Random Walk with a Reflecting Barrier, *Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory: Contributions from AMAT 2012*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Chapter 13, pp. 219 – 233.

- Khaniyev, T., **Gever, B.** and Mammadova, Z., (2012). Approximation Formulas for the Moments of Gaussian Random Walk with a Reflecting Barrier, *International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory - AMAT*, May 17 – 20, TOBB ETÜ, Ankara.

- Khaniyev, T., Aliyev, R. and **Gever, B.**, (2012). Weak convergence theorem for ergodic distribution of a semi – Markovian random walk with generalized reflecting barrier, *8th World Congress of Probability and Statistics*, July 9 – 14, Istanbul.

- **Gever, B.**, Khaniyev, T. and Mammadova, Z., (2012). Investigation of some boundary functional of a semi – Markovian random walk with generalized reflecting barrier, *8th World Congress of Probability and Statistics*, July 9 – 14, Istanbul.

- **Gever, B.**, Khaniyev, T. and Mammadova, Z., (2013). Investigation of a Gaussian random walk with a reflecting barrrier, *26th European Conference on Operational Research (Euro 2013)*, July 1 – 4, Rome, Italy.

- **Gever, B.** ve Khaniyev, T., (2014). Weak Convergence Theorem for a Random Walk with a Generalized Reflecting Barrier, *3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2014)*, August 25 – 28, Vienna, Austria.

- Hanalioğlu, Z., **Gever, B.**, Khaniyev, T., (2014). Asymptotic approach for the boundary functionals of a random walk with generalized reflecting barrier, *9th International Statistics Day Symposium (9. IGS)*, May 10 – 14, Antalya.

- Aliyev, R., Khaniyev, T. and **Gever, B.**, (2016). Weak Convergence Theorem for Ergodic Distribution of a Semi – Markovian Random Walk with a Generalized Reflecting Barrier, *Theory of Probability and Its Applications*, 60(3), 594 – 605.
- Khaniyev, T., **Gever, B.**, Hanalioğlu, Z., (2017). Non – Stationary Distribution of a Semi Markovian Random Walk with a Generalized Reflecting Barrier, *International Workshop on Mathematical Methods in Engineering (MME2017)*, April 27 – 29, Çankaya University, Ankara.

- **Gever, B.**, Khaniyev, T., Hanalioğlu, Z., (2017). On the Limit Distribution of a Semi – Markovian Random Walk with Generalized Reflecting Barrier, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME2017)*, May 11 – 13, Harran University, Şanlıurfa.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Mammadova, Z., Khaniyev, T., **Gever, B.**, (2011). Üçgensel müdahaleli (s,S) tipli yarı - Markov modeli için asimptotik sonuçlar, *12. Uluslararası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırması Sempozyumu*, Mayıs 26 – 29, Denizli.

- **Gever, B.**, Khaniyev, T., Mammadova, Z., (2011). Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi, *12. Uluslararası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırması Sempozyumu*, Mayıs 26 – 29, Pamukkale Üniv., Denizli.

- Khaniyev, T., **Gever, B.**, Mammadova, Z., (2011). Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin momentleri için asimptotik açılımlar, 6. Ankara Matematik Günleri, Haziran 2 – 3, Hacettepe Üniv., Ankara.
- Khaniyev, T., **Gever, B.** and Mammadova, Z., 2011. Investigation of a renewal reward process with a generalized reflecting barrier, *The 4th congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS)*, July 1 – 3, Baku, Azerbaijan.

- Khaniyev, T., Mammadova, Z. ve **Gever, B.**, (2011). Yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin durağan olmayan dağılımı üzerine, *10. Matematik Sempozyumu*, Eylül 21 – 23, Işık Üniversitesi, İstanbul.

- Khaniyev, T., Gökpınar, F. ve **Gever, B.**, (2011). Ergodic distribution for a fuzzy inventory model of type (s,S) with gamma distributed demands, *Fuzzyss'11 The Second International Fuzzy Systems Symposium*, November 17 – 18, Hacettepe, Ankara.

- Khaniyev, T., Aksop, C. and **Gever, B.**, (2012). Asymptotic Results for the Ergodic Distribution of an Inventory Model with Fuzzy Demands, *Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making, Eds. C. Kahraman, E. E. Kerre, F. T. Bozbura*, World Scientific, pp. 436 – 441, New Jersey, USA.

- Khaniyev, T., Mammadova, Z. ve **Gever, B.**, (2012). İki bariyerli simetrikleştirilmiş Gamma dağılımlı rasgele yürüyüş sürecinin momentleri üzerine, *12. Matematik Sempozyumu*, Mayıs 23 – 25, Hacettepe Üni., Ankara.

- Khaniyev, T., Aksop, C. and **Gever, B.**, (2012). On the ergodic distribution of a renewal reward process with a reflecting barrier and fuzzy demands, *The 10th International FLINS Conference on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making (FLINS 2012)*, August 26 – 29, İstanbul.

- Khaniyev, T., **Gever, B.** ve Mammadova, Z., (2012). Kesikli şans karışımlı rasgele yürüyüş süreçleri ile kalan ömür arasındaki ilişki üzerine, *11. Matematik Sempozyumu*, Eylül 19 – 21, Samsun.

- Khaniyev, T. and **Gever, B.**, (2012). Boundary functionals of a semi – Markovian renewal – reward process with a generalized reflecting barrier, *8th International Symposium of Statistics*, 11 – 13 October, Anadolu University, Eskişehir.

- Khaniyev, T., Turksen, B., Gokpinar, F. and **Gever, B.**, (2013). Ergodic Distribution for a Fuzzy Inventory Model of Type (s,S) with Gamma Distributed Demands, *Expert Systems with Applications*, 40(3), 958 – 963.

- Khaniyev, T., Ardıç, Ö. ve **Gever, B.**, (2013). Stokastik talep altında düşük kaliteli ve geç teslime izin verilen durumda optimal envanter modeli, *Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 33. Ulusal Konferansı (YAEM 2013)*, Haziran 26 – 28, İstanbul.

- Ardic, O., **Gever, B.**, Khaniyev, T., (2013). Asymptotic results for a Semi – Markovian Inventory Model of Type (s, S) with General Interference of Chance, *26^{th} European Conference on Operational Research (Euro 2013),* July 1 – 4, Rome, Italy.
- Khaniyev, T., **Gever, B.** and Hanalioglu, Z., (2015). Investigation of Some Boundary Functionals for Renewal – Reward Process with a Generalized Reflecting Barrier, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science (TJMCS),* 2015, Article ID 20150052, 14 pages.

- **Gever, B.**, Güneş, B.N., Gülel, D., Ataseven, E.B., Saatcıoğlu, Ö., Bebek, Z.S., (2015.) Bir Üretim İşletmesinin Verileri Kullanılarak Çarpımsal Deney Tasarımı ile Taguchi Yaklaşımının Karşılaştırılması, *Endüstri Mühendisliği Dergisi*, 26(1), 2 – 26.

- Khaniyev, T. and **Gever, B.**, (2015). İki bariyerli iki taraflı üstel dağılımlı rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyoneli üzerine, *14. Matematik Sempozyumu*, Mayıs 14 – 16, Niğde Üniv., Niğde.

- Khaniyev, T., **Gever, B.** and Hanalioğlu, Z., (2015). On the Rate of Weak Convergence of Ergodic Distribution for a Renewal Reward Process with a Generalized Reflecting Barrier, *International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory – AMAT*, May 28 – 31, TOBB ETÜ, Ankara.

- Khaniyev, T., **Gever, B.** and Hanalioğlu, Z., (2015). Limit Distribution for Renewal Reward Process with Reflecting Barrier, *18th INFORMS Applied Probability Society Conference (INFORMS APS 2015),* July 5 – 8, Koç University, Istanbul.

- Khaniyev, T., **Gever, B.**, Mammadova, Z., (2015). On the Stationary Characteristics of a Renewal Reward Processes with Generalized Reflecting Barrier, *4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications – IECMSA 2015,* August 31 –Semptember 03.

- Khaniyev, T. ve **Gever, B.**, (2015). Bir Ara Stokun İki Bariyerli Rasgele Yürüyüş Süreci le Modellenmesi, *Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 35. Ulusal Kongresi (YAEM 2015)*, Eylül 9 – 11, ODTÜ, Ankara.

- Khaniyev, T., **Gever, B.** and Hanalioglu, Z., (2016). Asymptotic rate for weak convergence of the distribution of renewal – reward process with a generalized reflecting barrier, *Intelligent Mathematics II: Applied Mathematics and Approximation Theory, Eds. G. A. Anastassiou and O. Duman*, Springer, pp. 313 – 331.

- Khaniyev, T., **Gever, B.**, Hanalioğlu, Z., (2016). Limit Theorem for a Renewal – Reward Process with an Asymmetric Triangular Interference of Chance, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, May 12 – 14, Elazig.

- Khaniyev, T., **Gever, B.**, Hanalioglu, Z., (2016). Asymptotic Analysis for the Stochastic Processes with a Reflecting Barrier, *3rd Ankara – İstanbul Workshop on Stochastic Processes,* June 16 – 17, METU, Ankara.