

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNSANSIZ HAVA ARAÇLARI İÇİN
KAZANÇ AYARLAMALI GÜRBÜZ KONTROL

DOKTORA TEZİ

İsmail Hakkı ŞAHİN

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU

ŞUBAT 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

.....
Doç. Dr. Tolga GİRİCİ
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 131217014 numaralı Doktora Öğrencisi **İsmail Hakkı ŞAHİN**'nin ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "**İNSANSIZ HAVA ARAÇLARI İÇİN KAZANÇ AYARLAMALI GÜRBÜZ KONTROL**" başlıklı tezi **14.02.2018** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU**
TOBB Ekonomik ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Bülent TAVLI (Başkan)**
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Anadolu Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yiğit TAŞÇIOĞLU
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali Türker KUTAY
Ortadoğu Teknik Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

İsmail Hakkı ŞAHİN

ÖZET

Doktora Tezi

İNSANSIZ HAVA ARAÇLARI İÇİN KAZANÇ AYARLAMALI GÜRBÜZ

KONTROL

İsmail Hakkı ŞAHİN

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU

Tarih: Şubat 2018

Bu tezde insansız hava araçlarının (İHA) kazanç ayarlamalı gürbüz kontrolü incelenmiştir. Temel olarak \mathcal{H}_∞ optimizasyon problemi doğrusal matris eşitsizlikleri (DME) kullanılarak çözülmüştür. Kontrol tasarımında ise \mathcal{H}_∞ karma hassasiyet ve \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme prensiplerine dayalı kontrolcüler elde edilmiştir. İlk olarak, çeşitli uçuş koşullarında küçük bir insansız helikopter için kararlılık ve referans izleme sağlayabilen karma hassasiyet prensibine dayalı kontrolcü tasarımları üzerinde durulmuştur. Öncelikle yerel doğrusal modeller kullanılarak yerel karma hassasiyet \mathcal{H}_∞ denetleyicileri bütün denge koşullarında tasarlanmıştır. Yerel \mathcal{H}_∞ denetleyiciler yerel kararlılık ve performans koşullarını sağlarken, tam zarf üzerinde kararlılık ve referans izlemede başarısız oldukları görülmüştür. Bu problemin önüne geçmek için, kazanç ayarlamalı \mathcal{H}_∞ denetleyiciler ortak Lyapunov fonksiyonu kullanılarak tasarlanmıştır. Bu yöntem daha tutucu bir yöntem olmakla beraber kontrolcü sentezinde tek bir ortak Lyapunov fonksiyonu kullanıldığından kapalı çevrim sistemin kararlılığı ara noktalarda da garanti altına alınmaktadır. Bu şekilde yapılan tasarım ile tüm uçuş zarfında kararlılığı ve performansı garanti eden kazanç ayarlamalı denetleyicileri sentezlenmiştir. Elde edilen kontrolcüler doğrusal olmayan benzetim

modelinde test edilmiştir. Daha sonra küçük bir insansız helikopter için kazanç ayarlamalı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrolcüsü tasarımı incelenmiştir. Teorik olarak garanti edilen bir kontrol yarasası için, doğrusal helikopter modellerinin parametreye bağımlılığı kullanılarak, parametre bağımlı bir \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme denetleyicisi tasarlanmıştır. Önerilen tasarım, ortak bir Lyapunov fonksiyonuyla parametreye bağımlı değişen parametreye bağımlı bir kontrolcü sentezlemek için kullanılmıştır. Bu kontrolcüler birbirine bağlandığında, pratik bir kazanç ayarlamalı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrolcüsü elde edilebilir. Bu tasarım yöntemi ile kararlılık ve performans tüm çalışma alanı içinde garanti edilmiş olur. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme denetleyicileri kazançlarının tüm tasarım zarfında iyi performans ve kararlılık sağladığı görülmektedir. Denge noktalarında düğüm düğüm (noktasal) sentez istenen uçuş zarfında tatmin edici bir performans göstermiştir. Son olarak ise önerilen metodun daha geniş bir perspektifte değerlendirilebilmesi için insansız küçük bir uçak için \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi kullanılarak eyleyici arızası durumunda acil iniş pilotu tasarlanmıştır. Bu yöntemde farklı hız ve irtifalarda denge noktaları bulunan uçağın yerel modelleri kullanılarak kontrolcüler tasarlanmış ve bu kontrolcüler birleştirilerek tüm acil durum uçuş zarfını kapsayan kazanç ayarlamalı kontrolcü elde edilmiştir. Daha sonra bu tasarım döngüde donanım testleri ile doğrulanmıştır. Sonuç olarak üç farklı uygulamada önerilen kazanç ayarlama yönteminin başarılı olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: \mathcal{H}_∞ Optimizasyon, Karma hassasiyet, Döngü şekillendirme, Gürbüz kontrol, Parametreye bağımlı kontrol, Modelleme, Benzetim.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

GAIN SCHEDULED ROBUST CONTROL OF UNMANNED AERIAL VEHICLES

İsmail Hakkı ŞAHİN

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Electrical and Electronics Engineering Science Programme

Supervisor: Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU

Date: February 2018

In this thesis, gain scheduled robust control of unmanned aerial vehicles (UAV) is examined. Mathematical \mathcal{H}_∞ optimization problem is solved using Linear Matrix Inequalities (LMIs) to synthesize sub-optimal controllers. Mixed sensitivity \mathcal{H}_∞ optimization and \mathcal{H}_∞ loop shaping methods are used in the controller design. First, a nonlinear helicopter model is built, trimmed and linearized from which an approximate affine-parameter-dependent model is constructed. Then, LMI based mixed sensitivity \mathcal{H}_∞ controllers are designed in order to achieve stabilization and reference tracking for a small unmanned helicopter at various flight conditions. Local \mathcal{H}_∞ controllers are designed at trim conditions based on local linear models. The pointwise controllers achieve local stability and performance, but fail in stabilization and tracking over the full envelope. A scheduling controller is built by blending the local controller outputs. In addition, local \mathcal{H}_∞ controllers are designed with common Lyapunov function. This allows controller scheduling between the design points with guaranteed stability and performance across the design envelope. Moreover, a parameter-dependent controller is synthesized to stabilize the affine-parameter-dependent helicopter model attaining stabilization and reference tracking for the family of linear models. All methods except for the local controller approach yield in satisfactory performance over the full flight

envelope. Afterwards, \mathcal{H}_∞ loop-shaping controller design is studied. Synthesized controller are scheduled parametrically with guaranteed robust stability over multiple operating points. Synthesis LMIs for state feedback and dynamic output feedback are derived in the parametric \mathcal{H}_∞ loop-shaping framework. The results are extended to parameter-dependent plants to build a parameter-dependent controller utilizing a common Lyapunov function. The developed theory is applied to a small helicopter model, for which the operating region is covered by a family of linear models at a grid of operating points. It is shown through linear and nonlinear simulations that a desired loop shape is attained by the parameter dependent controller. Satisfactory tracking is achieved and stability is retained, even under mass and inertia variations. Moreover, to show the generality of the proposed technique, an autopilot is designed for an UAV where one of the lateral control surfaces, i.e. the aileron, becomes jammed and unusable. The autopilot handles the automatic recovery, autonomous guidance and landing of the disabled UAV. An accurate nonlinear aircraft model is used to build flight control laws for the UAV using loop-shaping theory to decouple longitudinal and lateral channels. The designed autopilot is tested on an example distress scenario involving aileron servoactuator jam. It is confirmed through hardware-in-the-loop (HIL) simulations that the autopilot design is capable of resuming safe flight and autonomous navigation under the fault scenario and is able to safely land the UAV to a target runway.

Keywords: \mathcal{H}_∞ Optimization, Mixed sensitivity, Loop shaping, Robust control, Parameter dependent control, Modelling, Simulation.

TEŞEKKÜR

Öncelikle çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Coşku Kasnakoğlu'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Tez Jüri üyeleri Prof. Dr. Bülent Tavlı, Prof. Dr. Ünver Kaynak, Yrd. Doç. Dr. Ali Türker Kutay ve Yrd. Doç. Dr. Yiğit Taşcıoğlu'na teşekkür ederim. TOBB ETÜ İnsansız Hava araçları laboratuvar çalışanlarına teşekkür ederim. Doktora eğitimim süresince sağladığı eğitim bursu ve diğer imkanlar için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teşekkür ederim. Değerli fikirleriyle bana destek olan ve kısıtlı zamanlarında beni sabırla dinleyen Dr. Volkan Nalbantoğlu'na teşekkür ederim. Bunun yanı sıra başta Dr. Uğur Zengin olmak üzere Uçuş Mekanikliği ve Kontrol ekibindeki çalışma arkadaşlarım Anıl Öztürk, İlden Ak, Volkan Kargın, Umut Türe, Ilgaz Doğa Okçu, Mustafa Gürler, Sinan Özcan ve burada ismini saymadığım tüm çalışma arkadaşlarıma değerli fikirleri için teşekkür ederim. Bu tezi desteklediği için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na teşekkürlerimi sunarım. Tez döneminde arkadaşlıklarıyla bana çok destek olan Ozan Sert, Uğur Yolum, Samet Çaka Çakmakcıoğlu, Kenan Doğan ve Onur Baş'a teşekkür ederim. Destekleriyle her zaman yanımda olan arkadaşlarım Balkan Şahin, Emre Aruğaslan, Emre Tokgöz, Ömer Çapraz, Burak Atabay ve Emrah Özkoç'a teşekkür ederim. Son olarak destekleriyle her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
ÇİZELGE LİSTESİ	xiv
KISALTMALAR	xv
SEMBOL LİSTESİ	xvi
RESİM LİSTESİ	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Araştırması	3
1.2 Tezin Motivasyonu.....	6
1.3 Standart \mathcal{H}^∞ Kontrol Problemi	7
1.3.1 Karma hassasiyet prensibi ile \mathcal{H}^∞ kontrol tasarımı.....	9
1.3.2 \mathcal{H}^∞ döngü şekillendirme.....	11
1.3.3 Kazanç ayarlama	17
1.3.3.1 Geleneksel kazanç ayarlama	18
1.3.3.2 Modern kazanç ayarlama	19
2. BAŞLANGIÇ VE TANIMLAR	21
2.1 Başlangıç	21
2.2 Tanımlar	22
2.2.1 Doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) sistemler	22
2.2.2 Doğrusal zamanla değişen (DZDN) sistemler	22
2.2.3 Doğrusal parametre ile değişen (DPD) sistemler.....	22
2.2.4 Doğrusal parametre bağımlı(DPB) sistemler	23
2.2.5 Politopik sistemler.....	24
3. KONTROLDE DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ	27
3.1 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri.....	27
3.2 Matris Eşitsizlikleri ile Analiz.....	28
3.2.1 Kalman-Yakupovic-Popov lemma.....	34
3.2.2 DZD sistemler için \mathcal{H}^∞ karesel performans analizi	37
3.2.3 DPD sistemler için \mathcal{L}_2 -norm tanımı ve performans analizi.....	37
3.2.4 Politopik DPD sistemler için karesel performans	37
3.2.5 Parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonu	38
3.3 Matris Eşitsizlikleri ile Sentez.....	39
3.3.1 DZD sistemler için \mathcal{H}^∞ kontrol sentezi	39
3.3.2 DPD sistemler için kazanç ayarlamalı \mathcal{H}^∞ kontrol sentezi	40
3.3.3 Kontrolcünün sentezi	42
3.3.4 Kutup kısıtlaması	43
4. İNSANSIZ HELİKOPTER İÇİN KARIŞIK HASSASİYET PRENSİBİ İLE \mathcal{H}^∞KAZANÇ AYARLAMALI KONTROL TASARIMI	45

4.1 Çalışmanın Amacı	45
4.2 Giriş	46
4.3 Helikopterin doğrusal parametreye bağlı modelinin oluşturulması	48
4.4 Karışık Hassasiyet Prensibi ile \mathcal{H}^∞ Kontrolcü Sentezi.....	50
4.5 Yerel \mathcal{H}^∞ Kontrolcülerini için Kararlılık Sınırları.....	52
4.6 Yerel \mathcal{H}^∞ Kontrolcülerini Kontrol Sinyali Harmanlama.....	56
4.7 Parametreye Bağımlı Doğrusal Değişen Kontrolcü Sentezi	57
4.8 Benzetim Sonuçları	59
4.8.1 Yerel \mathcal{H}^∞ kontrolcüler	59
4.8.2 Doğrusal parametre ile değişen kontrolcü.....	69
4.8.3 Doğrusal olmayan benzetim sonuçları	76
5. İNSANSIZ HELİKOPTER İÇİN DÖNGÜ ŞEKİLLENDİRME PRENSİBİ	
İLE \mathcal{H}^∞ KAZANÇ AYARLAMALI KONTROL TASARIMI	83
5.1 Çalışmanın Amacı	83
5.2 Giriş	84
5.3 Parametrik \mathcal{H}^∞ Döngü Şekillendirme.....	86
5.4 DMEler ile \mathcal{H}^∞ Döngü Şekillendirme Kontrolcü Sentezi	88
5.4.1 Durum geri besleme için \mathcal{H}^∞ döngü şekillendirme kontrolcü sentezi.....	88
5.4.2 Dinamik çıkış geri besleme için \mathcal{H}^∞ döngü şekillendirme sentezi.....	89
5.5 Parametreye Bağımlı Sistem için Kontrolcü Sentezi.....	91
5.5.1 Parametreye bağımlı sistemler için durum geri besleme ile gürbüz kontrol	91
5.5.2 Yerel \mathcal{H}^∞ kontrolcüler	93
5.5.3 Kazanç ayarlamalı dinamik çıkışlı geri besleme.....	95
5.6 Otonom helikopter için Kazanç Ayarlamalı Kontrolcü Sentezi.....	96
5.7 Sonuç	112
6. YANAL KONTROL YÜZEYİ SIKIŞMIŞ İNSANSIZ HAVA ARACI İÇİN	
GÜRBÜZ ACİL DURUM OTOPİLOT TASARIMI.....	113
6.1 Çalışmanın Amacı	113
6.2 Giriş	113
6.3 İHANın Matematiksel Modeli.....	114
6.4 Yazılım ve Donanım Kurulumu	117
6.5 Eyleyici Arızası Durumunda Acil Uçuş Otopilotu Tasarımı	120
6.5.1 Çalışma koşullarındaki doğrusal modellerin elde edilmesi.....	121
6.5.2 Her çalışma noktası için kontrolcülerin elde edilmesi	123
6.5.3 Ayarlamalı küresel kontrolcülerin elde edilmesi	129
6.5.4 Döngü şekillendirme kontrolcü tasarımı	130
6.5.5 Referans komutlarının üretilmesi	130
6.6 Doğrusal olmayan Benzetim Sonuçları	131
6.7 Sonuçlar.....	133
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	135
KAYNAKLAR.....	139
EKLER.....	149
ÖZGEÇMİŞ.....	181

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Genelleştirilmiş sistem.....	8
Şekil 1.2 : Karma hassasiyet \mathcal{H}^∞ optimizasyonu [39]......	10
Şekil 1.3 : Hassasiyet (duyarlılık) fonksiyonları için örnek ideal şekiller.	11
Şekil 1.4 : Döngü şekillendirme.....	14
Şekil 1.5 : Normalleştirilmiş sol eş asal faktörleri [20].	15
Şekil 1.6 : Belirsizlik açıklaması olmaksızın normalleştirilmiş sol eş asal çarpanları.	15
Şekil 1.7 : Gürbüz kararlılık sorunu için genelleştirilmiş sistem.	16
Şekil 1.8 : Döngü şekillendirme kontrolcüsünün elde edilmesi.....	17
Şekil 2.1 : Parametre kutusu.	24
Şekil 2.2 : Parametre kutusu politopik koordinatlar.	26
Şekil 3.1 : Kutup değerleri üzerindeki geometrik kısıtların gösterimi [55].	30
Şekil 4.1 : Karma hassasiyet referans izleme.....	51
Şekil 4.2 : Karma hassasiyet referans model izleme.....	51
Şekil 4.3 : Karma hassasiyet referans model izleme ölçüm gürültüsü.....	51
Şekil 4.4 : Hassasiyet (S) tekil değer fonksiyonları.	60
Şekil 4.5 : Kontrol hassasiyeti (KS) tekil değer fonksiyonları.	60
Şekil 4.6 : Tamamlayıcı hassasiyet (T) fonksiyonları.	61
Şekil 4.7 : Döngü kazancı (L) tekil değerler.	61
Şekil 4.8 : Yerel doğrusal modelde referans izleme ileri hız tutma.	62
Şekil 4.9 : İleri hız tutma boylamsal kontrol kumandası.	62
Şekil 4.10 : İzleme ileri hız tutma yükselme hızı etkileşimi.	63
Şekil 4.11 : İleri hız tutma kolektif kontrol kumandası.	63
Şekil 4.12 : İzleme ileri hız tutma yanal hız etkileşimi.....	64
Şekil 4.13 : İleri hız tutma yanal kontrol kumandası.	64
Şekil 4.14 : İzleme ileri hız tutma sapma açısı etkileşimi.....	65
Şekil 4.15 : İleri hız tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.....	65
Şekil 4.16 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yükselme hızı tutma.	66
Şekil 4.17 : Yükselme hızı tutma kolektif kontrol kumandası.....	66
Şekil 4.18 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yanal hız tutma.....	67
Şekil 4.19 : Yanal hız tutma yanal kontrol kumandası.	67
Şekil 4.20 : Yerel doğrusal modelde referans izleme sapma hızı tutma.	68
Şekil 4.21 : Sapma hızı tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.	68
Şekil 4.22 : Hassasiyet (S) tekil değer fonksiyonları.	69
Şekil 4.23 : Kontrol hassasiyeti (KS) tekil değer fonksiyonları.	70
Şekil 4.24 : Tamamlayıcı hassasiyet (T) tekil değer fonksiyonları.	70
Şekil 4.25 : Döngü kazancı (L) tekil değerleri.	71
Şekil 4.26 : Hassasiyet (S) tekil değer fonksiyonları bütün tasarım noktaları.	71
Şekil 4.27 : Yerel doğrusal modelde referans izleme ileri hız tutma.	72
Şekil 4.28 : İleri hız tutma boylamsal kontrol kumandası.	72

Şekil 4.29 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yükselme hızı tutma.	73
Şekil 4.30 : Yükselme hızı tutma kollektif kontrol kumandası.	73
Şekil 4.31 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yanal hız tutma.	74
Şekil 4.32 : Yanal hız tutma yanal kontrol kumandası.	74
Şekil 4.33 : Yerel doğrusal modelde referans izleme sapma hızı tutma.	75
Şekil 4.34 : Sapma hızı tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.	75
Şekil 4.35 : Doğrusal olmayan benzetim tüm zarf testi ileri hız.	77
Şekil 4.36 : Kontrol harmanlama kütle ve atalet değişimi.	77
Şekil 4.37 : Düğüm çözümü kütle ve atalet değişimi.	78
Şekil 4.38 : Yaklaşık DPD model kütle ve atalet değişimi.	78
Şekil 4.39 : Ölçüm gürültüsü varlığında ileri hız.	79
Şekil 4.40 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken ileri hız (8 knot).	80
Şekil 4.41 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken hava hızı (8 knot).	80
Şekil 4.42 : Kontrol harmanlama Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr (8 knot).	81
Şekil 5.1 : Parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme [45].	87
Şekil 5.2 : Açık döngü tekil değerleri askı durumu.	97
Şekil 5.3 : Açık döngü tekil değerleri ileri hız.	98
Şekil 5.4 : Şekillendirilmiş ve kararlı döngü tekil değerleri askı.	99
Şekil 5.5 : Şekillendirilmiş ve kararlı döngü tekil değerleri ileri hız.	99
Şekil 5.6 : Hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri askı.	100
Şekil 5.7 : Hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri ileri hız.	100
Şekil 5.8 : Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri askı.	101
Şekil 5.9 : Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri ileri hız.	101
Şekil 5.10 : Yerel doğrusal modelde referans izleme ileri hız tutma.	102
Şekil 5.11 : İleri hız tutma boylamsal kontrol kumandası.	103
Şekil 5.12 : Yerel modelde referans izleme yükselme hızı tutma.	103
Şekil 5.13 : Yükselme hızı tutma kollektif kontrol kumandası.	104
Şekil 5.14 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yanal hız tutma.	104
Şekil 5.15 : Yanal hız tutma yanal kontrol kumandası.	105
Şekil 5.16 : Yerel doğrusal modelde referans izleme sapma hızı tutma.	105
Şekil 5.17 : Sapma hızı tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.	106
Şekil 5.18 : Doğrusal olmayan benzetim tüm zarf testi ileri hız.	107
Şekil 5.19 : Kütle ve atalet değişimi.	108
Şekil 5.20 : Ölçüm gürültüsü ileri hız kütle ve atalet değişimi.	109
Şekil 5.21 : İleri hız ölçüm gürültüsü ve rüzgâr (5 knot).	109
Şekil 5.22 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken hava hızı (5 knot).	110
Şekil 5.23 : Kütle ve atalet değişimi (rassal).	110
Şekil 5.24 : İleri hız ölçüm gürültüsü, kütle ve atalet değişimi (rassal).	111
Şekil 5.25 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken hava hızı hız kütle ve atalet değişimi (rassal) (5 knot).	111
Şekil 6.1 : UAV otopilotu için modelleme ve kontrol blok diyagramı.	118
Şekil 6.2 : Metin içinde açıklanan hava aracı sıkışma senaryosu için HIL simülasyonlarından elde edilen hava aracı durumu (solda) ve yörünge (sağda).	120
Şekil 6.3 : Otopilot tasarımında kullanılan kontrolcü yapısı.	121
Şekil 6.4 : Performans ve gürbüzlük ölçüleri ile örnek çalışma noktasında tekil değerler.	128
Şekil 6.5 : Referans yörüngesi (solda) ve karşılık gelen komutlar.	131
Şekil 6.6 : Kanatçık arızası esnasında döngüden donanım benzetim sonuçları.	132

Şekil 6.7 : Kanatçık arızası esnasında uçağın durumları.....	132
Şekil 6.8 : Kanatçık arızası esnasında kontrol yüzeyi komutları (üstte) ve frekans analizi(altta).....	133
Şekil Ek.1 : Dünya hızları.....	160
Şekil Ek.2 : Açısal hızlar.....	161
Şekil Ek.3 : Euler açıları.....	161
Şekil Ek.4 : Gövde hızları.....	162
Şekil Ek.5 : Kontrol denge girdileri.....	162
Şekil Ek.6 : Kararlılık türevi Xu değişimi.....	168
Şekil Ek.7 : Kararlılık türevi Zw değişimi.....	169
Şekil Ek.8 : Kararlılık türevi Yv değişimi.....	169
Şekil Ek.9 : Kararlılık türevi Nr değişimi.....	170
Şekil Ek.10 : Kararlılık türevi Mu değişimi.....	170



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 6.1 : RQ-2 Pioneer geometri ve kütle değerleri.	118
Çizelge 6.2 : RQ-2 Pioneer için aerodinamik katsayılar.....	119
Çizelge 6.3 : RQ-2 Pioneer tasarım noktalarındaki denge durumları.	125
Çizelge Ek.1 : Sistem matrisi A askı.....	172
Çizelge Ek.2 : Girdi matrisi B askı.	172
Çizelge Ek.3 : Sistem matrisi A ileri hız.....	173
Çizelge Ek.4 : Girdi matrisi B ileri hız.	173

KISALTMALAR

ARE	: Algebraic Riccati Equation
BET	: Blade Element Theory(Pala Elemanları Teorisi)
CRD	: Cebirsel Riccati Denklemi
ÇGÇÇ	: Çok girdili çok çıkışlı
DD(HIL)	: Döngüde donanım (Hardware-in-the-Loop)
DPB	: Doğrusal parametre bağımlı
DOF	: Serbestlik Derecesi
DKD	: Doğrusal kesirli dönüşüm
DME	: Doğrusal matris eşitsizliği
DZD(LTI)	: Doğrusal zamanla değişmez
DZDN(LTV)	: Doğrusal zamanla değişen
DPD(LPV)	: Doğrusal parametre ile değişen
İHA	: İnsansız hava aracı
KS	: Kontrol hassasiyeti fonksiyonu
KYP	: Kalman-Yakubovich-Popov
LFT	: Linear fractional transformation
LMI	: Linear matrix inequality
LPV	: Linear paramater varying
LQR	: Linear Quadratic Regulator (Doğrusal Karesel Regülator)
LQG	: Linear Quadratic Gaussian (Doğrusal Karesel Gaussian)
MIMO	: Multi input multi output
PID	: Proportional Integral Derivative (Oran Integral Türev)
SISO	: Single input single output
S	: Hassasiyet Fonksiyonu
T	: Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu
TGTC	: Tek girdili tek çıkışlı
\mathcal{H}_∞	: H-infinity

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
p	Yalpalama açısal hızı
q	Yunuslama açısal hızı
r	Sapma açısal hızı
ϕ	Yalpalama açısı
θ	Yunuslama açısı
ϕ	Sapma (baş) açısı
α	Hücum açısı
β	Kayma açısı
χ	Azimut açısı
λ_{mr}	Ana rotor hava akış hızı
λ	Ölçeklendirme parametresi
a_1, b_1	Çırpınma dinamikleri
ω	Frekans
t	Zaman
u	İleri gövde hızı
v	Yatay gövde hızı
w	Dikey gövde hızı
u_e, v_e, w_e	Dünya hızı bileşenleri
u_a, v_a, w_a	Rüzgâr hızı bileşenleri
V_T	Toplam hız
τ	Zaman gecikmesi

RESİM LİSTESİ

Sayfa

Resim 6.1 : Döngüde donanım otopilot testi için kullanılan sistem. 116



1. GİRİŞ

İnsansız hava araçlarının (İHA) modellenmesi ve otonom kontrolü üniversite, sanayi ve askeri dünyadan bir hayli ilgi çekmiştir. İHAlar çok yönlü makinelerdir ve birçok önemli misyonun gerçekleştirilmesinde kullanılır. İHAlar düşük hız ve irtifa uçuşu yapar ve agresif manevraları kolayca gerçekleştirebilirler. Bu İHAları geniş bir uygulama aralığı için uygun hale getirmektedir.

İHAlar farklı uçuş koşullarında dinamikleri büyük ölçüde değişen iç etkileşimli sistemlerdir. Küçük ölçekli İHA diğer hava araç tiplerinden farklı bazı benzersiz özellikler sunmaktadır. Küçük ölçekli İHAlar, kararsız ve doğrusal olmayan, dış hava koşullarındaki bozulmalara karşı yüksek hassasiyet içeren sistemlerdir. Bunların yanında, İHALara etki eden kuvvet ve momentlerin uçuş koşullarına göre değişimini tahmin etmek zordur.

İHALarın karmaşık dinamik yapısı uçuş kontrol sistemi tasarımını bir hayli zorlaştırmaktadır. Hava araçları doğrusal olmayan, çok girişli çok çıkışlı, iç etkileşimli ve kararsız sistemlerdir. Kontrol eksenleri arasındaki iç etkileşim ve bağlantılar nedeniyle hava araçlarına bir eksen de girdi uygulandığında diğer eksenlerde istenmeyen ikincil yanıtlar oluşmaktadır. Bu ikincil yanıtları bastırmak ve girdiler arasındaki etkileşimi en aza indirmek için tüm kontrol girişleri aynı anda koordinasyon içinde uygulanmalıdır. Hava araçlarının dinamikleri uçuş koşullarına bağlı olarak sürekli değişmektedirler. Doğrusal olmayan ve çapraz etkileşimli (bağlantılı) İHALarın dinamik yapısı hava araçlarının otonom kontrolünü önemli bir problem haline getirmektedir. Bunun yanında modelleme hassasiyeti ve matematiksel modellemedeki belirsizlikler kontrol tasarımını bir hayli zorlaştırmaktadır. Bu şekilde tasarlanan kontrolcünün performansı da bu durumdan bir hayli etkilenmektedir. Genel olarak konuşacak olursak, uçuş kontrol sistemlerinin tasarımında/sentezinde sonlu boyutlu zamanla değişmeyen matematiksel kullanılmaktadır. Yani otonom bir uçuş kontrol sistemi tasarımında hava aracının dinamik modelinin iyi bilinmesi gereklidir.

Ancak, İHAların gerçek dinamikleri tam olarak bilinmemektedir ve çoğu mühendislik uygulamalarında olduğu gibi, fiziksel olarak anlamlı daha düşük mertebeli matematiksel modeller kullanılarak yaklaşık bir model elde edilir. Bu noktada elde edilen modelin sadece bir tahmin veya bir yaklaşım olduğunu ve pratik olarak hava aracının dinamiklerinin tam bir temsilini sağlamanın imkânsız olduğunu vurgulamak gerekir. Aslına bakacak olursak zaten matematiksel modeller gerçek bir sistemin sadece belirgin özelliklerini açıklayan diferansiyel denklemler kümesidir. Bu tür denklemlerin, analitik veya sistem tanımlama yöntemlerini kullanarak rüzgâr tüneli veya uçuş test verilerinden, formülasyonu oldukça zor bir iştir. Fakat kontrol tasarımı için doğrusal veya doğrusal olmayan modellerin belli uçuş koşullarında ‘yeterli’ olarak sistemi temsil etmeleri gereklidir. Burada önemli nokta, gerçek bir sistemin herhangi bir matematiksel tasvirinde (tarifinde) her zaman bir model belirsizliğinin mevcut olacak olmasıdır. Yani tasarlanacak olan kontrolcüler her zaman bu belirsizlik karşısında kapalı çevrim sistemin kararlılığını gürbüzlüğü (sağlamlığını) garanti altına almalıdır.

Genel olarak hava araçlarının dinamiklerini ifade etmek için iki yöntem kullanılmaktadır. Birincisi, doğrusal olmayan karmaşık dinamiklerin, belli fiziksel yasaların diferansiyel denklemler şeklinde ifade edilmesi ile oluşturulurlar. Doğrusal olmayan modeller bütün uçuş zarfında hava aracı dinamikleri için küresel bir tarif (betimleme) sağlamak için kullanılır. Doğrusal olmayan modeller doğrusal modellere göre daha ayrıntılı ve karmaşıktırlar, fakat yalnızca tek bir doğrusal olmayan model ile hava aracının dinamiklerinin tüm uçuş zarfında betimlenmesi mümkündür. İkinci yaklaşım ise doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) modellerin kullanılmasıdır. Tipik olarak, DZD modelin geçerliliği hava aracının belirli bir çalışma koşulu çevresinde sınırlıdır. Uçuş zarfının geniş bir bölümünün bir açıklaması için, farklı çalışma koşullarında birçok doğrusal model gereklidir.

Kontrol teorisindeki olgunluk düşünüldüğünde, hava araçları için tüm uçuş zarfında gürbüz (sağlam) kararlılık ve yüksek performans sağlayan kontrolcülerin tasarımındaki eksiklikler gözden kaçmamalıdır. Burada çok girişli çok çıkışlı gürbüz kontrolün incelenmesindeki ana amaç, kapalı çevrim sistemin modellemedeki belirsizlik ve eksenel bağımlılık problemi ile baş edebilmesi ve sonuç olarak kötü olan uçuş kalitesinin iyileştirilmesidir. Gürbüz ve yüksek performanslı kontrolcülerin

tasarımı ile birlikte eksenler arasındaki etkileşim, açık çevrim kararsızlık ve belirsizlik varlığına gürbüz kararlılık garanti altında olacaktır. Genellikle hava araçlarının çoğunda, eksenel bağımlılık ve modellemedeki belirsizlik uçuş koşulu değiştikçe değişmektedir. Bu durum bütün uçuş koşullarında eksenel bağımlılık etkilerini ortadan kaldıran ve belirsiz dinamiklere rağmen yüksek performans gösterebilen kontrolcülerin tasarımını gerekli kılmaktadır. Bunu bütün uçuş zarfında başarabilmek için tasarlanan kontrolcünün değişen koşullara göre kendini değiştirmesi yani değişen uçuş şartlarında değişen dinamiğe uyum sağlaması gereklidir. Bir başka deyişle tasarlanan kontrolcünün tüm uçuş zarfında gürbüz bir şekilde yüksek performans göstermesi gereklidir. Yani gürbüz bir tasarım hava aracını tüm uçuş koşullarında kararlı yapabilir, fakat bu tasarım kontrol yasasındaki uyarılama olmaksızın belli performans gereksinimlerini sağlamakta yetersiz kalabilir. Bu yüzden hava araçlarında daha yüksek performans elde etmek için kazanç ayarlanması yöntemine sıkça başvurulmaktadır. Sonuç olarak, kontrolcülerin kazançları ekstra bir ölçüm bilgisi ile güncellenerek, tüm uçuş koşullarında gürbüz ve yüksek performansını sağlamak mümkündür.

1.1 Literatür Araştırması

Uçuş kontrol sistemleri doğrusal ve doğrusal olmayan olarak ikiye ayrılabilir. Doğrusal kontrol yöntemleri uygulamaya daha müsait olduğu için kontrol mühendisleri tarafından çokça kullanılmaktadır. Bunun yanında doğrusal olmayan kontrolcüler daha çok teorik katkılarından dolayı değer bulmaktadır ve bu kontrolcülerin uygulama alanı oldukça kısıtlıdır.

Klasik kontrolcü yaklaşımında eksenel bağımlılık ihmal edilerek her eksen için ayrı ayrı kontrolcüler tasarlanır. Havacılık endüstrisinde bu yöntem hala yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metotta belli faz ve kazanç marjlerine bağlı kalarak, her eksendeki döngü kazancını maksimuma çıkarmak amaçlanmaktadır. Birçok ticari otomatik pilot tek girişli tek çıkışlı oransal integral türevsel (PID) denetleyicilerine dayanmaktadır. PID kontrolünün en büyük avantajı, model tam olarak bilinmediğinde kontrolcü parametrelerinin kolayca ayarlanabilmesidir. Bu, test uçuşu sırasında PID kontrolcü parametrelerinin çevrimiçi olarak ayarlanabileceği ucuz ve hızlı bir tekniktir. Bu yöntemin güvenilir ve başarılı bir metot olduğu ispatlanmış olsa bile bu

metot her eksenini ayrı ayrı değerlendirmektedir ve eksenler arasındaki ilişkiyi dikkate almamaktadır. Burada içeriden dışarıya doğru basamaklı bir şekilde PID kontrolcüler tasarlanmaktadır. Erken dönem uygulama örnekleri [1] ve [2]'de görülebilir.

Berkeley AeRobot (BEAR) projesi kapsamında 4 eksenindeki hareket için birbirinden bağımsız PID kontrolcülerin tasarımı yapılmıştır. 11 dereceden doğrusal helikopter modelinin oluşturulmasında model tanımlama [3] yöntemi kullanılmıştır. Tasarlanan kontrolcülerin kanallar arası etkileşimi engellemekte yetersiz olduğu görülmüştür. Yamaha R-50 helikopteri için düşük hızda (askı durumu) otonom uçuşu sağlayan benzer bir PID tasarımı [4] yapılmıştır.

Açıklama 1.1: Klasik tek giriş tek çıkış sistemler için bu şekilde belli faz ve kazanç marjini değerlendirilerek tasarlanan kontrolcülerde kapalı çevrim sistemin sağlamlığı dolaylı olarak sağlanmaktadır. Fakat çok girişli çok çıkışlı sistemlerde, Doyle ve Stein [5] tarafından gösterildiği gibi durum numarası (condition number) çok kötü olan bazı sistemler için faz ve kazanç marjini çok yanıltıcı sonuçlara neden olabilir.

LQR teorisi sistem durumu ve kontrol vektörleri elemanlarının karelerinin ağırlıklı toplamının sonsuz bir zaman aralığındaki integralini minimize eden doğrusal bir kontrol yasasının bulunmasını sağlamaktadır. Burada ortaya çıkan LQR kontrolcüsü sistemin bütün durum vektörüne ihtiyaç duymaktadır. Fakat birçok uygulamada durum vektörü tamamen ölçülememektedir ve bu yüzden durum uzayındaki ölçülemeyen durumların tahmin edilmesi gerekmektedir. Fakat bu tahmini değerler kapalı çevrim sistemin kararlılık marjini oldukça etkilemektedir [6]. LQG/LTR metotları da sabit kanatlı hava araçları için uçuş kontrol sistemi tasarımında yaygın kullanılan önemli birer araçlardır [7]. Bazı erken makalelerde helikopter uçuş kontrol sistemi için LQR [8, 9] LQG [10] veya LQG/LTR [11] metotları değerlendirilmiştir. Erken dönemde uygulama imkanı bulmuş bazı örnekler [12] ve [13] da görülebilir. Bu örneklerin uçuş kalitesini artırdığı gözlenirse de bu kontrolcüler belirsizlik karşısında çok fazla tolerans gösterememişlerdir.

Küçük ölçekli bir helikopter modeli için iç ve dış çevrimde kullanılmak üzere ayrı ayrı iki ayrı LQI kontrolcü tasarlanmıştır [14]. Sistem durumlarının tahmin edilmesi için kalman filtresi kullanılmıştır. Benzer bir şekilde LQR kontrolcüler ile birlikte kalman filtrelerinin tasarımı [15]'deki örnekte görülebilir.

Doğrusal karesel düzenleyici (regülatör) kullanılarak optimum model takibi yapan optimum kontrol stratejisi [16]'da sunulmuştur. Kontrol tasarımı Bell 205 helikopterinin düşük hız uçuş koşulu için yapılmıştır ve bu uçuş koşulunda iyi bir performans ve gürbüz bir kararlılık göstermiştir.

Kazanç ayarlamalı doğrusal karesel optimum kontrolcülerin tasarımı [17]'de incelenmiştir. Farklı uçuş koşullarında birçok LQR kontrolcüsü tasarlanmıştır ve uçuş koşulları değiştikçe tasarlanan kontrolcünün kendini değiştirmesine izin verilmiştir.

Açıklama 1.2: LQR metodu bütün durum uzayının ölçümünü gerektirmektedir ve bu da gerçeğe uygun bir durum değildir. Durum uzayının ölçülen çıktılarından tahmini için gözlemci gerektirmektedir. Bunun yanında bu metotlar sistemdeki belirsizliği göz ardı etmektedir. Genel olarak iyi performans gösterecekleri dahi sistemdeki belirsizliklere karşı duyarlıdırlar.

\mathcal{H}_∞ temelli ilk yaklaşımlar Yue ve Postlethwaite tarafından önerilmiş ve düşük hızdaki Westland Lynx helikopterin matematik modeline uygulanmıştır. Westland Lynx helikopterin kontrolü için [18] ve [19]'da ilk çalışmalar yapılmıştır. Kontrolcünün boyutunu azaltmak için iç çevrimdeki kontrolcüler sabitlenerek daha küçük mertebeli kontrolcüler tasarlanmıştır. Buradaki iki tasarım yapılmıştır: birinci tasarımda [18]'de önerilen tasarıma uygun bir metot izlerken, ikinci tasarımda McFarlane ve Glover tarafından [20]'de önerilen döngü şekillendirme normalize sol eş asal (koprim) faktörler kullanılarak tasarım yapılmıştır. Bu tasarımda 6 yerine 4 çıktı verisi kullanıldığı için [18]'de elde edilen sonuçlardan daha kötü sonuçlar elde edilmiştir. Yine benzer bir şekilde iki serbestlik derecesine sahip \mathcal{H}_∞ kontrolcüsü [21]'de tasarlanmıştır. Tasarlanan kontrolcünün uçuş kalitesini artırdığı görülmüştür. Burada tasarlanan kontrolcü aslında düşük hız için tasarlanmış olsa bile 90 knot ileri uçuşa kadar yeterli bir performans gösterdiği gözlenmiştir.

Başarılı bir şekilde uçuşta test edilmiş ilk \mathcal{H}_∞ temelli kontrolcüler [22]'de verilmiştir. Tasarlanan kontrolcüler döngü şekillendirme normalize sol eş asal (koprim) faktörler prensibine dayanmaktadır.

[23] ve [24]'de, boylamsal ve yanal eksenlerde helikopter dinamiklerini ayırarak \mathcal{H}_∞ optimizasyon tabanlı kontrolcüler tasarlanmıştır. Burada normalize sol eş asal (koprim)

faktörler yerine, karışık hassasiyet prensibine dayalı olan hassasiyet ve tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonları şekillendirilmesine dayalı bir tasarım yapılmıştır.

\mathcal{H}_∞ tabanlı kontrolcüler Bell 205 helikopterlerinin doğrusal modelleri esas alınarak tasarlanmıştır. Tasarlanan kontrolcülerin yeterli bir kararlılık sağladığı ve uçuş kalitesini iyileştirdiği uçuş testinde gösterilmiştir [25].

Statik çıktı geri besleme döngü şekillendirme yöntemine dayalı kontrolcüler Bell 205 helikopteri için tasarlanmıştır. Bu kontrolcüler statik çıktı \mathcal{H}_∞ tabanlı ilk kontrolcüler olduğu için daha önceki \mathcal{H}_∞ tabanlı kontrolcülerden çok daha basit bir yapıya sahiptirler. Bu kontrolcüler de uçuş testinde kullanılmış ve yüksek performans göstermişlerdir [26].

Dinamik çıktı geri besleme döngü şekillendirme ile sistem ile aynı boyutta kontrolcüler Carnegie Mellon Üniversitesinin Yamaha R-50 modeli için tasarlanmıştır [27] [28]. Buradaki yenilik ise her uçuş koşulunda ayrı tasarlanan kontrolcülerin birleştirilip \mathcal{H}_∞ tabanlı kazanç ayarlamalı kontrolcülerin elde edilmesidir. Fakat burada performans gereksinimleri yerel (local) modeller üzerinde sağlanmıştır. \mathcal{H}_∞ tabanlı kontrolcü tasarımı için farklı örnekler vermek gerekirse [29], [30], [31], [32] ve [33] incelenebilir.

1.2 Tezin Motivasyonu

\mathcal{H}_∞ tabanlı kontrolcülerin temel avantajı modeldeki belirsizlikler ve sisteme giren bozucu etmenler ile aynı anda baş edebiliyor olmasıdır. \mathcal{H}_∞ tabanlı kontrolcüler kolayca klasik kontrol tasarımı amaçlarına göre ayarlanabilmekte ve aynı zamanda çoklu giriş çoklu çıkış yapısı sayesinde kontrol girdileri arasındaki etkileşimi giderilebilmektedir. \mathcal{H}_∞ tabanlı kontrolcülerin neden hava araçları için uygun oldukları ile ilgili birçok argüman [34]'de sunulmuştur.

Kazanç ayarlama, doğrusal olmayan bazı sistemlerin kontrolü için parçala ve böl yöntemi ile problemin yerel çözümlerinin doğrusal kontrol yöntemi ile elde edildikten sonra bu yerel çözümlerin birleştirilerek doğrusal olmayan sisteminde kullanılmasıdır. Aslında bu metot doğrusal ve doğrusal olmayan kontrol metotları arasında bir geçiş noktası oluşturmaktadır. Tasarımda güçlü doğrusal kontrol araçları kullanılarak elde edilen bu kontrolcüler birçok uygulamada, özellikle de hava araçlarının kontrol

sisteminin tasarımında yaygın olarak kullanılmaktadır. Konuyla ilgili genel bakış ve detaylı incelemeler [35], [36] ve [37]'de bulunabilir.

Sonuç olarak, insansız hava araçlarının kontrolü için kazanç ayarlamalı \mathcal{H}_∞ tabanlı kontrolün en uygun yöntem olduğu düşünülmektedir. Bu yöntem ile üretilen kontrolcülerin geniş bir uçuş zarfında gürbüz bir kararlılık ve daha yüksek performans göstereceği öngörülmektedir.

Bu tezin literatüre katkısı aşağıdaki maddelerde özetlenmiştir.

1) Düğüm tabanlı \mathcal{H}_∞ karma duyarlılık prensibine dayalı kontrolcüler tasarımının ara noktalarında da kararlılık ve gürbüzlük garantisi verilerek küçük ölçekli bir helikopter için kazanç ayarlamalı gürbüz kontrol tasarımı yapılmıştır.

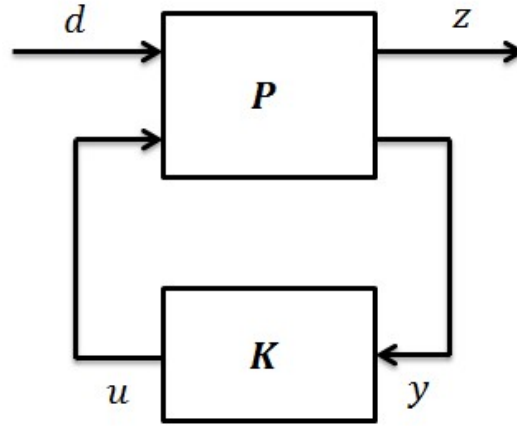
2) Sol eş asal faktörler belirsizlik gösterimine karşı parametreye bağımlı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tasarım metodu ile küçük ölçekli bir helikopter için kazanç ayarlamalı gürbüz kontrol tasarımı yapılmıştır.

3) Parametre bağımlı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi kullanılarak küçük ölçekli bir model uçak için parametreye bağımlı değişen gürbüz acil iniş otopilotu tasarlanmıştır.

1.3 Standart \mathcal{H}_∞ Kontrol Problemi

\mathcal{H}_∞ kontrol problemi aslında matematiksel bir optimizasyon problemidir. Problemin soruluş şekline göre birçok problemin çözümünde kullanılabilen esnek bir yapıya sahiptir. \mathcal{H}_∞ metodu çoklu girdi çoklu çıktıya sahip belirsiz sistemlerin kontrolü için diğer kontrol metodlarından üstün özelliklere sahiptir. Fakat \mathcal{H}_∞ metodunun uygulanması ciddi bir matematik altyapısı, kontrol edilecek sistemin modelinin oluşturulmasını ve kontrol probleminin doğru bir şekilde ifade edilmesini gerektirmektedir.

Standart \mathcal{H}_∞ kontrol probleminde sisteme giren bozucu etki d , minimize edilecek çıktı z , sistemin ölçülebilir çıktıları y ve kontrol çıktıları da u olarak tanımlanmıştır. Standart \mathcal{H}_∞ kontrol problemi, kapalı çevrim sistemi $P_{cl}(s)$ kararlı hale getiren ve $d \rightarrow z$ ye olan çıkarılmış \mathcal{L}_2 normunun tüm frekanslardaki maksimumunu minimize eden kontrolcünün $K(s)$ bulunmasıdır.



Şekil 1.1 : Genelleştirilmiş sistem.

Matematiksel olarak d 'den z 'ye kapalı döngü transfer matrisi, $z = F_l(P, K)d$ olduğu için kapalı döngü transfer matrisi alt doğrusal kesirli dönüşüm (DKD-LFT) ile verilir. Burada $F_l(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$ şeklinde ifade edilir. Standart \mathcal{H}_∞ optimal kontrol problemi temel olarak kapalı çevrim sistemin $F_l(P, K)$ \mathcal{H}_∞ normunu asgariye indiren kontrolcünün aranmasını konveks optimizasyon problemi şeklinde çözümlenir. Özetle, \mathcal{H}_∞ optimal kontrol problemi, harici bozucular (d) etkisinde d 'den minimize edilecek çıktı z 'ye kapalı çevrim transfer matrisi fonksiyonunun \mathcal{H}_∞ normunu (en kötü durum sinyal kazancını) asgariye indiren ve kararlı bir kapalı döngü sağlayan kontrolcülerin tasarlanmasıdır. Sürekli zamanda değişmeyen sistem $F_l(P, K)$ aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

kapalı döngü transfer matrisi alt doğrusal kesirli dönüşüm sonunda şu şekilde elde edilecektir:

$$F_l(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

$\|F_l(s)\|_\infty < \gamma$ ancak ve ancak $R = \gamma^2 I - D^T D$ ve Hamiltonian matrisinin \mathcal{H} sanal eksen üzerinde öz değerleri olmadığında sağlanır. Burada Hamiltonian matrisi \mathcal{H}

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{G} \\ \mathcal{F} & -\mathcal{A}^T \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + R^{-1}D^T C)^T \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu problem daha sonra cebirsel Riccati denklemine dönüştürülür.

$$\mathcal{A}^T X + X\mathcal{A} + \mathcal{F} - X\mathcal{G}X$$

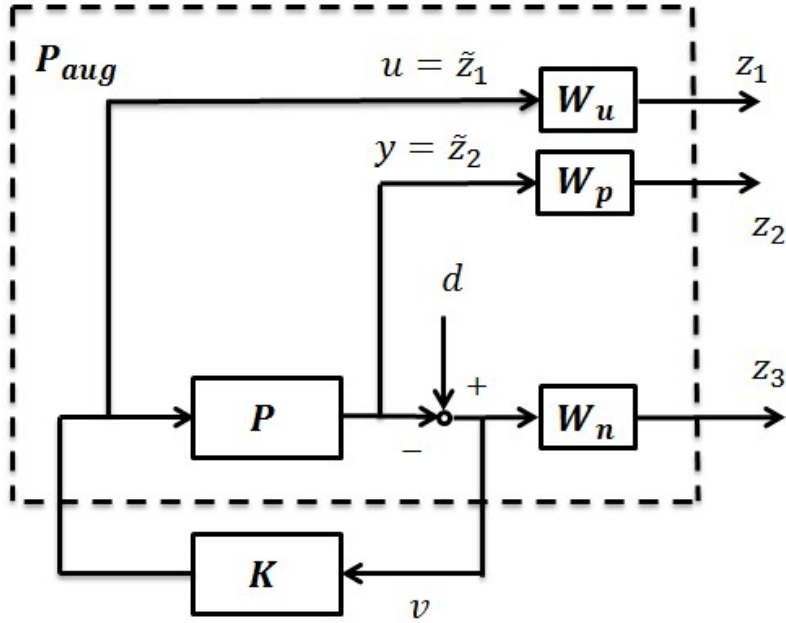
Daha sonra cebirsel Riccati denklemi çözülerek optimal kontrolcülerin sentezi mümkün hale gelmektedir. Hamiltonian sanal öz değerleri olmayacak şekilde Hamiltonianın minimum değerini bulmak için karesel yakınsama (quadratic convergence) ile bir bölüştürme algoritması (bisection algorithm) tasarlanabilir. Türevlerinde yer alan karmaşık cebirsel manipülasyonlar nedeniyle optimal \mathcal{H}_∞ denetleyicileri tasarlamak sub-optimal olanlardan zordur. Bu zorluk nedeniyle, genellikle optimal olmayan kontrolcüler tercih edilir. Bu kontrolcüler pratik olarak zaten optimal kontrolcülere yakınsamaktadır. \mathcal{H}_∞ sentez problemi, kapalı döngü transfer matrisi $P_{cl}(s)$ 'nin \mathcal{H}_∞ normunu sistem P için d' den z' ye asgariye indiren bir denetleyici K 'nin tasarlanmasıdır. Problemin kapsamlı bir incelemesi [38]'da bulunmaktadır.

Sorunu standart bir \mathcal{H}_∞ kontrol problemi olarak formüle etmenin avantajları, “en iyi” kontrol sistemlerini tasarlamak ve bu sistemlerin gürbüzlüğünü analiz etmek için gürbüz kontrol hakkında geniş literatürde yer alan araçlara kolaylıkla erişilebilmesine olanak sağlamasıdır. Genellikle, optimizasyon probleminin formülasyonunda iki farklı yöntem kullanılır: Birincisi karma duyarlılık \mathcal{H}_∞ tasarımı, diğeri de \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tasarımıdır. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesi, belirsizlik açıklamasını temsil etmek için sistemin asal (koprime) faktörlerini kullanır ve bu belirsizlik karşısında gürbüz kontrolcülerin tasarımını sağlamaktadır. \mathcal{H}_∞ kontrol teorisinde, kontrol tasarım problemi, öngörülen maliyet fonksiyonuna dayanan bir optimizasyon problemi olarak ifade edilmiştir. Ortaya çıkan denetleyici, optimizasyon sorununun çözümüdür. Bu “en iyi” durumun sadece öngörülen maliyet fonksiyonuna göre olduğu unutulmamalıdır. Dolayısıyla problem formülasyonu ve maliyet fonksiyonu tanımına bağlı olarak çok çeşitli denetleyiciler sentezlenebilir.

1.3.1 Karma hassasiyet prensibi ile \mathcal{H}_∞ kontrol tasarımı

Bu bölümde karma hassasiyet \mathcal{H}_∞ kontrolcü tasarımı kısaca anlatılmaktadır. Karma hassasiyet (duyarlılık) sorunu standart \mathcal{H}_∞ optimizasyon probleminin özel bir durumudur. Karma hassasiyet \mathcal{H}_∞ tasarımı aslında \mathcal{H}_∞ optimizasyonu kullanılarak hassasiyet fonksiyonlarının aynı anda şekillendirilmesi üzerine kurulmuştur. Bu metod yardımıyla hassasiyet ve girdi duyarlılık fonksiyonları şekillendirilerek, kapalı çevrim sistemin belli performans koşullarını elde etmesi sağlanmaktadır. Dolayısıyla, kapalı

döngü sistem üzerindeki performans gereksinimleri, ağırlıklandırma veya ölçeklendirme fonksiyonları yardımıyla \mathcal{H}_∞ optimizasyon çerçevesine dönüştürülür. Ağırlıklar sinyallerin göreceli büyüklüğünü, frekans bağımlılığını ve bunların göreceli önemini yansıtmak için seçilir. Bu formülasyonda, harici girdi sinyali d , minimize edilecek çıktılar z , model çıktısı y , denetleyici için gürültü içeren ölçüm sinyali v ve u kontrol çıkışıdır. Ayrıntılar Şekil 1.2'de gösterilmiştir.



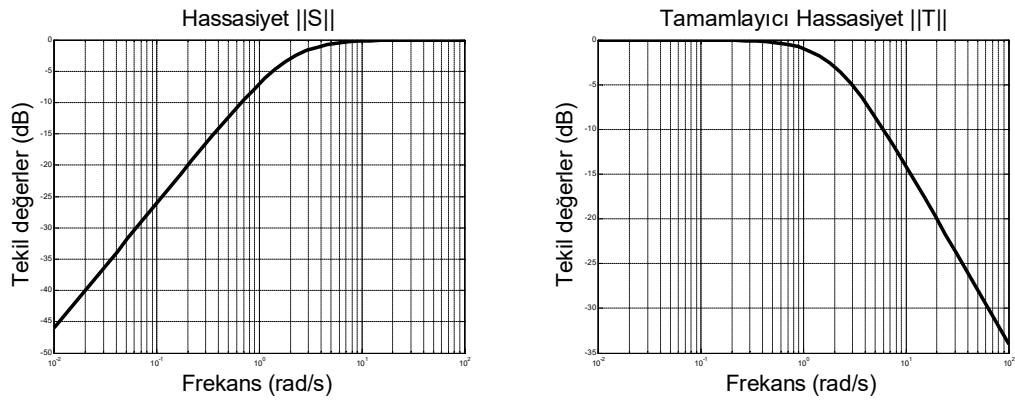
Şekil 1.2 : Karma hassasiyet \mathcal{H}_∞ optimizasyonu [39].

Şekil 1.2'de verilen genelleştirilmiş sistem aşağıdaki gibi gerçekleştirilebilir.

$$P_{aug} = \begin{bmatrix} 0 & W_u \\ 0 & W_p P \\ W_n & -W_n G \\ I & -P \end{bmatrix}$$

\mathcal{H}_∞ karma hassasiyet yöntemini kullanarak kontrolcü tasarlama süreci, gerekli kapalı çevrim transfer fonksiyonlarını şekillendirmek için ağırlık fonksiyonlarının yinelemeli (tekrarlamalı) olarak belirlenmesini gerektirir. Bütün tasarım gereksinimlerini aynı anda karşılamak zor olabilir, ancak bu, çakışan tasarım hedefleri arasındaki dengeyi sağlamak için belli kurallar izlenmelidir. Bozucu reddini ve komut takibi genellikle $\bar{\sigma}(S)$ 'nin küçük olmasını gerektirir, kontrol sinyalinin azaltılması $\bar{\sigma}(KS)$ 'nin küçük olmasını gerektirir ve ölçüm gürültüsünün zayıflatılması $\bar{\sigma}(T)$ 'nin küçük olmasını gerektirir. Bununla birlikte, $T + S = I$ olduğunu hatırlatmalıyız. Pratikte, bu problem, farklı frekans aralıklarına göre istenen hedeflerin önemini tanımlayarak çözülür.

Ağırlıkların seçimi, frekans gereksinimleri genelde tamamlayıcı filtreler kullanılır. Örneğin, $\bar{\sigma}(S)$, bozulma reddine yönelik düşük frekanslarda küçük olmalıdır. Bu sayede L açık çevrim transfer matrisi düşük frekanslarda yüksek değerde olsun. Buna karşın $\bar{\sigma}(S)$ yüksek frekanslarda büyük olmasına izin verilebilir. Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu $\bar{\sigma}(T)$ ise ölçüm gürültüsünü reddetmek için yüksek frekanslarda küçük değerde olmalıdır. Bunun yanında $\bar{\sigma}(T)$ düşük frekanslardaki yüksekliği referans takibi için 0 dB olmalıdır. Bu nedenle, basit ve kararlı düşük ve yüksek geçirgen filtreler ile frekanslar üzerinde gerekli şekillendirme gerçekleştirilir. Şekil 1.2'deki gibi bozulma reddine, komut takibi ve gürbüzlük için genel bir yığılı (stacked) $S/T/KS$ sorununa benzeyen bir formülasyon yapılmalıdır. Burada dikkat edilmesi gereken bazı hususlar vardır. Bozulma reddi ve komut takibi için $\bar{\sigma}(S)$, gürbüzlük ve gürültüye duyarlılığı azaltmak için $\bar{\sigma}(T)$, ve büyük kontrol girişlerini cezalandırmak için $\bar{\sigma}(KS)$ dengeli bir şekilde şekillendirilmelidir. Bunu başarabilmek için ağırlık fonksiyonları W_u , W_p ve W_n uygun şekilde seçilmelidir. Örnek hassasiyet fonksiyonları Şekil 1.3'de görülmektedir. Bu kontrol tasarımında dikkat edilmesi gereken başka bir husus ise kontrolcünün sistemin kök ve sıfırları ile çakışmaması gereklidir [40]. Bunun için kontrolcü sentezinde kapalı çevrim kökler kısıtlanabilir. Bu kısıtlama ile yine \mathcal{H}_∞ kontrolünde çokça görülen bir problem olan hızlı kontrolcü dinamiklerinden kurtulmak da mümkündür.



Şekil 1.3 : Hassasiyet (duyarlılık) fonksiyonları için örnek ideal şekiller.

1.3.2 \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme

Karma hassasiyet \mathcal{H}_∞ kontrol tasarımına alternatif popüler bir diğer yaklaşım da \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesidir. Kontrol mühendisleri, gürbüzlük özelliği ve ağırlık fonksiyonlarının seçiminin kolaylığı nedeniyle sıklıkla \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmeyi

birçok kontrol uygulamasında kullanılırlar. Glover-McFarlane \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tekniği geleneksel bant genişliği kavramlarını ve döngü kazanımını modern fikirlerle birleştirerek tek bir çerçevede toplamaktadır [20]. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tekniğinin temel avantajı, sadece açık döngü transfer fonksiyonuna odaklanarak, klasik frekans alanı tasarım yorumuna dayanan, sağlam bir geri besleme denetleyicisi hesaplanmasını mümkün kılmasıdır. Döngü şekillendirme yöntemi arzu edilen açık döngü özelliklerini vermek için nominal sistem tekil değerlerini şekillendirir. Normalleştirilmiş eş asal (koprim) faktörü belirsizlik gösterimi, şekillendirilmiş sistemin gürbüz kararlılığı için kullanılır [41]. Döngü şekillendirmesi metodunda, \mathcal{H}_∞ gürbüz kararlılık problemi için belirsizlik gösterimini tanımlamak için sol normalleştirilmiş eş asal (koprim) faktörünü kullanır [41]. 2 serbestlik dereceli geribildirim denetleyicileri [42] ve [43]'te \mathcal{H}_∞ optimizasyon prensibi kullanılarak tasarlanmıştır. 2-DOF denetleyicisi, tek bir adımda tasarlanabilen geri besleme denetleyicisinin ve ön filtrenin (feed forward) bir kombinasyonudur. Geri besleme denetleyicisi, standart \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesinde olduğu gibi gürbüz kararlılık ve bozucu ret özelliklerini karşılamak için kullanılırken, ilave ön filtre, kapalı döngünün zaman tepkilerini şekillendirmek için kullanılır. Amaç, denetleyicinin geribildirim kısmının sağlam kararlılık ve bozucu reddine ilişkin kriterlerin karşılanması ve öte yandan ileri besleme (feed forward) kısım, referans modelini kapalı döngü sistem ile eşleştirmek için kullanılır. [44]'de ağırlıklı karma hassasiyet minimizasyonu için parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme prensibi geliştirilmiştir. Parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrol probleminde maliyet fonksiyonunun ölçeklendirilmesi için ilave bir serbest parametre kullanılmaktadır. Parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme sorununun çözümü, cebirsel Riccati denklemi (CRD-ARE) şeklinde verilir. [45]'de, parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemi doğrusal matris eşitsizlikleri (DME-LMI) kullanarak çözülmüştür.

\mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tasarım yöntemi, şekillendirilmiş sistemin normalleştirilmiş eş asal (koprim) faktörü belirsizliği gösterimine karşı kapalı döngü sisteminin gürbüz kararlılığı ve performansı arasında dengeyi kuran klasik döngü şekillendirme kavramı ve \mathcal{H}_∞ optimizasyon tekniğinin bir kombinasyonudur. McFarlane-Glover \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi, şekillendirilmiş sistemin normalleştirilmiş eş asal faktörü belirsizlik gösterimine karşı gürbüz kararlılığı sağlar. Çok girişli çok çıkışlı sistem için döngü şekillendirmesi, açık döngü sistemin tekil değerlerinin şekillendirmesi anlamına gelmektedir. [20]

Bu frekans bölgesi üç kısma ayrılmıştır. Düşük frekanslarda, iyi izleme ve bozulma reddini sağlamak için döngü kazancı yüksektir. Yüksek frekans aralığında, gürültüyü bastırmak için döngü kazancı düşüktür ve döngü kazancı tipik olarak kazanç ve faz marjlarını belirlemektedir. Bununla birlikte ara bölgede, kapalı döngü sisteminin hassasiyet ve tamamlayıcı hassasiyet transfer fonksiyonları için arzu edilen şekilleri elde etmek için devreden çıkarma oranı (roll-off rate) ve bant genişliği belirli sınırlar içinde tutulmalıdır.

\mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yönteminde, nominal sistemin açık döngü tekil değerlerini şekillendirilerek, kontrol sentezinde kararlılık, performans ve sağlamlık gibi kapalı döngü tasarım özelliklerini sağlamak için kullanılmaktadır. Ağırlıklandırma fonksiyonu matrisleri W_1 ve W_2 'nin seçimi, açık döngü sistemini şekillendirerek sistemin performans gereksinimlerini elde etmede en önemli adımdır.

Sistemin aşağıdaki durum uzayına sahip olduğunu varsayalım:

$$G_P = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix}$$

Şekillendirme filtreleri W_1 and W_2 şu şekilde tanımlanmıştır:

$$W_1 = \begin{bmatrix} A_{w1} & B_{w1} \\ C_{w1} & D_{w1} \end{bmatrix} \text{ ve } W_2 = \begin{bmatrix} A_{w2} & B_{w2} \\ C_{w2} & D_{w2} \end{bmatrix}.$$

Ardından, elde ettiğimiz şekillendirilmiş sistemin durum uzayı gösterimini yazacak olursak:

$$A_S := \begin{bmatrix} A_{w1} & 0 & 0 \\ B_p C_{w1} & A_p & 0 \\ 0 & B_{w2} C_p & A_{w2} \end{bmatrix}$$

$$B_S := \begin{bmatrix} B_{w1} \\ B_p D_{w1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_S := [0 \quad D_{w2} C_p \quad C_{w2}]$$

elde edilir.

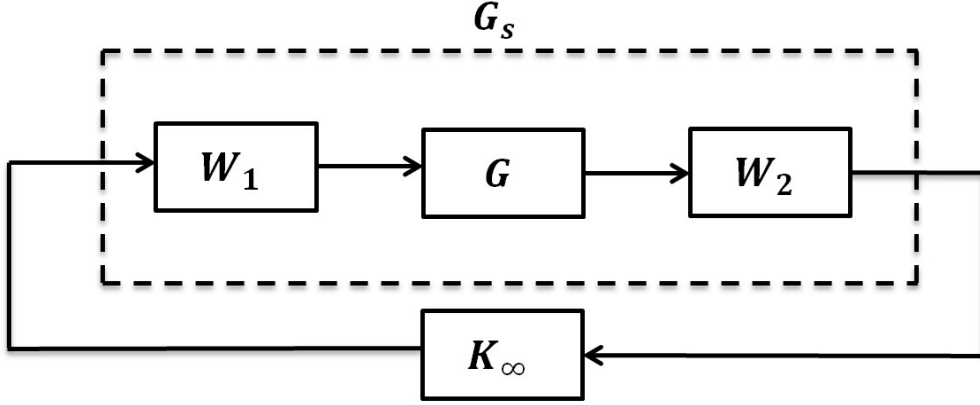
Şekillendirilmiş sistem G_S , kapalı döngü tasarım hedeflerini yansıtan sistem ve filtrelerin $G_S = W_2 G_P W_1$ kombinasyonudur. G_S 'nin durum uzayı gerçekleştirimini tanımlarsak: $G_S = \begin{bmatrix} A_S & B_S \\ C_S & 0 \end{bmatrix}$. Daha sonra, G_S 'nin normalleşmiş sol eş asal faktörlerini

M ve N şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$[M \quad N] = \begin{bmatrix} A_S + LC_S & B_S & L \\ C_S & 0 & I \end{bmatrix}$$

burada $L = -YC^T$ and $Y = Y^T \geq 0$, ve Y aşağıda verilen Cebirsel Riccati denkleminin(CRD-ARE) kararlı çözümüdür.

$$A_S Y + Y A_S^T - Y C_S^T C_S Y + B_S B_S^T = 0$$



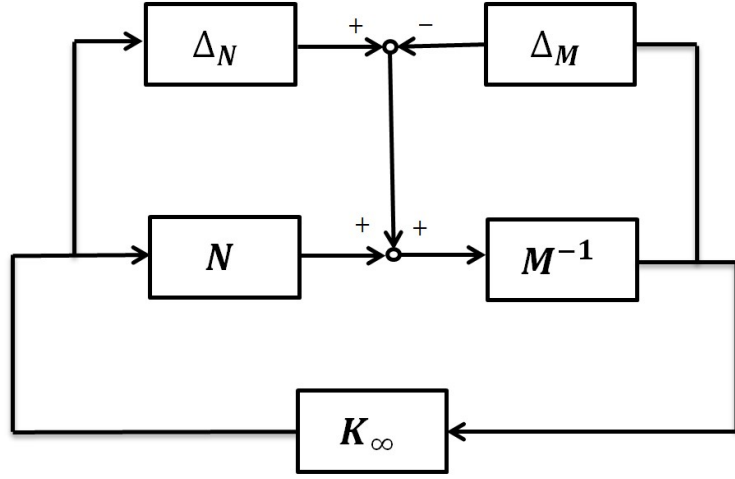
Şekil 1.4 : Döngü şekillendirme.

Şekillendirilmiş sistem $G_S = M^{-1}N$ şeklinde faktörüne ayrılır. $MM^T + NN^T = I$ belirsizliği göstermek için normalleştirilmiş sol eş asal (koprım) faktörleri çerçevesinde tanımlanmıştır. M ve N şekillendirilmiş sistem için sol eş asal faktörleri olarak adlandırılır. Sol eş asal (koprım) faktörleri aşağıdaki yinelemeyen ifadeyi kullanarak sağlam kararlılık marjını açıkça bulmaya yardımcı olur:

$$\epsilon_{max} = (1 - \|[M \ N]\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

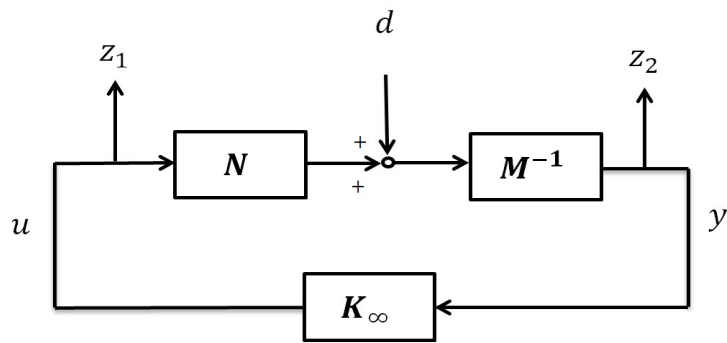
burada $\|[M \ N]\|_H^2$ eş asal faktörlerin Hankel normu ve ϵ_{max} , kapalı döngü sisteminin maksimum gürbüz kararlılık marjıdır. Pratik deneyim temelinde $\epsilon_{max} > 0.2$ 'nin iyi sonuçlar verdiği kabul edilmektedir [45].

Kararlılık sağlayan \mathcal{H}_∞ denetleyicisi K_∞ , şekillendirilmiş sistemin normalize edilmiş eş asal (koprım) faktörlerine bağlı belirsizliği tanımlayan şekillendirilmiş sistem G_S için Şekil 1.5'de gösterildiği gibi sentezlenir. Bozulmuş sistem kümesi $G_\Delta := (M + \Delta M)^{-1}(N + \Delta N)$ şeklinde tanımlanır. Burada ΔM ve ΔN yapılandırılmamış belirsizlikleri temsil etmektedir. Gürbüz kararlılığın arkasındaki temel amaç, sadece nominal sistem G_S 'yi kararlı halde getirmek değil, aynı zamanda yapılandırılmamış belirsizlikler ΔM ve ΔN 'nin varlığında bozulmuş sistem kümesi G_Δ için kararlılığı garanti etmektir.

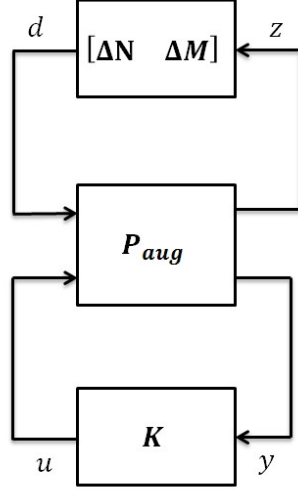


Şekil 1.5 : Normalleştirilmiş sol eş asal faktörleri [20].

Bu gürbüz kontrol problemini çözmek için yapısal olmayan belirsizlikler ΔM ve ΔN 'nin sistem açıklamasından çıkarılması gerekmektedir. Bozulmuş sistem tanımlamasından belirsizlik açıklamasını kaldırdığımızda nominal sistem yalnız bırakılmıştır. (Şekil 1.6) Nominal sistem tanımı $G_s = M^{-1}N$ için, nominal sistem modelini bozmak için ek bir bozucu kanalı d vardır. Kontrol girdisi (z_1) ve sistem çıktısı (z_2), optimizasyon işleminde minimize edilecek olan objektif fonksiyonu olarak seçilmiştir. d nominal sisteme bir bozucu olarak tanımlanır ve z sinyali en aza indirecek çıktılar $z := [z_1 \ z_2]^T = [y \ u]^T$ olarak tanımlanır. Şekil 1.6'da verilen bu konfigürasyon, standart \mathcal{H}_∞ optimizasyon kontrol sentezi konfigürasyonu olan Şekil 1.7'de verilen genelleştirilmiş sisteme dönüştürülebilir.



Şekil 1.6 : Belirsizlik açıklaması olmaksızın normalleştirilmiş sol eş asal çarpanları.



Şekil 1.7 : Gürbüz kararlılık sorunu için genelleştirilmiş sistem.

Sağlam kararlılık sağlayan K_∞ kontrolcüsü öyle bir tasarlanmalıdır ki:

$$\inf_{K_\infty \text{ kararlaştırıcı}} \left\| \begin{bmatrix} I \\ K_\infty \end{bmatrix} (I - G_s K_\infty)^{-1} M^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\epsilon} = \gamma$$

şartını sağlayan en küçük γ için K_∞ elde edilsin. Bu tasarım sol eş asal faktörler belirsizlik gösterimine karşın gürbüz kararlılık sağlamaktadır. Küçük kazanç teoreminin direkt sonucuna dayanarak yapılandırılmamış belirsizliklerin ϵ ile sınırlandırılması koşuluyla kapalı çevrim gürbüz kararlıdır.

$$\|\Delta N \quad \Delta M\|_\infty \leq \epsilon.$$

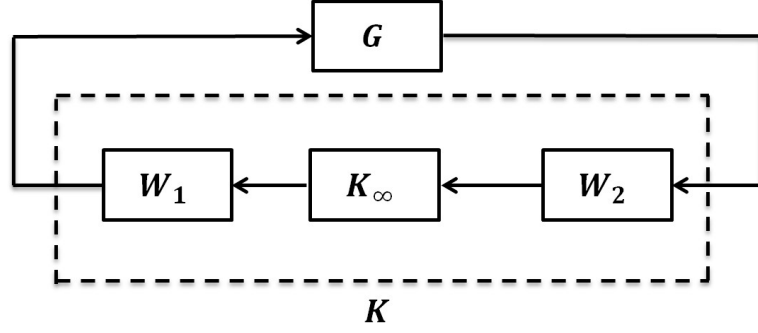
Belirsizlik gösterimi eklenmemiş genelleştirilmiş sistem tanımı P_{aug} kompakt olarak şu şekilde verilebilir:

$$P_{aug} := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_u \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{11} & D_{11} \end{bmatrix}$$

burada $A = A_s$, $B_1 = -L$, $B_2 = B_s$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_s \end{bmatrix}$, $C_2 = [C_s]$, $D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $D_{12} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$ ve $D_{22} = 0$.

Kontrolcü, yapılandırılmamış belirsizliklerin ΔN ve ΔM 'lerinin sol eş asal faktörü gösterimine bağlı gürbüz dengeleme marjini en üst düzeye çıkarmak için, bozulma d 'den çıkış z 'ye kapalı çevrim sisteminin \mathcal{H}_∞ normunun en aza indirilmesi için tasarlanmıştır.

Döngü şekillendirme kontrolcüsünün nihai şekli, W_1 ve W_2 ağırlıklandırma fonksiyonlarının, elde edilen K_∞ ile Şekil 1.8'de gösterilen, $K = W_1 K_\infty W_2$ şeklinde birleştirilmesi ile elde edilir.



Şekil 1.8 : Döngü şekillendirme kontrolcüsünün elde edilmesi.

Bu yaklaşımın amacı, döngü şekillendirme işleminde performans ve sağlamlık arasındaki ilişkiyi dengelemektir. Prosedür döngü şekillendirme tasarımı ile \mathcal{H}_∞ çıkış geri besleme kontrol tekniklerini birleştirmektedir. Bu tasarım prosedürünün temel avantajı: bilinen klasik döngü şekillendirme fikirlerine dayandığı için giriş ve çıkış filtrelerinin ayarlanmasının daha kolay olmasıdır. Kontrolcü sentez algoritması tarafından optimize edilen temel maliyet, γ , minimize edilerek izin verilen yapılandırılmamış belirsizlikleri en üst düzeye çıkarmaktadır.

1.3.3 Kazanç ayarlama

Kazanç ayarlama, kazançları çalışma koşulunun ve sistem parametrelerinin bir fonksiyonu olarak otomatik olarak ayarlanan bir kontrolcü tasarım yöntemidir. Kazanç ayarlama, dinamikleri çalışma koşullarına bağlı değişen sistemleri kontrol etmek için geliştirilen bir stratejidir. Kazanç ayarlama, doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü için parçala ve böl yöntemi ile problemin yerel noktalarında doğrusal kontrol yöntemi ile farklı doğrusal kontrolcününün tasarlanmasını amaçlamaktadır. Çoğu mekanik sistem kontrol tasarımında ihmal edilemeyen birçok doğrusal olmayan özelliklere sahiptir. Parametreye bağlı değişen kontrol metodu doğrusal olmayan sistemler için büyük bir potansiyele sahip bir kontrol tasarımı yaklaşımıdır. Parametre ile değişen kontrolcü, kazanç ayarlama prensibinden hareketle doğrusal olmayan sistemler için sistematik bir kontrol tasarım çerçevesi sağlar. Kazanç ayarlama, istenen performansları elde etmek için kontrol tasarımında doğrusal kontrol yöntemlerini kullanarak yerel kapalı döngü dinamiklerinin kararlılığı sağlar. Kazanç ayarlama böl, parçala ve yönet mantığı ile doğrusal olmayan kontrol problemlerini, doğrusal kontrol yöntemlerini kullanarak çözülmesini olanaklı hale getirmektedir. Kazanç ayarlama tekniklerine detaylı bir bakış [35], [37] ve [36]'da bulunabilir.

Kazanç ayarlama, kontrol kazançlarının belirli değişkenlere bağlı olarak zamanla değişerek daha geniş bir operasyon zarfında başarılı olmayı hedefleyen kontrol tekniğidir. Ayarlama değişkenleri sistemin durum değişkenlerini veya sistemin çalışma koşullarını tanımlayan harici değişkenlerin bir fonksiyonu olabilir. Temel tasarım fikri doğrusal olmayan bir sistemi doğrusal denetleyiciler ailesini kullanarak kontrol etmektir. Doğrusal olmayan sistem dinamikleri sonlu sayıda çalışma noktası boyunca doğrusallaştırılır. Çalışma noktaları, zamanlama değişkenleri tarafından parametrelendirilir. Belirli bir çalışma noktasına karşılık gelen her doğrusallaştırılmış model için doğrusal bir denetleyici tasarlanmıştır. Genel kontrol yasası ise elde edilen kontrolcülerin interpolasyonu olarak ifade edilebilir. Bu interpolasyon farklı yollarda yapılabilir. Bu noktada yerel olarak tasarlanmış denetleyicilerin birbirine bağlarken farklı stratejiler izlenebilir. Bununla birlikte bu şekilde tasarlanan ayarlamalı kontrolcüler gürbüz davranışını garanti etmez. Klasik kazanç ayarlama dikkat edilmesi gereken iki husus vardır.

1. Zamanlama değişkenleri yavaşça değişmeli ve
2. Zamanlama değişkenleri sistemin doğrusal olmayan özelliklerini yansıtmalıdır.

Çoğunlukla kazanç ayarlama kontrolü olarak adlandırılan şey, Jacobian doğrusallaştırmasına karşılık gelir. Doğrusal olmayan modelin denge noktaları için doğrusal kontrolcüler tasarlanır. Kontrol tasarımı açısından, belli çalışma şartlarında doğrusallaştırma üzerinde bir çalışma noktası için tasarım yapılır ve daha sonra doğrusal zamanla değişmeyen kontrolcüler interpolasyon ile birleştirilir.

1.3.3.1 Geleneksel kazanç ayarlama

Geleneksel kazanç ayarlama yönteminde kontrol tasarımını iki ayrı bölüme ayrılmıştır. İlk adımda, yerel kontrolcüler, değişen parametrenin farklı değerinde doğrusallaştırılmış modelleri için tasarlanır. İkinci adım, bu yerel denetleyicileri interpolasyon yoluyla genel parametrelere bağımlı bir denetleyicinin elde edilmesidir. Geleneksel kazanç ayarlama kontrol teknikleri, uçuş kontrolü, otomotiv, motor kontrolü ve süreç (proses) kontrolü gibi 1960'dan beri birçok endüstriyel uygulamada başarı ile kullanılmıştır. Bu tekniğin en önemli avantajı, doğrusal kontrolcü tasarım teknikleri, performans ölçütleri ve hesaplama araçları kullanılarak doğrusal olmayan bir kontrolcünün tasarlanmasını mümkün kılmasıdır. Bu doğrusal kontrol yasasındaki parametreleri (kazançları) değiştirmek için bir kural geliştirmek gereklidir. Kontrolcü

çıktısı harmanlama, kontrolcü kutup sıfırlarının interpolasyonu, kontrolcü sistem matrislerinin interpolasyonu ve benzeri kurallar genelleştirilmiş kontrolcünün birleştirilmesi için kullanılabilir. İki tasarım aşamasının tamamen ayrıldığı bu tekniklerden çoğu geçici planlama şemaları olmakla birlikte, pratikte sıkça kullanıldığı görülmektedir.

Başarılı birçok endüstriyel uygulamaya rağmen, geleneksel kazanç ayarlama kontrolü, 1990 öncesinde uygulanmış bir yaklaşım olarak düşünülmüş ve teorik özellikleri yeterince çalışılmamıştır. Geleneksel kazanç ayarlama yöntemindeki başlıca problemler şunlardır: (1) kararlılık ve performans sadece yerel noktalarında garanti altına alınmaktadır; (2) değişen parametrenin hızlı varyasyonları için parametrelere bağımlı sistemin genel kararlılığı garanti edilmez. Bu nedenle, bu tekniğin uygulanabilirliği, çok sayıda benzetime ve gerçek zamanlı deneylere dayanır. Bir doğrusal parametreye bağımlı model ile temsil edilen doğrusal olmayan sistem için geleneksel kazanç ayarlama denetleyicilerinin ilk teorik analizi [35]'de yapılmıştır. Bu çalışmada değişkeninin yavaşça değişmesi ve modelin doğrusal olmayan etkilerinin yakalaması gerekliliği ortaya konulmuştur. Klasik kazanç-ayarlama kontrol yaklaşımı, sabit parametre değerlerine sahip doğrusallaştırılmış sistem ailesi ve denetleyici kazançlarının interpolasyonu için birkaç doğrusal zamanlı değişmez denetleyicilerin tasarımını içerdiğinden tasarım prosedürü, parametre varyasyonlarını hesaba katmaz. Özellikle, yavaş değişken parametreler hariç kararlılığı ve performansı garanti edemez.

Klasik kazanç ayarlama yaklaşımının en önemli dezavantajı, tasarım noktaları dışındaki çalışma koşullarında yeterli performansın ve bazı durumlarda kararlılığın bile sağlanamamasıdır.

1.3.3.2 Modern kazanç ayarlama

Modern kazanç ayarlama kontrol tasarım yaklaşımı, parametreye bağlı bir modelden parametreye bağımlı kontrolcünün doğrudan sentezini içerdiğinden kavramsal olarak geleneksel kazanç ayarlama kontrol yaklaşımından oldukça farklıdır. Modern kazanç ayarlama kontrol yaklaşımları, norm temelli performans ölçütlerini kullanır, örneğin \mathcal{H}_∞ veya \mathcal{H}_2 .

Küresel kararlılığı garanti altına alan modern kazanç ayarlama kontrol teknikleri 90'larda geliştirilmiştir. Detaylar için [46] ve [47] incelenmelidir. Modern kazanç

ayarlar kontrol teknikleri kavramsal olarak geleneksel kazanç ayarlar yaklaşımdan oldukça farklıdır; çünkü doğrusal zamanla değişmez tekniklerle tasarlanmış yerel doğrusal denetleyicilerden oluşan bir yapıdan ziyade bir doğrusal parametreye bağımlı modelden doğrusal parametreye bağımlı denetleyicinin doğrudan sentezini sağlamaktadır. Ayrıca, kapalı çevrim sisteminin kararlılığı ve performansı direk olarak sentezden garanti edilmektedir. Parametreye bağımlı sistemler için kontrolcünün varoluş şartları sonsuz kısıtlardan oluşan bir fizibilite problemidir. Genel olarak, bu sorunu çözmek için sistematik bir yöntem bulunmamasına rağmen, doğrusal parametreye bağımlı modellerinin bazı özel sınıfları için basitleştirmeler yapmak mümkündür. Bir konveks politopa ait parametre değerlerine sahip doğrusal parametreye bağlı modeller için çözülebilirlik koşulları sonlu sayıda kısıtlama ile bir fizibilite problemine dönüşmektir. Parametreye bağlı doğrusal değişen modeller özel olarak, parametrelerin politop köşeleri ile ilişkili kısıtlamaları değerlendirmek yeterlidir, çünkü bu kısıtlamaların politop içindeki her parametre değeri için geçerli olmasını sağlar. Elbette, denetleyici, gerçek sistem üzerinde oluşamayacak parametre değerleri kombinasyonları için tasarlandığı için ilave bir muhafazakârlık getirebilir. Yukarıdaki pratik zorluklara ek olarak, kapalı döngü sisteminin kararlılığını garantilemek için karesel bir Lyapunov fonksiyonunun bulunması gerekliliğinin sonucu olarak, kabul edilen yaklaşımlar esasen muhafazakârdır. DPD sistemleri için kararlılık problemi aslında Lyapunov teorisine dayalı olarak, bir DPD sisteminin kararlılığı, bir Lyapunov fonksiyonunun varlığı ile gösterilir. Parametre bağımlı sistemler, durum-uzay tanımlamaları zamanla değişen parametrelerin fonksiyonları olarak bilinen doğrusal sistemlerdir. Her bir parametrenin zaman değişimi önceden bilinmemekle birlikte, gerçek zamanlı olarak ölçülebilir olduğu varsayılmaktadır.

2. BAŞLANGIÇ VE TANIMLAR

2.1 Başlangıç

Çıkarılmış Matris Normu: Öklid vektör normu kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\|M\| := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Mu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Mu\|$$

M matrisinin Öklid-çıkarılmış normu matrisin maksimum tekil değerine eşittir.

$$\|M\| =: \bar{\sigma}(M)$$

Lebesgue Uzayı: $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ uzayı karesi integrallenebilir bütün Lebesgue-ölçülebilir fonksiyonları kümesidir. Lebesgue uzayı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathcal{L}_2[0, \infty) = \left\{ x(t) : \int_0^{\infty} x^T(t)x(t)dt < \infty \right\}$$

Daha sonra $x(t) \in \mathcal{L}_2$ sinyali ve bunun \mathcal{L}_2 -normu aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\|x\|_2 := \sqrt{\int_0^{\infty} x^T(t)x(t)dt}$$

Çıkarılmış \mathcal{L}_2 -normu (kazancı): Sürekli zamanda G operatörü için çıkarılmış \mathcal{L}_2 -normu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\|G\| := \sup_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \text{ ve } u \neq 0$$

\mathcal{H}_∞ normu: Kompleks düzlemin sağ yarım tarafında analitik olan kompleks bir transfer fonksiyonu $G(j\omega)$ için \mathcal{H}_∞ normu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [48]

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

burada σ_{\max} matrisin en büyük tekil değeridir.

Not: DZD sistemler için \mathcal{H}_∞ normu çıkarılmış \mathcal{L}_2 normu veya kazancına eşittir.

$$\|G\|_\infty = \|G(s)\|$$

Schur Tamamlayıcı: $R = R^T$ ve $Q = Q^T$ hermitian matrisler ise aşağıdaki ifadelerde yer alan koşullar birbirine denktir.

1) $R < 0$ ve $Q + S^T R^{-1} S < 0$.

$$2) \quad \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0.$$

2.2 Tanımlar

2.2.1 Doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) sistemler

Bir sistem, bir sinyal alanından giriş alanına, başka bir sinyal alanına (çıkış alanına) doğrusal bir operatör olarak tanımlanır:

$$u \mapsto y \quad y = Gu$$

burada u giriş sinyal alanına, y ise çıkış sinyal alanına aittir. DZD sistemler aşağıdaki durum uzayı gösterimi ile tanımlanabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

burada x durum vektörü, w girdi vektörü ve z çıkış vektörüdür. DZD sistemler transfer fonksiyonu olarak $G(s) := D + C(sI - A)^{-1}B$ şeklinde ifade edilebilir.

2.2.2 Doğrusal zamanla değişen (DZDN) sistemler

DZDeğişen sistemler aşağıdaki durum uzayı gösterimi ile tanımlanabilir

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

burada sistem matrisleri $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ ve $D(t)$ zamana bağlı olarak değişmektedir. Doğrusal sistem zamana bağlı değişmektedir. Bu tür sistemler için transfer fonksiyonu tanımlanamaz.

2.2.3 Doğrusal parametre ile değişen (DPD) sistemler

Doğrusal parametre ile değişen (DPD-LPV) sistemlerin sistem matrisleri zamana bağlı değişen parametrelere, $\rho(t)$, doğrusal bağımlı olarak değişmektedir. Hem parametrenin kendisi hem de parametrenin değişim hızı belli bir ön tanımlı kümelerde yer almaktadır. DPD sistemler aşağıdaki durum uzayı gösterimi ile tanımlanabilir

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B(\rho(t)) \\ C(\rho(t)) & D(\rho(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

Burada sistem matrisleri zamana bağlı değişen $\rho(t)$ parametresine bağlı olarak değişmektedir. DPD sistemler sistem matrislerinin belirli bir zamana bağlı parametre ile değiştiği doğrusal sistemlerdir. Bu tip sistemlerde $\rho(t)$ zamanda bağlı sistem matrislerinin değişimini ifade etmektedir.

Tanımlı küme içinde ölçülebilir bazı parametreler kullanılarak ayarlama sinyali ρ tanımlanır. $\rho(t)$ matrislerin parametrelere bağımlılığını gösterir. Bazı kabul edilebilir küme içinde sürekli, ölçülebilir miktarları ayarlama sinyalleri olarak $\rho \in \rho$ şeklinde ifade ederiz

$$\rho(t) = [\rho_1(t) \quad \rho_2(t) \quad \dots \quad \rho_n(t)]^T$$

$\rho(t)$ tüm ayarlama parametrelerini içeren vektördür ve bütün parametreler $\rho_i(t) = [\underline{\rho}_i \quad \bar{\rho}_i]$ üstten ve alttan sınırlandırılmış parametrelerdir.

Sistem matrislerinin ρ parametresine bağlı olarak doğrusal bir şekilde değiştiği durumlarda, bu modeller doğrusal parametre bağımlı (DPB) sistemler olarak isimlendirilmektedir.

2.2.4 Doğrusal parametre bağımlı(DPB) sistemler

DPB sistemler aşağıdaki durum uzayı gösterimi ile tanımlanabilir

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

burada

$$A(\rho) = A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p$$

$$B(\rho) = B^0 + \rho_1 B^1 + \rho_2 B^2 + \dots + \rho_p B^p$$

$$C(\rho) = C^0 + \rho_1 C^1 + \rho_2 C^2 + \dots + \rho_p C^p$$

$$D(\rho) = D^0 + \rho_1 D^1 + \rho_2 D^2 + \dots + \rho_p D^p$$

olarak tanımlanmıştır. Ayarlayıcı parametrelerin hepsisinin $\rho(t)$ üst ve alt sınırları olduğunu kabul edersek $\rho_i(t) = [\underline{\rho}_i \quad \bar{\rho}_i] \forall i$. Şekil 2.1'de görüleceği gibi parametre uzayının sınırları *parametre kutusu* olarak adlandırılmaktadır.

Sonrasında ise köşe noktalarını matematiksel olarak şu şekilde tanımlayabiliriz. Şekil 2.1'de gösterilen parametre alanının (hiperdörtgeninin) sınırları parametre kutusunu ifade etmektedir.

$$\Pi_1 = [\underline{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2 \quad \dots \quad \underline{\rho}_p]$$

$$\Pi_2 = [\bar{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2 \quad \dots \quad \underline{\rho}_p]$$

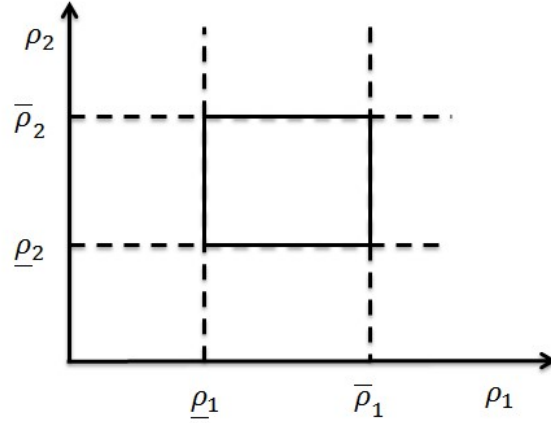
$$\Pi_3 = [\underline{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2 \quad \dots \quad \underline{\rho}_p]$$

$$\Pi_4 = [\bar{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2 \quad \dots \quad \underline{\rho}_p]$$

⋮

$$\Pi_{2^p} = [\bar{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2 \quad \dots \quad \bar{\rho}_p]$$

Toplamda 2^p farklı köşe noktası bulunmaktadır. Köşe noktalarındaki $A(\Pi_i)$ sistem matrisleri her köşe noktasındaki değerler yerine konularak bulunur. ($A(\rho) = A(\Pi_1)$)



Şekil 2.1 : Parametre kutusu.

2.2.5 Politopik sistemler

DPD sistemler çok kolay bir şekilde politopik sistemlere dönüştürülebilir. Örneğin her ρ_i belli sınırlarının olduğunu kabul edersek $\rho_i(t) = [\underline{\rho}_i \quad \bar{\rho}_i] \forall i$. Yeni parametre vektörü $\alpha(t) = [\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \dots \quad \alpha_{2^p}(t)]^T$ parametre kutusunun tüm köşelerinden (2^p) değerler alır. Bir doğrusal parametre bağımlı sistem için eşdeğer bir politopik model her zaman bulunabilir. Elde edilen politopik model, parametre aralığının köşelerinde doğrusal parametre bağımlı sistemi politopik koordinatlarda içerir.

DPD sistemlerde parametre vektörü ρ sabit bir polytopte yer almakta ve parametre vektörünün ρ sistem matrisleri üzerindeki bağımlılığı doğrusal ise politopik sistem olarak adlandırılmaktadır. Zamana bağlı değişen aşağıdaki sistemi ele alacak olursak

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ C(\alpha) & D(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

burada

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i$$

$$B(\alpha) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_r B_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i$$

$$C(\alpha) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_r C_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i$$

$$D(\alpha) = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \dots + \alpha_r D_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i D_i$$

ve $\alpha \in \Theta = \text{Co}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$. Burada **Co** konveks çokgeni gösterir.

Bu sistem kompakt bir şekilde

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ C(\alpha) & D(\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}$$

politopik koordinatlarda ifade edilir. Burada $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ ve $0 \leq \alpha_i \leq 1$ olmalıdır.

İki parametrelili bir sistemle örnek verecek olursak: Köşe noktaları şu şekilde ifade ederiz:

$$\Pi_1 = [\underline{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2]$$

$$\Pi_2 = [\underline{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2]$$

$$\Pi_3 = [\bar{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2]$$

$$\Pi_4 = [\bar{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2].$$

Sistem matrisleri parametre kutusunun köşelerinde değerlendirildiğinde tüm köşelere karşılık gelen sistem matrisleri elde edilmiş olur. Yani

$$A(\alpha_1 = 1) := A(\Pi_1) = A([\underline{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2]) = A_1$$

$$A(\alpha_2 = 1) := A(\Pi_2) = A([\underline{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2]) = A_2$$

$$A(\alpha_3 = 1) := A(\Pi_3) = A([\bar{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2]) = A_3$$

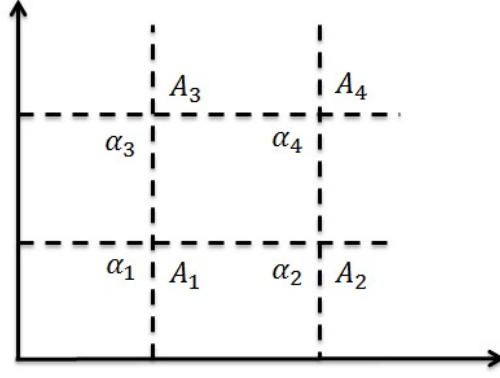
$$A(\alpha_4 = 1) := A(\Pi_4) = A([\bar{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2]) = A_4$$

Elde edilir. Köşe noktalarındaki sistem matrisleri kullanılarak politopik model şu şekilde yazılır:

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$$

Daha sonra ise politopik koordinatlarda köşe noktaları için aşağıdaki işlem uygulanır ve bunların gerçek koordinatlarda nerede olduğu gösterilmiştir.

1. $\alpha_1 = 1$ yani $\alpha = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T = \Pi_1$ yani $\mapsto [\underline{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2]$ köşesi
2. $\alpha_2 = 1$ yani $\alpha = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T = \Pi_2$ yani $\mapsto [\underline{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2]$ köşesi
3. $\alpha_3 = 1$ yani $\alpha = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T = \Pi_3$ yani $\mapsto [\bar{\rho}_1 \quad \underline{\rho}_2]$ köşesi
4. $\alpha_4 = 1$ yani $\alpha = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T = \Pi_4$ yani $\mapsto [\bar{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2]$ köşesi



Şekil 2.2 : Parametre kutusu politopik koordinatlar.

Burada α zamana bağlı değişmektedir:

$$\alpha(t) = [\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \alpha_3(t) \quad \alpha_4(t)]$$

ve $\sum_{i=1}^4 \alpha_i(t) = 1$ ve $0 \leq \alpha_i \leq 1$ kısıtlıdır. Politopik koordinatlardaki parametre kutusu Şekil 2.2’de gösterilmiştir.

3. KONTROLDE DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ

3.1 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri

Doğrusal matris eşitsizlikleri birçok gürbüz kontrol problemin çözümü için kullanılabilir. Farklı örnekleri görmek için ve daha geniş bir inceleme için [49], [50], [51] ve [52] araştırılabilir.

Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (DME) Kontrol teorisinde kararlılık, iyi-sorulmuşluk (well-posedness) ve performans testlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. [51]. Bir DME aşağıdaki olarak tanımlanabilir.

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n < 0$$

Burada

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ karar değişkenleri

F_0, F_1, \dots, F_n gerçekte simetrik matrislerdir.

$F(x) < 0$ koşulu, x üzerinde konveks bir kısıt tanımlamaktadır. Kontrol teorisinde çok farklı türde problemler DME kısıtları ile bir optimizasyon problemi şeklinde ifade edilebilir. Burada kontrol problemleri DME şeklinde ifade edilmiştir ve kontrolcü sentezi için numerik sonuçların elde edilmesinde YALMIP [53] ve SEDUMI [54] kullanılmıştır.

Örnek 3.1: DME kullanılarak DZD sistem için Durum Geri Besleme Kontrolcü tasarımı [50]

DZD sistem aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$u = Kx$ şeklinde çalışan ve kapalı çevrim sistemi üssel olarak kararlı hale getiren durum geri besleme kontrolcüsü DME kullanarak tasarlanmak istenmektedir.

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Burada aranan ortak bir Lyapunov fonksiyonun $V(x)$ 'in aşağıdaki şartları sağlaması beklenmektedir. $V(x) = xPx > 0$ ve $\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x < 0$.

Bu koşulları sağlayan P 'yi bulmak için aşağıdaki eşitsizlikler çözülmelidir.

$$P > 0$$

$$\begin{bmatrix} I \\ A + BK \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A + BK \end{bmatrix} < 0$$

İkinci denklemin DME olmadığı aşağıda açıkça görülmektedir.

$$A^T P + K^T B^T P + P A + P B K < 0$$

İkililik lemması kullanılarak ikinci denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} -A^T - K^T B^T \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^T - K^T B^T \\ I \end{bmatrix} > 0$$

burada $Y = P^{-1}$ olduğu unutulmamalıdır. Terimler organize edildiğinde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$AY + BK Y + Y A^T + Y K^T B^T < 0$$

Bu aşamada $M := KY$ olarak tanımlarsak tüm terimler denklemlerde doğrusal hale gelir ve DME şeklinde ifade etmek mümkün olur. Sonuçta elde edilen DME aşağıdaki gibidir.

$$AY + BM + Y A^T + M^T B^T < 0$$

$$Y > 0$$

DME çözümü sonrasında kontrolcü $K = MY^{-1}$ işlemi yapılarak bulunur.

Bazı önemli DME farklı şekillerde ifade edilebilir ve bu ifadeler birbirine denktir.

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0$$

Bu denklıklar Schur tamamlayıcı lemma kullanılarak elde edilebilir.

3.2 Matris Eşitsizlikleri ile Analiz

Doğrusal bir sistemin kararlı olup olmadığını test etmek için birçok yöntem vardır. Öz değerlerini incelemek, Routh Testi ve benzeri testler yapılabilir. Doğrusal olmayan sistemler için ise daha farklı testler mümkündür. Buradaki en bilindik yöntem ise zaman içerisinde azalan pozitif bir Lyapunov fonksiyonunun varlığının gösterilmesidir. Matematiksel olarak aşağıdaki şartları sağlayan $V(x)$ aranmaktadır.

$$V(x) > 0 \text{ ve } \dot{V}(x) < 0$$

Bu bir tür enerji fonksiyonu olarak görülebilir ve sistemin enerjisinin zaman içerisinde azalması kararlılık olarak düşünülebilir.

Burada ise otonom bir sistemin doğrusal zamanda değişen sistemin kararlı oluşunun analizi için pozitif bir karesel Lyapunov fonksiyonu kullanılacaktır. Bu fonksiyonun varlığını DME'ler ile kolayca göstermek mümkündür.

Öncelikle, otonom DZD sisteminin $\dot{x} = Ax$ kararlılığını karesel Lyapunov fonksiyonu ile göstermek için: $V(x) = xPx > 0$ Lyapunov fonksiyonu olarak seçilir ve bu fonksiyonun zamandaki değişimi şu şekilde yazılabilir.

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x < 0.$$

Bu koşulları sağlayan P 'yi bulmak için aşağıdaki eşitsizlikler çözümlenmelidir.

$$P > 0$$

$$A^T P + P A < 0$$

Nümerik olarak çok kolay bir şekilde bu test yapılabilir. Aslında bu test A 'nin bütün öz değerlerinin sanal eksenin solunda olmasına denktir. A 'nın öz değerlerini ε miktarda sola kaydığımızda $(A + \varepsilon I)$, ikinci denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$(A + \varepsilon I)^T P + P (A + \varepsilon I) < 0$$

ve ufak bir işlemden sonra

$$A^T P + P A + 2\varepsilon P < 0$$

elde edilir. Lyapunov fonksiyonu yerine konulduğunda ise

$$\dot{V}(x) + 2\varepsilon V(x) < 0$$

olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak enerjinin zamanla azaldığını

$$|V(x(t))| \leq e^{-2\varepsilon t} |V(x_0)|$$

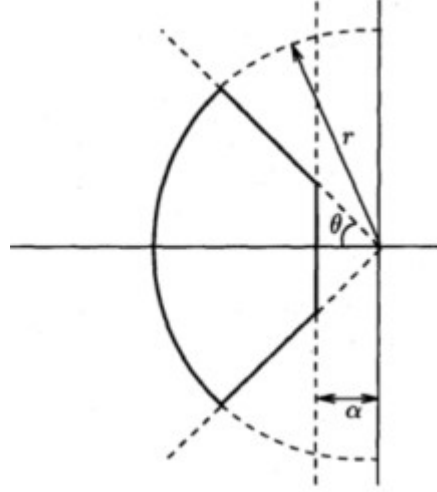
görürüz. Durum vektörü $|x(t)| \leq e^{-\varepsilon t} |x_0|$ şeklinde sınırlandırılabilir.

Açıkça görüldüğü gibi bu yeni teste A 'nin öz değerlerinin sanal eksenin ε kadar solunda olup olmadığını test etmektedir. Burada gösterilmek istenen bu basit testin farklı amaçlarda kullanılabileceğini açıklamaktır. Küçük bir numerik işlem ile öz değerler üzerinde ekstra kısıtları koyulabilir ve sisteme üssel çöküş şartları eklenebilir.

Lyapunov fonksiyonu kullanılarak kutup kısıtları kullanmak için şartları

$$A^T P + P A + 2\varepsilon P < 0$$

şeklinde değiştirmek yeterlidir. Daha ayrıntılı bir çalışma için [55] incelenebilir.



Şekil 3.1 : Kutup değerleri üzerindeki geometrik kısıtların gösterimi [55].

A 'nın öz değerlerini belli noktalarda toplamak için aşağıdaki DME uygulanabilir.

$$2\alpha P + A^T P + P A < 0$$

$$\begin{bmatrix} rP & A^T P \\ P A & -rP \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} s\theta (A^T P + P A) & c\theta (A^T P - P A) \\ c\theta (A^T P - P A) & s\theta (A^T P + P A) \end{bmatrix} < 0$$

Örnek verecek olursak köklerin reel ekseninde $-h_1$ ile $-h_2$ arasında olmasını istiyorsak.

Yani $-h_1 < x < -h_2 < 0$, iken

$$2h_1 P + A^T P + P A > 0$$

$$2h_2 P + A^T P + P A < 0$$

Kutuplar h_1 ile h_2 parametreleri arasında toplanacaktır.

Doğrusal parametre ile değişen sistem için ise yukardaki yöntemle benzer bir şekilde tekil veya çoklu parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonları bulabiliriz.

$$\dot{x} = A(\rho)$$

Otonom sistemin karesel Lyapunov fonksiyonu ile kararlılığını göstermek için $V(x) = x^T P x > 0$ Lyapunov fonksiyonu olsun. Lyapunov fonksiyonunun zamandaki değişimi şöyle yazılabilir.

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x < 0.$$

Bu koşulları sağlayan P 'yi bulmak için aşağıdaki eşitsizlikler çözülmelidir.

$$P > 0$$

$$A(\rho)^T P + P A(\rho) < 0$$

Nümerik olarak bu testi yapmak mümkün değildir. Bütün ρ parametreleri için yukardaki testi yapmak gerekmektedir bu da sonsuz bir DME çözümünü

gerektirmektedir. Fakat belli kabuller altında yani sistem matrisinin, $(A(\rho))$, ρ 'ya bağlı olarak doğrusal değiştiğini varsayarsak sonsuz sayıdaki DME sonlu sayıda DME'ye dönüştürmek mümkündür. Yani DBP veya politopik sistemler için sistemin politopik koordinatlarda köşelerinin veya kenarlarının test edilmesi yeterlidir.

DBP sistemler için $A(\rho)$

$$A(\rho) = A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p$$

Şeklinde ifade edilebilirse, ikinci koşul aşağıdaki sonlu sayıdaki DME ile test edilebilir bir hale dönüştürülür. Parametreler şekildeki gibi üstten ve alttan kısıtlı iken

$$\rho_i = [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i]$$

Lyapunov fonksiyonunun zamanda değişimi $\dot{V}(x)$ şeklinde yazılabilir

$$(A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p)P + P(A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p) < 0 \quad \forall \Pi_i, i = 2^p$$

DME bütün $\underline{\rho}_i$ ve $\bar{\rho}_i$ yerine konularak çözülür. Yani parametre kutusunun tüm köşelerinde bu kısıtlar uygulanmalıdır. (2^p) Benzer şekilde otonom sistem için üssel (eksponansiyel) kısıt da eklenebilir. Bunun yanında her köşede sabit bir Lyapunov fonksiyonu aramak yerine doğrusal parametre ile değişen bir Lyapunov fonksiyonu da aranabilir. Yani $V(x) = x^T P(\rho) x > 0$ ve $\dot{V}(x) = x^T P(\rho) \dot{x} + \dot{x}^T P(\rho) x < 0$. Bu koşulları sağlayan $P(\rho)$ 'yi bulmak için aşağıdaki eşitsizlikler çözülmelidir.

$$P(\rho) > 0$$

$$(A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p)^T P(\rho) + P(\rho) (A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p) < 0$$

Ne yazık ki bu DME'yi de çözmek mümkün değildir. Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi parametrize edebileceğimizi varsayalım.

$$P(\rho) = (P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p)$$

Bu koşulları sağlayan $P(\rho)$ 'yi bulmak için aşağıdaki eşitsizlikler çözülmelidir.

$$P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p > 0$$

$$(A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p)^T (P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p) + (P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p) (A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p) < 0$$

Terimleri bir araya toplarsak:

$$\begin{aligned}
& (P^0 A^0)^T + P^0 A^0 + \sum_i \rho_i \left((P^i A^0)^T + P^i A^0 + (P^0 A^i)^T + P^0 A^i \right) \\
& + \sum_{i < j} \rho_i \rho_j \left((P^i A^j)^T + P^i A^j + (P^j A^i)^T + P^j A^i \right) \\
& + \sum_i \rho_i \rho_i \left((P^i A^i)^T + P^i A^i + (P^i A^i)^T + P^i A^i \right) < 0
\end{aligned}$$

Hala DME şeklinde ifade mümkün olmadığı için çoklu konveksite kısıtı konarak bu sorun çözülür. Çoklu konveks kısıtı için

$$(P^i A^i)^T + P^i A^i + (P^j A^i)^T + P^j A^i \geq 0 \forall i$$

şartı eklenir, temel olarak parametrelerden birisi değişmezken diğer parametrenin türevi alınarak kalana kısımların sıfırdan büyük olması şartı da eklenmektedir.

$$\begin{aligned}
& P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p > 0 \quad \rho_{il} \text{ and } \rho_{iu} \\
& (A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots + \rho_p A^p)^T (P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p) \\
& + (P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p) (A^0 + \rho_1 A^1 + \rho_2 A^2 + \dots \\
& + \rho_p A^p) < 0 \quad \forall i \rho_{il} \text{ ve } \rho_{iu}
\end{aligned}$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i + A_j^T P_j + P_j A_j - (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) \geq 0$$

Yukardaki sonlu sayıda DME ile test yapıldığında doğrusal parametreye bağımlı sistem için $V(x) = x^T (P^0 + \rho_1 P^1 + \rho_2 P^2 + \dots + \rho_p P^p) x > 0$ bir Lyapunov fonksiyonudur. [56]

Politopik sistemler için aynı metodu izleyecek olursak sistem matrisi $A(\alpha)$ tanımına bakarak

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \text{ ve } \alpha_i \geq 0.$$

Şeklinde ifade edilebilirse, ikinci koşul aşağıdaki sonlu sayıdaki DME ile test edilebilir bir hale dönüştürülür.

$$A_i P + P A_i < 0 \quad i = 1:r$$

Benzer şekilde otonom sistem için üstel kısıt da eklenebilir. Burada ortak Lyapunov kullanıldığı için sistem politopun içinde sonsuz hızda değişime rağmen kararlı kalacaktır. Bir başka açıdan bakacak olursak sistem matrislerini değişimi bir belirsizlik olarak kabul edilebilir. Sistem matrisi ailesi şu şekilde tanımlanabilir:

$$A_i := A + \Delta_i.$$

Burada Δ_i 'lerin bilinen sabit belirsiz parametreler olduğunu kabul edersek. Δ_i değişimine bağlı gürbüz kararlılık testi olarak da yukardaki Lyapunov fonksiyonu kullanılabilir. Δ_i lerdeki değişimden bağımsız olarak $P > 0$ gürbüz kararlılık garanti edilebilir.

Gürbüz durum geri beslemeli kontrolcü sentezi için

$$\dot{x} = (A_i + BK)x$$

Kapalı çevrim sistemi kararlı hale getirebilmek için

$$A_i Y + BM + YA_i^T + M^T B^T < 0$$

$$Y > 0$$

DME çözümü sonrasında kontrolcü $K = MY^{-1}$ işlemi yapılarak bulunur. Bunu bir açıdan doğrusal sistem aile kümesi için eşzamanlı üretilen bir kontrolcü gibi düşünmekte mümkündür.

Bunun yanında her köşede sabit bir Lyapunov fonksiyonu aramak yerine doğrusal parametre ile değişen bir Lyapunov fonksiyonu da aranabilir. Yani $V(x) = xP(\rho)x > 0$ ve

$$\dot{V}(x) = x^T P(\rho) \dot{x} + \dot{x}^T P(\rho) x < 0.$$

Bu koşulları sağlayan $P(\rho)$ 'yi bulmak için aşağıdaki eşitsizlikler çözümlenmelidir.

$$P(\rho) > 0$$

$$A_i^T P(\rho) + P(\rho)A_i < 0$$

Ne yazık ki sonsuz boyutlu bu DME'yi de çözmek mümkün değildir. Lyapunov fonksiyonun aşağıdaki gibi parametrize edebileceğimizi varsayalım.

$$P(\rho) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i$$

$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ ve $\alpha_i \geq 0$. Bu koşulları sağlayan $P(\rho)$ 'yi bulmak için aşağıdaki eşitsizlikler çözümlenmelidir.

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r > 0$$

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r)^T (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r) +$$

$$(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r) (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r) < 0$$

Hala DME şeklinde ifade mümkün olmadığı için çoklu konveksite kısıtı konarak bu sorun çözülür. [57]

$$P_i > 0$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i < 0 \quad i = 1:r$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i + A_j^T P_j + P_j A_j - (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) \geq 0$$

Yukardaki sonlu sayıda DME ile test yapıldığında doğrusal parametreye bağımlı sistem için $V(x) = x^T(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)x > 0$ bir Lyapunov fonksiyonudur. [57]

3.2.1 Kalman-Yakupovic-Popov lemma

Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) lemma hafızasız bir doğrusal olmayan geri bildirim sistemin kararlılığı için frekans tabanlı bir koşul vermektedir. Pozitif gerçek lemma ilk olarak Yakubovich ve Kalman tarafından, Popov'un frekans koşulunun aslında Lyapunov fonksiyonunun varlığına eşit olduğunu ispatlamak için öne sürülmüştür. Yani temel olarak Kalman-Yakubovich-Popov Lemma frekans alanında verilen bir koşulun, DME'ler cinsinden denkleğini ifade etmektedir.

Lemma 3.1: (Kalman-Yakubovich-Popov Lemma [58]) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ve $M = M^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ verilmiş olsun. $\det(j\omega I - A) \neq 0$ bütün $\omega \in \mathbb{R}$ ve (A, B) ikilisi kontrol edilebilir ise, aşağıdaki ifadeler denktir.

1)

$$\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

2) aşağıdaki şartı sağlayan öyle bir P vardır ki $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$M + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

KYP lemma sonsuz boyuttaki frekans alanındaki eşitsizliğin sonlu boyuttaki DME olarak ifade edilmesini mümkün kılmaktadır. KYP lemmasının asıl önemi sonsuz boyuttaki frekans tabanlı bir testin sonlu boyutta DMEler ve Lyapunov fonksiyonunun varlığı ile test edilmesini sağlıyor olmasıdır. Açıkça ifade etmek gerekirse, aslında yukardaki ikinci ifadenin çözümü ile birinci ifadede yer alan frekans tabanında sonsuz olan testin çözümü mümkün olmuştur.

Lemma 3.2: (Kalman-Yakubovich-Popov Genelleştirme [50]) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ve $M = M^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ verilmiş olsun. Bütün $\omega \in \mathbb{R}$ ve (A, B) kontrol edilebilir ise, aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $M_{22} < 0$ ve kompleks vektörler $col(x, w) \neq 0$

$$(A - j\omega I \quad B) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} < 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

2) aşağıdaki şartı sağlayan öyle bir P vardır ki $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$M + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \preceq 0$$

Açıklama 3.1: M matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır ise

$$M = - \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}$$

ikinci ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0$$

Birinci ifade yeniden aşağıdaki gibi yazılırsa

$$\left(C(j\omega I - A)^{-1} B + D \right)^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \left(C(j\omega I - A)^{-1} B + D \right) < 0 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

ve $\det(j\omega I - A) \neq 0$. $G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1} B + D$.

$$\begin{pmatrix} I \\ G(j\omega) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I \\ G(j\omega) \end{pmatrix} < 0 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Burada çarpanların seçimi için $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ kabul edersek.

$$\begin{pmatrix} I \\ G(j\omega) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I \\ G(j\omega) \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow G(j\omega)^* G(j\omega) < \gamma^2 I \quad \omega \in \mathbb{R} \quad \det(j\omega I - A) \neq 0$$

pasiviteye ulaşılır. (POPOV kriteri)

Burada çarpanların seçimi için $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ kabul edersek.

$$\begin{pmatrix} I \\ G(j\omega) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I \\ G(j\omega) \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow G(j\omega)^* G(j\omega) < \gamma^2 I \quad \omega \in \mathbb{R} \quad \det(j\omega I - A) \neq 0$$

Sonlu gerçek lemmaya ulaşılır. Bounded Real Lemma.(BRL)

Corrolary3.1: (Pozitif Gerçek (Positive Real) Lemma [50]) Sistemin kontrol edilebilir ve transfer fonksiyonu G ve $S(w, z) = z^T w + w^T z$ karesel besleme fonksiyonu olduğunu kabul edersek, aşağıdaki ifadeler denktir

1) $G(j\omega)^T + G(j\omega) \geq 0$ ile $\det(j\omega I - A) \neq 0$ bütün $\omega \in \mathbb{R}$

2) Aşağıda verilen DME çözülebilirdir.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0$$

Corrolary 3.2: (Sınırlı Gerçek (Bounded Real) Lemma [50]) Sistemin kontrol edilebilir ve transfer fonksiyonu G ve $S(w, z) = z^T w + w^T z$ karesel besleme fonksiyonu olduğunu kabul edersek, ve $\gamma \geq 0$ iken aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $G(j\omega)^T G(j\omega) \leq \gamma^2 I$ ile $\det(j\omega I - A) \neq 0$ bütün $\omega \in \mathbb{R}$

2)Aşağıda verilen DME çözülebilirdir.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0$$

$V(x) = xPx > 0$ karesel Lyapunov fonksiyonu olsun. Bu durumda istiyoruz ki $\dot{V}(x) - S(w, x) \leq 0$, olsun. Bu şart aşağıdaki haliyle DME olarak ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0$$

İkinci denklemden bu ifadeyi yerine koyacak olursak,

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 + D^T D \end{bmatrix} \preceq 0$$

elde edilir. Schur tamamlayıcı kullanılarak bu DME aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} \preceq 0$$

Aşağıdaki, T eşleşim transformasyonu kullanılarak

$$T = \begin{bmatrix} \frac{I}{\sqrt{\gamma}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I}{\sqrt{\gamma}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma} \end{bmatrix}$$

Yukardaki DME aşağıdaki son haline getirilir.

$$\begin{bmatrix} A^T \tilde{P} + \tilde{P} A & \tilde{P} B & C^T \\ B^T \tilde{P} & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0$$

Yukardaki DME ifadesi \mathcal{H}_∞ analizinde $P > 0$ koşulu ile birlikte çok fazla kullanılmaktadır. Bu yüzden DMEleri \mathcal{H}_∞ analizinin en kritik noktalarından birini oluşturmaktadır. Bu yüzden DMEler detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Yukardaki DMElere alternatif denk DMEler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{bmatrix} \preceq 0$$

3.2.2 DZD sistemler için \mathcal{H}_∞ karesel performans analizi

DZD sistemler için \mathcal{H}_∞ performans analizi testi \mathcal{H}_∞ norm hesaplanmasına denktir. \mathcal{H}_∞ normu hesabı için DZE'ler yaygın olarak kullanılmaktadır.

Teorem 3.1: (\mathcal{H}_∞ norm analizi [51]) Sürekli zamanda verilen $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$ için, aşağıdaki ifadeler denktir

1) DZD sistem karalıdır ve $\|G(s)\|_\infty < \gamma$.

2) aşağıdaki şartı sağlayan öyle bir P vardır ki $P = P^T < 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0$$

3.2.3 DPD sistemler için \mathcal{L}_2 -norm tanımı ve performans analizi

DPD sistemler için transfer fonksiyonu belirli olduğu için DPD sistemlerin \mathcal{H}_∞ normundan bahsetmek doğru değildir. Bunun yerine DPD sistemler için bunun yerine çıkarılmış \mathcal{L}_2 -norm (kazancı) tanımlanmıştır. Aşağıdaki teorem DPD sistemler için girdi (w) çıktı (z) arasındaki çıkarılmış \mathcal{L}_2 -kazancını hesaplamakta kullanılabilir.

DPD sistem şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Teorem 3.2: (Karesel performans \mathcal{L}_2 - kazancı [59], [47]) Sürekli zamanda verilen DPD sistem için aşağıdaki ifadeler denktir.

1) DPD sistem karalıdır ve \mathcal{L}_2 -kazancı γ 'dan azdır.

2) aşağıdaki şartı sağlayan öyle bir P vardır ki $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{bmatrix} A(\rho)^T P + P A(\rho) & P B(\rho) & C(\rho)^T \\ B(\rho)^T P & -\gamma I & D(\rho)^T \\ C(\rho) & D(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0 \forall \rho \in \Theta$$

Burada $V(x)$ karesel Lyapunov fonksiyonudur. $V(x) = x^T P x$ global kararlılığı ve \mathcal{L}_2 -kazancının γ 'dan küçük olduğunu göstermektedir. Bu testi uygulanabilir kılmak ve sonlu sayıda DME şeklinde ifade edebilmek için sistemin politopik DPD olduğunu kabul ediyoruz.

3.2.4 Politopik DPD sistemler için karesel performans

Politopik DPD sistemler için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

1) Parametre bağımlılığı doğrusaldır (durum uzayı matrisleri ρ_i ile doğrusal olarak değişmektedir.) $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$ ve $D(\rho)$ de ρ 'nun doğrusal bir fonksiyonudur.

2) Zamanla değişen ρ_i paramateresi sabit \mathcal{P} politopunun ρ_{v1} , ρ_{v2} , ..., ρ_{vn_v} kenar noktalarında değişmektedir.

Tanım 3.1: Matris politopu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Co \{N_i, i = 1:r\} := \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}$$

Tanım 3.2:Tepe Özelliği(Vertex Property): Durum uzayında aşağıdaki DPD sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Politopik koordinatlarda şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \in \mathcal{P} := Co \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} : i = 1:r \right\}$$

Teorem 3.3: (Karesel performans \mathcal{L}_2 -kazancı [59], [47]) Sürekli zamanda verilen DPD sistem için aşağıdaki ifadeler denktir.

1)DPD sistem karalıdır ve \mathcal{L}_2 -kazancı γ 'dan azdır.

2) aşağıdaki şartı sağlayan öyle bir P vardır ki $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i & P B_i & C_i^T \\ B_i^T P & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0 \forall i = 1:r$$

Burada $V(x)$ karesel Lyapunov fonksiyonudur. $V(x) = x^T P x$ global kararlılığı ve \mathcal{L}_2 -kazancının γ 'dan küçük olduğunu göstermektedir.

3.2.5 Parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonu

Teorem 3.4: (Karesel performans \mathcal{L}_2 -kazancı [59], [47]) Sürekli zamanda verilen DPD sistem için aşağıdaki ifadeler denktir.

1)DPD sistem karalıdır ve \mathcal{L}_2 -kazancı γ 'dan azdır.

2) Aşağıdaki şartları sağlayan parametreye bağlı Lyapunov foksiyonu vardır.

$$P_i = P_i^T > 0 \forall i = 1:r$$

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i B_i & C_i^T \\ B_i^T P_i & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{bmatrix} \preceq 0 \forall i = 1:r$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i + A_j^T P_j + P_j A_j - (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) \preceq 0 \forall i, j = 1:r.$$

Burada $V(x)$ karesel Lyapunov fonksiyonudur. $V(x) = x^T P x$ burada $P = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ global kararlılığı ve \mathcal{L}_2 -kazancının γ 'dan küçük olduğunu göstermektedir. Verilen son koşul ise çoklu konveksite kısıtı olarak eklenmiştir. (multi-convexity constraint.)

3.3 Matris Eşitsizlikleri ile Sentez

3.3.1 DZD sistemler için \mathcal{H}_∞ kontrol sentezi

DZD sistem $P(s)$ 'nin durum uzayı şu şekilde verilmiştir;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} =: P(s).$$

DZD kontrolcü $K(s)$ şu şekilde verilmiştir;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_K(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =: K(s).$$

Kapalı çevrim sistem $P_{cl}(s)$ şu şekilde verilmiştir;

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ w(t) \end{bmatrix} =: P_{cl}(s).$$

\mathcal{H}_∞ optimizasyon (en-iyileme) problemi aslında kapalı çevrim sistemi kararlı hale getiren ve kapalı çevrim sistemin w girdisi ile z çıktısı arasındaki \mathcal{H}_∞ normunu minimize eden $K(s)$ kontrolcüsünün hesaplanmasıdır. [51]'de, \mathcal{H}_∞ kontrol sentezi probleminin DME'ler kullanılarak çözümü verilmiştir. \mathcal{H}_∞ kontrol sentezi problemi DMEler kullanılarak aşağıdaki gibi çözülebilir.

Teorem 3.5:(Karesel \mathcal{H}_∞ Sentez Problemi [51]) Ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlandığında, \mathcal{H}_∞ kontrol probleminin γ performansını garanti eden sentez mümkündür.

i)

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T X + X A & X B_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

ii)

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A Y + Y A^T & Y C_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

iii)

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Burada N_X ve N_Y sırasıyla (C_2, D_{21}) ve (B_2^T, D_{12}^T) için boş uzaylardır.

\mathcal{H}_∞ kontrol sentezi çözümü aşağıdaki koşulları gerektirmektedir.

- 1) (A, B_2) kontrol edilebilir ve (C_2, A) gözlenebilirdir,
- 2) D_{12} ve D_{21} tam dereceli,
- 3) $[A - j\omega I \ B_2; C_2 \ D_{12}]$ bütün ω için tam sütun rankına sahiptir.
- 4) $[A - j\omega I \ B_1; C_2 \ D_{21}]$ bütün ω için tam satır rankına sahiptir.

3.3.2 DPD sistemler için kazanç ayarlamalı \mathcal{H}_∞ kontrol sentezi

Durum uzayı verilmiş DPD sistem $P(\rho(t))$ şu şekilde verilmiştir;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_1(\rho(t)) & B_2(\rho(t)) \\ C_1(\rho(t)) & D_{11}(\rho(t)) & D_{12}(\rho(t)) \\ C_2(\rho(t)) & D_{21}(\rho(t)) & D_{22}(\rho(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} =: P(\rho(t))$$

Teorem 3.6: (Karesel \mathcal{L}_2 -kazancı performans sentez [59], [47]) Ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlandığında, DPD kontrol probleminin karesel γ performansını garanti eden sentez mümkündür.

i)

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\rho)^T X + X A(\rho) & X B_1(\rho) & C_1^T(\rho) \\ B_1^T(\rho) X & -\gamma I & D_{11}^T(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

ii)

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\rho)Y + Y A^T(\rho) & Y C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)Y & -\gamma I & D_{11}(\rho) \\ B_1^T(\rho) & D_{11}^T(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

iii)

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Kabuller aşağıda verildiği gibidir.

1) $D_{22}(\rho) = 0$ parametreye bağlı değildir ve 0'a eşittir. Bu kabul her zaman kaldırılabilir.

2) $B_2(\rho(t))$, $C_2(\rho(t))$, $D_{12}(\rho(t))$ ve $D_{21}(\rho(t))$ parametreye bağlı değildir.

DPD sistem $P(\rho(t))$ aşağıdaki gibi kısıtlanmıştır.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_1(\rho(t)) & B_2 \\ C_1(\rho(t)) & D_{11}(\rho(t)) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} =: P(\rho(t))$$

Teorem 3.7: Tepe Özelliği (Vertex property) [59] Durum uzayında aşağıdaki DPD sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_1(\rho(t)) & B_2 \\ C_1(\rho(t)) & D_{11}(\rho(t)) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Politopik koordinatlarda şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2 \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \in P := \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12} \\ C_{2i} & D_{21i} & 0 \end{bmatrix} : i = 1:r \right\}$$

Daha sonra sonsuz sayıda aşağıdaki DME'nin çözülebilirliği

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\rho)^T X + X A(\rho) & X B_1(\rho) & C_1^T(\rho) \\ B_1^T(\rho) X & -\gamma I & D_{11}^T(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\rho)Y + Y A^T(\rho) & Y C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)Y & -\gamma I & D_{11}(\rho) \\ B_1^T(\rho) & D_{11}^T(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

Sonlu sayıdaki aşağıdaki DME'lerin çözülebilirliğine denktir

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T X & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \forall i$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i Y + Y A_i^T & Y C_{1i}^T & B_{1i} \\ C_{1i} Y & -\gamma I & D_{11i} \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \forall i$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

DPD sistemin kenarlarında, politopik sistemin sistem matrisleri şu şekildedir.

$$\begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12} \\ C_{2i} & D_{21i} & 0 \end{bmatrix}$$

Sonsuz sayıda DME yerine, konveksite argümanı kullanılarak, politopik sistemin sonlu sayıdaki köşe (tepe) noktalarındaki DME çözümü yapılır. Yani, DPD sistemin karesel performans problemi politopik koordinat sisteminin köşelerinde ortak Lyapunov fonksiyonu ile DZD sistemin karesel performans problemine denktir.

Sentez aşamasında DPD sistem için ortak Lyapunov fonksiyonu bulunsa da, kontrolcünün inşasında politopik koordinat takımındaki sistem matrisleri kullanıldığı için elde edilen kontrolcüler birbirinden farklı olacaktır.

3.3.3 Kontrolcünün sentezi

Sentezde bahsedilen denklemler yazıldığında kapalı çevrim sistemde denklemler doğrusal olmamaktadır. Bu problemi çözmek amacıyla doğrusallaştırıcı bir yöntem ile kontrolcü farklı bir uzayda bulunur ve geri dönüşüm yapılır. Kontrolcüyü aşağıdaki tanımlarsak

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_K(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_K & \hat{B}_K \\ \hat{C}_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_K(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =: \hat{K}(s)$$

Aşağıdaki DME'lerin çözümü ile kontrolcünün sentezi mümkündür.

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + XA + \hat{B}_K C_2 + A^T X + C_2^T \hat{B}_K^T & * & * & * \\ \hat{A}_K + A + B_2 D_K C_2 & YA + B_2 \hat{C}_K + (*) & B_1 + B_2 D_K D_{21} & * \\ (XB_1 + \hat{B}_K D_{21})^T & (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T & -\gamma I & * \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 & C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

M ve N aşağıdaki gibi faktörlerine ayrılır.

$$I = XY + NM^T$$

Sonrasında kontrolcü aşağıdaki formül ile sentezlenebilir.

$$C_K = (\hat{C}_K - D_K C_2 Y) M^{-T}$$

$$B_K = N^{-1}(\hat{B}_K - X B_2 D_K)$$

$$A_K = N^{-1}(\hat{A}_K - X(A - B_2 D_K C_2) - \hat{B}_K C_2 Y - X B_2 \hat{C}_K) M^{-T}$$

Burada kontrolcünün ρ 'e bağımlılığını kaldırmak için Y parametreden bağımsız tutulmuştur.

Bunun yanında farklı matematiksel yöntemler ile kontrolcünün sentezi mümkündür.

Farklı sentez metotları Ekler kısımlarında daha ayrıntılı bir şekilde bulunabilir. Daha ayrıntılı bir araştırma için [60] ve [50] incelenmelidir.

3.3.4 Kutup kısıtlaması

Bu çalışmada doğrusal matris eşitsizlikleri ile tasarım yapılırken kontrolcünün ve kapalı çevrim sistemlerin üzerinde kutup kısıtlaması mümkündür. Bu şekilde kontrolcünün çok hızlı dinamikleri olmasına engel olunabilir.

Yukardaki DME'lere ek olarak kutup kısıtları aşağıdaki gibi DME olarak verilebilir.

$$\lambda_{jk} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} + \mu_{jk} \begin{bmatrix} AY + B_2 \hat{C}_K & A + B_2 D_K C_2 \\ \hat{A}_K & XA + \hat{B}_K C_2 \end{bmatrix} + \mu_{kj} \begin{bmatrix} AY + B_2 \hat{C}_K & A + B_2 D_K C_2 \\ \hat{A}_K & XA + \hat{B}_K C_2 \end{bmatrix}^T < 0$$

λ_{jk} ve μ_{jk} geometrinin tanımına göre değişmektedir. Detaylar için [55] ve [57] incelenmelidir.



4. İNSANSIZ HELİKOPTER İÇİN KARIŞIK HASSASİYET PRENSİBİ İLE \mathcal{H}_∞ KAZANÇ AYARLAMALI KONTROL TASARIMI

4.1 Çalışmanın Amacı

Bu kısımda, çeşitli uçuş koşullarında küçük bir insansız helikopter için kararlılık ve referans izleme sağlayabilen DME tabanlı kontrolcü tasarımları üzerinde durulmuştur. Doğrusal olmayan bir helikopter modeli denge noktaları bulunmuş ve bu noktalar etrafında doğrusallaştırılmıştır. Yaklaşık bir doğrusal-parametre bağımlı model bu doğrusal model aile kümesi kullanılarak elde edilmiştir. Öncelikle yerel doğrusal modeller kullanılarak yerel karışık duyarlı \mathcal{H}_∞ denetleyicileri denge koşullarında tasarlanmıştır. Yerel \mathcal{H}_∞ denetleyiciler yerel kararlılık ve performans koşullarını sağlarken, tam zarf üzerinde kararlılık ve referans izlemede başarısız oldukları görülmüştür. Yerel denetleyicilerin çıktılarını harmanlayarak kazanç ayarlamalı bir denetleyici oluşturulmuştur. Kontrol çıktısının harmanlandığı durumda elde edilen ayarlamalı kontrolcü doğrusal olmayan modeli kontrol etmekte başarılı olmuştur fakat bu yöntemde sentezlenen kontrolcüler birbirinden ayrı ayrı tasarlandığı için teorik olarak kapalı çevrim sistem için kararlılık garanti gösterilememiştir. Benzetim sonuçlarına dayanarak gürültü ve rüzgâr karşısında dayanıklı olmadığı görülmüştür. Bu problemin önüne geçmek için, yerel \mathcal{H}_∞ denetleyiciler ortak Lyapunov fonksiyonu kullanılarak tekrardan tasarlanmıştır. Bu yöntem daha tutucu bir yöntem olmakla beraber kontrolcü sentezinde tek bir Lyapunov fonksiyonu kullanıldığından kapalı çevrim sistemin kararlılığı ara noktalarda da garanti altındadır. Bu şekilde yapılan tasarım tüm uçuş zarfında kararlılığı ve performansı garanti eden kazanç ayarlamalı denetleyicilerin sentezini mümkün kılmaktadır. Buna ek olarak, oluşturulan yaklaşık doğrusal parametre bağımlı helikopter modeli kullanılarak, parametrelere bağlı doğrusal değişen bir denetleyici daha tasarlanmıştır. Parametre ile doğrusal değişen denetleyici doğrusal modeller ailesi için kapalı çevrim sistemi kararlı hale getirmiş ve referans izleme sağlamaktadır. Beklendiği gibi tek yerel denetleyici helikopter dinamikleri değiştiği için farklı uçuş koşullarında başarılı olamamıştır. Kazanç

ayarlarla yöntemleri uygulandıında ise tüm uçuş zarfında kararlılığı sağlamaktadır ve başarılı bir şekilde referansı izlemek mümkündür.

4.2 Giriş

Otonom helikopterler, doğrusal olmayan ve uçuş durumuna bağlı olarak dinamik özellikleri önemli ölçüde değişen karmaşık hava araçlarıdır. Genel olarak, kontrol tasarımları da geleneksel tasarım kurallarına dayanır ve çoğu zaman standart kazanç ayarlama teknikleri ile modeldeki doğrusal olmayan varyasyonlar ile başa çıkılmaktadır.

Helikopterler için çok sayıda \mathcal{H}_∞ tabanlı kontrol yaklaşımı literatürde incelenmiştir. Örneğin [61]'de, \mathcal{H}_∞ denetleyicileri, Bell 205 helikopterinin doğrusal olmayan modelinden çıkarılan doğrusallaştırılmış modeller kullanılarak tasarlanmıştır. [62]'de ise bir statik çıkış döngü şekillendirme denetleyicisinin tasarımı özetlenmiştir. [62]. \mathcal{H}_∞ uçuş kontrol sistemi kararlılığını, manevra kabiliyetini ve çevikliğini artırmak için \mathcal{H}_∞ karma hassasiyet çerçevesinde kontrolcüler tasarlanmıştır [63]. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrolcüsü küçük ölçekli bir helikopter için de uygulanmıştır. [64] , kararlılık için iç döngü çok girişli çok çıkışlı bir kontrolcü tasarlanmış ve dış döngüde hız ve konum kontrolü için dört ayrı tek giriş tek çıkışlı kontrol tasarımı yapılmıştır. [65]'de kapalı çevrim sisteminin performansını optimize etmek için kazançların planlandığı F-16 için kendinden ayarlamalı bir uçuş kontrol sistemi tasarımından bahsedilmektedir. Uçağın parametre bağımlı niteliği, sistem optimizasyon işleminde yararlanır. [66]'da ise Lynx helikopteri için kazancın ayarlandığı bir kontrolcünün tasarımında kullanılan bir doğrusal parametreye bağlı sisteminin modellenmesi için pratik bir teknik anlatılmıştır. Son olarak [67]'de doğrusal olmayan bir helikopter modelini kararlı hale getirmek için bir doğrusal parametreye bağlı kontrolcüler tasarlanmıştır.

Uçaklar için gürbüz kontrol yaklaşımları, yukarıda listelenen literatürde bol miktarda bulunurken, bazı teorik ve pratik yönlerde iyileştirmeye yer bulunmaktadır. Otonom bir küçük helikopter için kazanç planlanmış bir \mathcal{H}_∞ kontrol tasarımı burada aşağıda özetlenen bu yönlerden bazılarına değinmek için incelenmiştir:

Karışık hassasiyet referans takibi çerçevesinde genellikle tek bir kontrolcü kullanılır [63]. Bu tezde ortak ve çoklu Lyapunov fonksiyonlarına sahip çoklu yerel kontrol

cihazları tasarlanmaktadır. Kendinden programlanmış doğrusal-parametresine bağlı denetleyiciler de tüm uçuş zarfında gelişmiş performans ve sağlamlık için tasarlanmıştır.

Kazanç ayarlama için teorik garantiler kurmak zor ve muhafazakârdır. Genellikle sonuçlar yalnızca benzetimler veya denemelerle doğrulanır. Bu çalışmada, Lyapunov fonksiyonları ile noktasal yerel kontrol tasarımı gerçekleştirilmektedir. Garanti edilen kararlılık ve performans sınırları için tasarım zarfı boyunca gerekli şartlar türetilmiştir. Sabit kanatlı uçaklar için gerekli şartlar [68]'de oluşturulmuştur. Ancak bu sonuçlar helikoptere doğrudan uygulamamaktadır.

Büyük ölçekli helikopterleri ilgilendiren çalışmalar genellikle 2-DOF referans izleme kontrolcünün ve bir yönelim (attitude) izleme iç döngüsünü kullanır [66]. Burada basit bir 1-DOF yapısı önerilmiş ve yönelim izleme döngüsü hızın doğrudan kontrolü ile ortadan kaldırılmıştır. Bu yaklaşım muhtemelen küçük otonom helikopterler için daha uygundur.

Pratik yararlılık için, tüm gelişme Doğrusal Matris Eşitsizliği (LMI) koşulları etrafında dönmektedir. Bunlar, aşağıda belirtilen felsefeye uygun olarak kararlılık ve performansı garanti eder: [69].

Burada yapılan işleri özetlemek gerekirse: Öncelikle, XCell-60 helikopteri için matematiksel model geliştirildi. Doğrusal olmayan modelin denge koşulları ve doğrusallaştırılmış model aile kümesi bulunmuştur. Doğrusallaştırılmış sistem ailesi kullanılarak doğrusal parametreye bağlı bir sistem elde edilmiştir. Ardından karışık hassasiyet prensibine dayalı yerel \mathcal{H}_∞ denetleyicileri yerel doğrusal modeller kullanılarak tasarlanmıştır. Yerel denetleyicilerin ayarlama parametresinin değişimine bağlı kararlılık açısından irdelenmiştir. Yerel \mathcal{H}_∞ denetleyicileri ailesi için kontrol sinyali harmanlama metodu anlatılmıştır. Ortak Lyapunov fonksiyonu kullanılarak her denge noktasında yapılan tasarım yinelenmiştir. Bu metot ile aslında denge noktaları arasında doğrusal parametreye bağımlı değişen kontrolcülerin tasarımına denktir. Kapalı çevrim sistemini kararlı yapan ve referans izleme sağlayan bir doğrusal parametresine bağımlı ayarlamalı kontrolcü tasarlanmıştır. Yerel \mathcal{H}_∞ Kontrolcü harmanlama yaklaşımı ve parametre değişen kontrol yaklaşımı, farklı denge/doğrusallaştırma noktalarındaki tüm doğrusal modellerde karşılaştırılmıştır. Son olarak, sunulan kontrol ayarlama stratejilerinin, arzu edilen referans izleme

davranışı ile doğrusal olmayan helikopter modeli için sağlam bir şekilde kararlı hale getirdiği gösterilmiştir.

4.3 Helikopterin doğrusal parametreye bağlı modelinin oluşturulması

Helikopterin doğrusal modellemesi sırasında durum uzay yapısının korunduğunu belirtmek önemlidir. Durum uzay yapısını koruyarak, yerel model sistem matrisleri interpolasyon ile parametreye bağımlı model sistem matrisleri arasındaki farkı en aza indirgeyerek parametreye bağımlı model oluşturabilir: [70]. Yerel sistem matrislerinin interpolasyonu ile parametreye bağımlı model sistem matrisleri arasındaki fark asgari düzeye indirilmiştir

$$\sum_{i=1}^N \left\| \sum_{k=1}^2 \alpha_{i,k} \bar{A}_k - A_i \right\|_F^2 \quad (4.1)$$

Burada $\| \cdot \|_F$ Frobenius normunu temsil eder, $\alpha_{i,1} = \frac{N-i}{N-1}$ ve $\alpha_{i,2} = \frac{i-1}{N-1}$. Bu problem, standart bir doğrusal en küçük kareler optimizasyon problemi olarak çözülebilir. Bu nedenle, yerel doğrusal modeller, bilinmeyen parametreleri bulmak için bir optimizasyon problemi çözerek interpolasyona tabi tutulur: \bar{A}_k , \bar{B}_k ve \bar{C}_k ($k=1, 2$ için.) Sistem matrisi için politopik parametrizasyonu şu şekilde verilir:

$$A_p(\rho) = A_p(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{A}_k \quad (4.2)$$

burada $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1$, ve \bar{A}_1 ve \bar{A}_2 poltopik modelin kenarlarındaki sistem matrislerini temsil eder. Ardından basitlik uğruna aşağıdaki basitleştirme yapılabilir:

$$\rho = \alpha_1 \text{ ve } 1 - \rho = \alpha_2 \quad (4.3)$$

Son olarak, aşağıdaki gibi bir doğrusal parametre bağımlı modeli oluşturabiliriz:

$$A_p(\rho) = \bar{A}_2 + (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) \rho \quad (4.4)$$

Benzer şekilde, giriş ve çıkış matrisleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$B_p(\rho) = \bar{B}_2 + (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \rho \quad (4.5)$$

$$C_p(\rho) = \bar{C}_2 + (\bar{C}_1 - \bar{C}_2) \rho \quad (4.6)$$

Bir doğrusal model ailesi şimdi parametre bağımlı bir model olarak ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\approx A_p x + B_p u \\ y_p &\approx C_p x \end{aligned} \quad (4.7)$$

burada $A_p = \bar{A}_2 + (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) \rho$, $B_p = \bar{B}_2 + (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \rho$, ve ρ ileri hızdır.

Parametre bağımlı modele birinci dereceden eyleyici dinamikleri eklenmiştir. Her bir eyleyicini transfer fonksiyonu $\frac{20}{s+20}$ olarak seçilmiştir. Dolayısıyla burada eyleyici sistem matrisleri $A_{act} = \text{diag}(-20, -20, -20, -20)$, $B_{act} = \text{diag}(5, 5, 5, 5)$, ve $C_{act} = \text{diag}(4, 4, 4, 4)$ olarak verilebilir. Dolayısıyla eyleyici dinamikleri ile parametrelere bağımlı model şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\rho)x + B_1d + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}d + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}d + D_{22}u \end{aligned} \quad (4.8)$$

burada $A(\rho) = \begin{bmatrix} A_p(\rho) & B_p(\rho)C_{act} \\ 0 & A_{act} \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{act} \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D_{11} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$, $D_{22} = 0$, ve $x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_{act} \end{bmatrix}$.

Bir referans modeli, eyleyici modeli ile sistem modeline dâhil edilebilir. Referans modelini şu şekilde tanımlarsak:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r r \\ r_d &= C_r x_r + D_r r \end{aligned} \quad (4.9)$$

burada r_d istenen referans sinyalidir. Referans modeli, kapalı döngü sisteminde hava aracının istenen cevap karakterini zorlar. Dolayısıyla, referans modeli, arzu edilen referans sinyalinin izlenmesini sağlayarak örtülü olarak model takip hedeflerini yansıtmaktadır. Referans modeli yerel doğrusal modele uyarlanmıştır. Referans model dinamikleri için $A_r = \text{diag}(-4, -4, -4, -4)$, $B_r = \text{diag}(2, 2, 2, 2)$, ve $C_r =$

$\text{diag}(2, 2, 2, 2)$ ve $D_r = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$ Burada $A(\rho) = \begin{bmatrix} A_p(\rho) & B_p(\rho)C_{act} & 0 \\ 0 & A_{act} & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$,

$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{act} \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 & C_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D_{11} = 0$, $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $C_2 =$

$\begin{bmatrix} -C_p & 0 & C_r \end{bmatrix}$, $D_{21} = D_r$, $D_{22} = 0$, ve $x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_{act} \\ x_r \end{bmatrix}$.

Sistem matrisinin doğrusal parametreye bağılı bir şekilde yazacak olursak, $A(\rho) =$

$\begin{bmatrix} A_p(\rho) & B_p(\rho)C_{act} & 0 \\ 0 & A_{act} & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$, ve giriş matrisleri B_d ve B_u 'nin ρ parametresinden

bağımsız hale getirildiği görülür. Eyleyici dinamikleri eklenmesi, giriş matrisindeki parametre bağımlılığını sistem matrisine aktarır. Boylamsal ve yanal eksenlerde referans

modeller, bant genişliği 4 rad/s olan birinci derece düşük geçişli filtre olarak seçilir ve bu 1 saniyelik yükselme süresine eşdeğerdir. Kolektif ve sapma eksenindeki referans modeller, sırasıyla, bant genişliği sırasıyla 4 rad/s olan birinci derece düşük geçişli filtrelerdir.

4.4 Karışık Hassasiyet Prensibi ile \mathcal{H}_∞ Kontrolcü Sentezi

Bu bölümde \mathcal{H}_∞ karışık hassasiyet prensibine dayalı referans takibi yapan kontrolcü tasarımı metodu anlatılmaktadır. Düşük frekanslı bozuklukların zayıflamasını ve yüksek frekanslı eyleyici aktivitesini en aza indirgeyen denetleyici K'nin sentezlenmesi amaçlıyoruz. Bu formülasyonda, dışsal giriş sinyali d , referans komutu r 'dir ve kontrollü z değişkenleri, düşük frekans hatasını ve yüksek frekans kontrol eylemini en aza indirmek üzere seçilir. \mathcal{H}_∞ karma hassasiyet referans izleme problemini çerçevesinde karıştırma için iki ağırlıklandırma filtresi kullanılmıştır. Bu filtrelerin seçiminde [32]' de verilen kurallar temel alınmıştır.

W_e hata filtresi ve hata filtresi seçimi için:

- 1) Düşük frekans hatasını bastırmak için düşük frekansta büyük değerde olmasını isteriz. Böylece, izleme probleminde sürekli durum hatası ortadan kalkar.
- 2) Yüksek frekansta ise yüksek frekans hatasına izin vermek için W_e düşük değerde olmasını istiyoruz. Tipik bir alçak geçiren filtre seçilir ve boyutlandırılır.

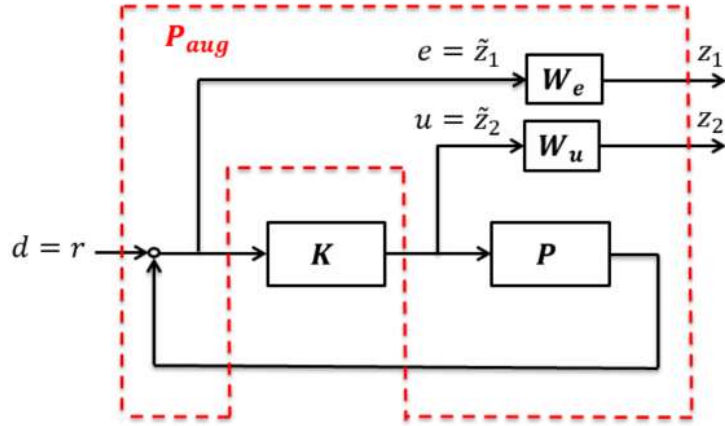
W_u , kontrol çıkış filtresi ve çıkış kontrol filtresinin seçimi şöyledir:

- 1) Düşük frekanslı çıkışlara izin vermek ve kontrolcünün işlem yapabilmesi için W_u 'nun düşük frekansta küçük değerde olmasını isteriz. Bu şekilde kontrolcünün düşük frekanslı hareketine izin vermiş oluruz.
- 2) Yüksek frekanslı çıkış kontrolünü bastırmak için W_u 'nun yüksek frekansta büyük değerde olmasını ister. Buradaki filtrenin yapısı aslında döngü bant genişliğini ile ilgilidir. Tipik bir yüksek geçiren filtre seçilir ve boyutlandırılır.

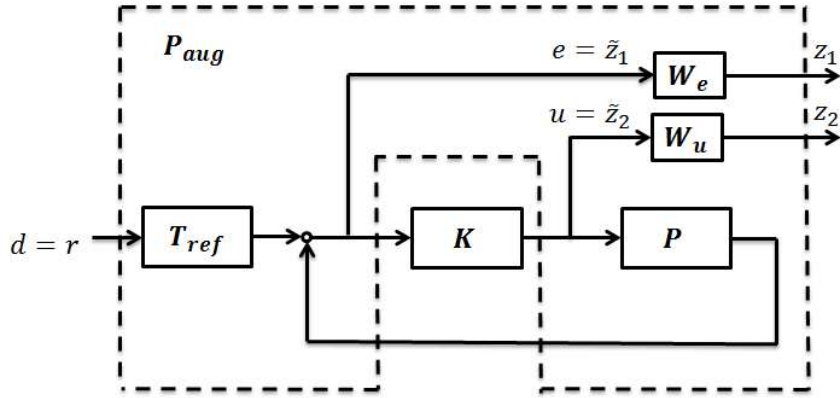
W_n ölçüm gürültüsü filtresidir. W_n frekans tabalı olarak değişebilir fakat birçok uygulamada kontrolcünün boyutları da düşünülerek sabit alınabilir. Alternatif olarak, W_n düşük frekanslarda alçak değerde, yüksek frekanslarda yüksek değerde seçilerek yüksek frekanstaki gürültüyü daha fazla cezalandırılabilir.

Bu prensipler ışığında Şekil 4.1 Şekil 4.2, Şekil 4.3'de verilen konfigürasyonlar denenmiştir ve en iyi sonuç alınan Şekil 4.3 verilen yapı ile devam edilmiştir. Bunun

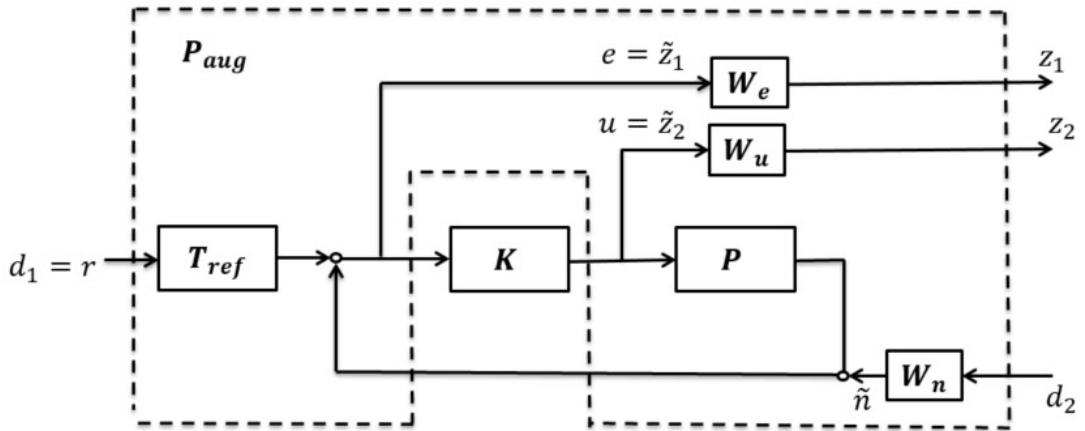
sebebi hem referans model takibini sağlaması hem de ölçüm gürültüsünü de hesaba katıyor olmasıdır.



Şekil 4.1 : Karma hassasiyet referans izleme.



Şekil 4.2 : Karma hassasiyet referans model izleme.



Şekil 4.3 : Karma hassasiyet referans model izleme ölçüm gürültüsü.

Doğrusal olmayan modelin doğrusallaştırılmasından elde edilen yerel modeller, doğrusal zamanla değişmez sistemlerin kümesidir ve şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x + B_{1i} d + B_2 u \\ z &= C_{1i} x + D_{11i} d + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} d \end{aligned} \quad (4.10)$$

Kontrol girdisini u , kontrol için ölçülen çıktıları y ile gösteriyoruz. Kontrol girdileri $u := [u_{coll} \ u_{lon} \ u_{lat} \ u_{ped}]$ ve kontrol edilecek model çıktıları $y = [u_b \ v_b \ w_b \ r]$ şeklinde tanımlanmıştır.

Dinamik çıkış geribildirimini \mathcal{H}_∞ sentezi, sistem modeli ile aynı boyutlara sahip bir dinamik denetleyiciyi üretir. Elde edilen yerel denetleyiciler, doğrusal zamanla değişmez sistemlerdir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_{ci} x_c + B_{ci} y \\ u &= C_{ci} x_c + D_{ci} y \end{aligned} \quad (4.11)$$

Kapalı döngü dinamikleri şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cli} & \mathcal{B}_{cli} \\ \mathcal{C}_{cli} & \mathcal{D}_{cli} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_i + B_2 D_{ci} C_2 & B_2 C_{ci} & B_{1i} + B_2 D_{ci} D_{21} \\ B_{ci} C_{2i} & A_{ci} & B_{ci} D_2 \\ C_{1i} + D_{12} D_{ci} C_2 & D_{12} C_{ci} & D_{11i} + D_{12} D_{ci} D_{21} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.5 Yerel \mathcal{H}_∞ Kontrolcileri için Kararlılık Sınırları

Bu bölümde ilk olarak doğrusal sistem ailesi için yerel denetleyiciler tasarlanmıştır. İlk olarak denetleyiciler tasarlanırken Lyapunov fonksiyonu üzerine bir kısıt tanımlamıyoruz. Burada kontrolcü tasarlanırken birbirinden bağımsız bir çözüm yapıyoruz. Daha sonra ortak bir Lyapunov fonksiyonuna dayalı bir tasarım yapılmıştır. \mathcal{P} 'nin tüm kullanım alanını, tasarım noktaları arasındaki alt kümelerin ($\{\mathcal{P}_I\}_{I \in Z_{N-1}}$) birleşimi olarak tanımlarsak. Index kümesi $Z_{N-1} = \{1, 2, \dots, N-1\}$ için kullanım alanının tamamı $\mathcal{P} := \cup_I \{\mathcal{P}_I\}$ olarak tanımlanmış olur. Bitişik tasarım noktaları arasında parametre değiştikçe sistem dinamiklerinin doğrusal olarak değiştiğini varsayıyoruz. Bu varsayım, yerel doğrusallaştırmalar birbirine yeterince yakınsa pratik olarak geçerlidir. Aşağıda, \mathcal{H}_∞ Kontrolcülerinin çoklu ve tekil Lyapunov fonksiyonları ile sentezlenmesi için gerekli koşulları belirtilmektedir.

Teorem 4.1:(Yerel \mathcal{H}_∞ Sentezi Karesel Performans) \mathcal{H}_∞ problemine yerel doğrusallaştırma ailesi için ancak ve ancak

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T X_i + X_i A_i + \varepsilon X_i & X_i B_1 & C_1^T \\ B_1^T X_i & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i^T + \varepsilon Y_i & Y_i C_1^T & B_1 \\ C_1 Y_i & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (4.15)$$

sağlandığında yerel bir sentez kapalı çevrim sistemi $\frac{\varepsilon}{2}$ üstel bozunma ile sağlar ve karesel performans $\max(\gamma_i)$ 'i garanti eder.

Burada N_X ve N_Y , (C_2, D_{21}) ve (B_2^T, D_{12}^T) 'nin boş uzaylarının tabanlarıdır.

İspat: Her bir çalışma noktasında standart \mathcal{H}_∞ sentezi problemi üssel çökme ek kısıtı ile çözülür. Kapalı çevrim sistem için Lyapunov fonksiyonu şu şekilde oluşturulabilir:

$Z_i = \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & (X_i - Y_i^{-1})^{-1} \end{bmatrix}$ ve kapalı döngü aşağıdaki matris eşitsizliğini karşılar:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cli}^T Z_i + Z_i \mathcal{A}_{cli} + \varepsilon Z_i & Z_i \mathcal{B}_{cli} & \mathcal{C}_{cli}^T \\ \mathcal{B}_{cli}^T Z_i & -\gamma I & \mathcal{D}_{cli}^T \\ \mathcal{C}_{cli} & \mathcal{D}_{cli} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

Yukarıdaki analiz eşitsizliğinin küçük bir değişiklikle yerel tasarım noktalarında kapalı döngü sisteminin üstel bozunma sağladığı gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \left(\mathcal{A}_{cli}^T + \frac{\varepsilon}{2} \right) Z_i + Z_i \left(\mathcal{A}_{cli}^T + \frac{\varepsilon}{2} \right) & Z_i \mathcal{B}_{cli} & \mathcal{C}_{cli}^T \\ \mathcal{B}_{cli}^T Z_i & -\gamma I & \mathcal{D}_{cli}^T \\ \mathcal{C}_{cli} & \mathcal{D}_{cli} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

Tüm yerel performans sınırlarının maksimumu, γ küresel performans sınırı olarak seçilir. \mathcal{H}_∞ sentez probleminin kanıtı standart bir şekilde izlenebilir. Elde edilen sonuçlar tüm yerel LTI sistemleri için geçerlidir ve elde edilen kontrolcüler, sınırlı gerçek lemmanın bir sonucu olarak tüm tasarım noktalarında kapalı döngü sistemi için üstel olarak kararlıdır ve karesel performansı garanti eder. [69]. ■

Açıklama 4.1: εX_i ve εY_i teorem açıklamasında kapalı çevrim sistem üzerinde üssel bir kısıt olarak konulmuştur. Ayarlama parametresinin yeterince yavaş değiştiğini varsayarsak, iki bitişik tasarım noktası arasındaki kapalı döngü sisteminin kararlılığını ve performansını garanti eden kontrolcülerin sentezi üssel kutup kısıtı ile beraber

çözülmemektedir. Bu kısıtlama, \mathcal{H}_∞ sentezinde kutup / sıfır iptallerinin problemini de hafifletir.

Teorem 4.2 (Yerel \mathcal{H}_∞ kontrolcülerinin ayarlama parametresinin değişim oranı ile interpolasyonu) *Ayarlama parametresi yeterince yavaş olduğunda birden fazla Lyapunov fonksiyonuna sahip yerel \mathcal{H}_∞ denetleyicileri iki bitişik tasarım noktası arasında interpolate edilebilir ve kapalı döngü sisteminin istikrar ve performansı garanti edilebilir.*

İspat: Z_i ve Z_{i+1} kapalı çevrim sistem için i ve $(i + 1)$ tasarım noktalarındaki Lyapunov fonksiyonları olsun. Burada kapalı döngü sisteminin, iki bitişik tasarım noktası arasında kararlı ve γ 'dan daha küçük karesel performansı sağlamasını istiyoruz.

İki tasarım noktası arasındaki kapalı döngü sistemin Lyapunov fonksiyonunun, iki bitişik tasarım noktası arasında doğrusal olarak değiştiğini kabul edersek. Ara noktadaki Lyapunov fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$Z_I(\alpha_2, \alpha_1) := \alpha_1 Z_i + \alpha_2 Z_{i+1}.$$

Z_I parametreye bağımlı bir Lyapunov fonksiyonudur. Başka bir ifade ile parametreye bağımlı Lyapunov fonksiyonu tanımlanır:

$$Z_I(\rho) := Z_i + \rho(Z_{i+1} - Z_i) = Z_i + \rho Z_{i\alpha}$$

burada $\alpha_2 = \rho$, ve $\alpha_1 = 1 - \rho$. α_1 ve α_2 konveks kombinasyon şeklinde yazılır yani $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ve $\alpha_i \geq 0$. Lyapunov fonksiyonu $Z_I(\rho)$, tasarım noktaları arasında değiştiği için Lyapunov fonksiyonunu zamandaki değişimini yazarken $z^T \dot{Z}_I(\rho) z$ ρ parametresinin zamanda değişimi de dikkate alınmalıdır. Yani $z^T Z_I(\rho) z > 0$ iken $z^T \dot{Z}_I(\rho) z \leq \gamma^2 d^T d - z^T z$ şartı sağlanmalıdır. [50] Daha açık yazacak olursak;

$$\mathcal{A}_{cl}^T(\rho) Z_I + Z_I \mathcal{A}_{cl}(\rho) + Z_{i\alpha} |\beta| \leq \gamma^2 d^T d - z^T z$$

burada $\beta = \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Ayarlama parametresi sabit iken $\rho = 0$ veya $\rho = 1$, $\mathcal{A}_{cl}^T(\rho) Z_I + Z_I \mathcal{A}_{cl}(\rho) \leq \gamma^2 d^T d - z^T z - \varepsilon Z_I$ Teorem 1'in sonucundan açıkça sağlandığı görülebilir. Burada β üzerine bir kısıt koyarak $\varepsilon Z_I \geq Z_{i\alpha} |\beta|$ yukarıdaki ifadenin sağlandığı koşullara ulaşabiliriz $z^T \dot{Z}_I(\rho) z \leq \gamma^2 d^T d - z^T z$. Sonuç olarak $|\beta| \leq \varepsilon \frac{z^T Z_I z}{z^T Z_{i\alpha} z}$ ile kısıtlı iken Lyapunov fonksiyonunu zamandaki değişiminin negatif olduğunu söyleyebiliriz. Daha açık bir şekilde yazacak olursak:

1) $Z_i < Z_{i+1}$ durumu $\varepsilon z^T Z_i z \geq \beta z^T Z_{i\alpha} z$ gerektirir, yani $\beta \leq \varepsilon \frac{\lambda_{\min}(Z_i)}{\lambda_{\max}(Z_{i\alpha})}$ olmalıdır.

2) $Z_{i+1} < Z_i$ durumu $\varepsilon z^T Z_{i+1} z \geq \beta z^T Z_{i\alpha} z$ gerektirir, yani $\beta \leq \varepsilon \frac{\lambda_{\min}(Z_{i+1})}{\lambda_{\max}(Z_{i\alpha})}$ olmalıdır.

3) $Z_{i+1} = Z_i$, durumu tek bir Lyapunov fonksiyonu bulunması durumudur ve $\beta \rightarrow \infty$.
Sonuç olarak

$$|\beta| \leq \varepsilon \frac{\min(\lambda_{\min}(Z_i), \lambda_{\min}(Z_{i+1}))}{\lambda_{\max}(Z_{i\alpha})} \quad (4.18)$$

β yukardaki gibi kısıtlı olduğunda, iki bitişik tasarım noktası arasında interpolate edilen kontrolcüler ara noktalarda da kapalı döngü sisteminin kararlılığını ve performansını garanti eder. ■

Theorem 4.3: (Yerel \mathcal{H}_∞ Kontrolcülerin Ortak Lyapunov fonksiyonuyla eşzamanlı Sentezi) \mathcal{H}_∞ problemine yerel doğrusallaştırma ailesi için ancak

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i + \varepsilon X & X B_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i Y + Y A_i^T + \varepsilon Y & Y C_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (4.21)$$

sağlandığında yerel bir sentez kapalı çevrim sistemi $\frac{\varepsilon}{2}$ üstel bozunma ile sağlar ve karesel performans γ 'ı garanti ediyor.

İspat: Her çalışma noktasında ortak bir Lyapunov fonksiyonu kullanıldığından, yerel kontrolcüler Teorem 4.2'den sınırsız değişim oranı ile doğrusal olarak interpolate edilebilir. Üstelik yukarıdaki DME'lerinin çözümünün Teorem 4.1'in gerekliliklerini hali hazırda yerine getirdiği ve dolayısıyla üstel bozunma ve performans kriterlerini sağlamaktadır. Bu nedenle, bu teorem Teorem 4.1'in daha güçlü bir biçimi olarak görülebilir. ■

Açıklama 4.2: Bu teorem, yerel LTI sistemleri için geçerlidir ve elde edilen kontrolcüler, tasarım noktalarında kapalı döngü sistemi için kararlı ve γ karesel performansı garantili bir tasarımı mümkün kılmaktadır. Kapalı devre sistemi için ortak Lyapunov fonksiyonu şu şekilde oluşturulabilir:

$$Z = \begin{bmatrix} X & I \\ I & (X - Y^{-1})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ortaya çıkan yerel denetçiler, kontrolcünün yerel modellerine bağımlı olması nedeniyle birbirinden farklıdır. Bununla birlikte, ortak Lyapunov fonksiyonu kapalı döngü sistemin ve denetleyicilerin aynı durum yapısına sahip olmasını sağlar. Teorem 4.3 Teorem 4.1'den daha muhafazakâr sonuçlar verir, çünkü birden fazla Lyapunov fonksiyonundan ziyade sabit bir Lyapunov fonksiyonu kullanır. Bununla birlikte, zamanlama değişkeninin sınırsız değişme oranı sağlar. $\beta \rightarrow \infty$, Teorem 4.1'den gelen sonuçlar Teorem 4.3'ün sonuçlarına yakınsar. Değişim hızı sonsuza giderken $Z_{i\alpha} \rightarrow 0$ ve sonuç olarak lineer modeller ailesi için ortak bir Lyapunov fonksiyonu bulunmalıdır.

4.6 Yerel \mathcal{H}_∞ Kontrolcülerini Kontrol Sinyali Harmanlama

Çeşitli çalışma noktalarında birbirinden bağımsız olarak tasarlanan kontrolcüler, farklı durum uzayına sahip denetleyicilere yol açabilir. Bu durum kontrolcü sistem matrislerinin basit bir şekilde interpolate edilemeyeceğini göstermektedir. Bu durumu çözmek için, kontrolcü sistem matrisler yerine kontrol çıktısı sinyalleri, interpolate edilebilir. Önceki bölümlerde teorik olarak garanti edilen, ancak muhafazakâr olan Lyapunov temelli yaklaşımlarla karşılaştırma yapmak için, daha az muhafazakâr ama herhangi bir garanti içermeyen kontrol sinyali harmanlama yöntemi uyguluyoruz. Tam uçuş zarfını \mathcal{P} olarak temsil edersek, bu uçuş zarfını $N-1$ alt alana bölebiliriz. Alt alanlar ise i ve $i+1$ tasarım noktası için \mathcal{P}_i alt alanı tanımlanmıştır. Ardından, her denge koşulu için N bağımsız kontrol cihazı tasarlanır. Kontrol çıktısı, iki tasarım noktası i ve $i+1$ arasındaki \mathcal{P}_i bölgesi boyunca aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$u^b = (1 - \lambda)u_i + \lambda u_{i+1} \quad (4.22)$$

Burada u_i i 'inci kontrolcünün çıktısı ve u_{i+1} $(i + 1)$ 'inci kontrolcünün çıktısıdır.

İnterpolasyon kuralı

$$\lambda = \frac{\eta - \eta_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \quad (4.23)$$

şeklinde verilir. Burada η_i ve η_{i+1} i 'inci ve $(i + 1)$ 'inci tasarım noktalarını temsil etmektedir. Bunu yaparak ortaya çıkan kontrolcü kontrol çıkışlarını harmanlayarak farklı bir interpolasyon mekanizmasına sahip bir küresel (global) kontrolcü oluşturmaktadır.

4.7 Parametreye Bağımlı Doğrusal Değişen Kontrolcü Sentezi

Bu bölümde ileri hıza karşılık gelen ayarlama parametresinin çevrimiçi ölçümlerini kullanarak kendinden ayarlamalı parametreye bağımlı doğrusal değişen bir kontrolcü tasarımı yapılmıştır. Parametre bağımlılığı kendinden ayarlamaya izin veren doğrusal parametreye bağımlı olarak gösterilir. Doğrusal parametre bağımlı sistemi $P(\rho)$ şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\rho)x + B_1(\rho)d + B_2 u \\ z &= C_1(\rho)x + D_{11}(\rho)d + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}d + D_{22}u \end{aligned} \quad (4.24)$$

burada x durum uzayı, w harici bozucu sinyalleri, z minimize edilecek çıktılar, u kontrol girdileri ve y ölçülen çıktılardır. Tüm matrislerin uyumlu boyutlara sahip olduğunu kabul edelim. $A(\rho)$, $B_1(\rho)$, $C_1(\rho)$ ve $D_{11}(\rho)$ zamanla değişen parametre vektörü ρ 'ya bağlı olarak doğrusal olarak değişmektedir. Bunun yanında basit bir döngü dönüşümü ile $D_{22} = 0$ sağlanabileceği varsayılmaktadır. D_{12} tam sütun ve D_{21} tam satır boyutta olduğunu kabul edelim. Doğrusal parametre bağımlı sistemi bir doğrusal parametre bağımlı denetleyici $K(\rho)$ tarafından kontrol edilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c(\rho)x_c + B_c(\rho) y \\ u &= C_c(\rho)x_c + D_c(\rho)y \end{aligned} \quad (4.25)$$

ρ_1 ve ρ_2 arasında değişen ρ parametresinin çevrimiçi ölçümü ile kazanç otomatik olarak ayarlanmaktadır. Kendi kendini ayarlayan $K(\rho)$ denetleyicisi, kapalı döngü sistemini kararlı hale getirir ve sistemin \mathcal{L}_2 normunu asgariye indirir ve aşağıdaki teoremlerle elde edilir [71].

Teorem 4.4 (Karesel Performans Sentezi [71]): DPD problemi için kapalı çevrim kararlı ve Çıkarılmış \mathcal{L}_2 -normunun γ 'dan daha düşük olduğunu garanti eden bir sentez ancak ve ancak aşağıdaki ifadeler sağlandığında vardır.

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\rho)^T X + X A(\rho) & X B_1(\rho) & C_1^T(\rho) \\ B_1^T(\rho) X & -\gamma I & D_{11}^T(\rho) \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A(\rho)Y + Y A^T(\rho) & Y C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)Y & -\gamma I & D_{11}(\rho) \\ B_1^T(\rho) & D_{11}^T(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (4.28)$$

Bir matris politopu sonlu sayıdaki matrislerin konveks bileşimi olarak tanımlanır

$$\text{Co} \{M_i, i = 1:r\} := \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}.$$

Teorem 4.5 (Tepe Özelliği [71]): Yukarıda verilen doğrusal zamanla değişen (DPD) modelin aşağıdaki şartı sağladığını varsayarsak

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B_1(\rho) & B_2 \\ C_1(\rho) & D_{11}(\rho) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \in P := \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11} & D_{12} \\ C_{2i} & D_{21i} & 0 \end{bmatrix} : i = 1:2 \right\} \quad (4.29)$$

Daha sonra, Teorem 4.4'te verilen sınırsız sayıda LMI'nin çözülebilirliği, aşağıda verilen sınırlı sayıda LMI'nin çözülebilirliğine denktir.

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.30)$$

$i = 1:2$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i Y + Y A_i^T & Y C_{1i}^T & B_{1i} \\ C_{1i} Y & -\gamma I & D_{11i} \\ B_{1i}^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.31)$$

$i = 1:2$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0. \quad (4.32)$$

Açıklama 4.3: Zamana bağlı parametrelerle bir sistem için hiçbir transfer fonksiyonu elde edemediğimiz için, \mathcal{H}_∞ normundan ziyade, bir DPD sistemi için çıkarılmış \mathcal{L}_2 normunu kullanırız. Doğrusal parametre bağımlı denetleyici, her bir köşedeki iki doğrusal denetleyicinin konveks birleşiminden oluşmaktadır. Köşe noktalarındaki denetleyiciler oluşturulduktan sonra denetleyici politopik koordinatlarda şu şekilde verilir:

$$K(\alpha_1, \alpha_2) := \sum_{i=1}^2 \alpha_i \begin{bmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

burada $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1$, yani $\alpha_1 = \rho$ ve $\alpha_2 = 1 - \rho$. Ortaya çıkan DPD denetleyicisi, tüm parametre politop sınırları $\bar{\rho} = [0,1]$ içinde sonsuz parametre varyasyonları için kararlılık ve karesel performans sağlar. Köşe denetleyiciler, çevrimdışı olarak hesaplanır, ancak DPD denetleyici matrisleri $A_K(\rho)$, $B_K(\rho)$, $C_K(\rho)$ ve $D_K(\rho)$ ileri hız gerçek zaman ölçümlerine dayalı olarak çevrim içi olarak güncellenir. Ayarlama

parametresi olan toplam hız $V_t(t)$, kullanılarak $\rho(t) = 1 - \frac{V_t(t) - V_{t_1}}{V_{t_2} - V_{t_1}}$ elde edilir. V_{t_1} ve V_{t_2} ayarlama parametresinin köşeleridir. Dolayısıyla, sonuçta ortaya çıkan denetleyici şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
 A_K(\rho) &= A_{K1}\rho + A_{K2}(1 - \rho) \\
 B_K(\rho) &= B_{K1}\rho + B_{K2}(1 - \rho) \\
 C_K(\rho) &= C_{K1}\rho + C_{K2}(1 - \rho) \\
 D_K(\rho) &= D_{K1}\rho + D_{K2}(1 - \rho)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$V_t(t)$ zaman içerisinde V_{t_1} ve V_{t_2} arasında değıştikçe doğrusal parametreye bağımlı kontrolcü iki köşe noktasındaki kontrolcünün konveks birleşiminden oluşacaktır.

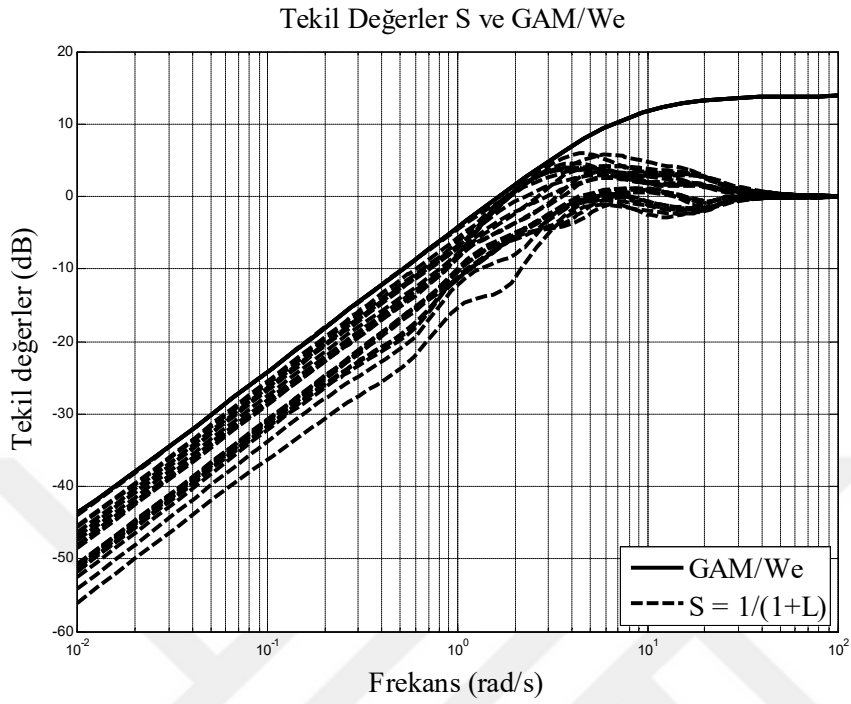
4.8 Benzetim Sonuçları

Kapalı çevrim sistem, helikopter modeli ve parametreye bağımlı kontrolcülerin birleşiminden oluşmaktadır. Benzetimler önce doğrusal modellerde ve daha sonra doğrusal olmayan model üzerinde gerçekleştirilir. Sentezlenen kontrolcü tüm eksenlerde kararlılık ve referans izleme gerçekleştirebilir. Doğrusal olmayan benzetim örneği olarak, parametrelere bağımlı kontrolcü boylamsal ekseninde referans izleme yapar ve diğer tüm eksenlerde dengeyi sağlar.

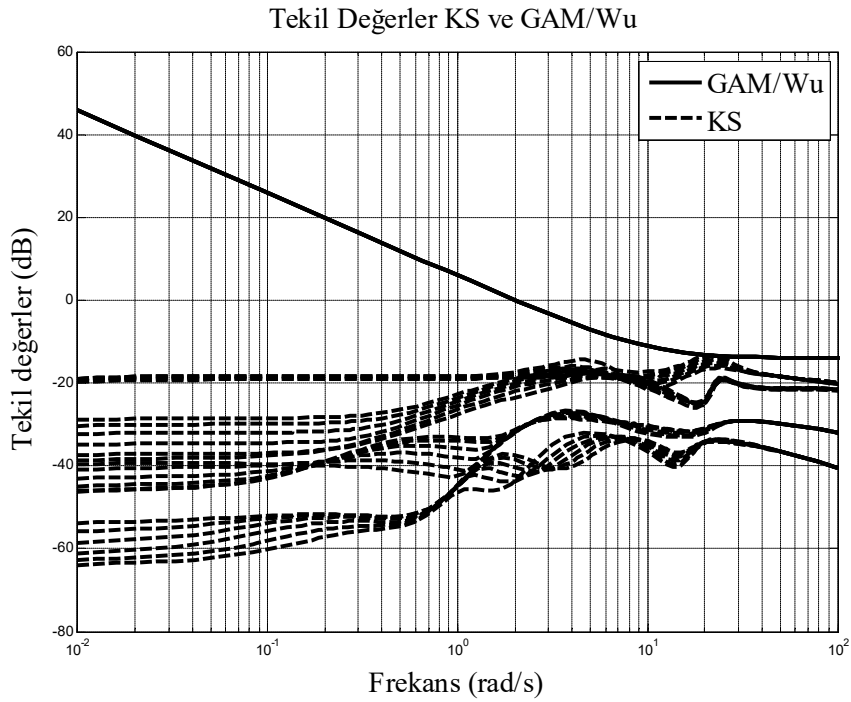
4.8.1 Yerel \mathcal{H}_∞ kontrolcüler

Öncelikle sentezlenen yerel \mathcal{H}_∞ kontrolcülerin her çalışma noktasında kapalı çevrim sistemin öz değerlerini kontrol ederek kapalı çevrim sistemini başarıyla kararlı hale getirdiğini doğruladık. Hassasiyet fonksiyonu (S) Şekil 4.4 gösterilmektedir. Kontrol hassasiyet fonksiyonu (KS) Şekil 4.5'te gösterilmektedir. Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu (T) Şekil 4.6 gösterilmektedir. Açık döngü kazancı (L) Şekil 4.7 gösterilmektedir. Bütün denge koşullarında tüm yerel kontrolcülerin zaman alanındaki yerel performansı Şekil 4.8-4.21'de gösterilmektedir. Kapalı döngü sisteminin Eklerde verilen referans modele oldukça benzer davranış gösterdiği görülebilir. Birbirinden bağımsız yapılan tasarımda $\gamma_1 = 0.8085$, $\gamma_2 = 0.7777$, $\gamma_3 = 0.8408$, $\gamma_4 = 0.9149$, $\gamma_5 = 1.0131$ ve $\gamma_6 = 1.1649$ elde edilmiştir. Birbirine bağımlı ortak Lyapunov fonksiyonu ile tasarım yapıldığında $\gamma_{com} = 1.6472$ elde edilmiştir. Ortak Lyapunov fonksiyonuna kıyasla birbirinden bağımsız tasarımda bulunan en kötü değere kıyasla

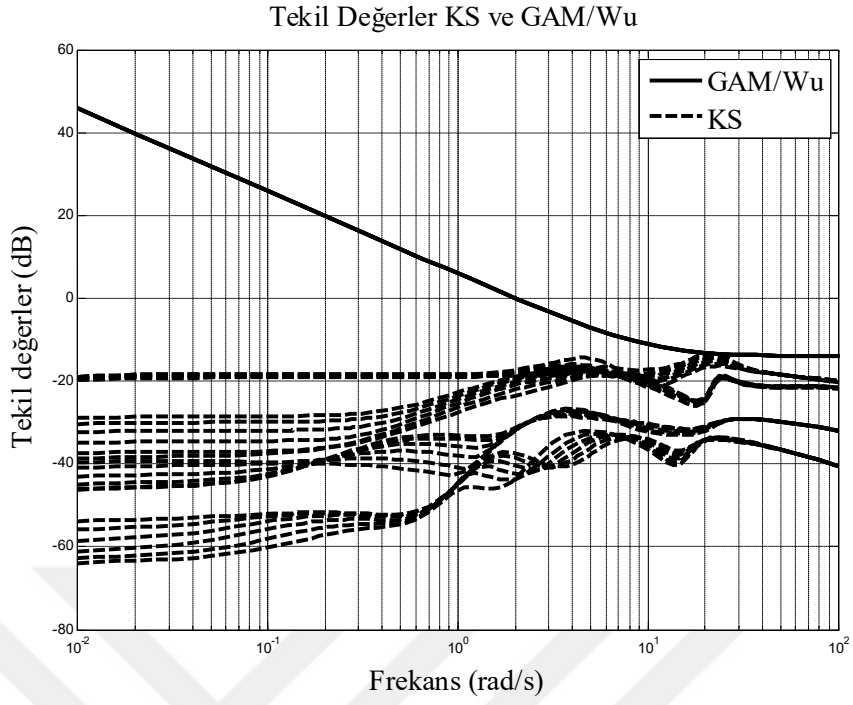
%41'lik bir artış olmuştur fakat bunun sayesinde ara noktalarda da kararlılık garantisi verilebilmiştir.



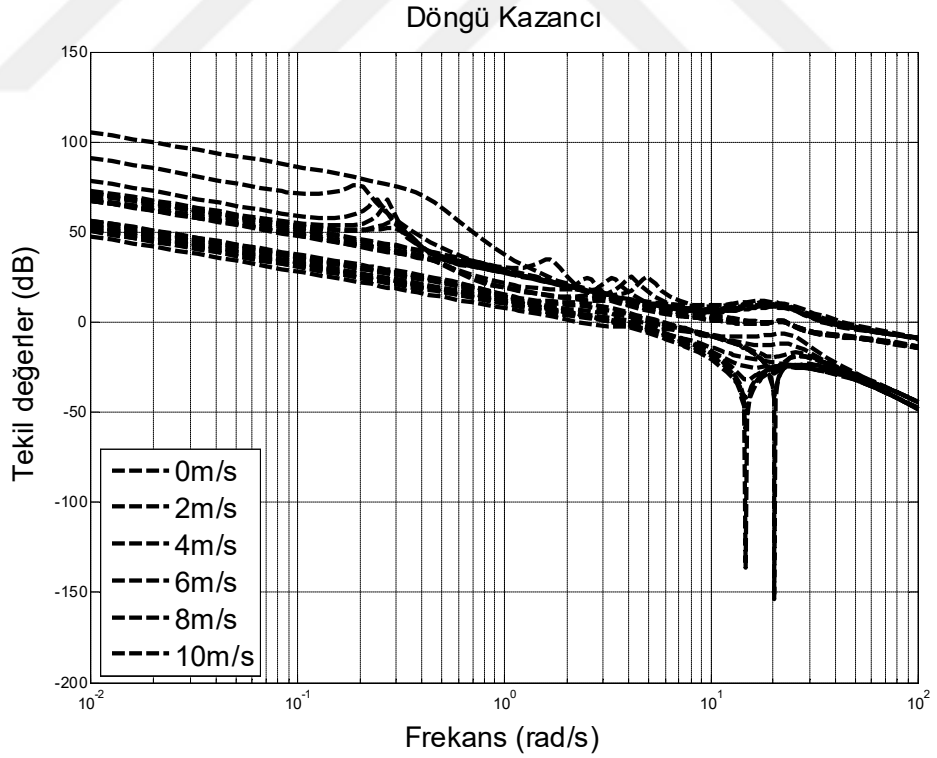
Şekil 4.4 : Hassasiyet (S) tekil değer fonksiyonları.



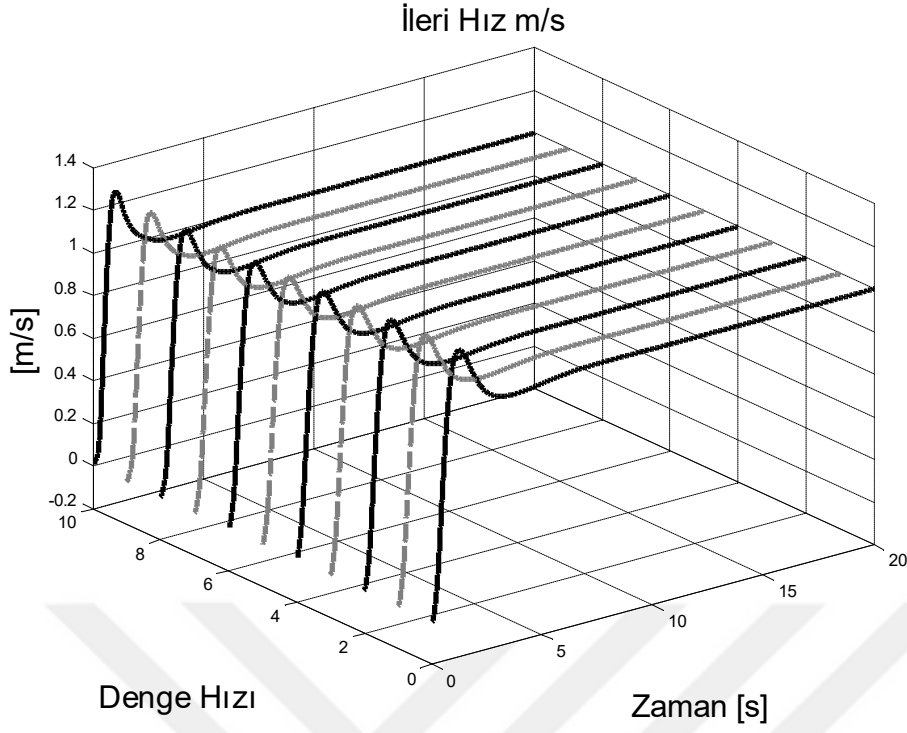
Şekil 4.5 : Kontrol hassasiyeti (KS) tekil değer fonksiyonları.



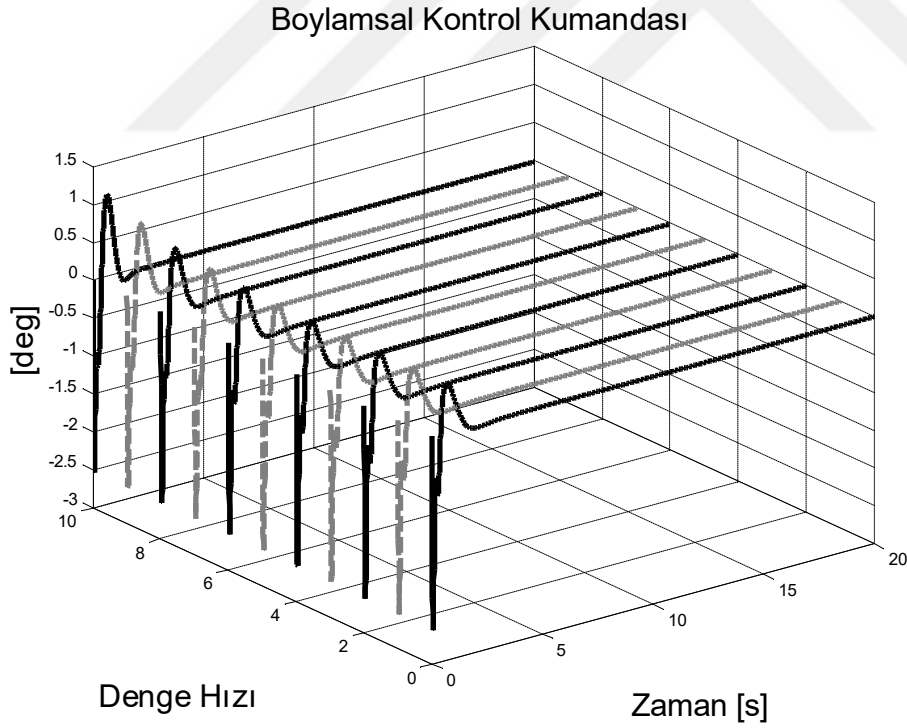
Şekil 4.6 : Tamamlayıcı hassasiyet (T) fonksiyonları.



Şekil 4.7 : Döngü kazancı (L) tekil değerler.



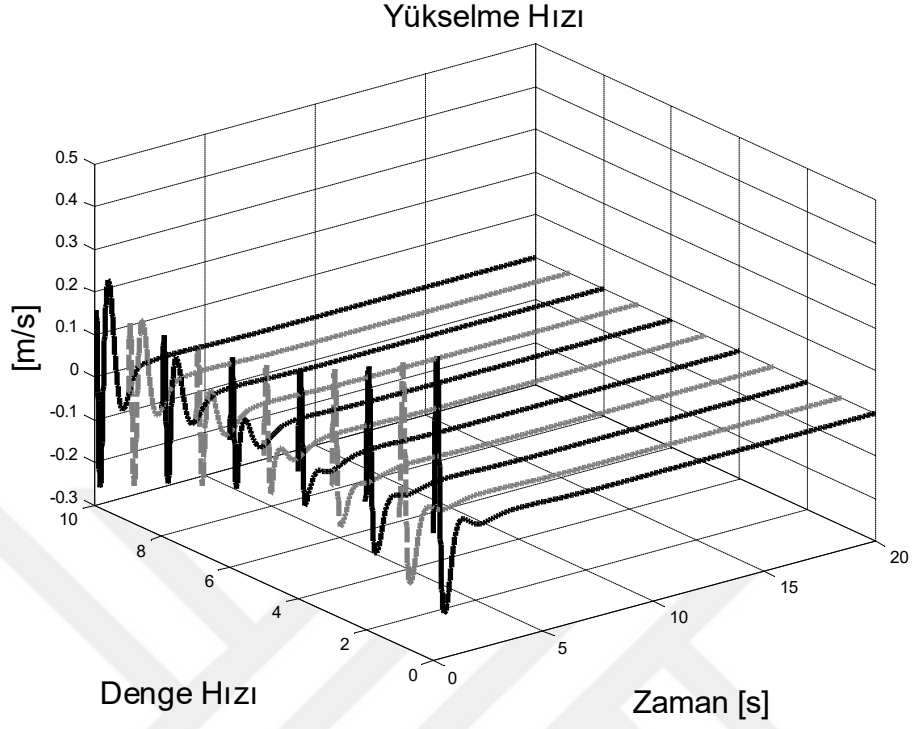
Şekil 4.8 : Yerel doğrusal modelde referans izleme ileri hız tutma.



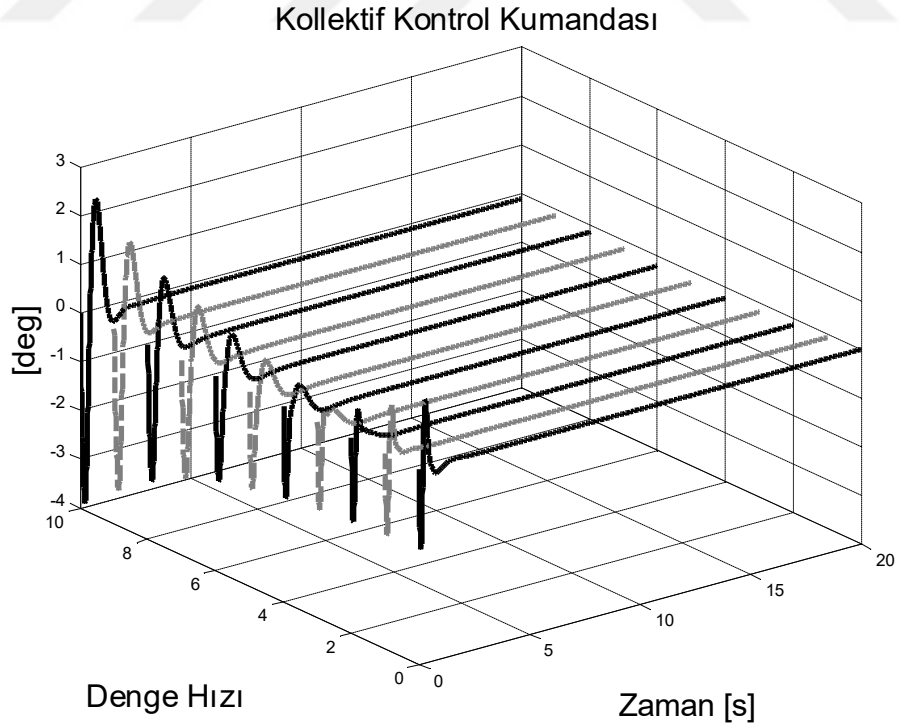
Şekil 4.9 : İleri hız tutma boylamsal kontrol kumandası.

Helikopterlerin aksenel olarak birbirine bağımlı sistemlerdir. Bu ektiyi ve bu ektinin kontrolcü tarafından bastırıldığını göstermek için Şekil 4.10-4.15’de birim ileri

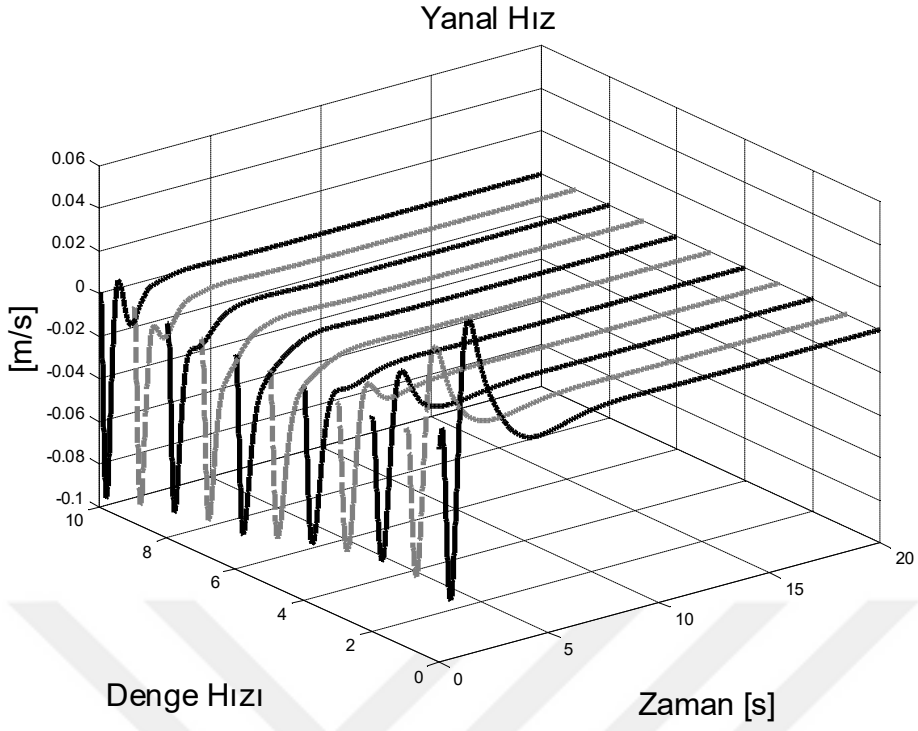
hızlanma verildiğinde diğer eksenlerde oluşan etkiler ve bu etkileri bastırmak için kullanılan kontrol kumandaları görülebilir.



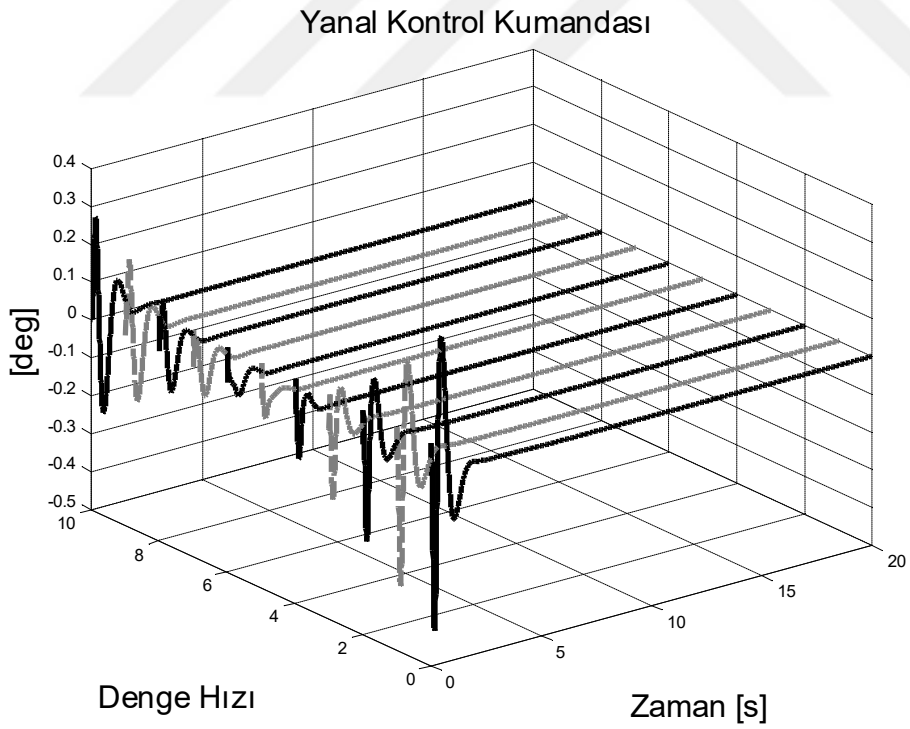
Şekil 4.10 : İzleme ileri hız tutma yükselme hızı etkileşimi.



Şekil 4.11 : İleri hız tutma kolektif kontrol kumandası.

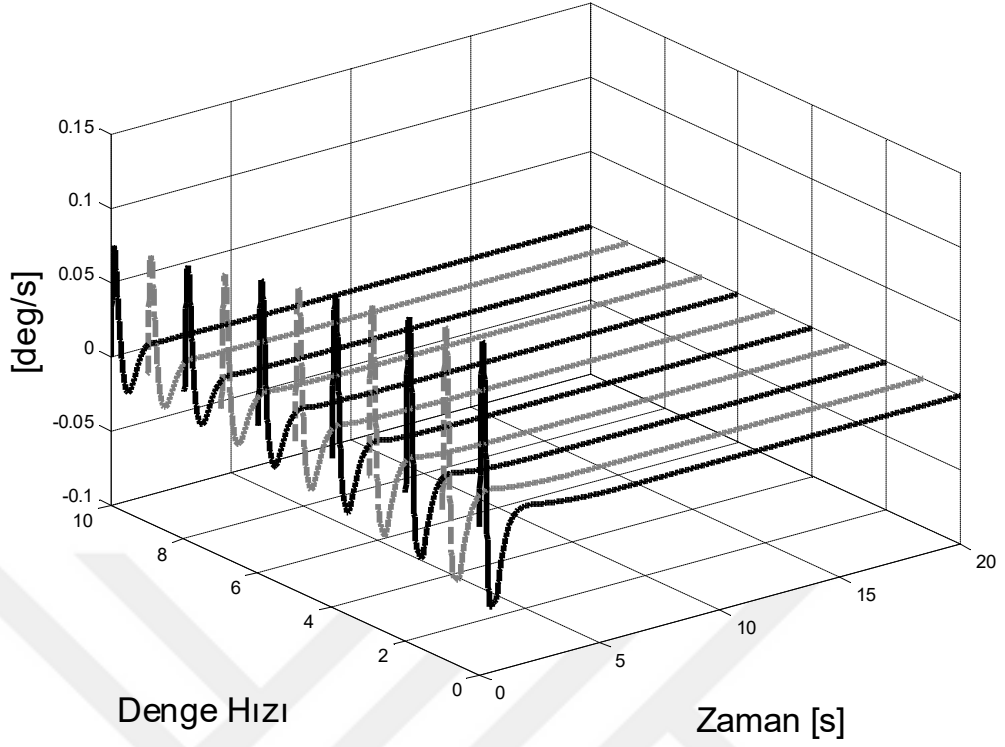


Şekil 4.12 : İzleme ileri hız tutma yanal hız etkileşimi.



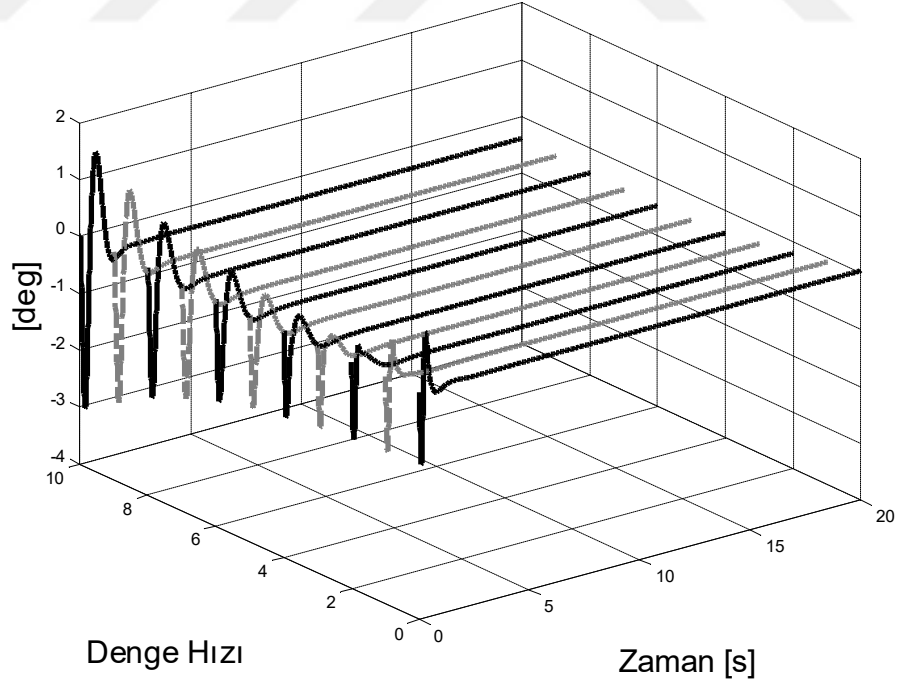
Şekil 4.13 : İleri hız tutma yanal kontrol kumandası.

Sapma açısal hızı R

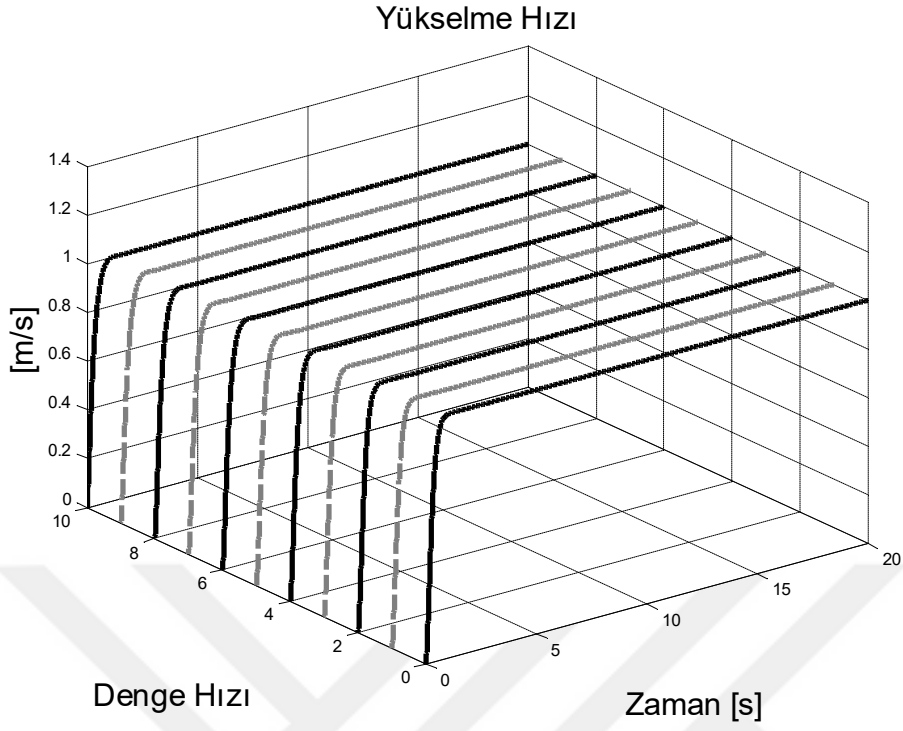


Şekil 4.14 : İzleme ileri hız tutma sapma açısı etkileşimi.

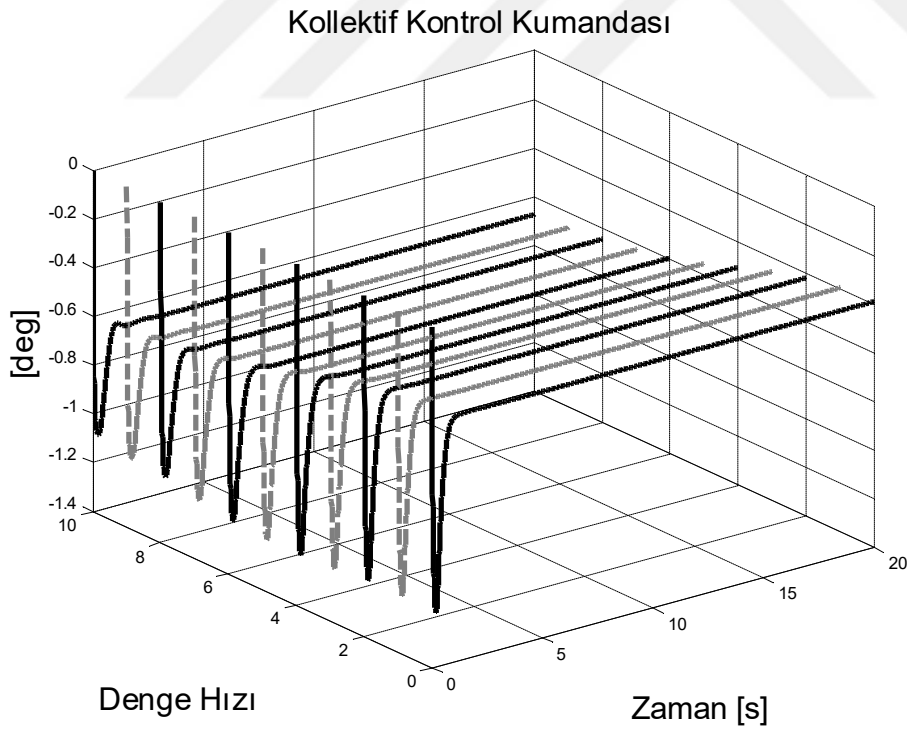
Kuyruk Rotoru Kontrol Kumandası



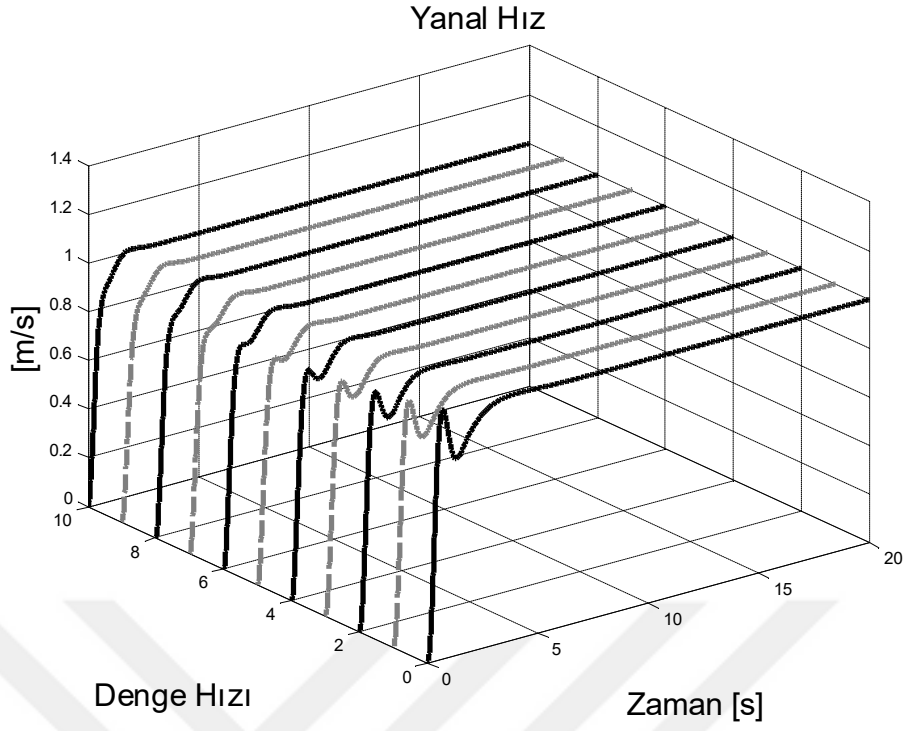
Şekil 4.15 : İleri hız tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.



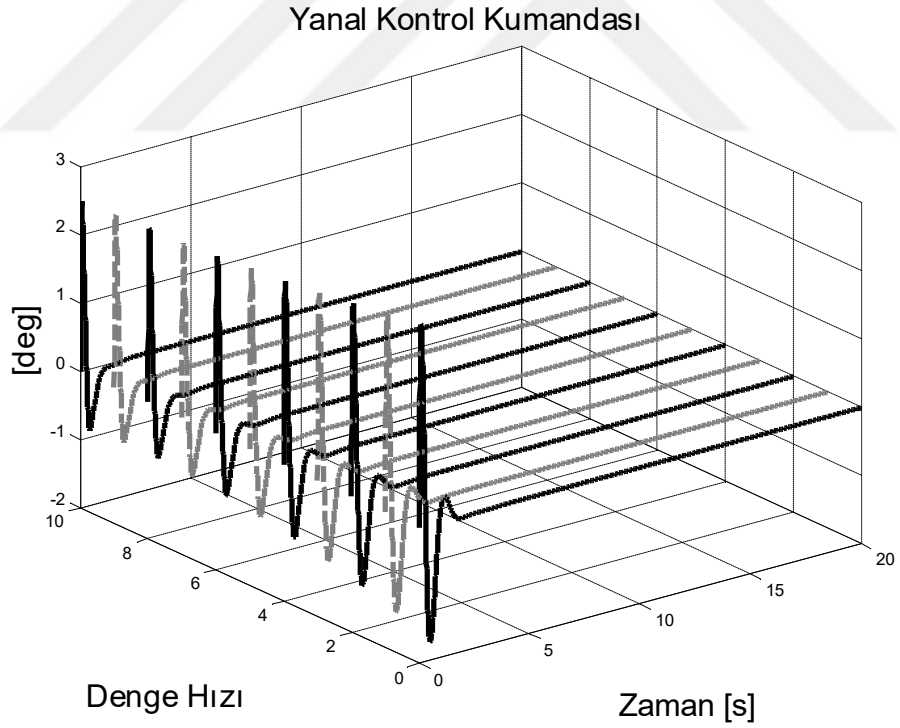
Şekil 4.16 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yükselme hızı tutma.



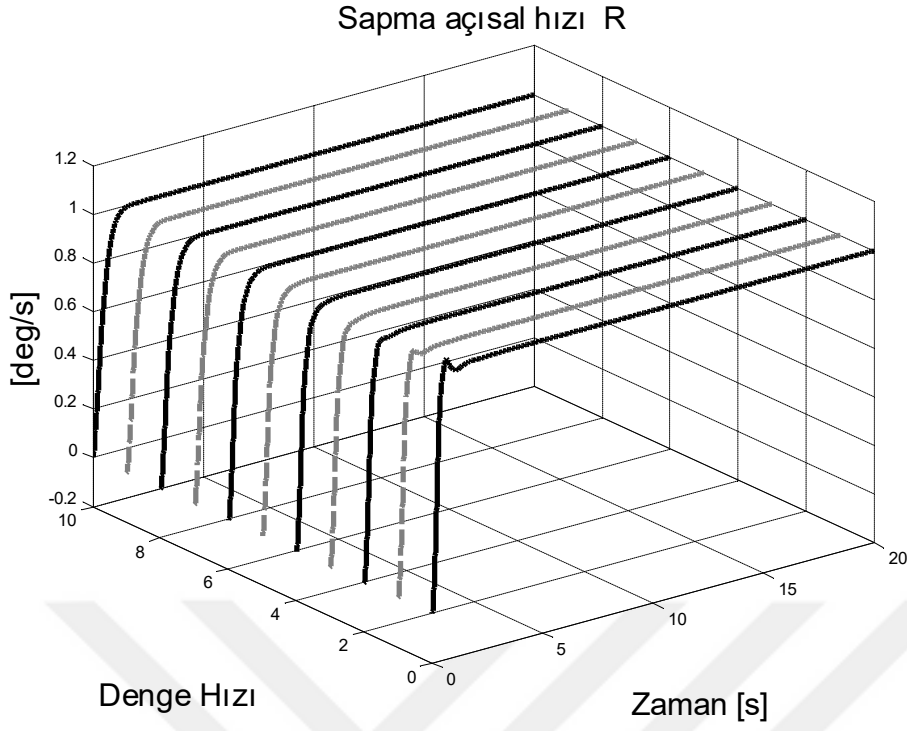
Şekil 4.17 : Yükselme hızı tutma kolektif kontrol kumandası.



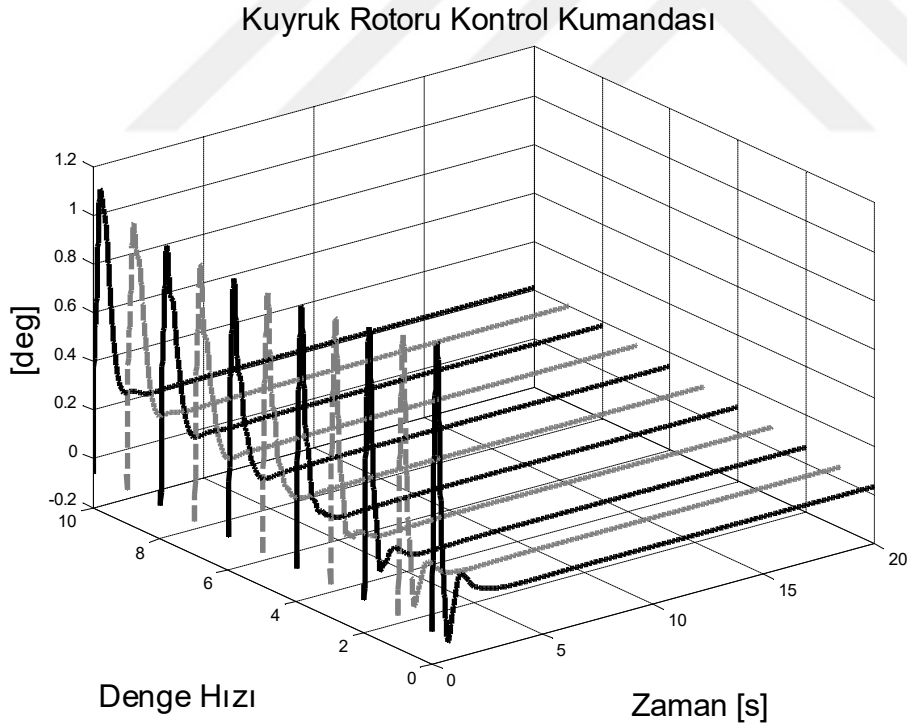
Şekil 4.18 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yanal hız tutma.



Şekil 4.19 : Yanal hız tutma yanal kontrol kumandası.



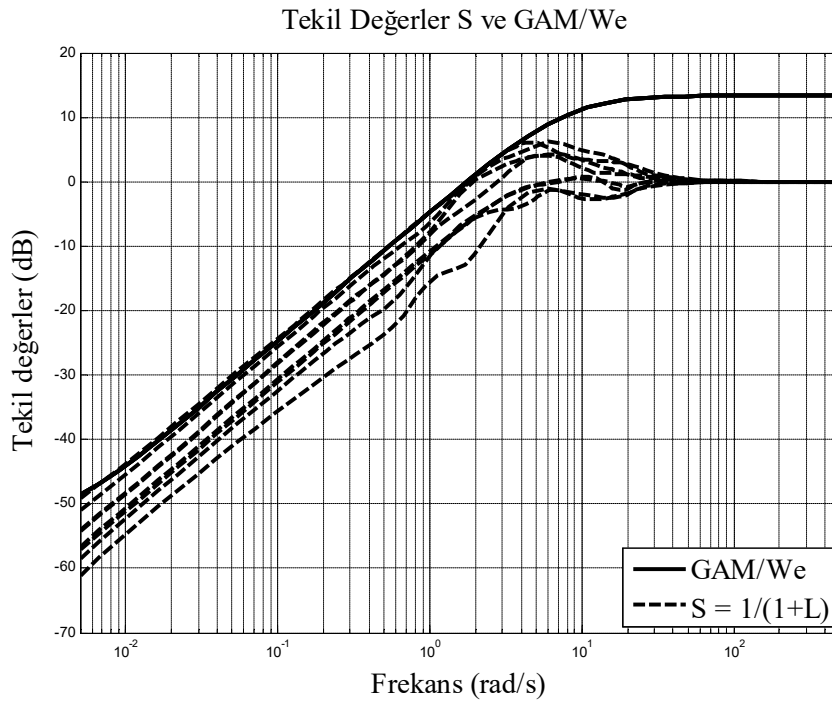
Şekil 4.20 : Yerel doğrusal modelde referans izleme sapma hızı tutma.



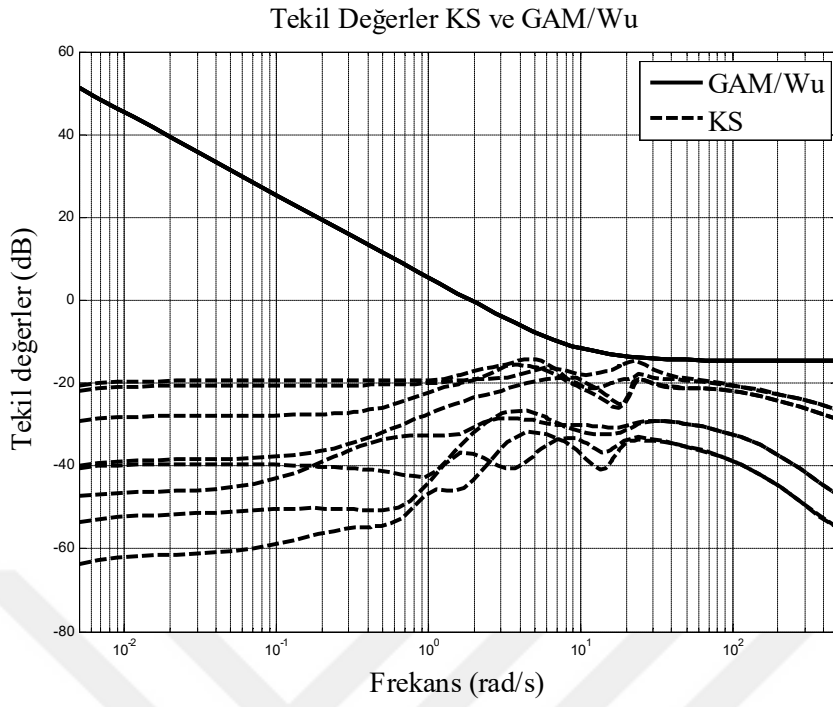
Şekil 4.21 : Sapma hızı tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.

4.8.2 Doğrusal parametre ile değişen kontrolcü

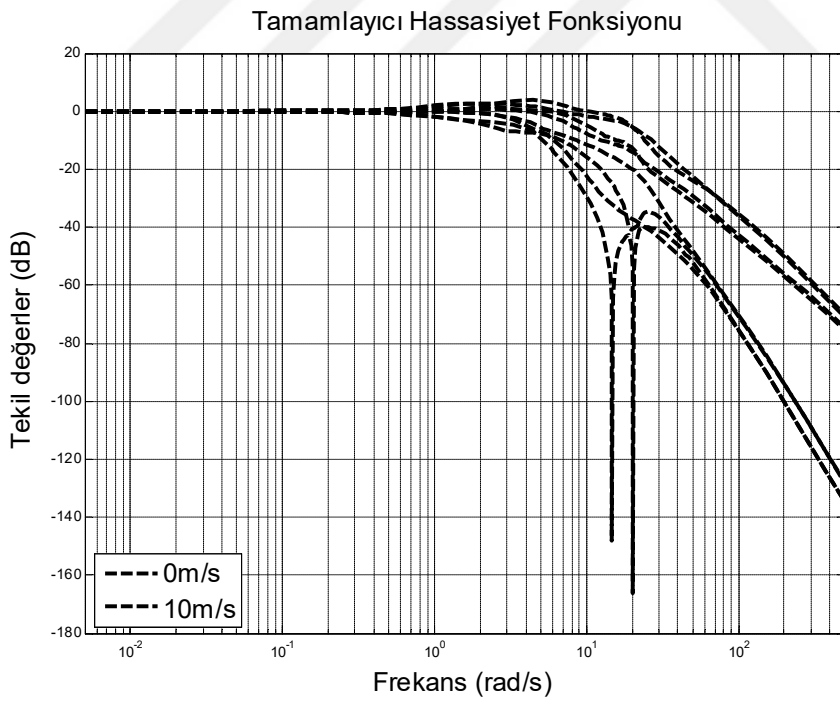
Hassasiyet fonksiyonu (S) Şekil 4.22 gösterilmektedir. Kontrol hassasiyet fonksiyonu (KS) Şekil 4.23'te gösterilmektedir. Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu (T) Şekil 4.24'de gösterilmektedir. Açık döngü kazancı (L) Şekil 4.25 gösterilmektedir. Hassasiyet fonksiyonu (S) tüm doğrusal model ailesi için çizildiğinde Şekil 4.26 hafif bir taşım olduğu görülebilir. Yaklaşık doğrusal parametresine bağımlı modellerin zaman alanındaki yerel performansları Şekil 4.27-4.34'de gösterilmektedir. Birbirinden bağımsız yapılan tasarımda köşe noktalarda $\gamma_1 = 0.8085$, ve $\gamma_6 = 1.1649$ elde edilmiştir. Birbirine bağımlı ortak Lyapunov fonksiyonu ile yaklaşık doğrusal parametre bağımlı tasarım yapıldığında $\gamma_{LPV} = 1.5542$ elde edilmiştir. Yaklaşık doğrusal parametre bağımlı tasarıma kıyasla birbirinden bağımsız tasarımda bulunan en kötü değerde %33'lik bir artış olmuştur.



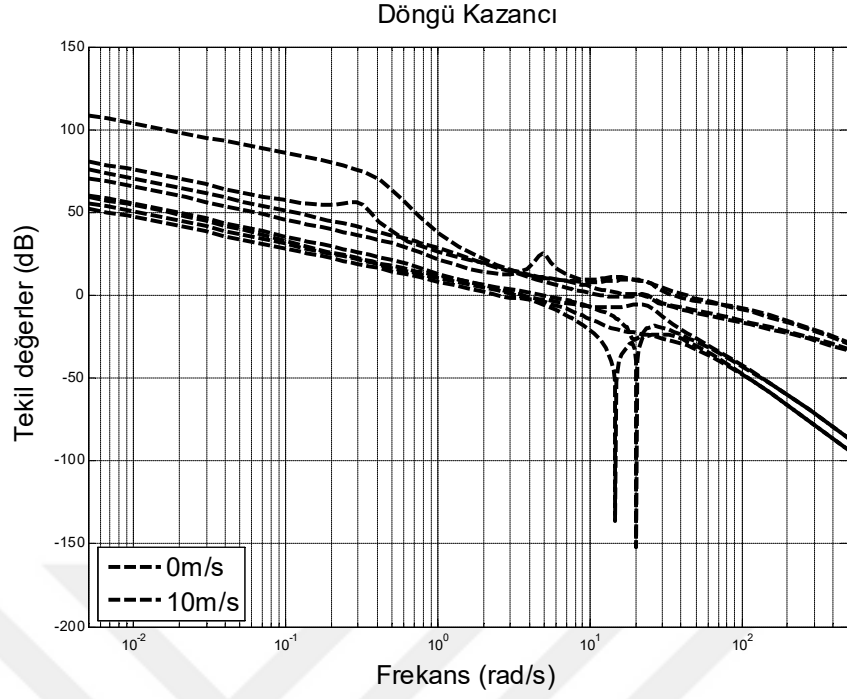
Şekil 4.22 : Hassasiyet (S) tekil değer fonksiyonları.



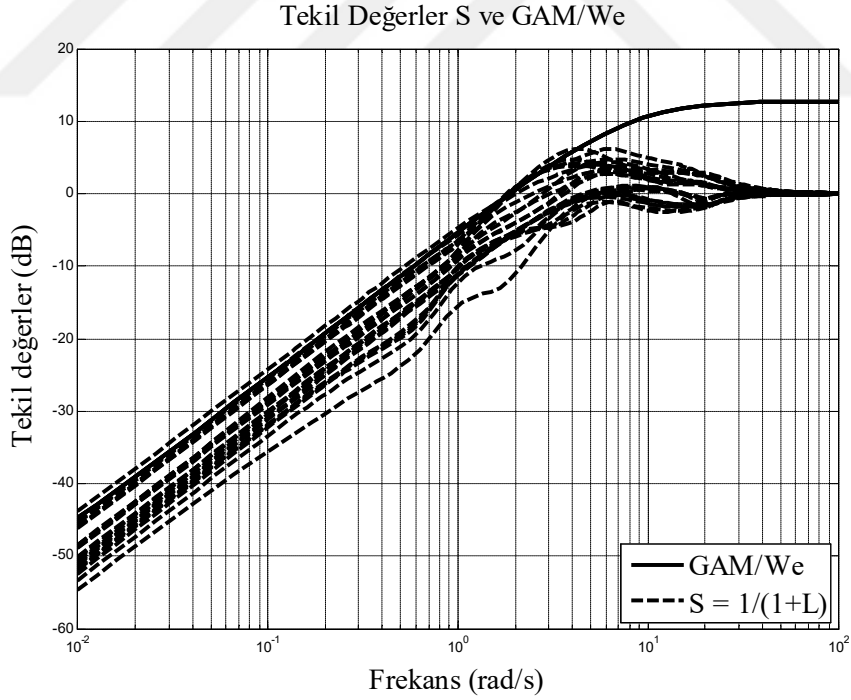
Şekil 4.23 : Kontrol hassasiyeti (KS) tekil değer fonksiyonları.



Şekil 4.24 : Tamamlayıcı hassasiyet (T) tekil değer fonksiyonları.

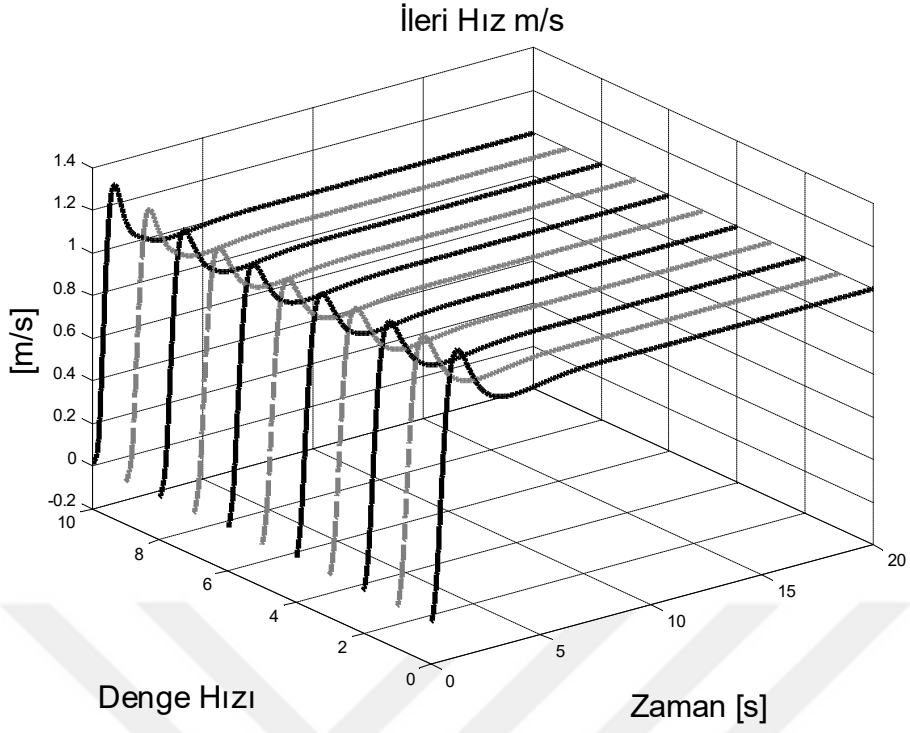


Şekil 4.25 : Döngü kazancı (L) tekil değerleri.

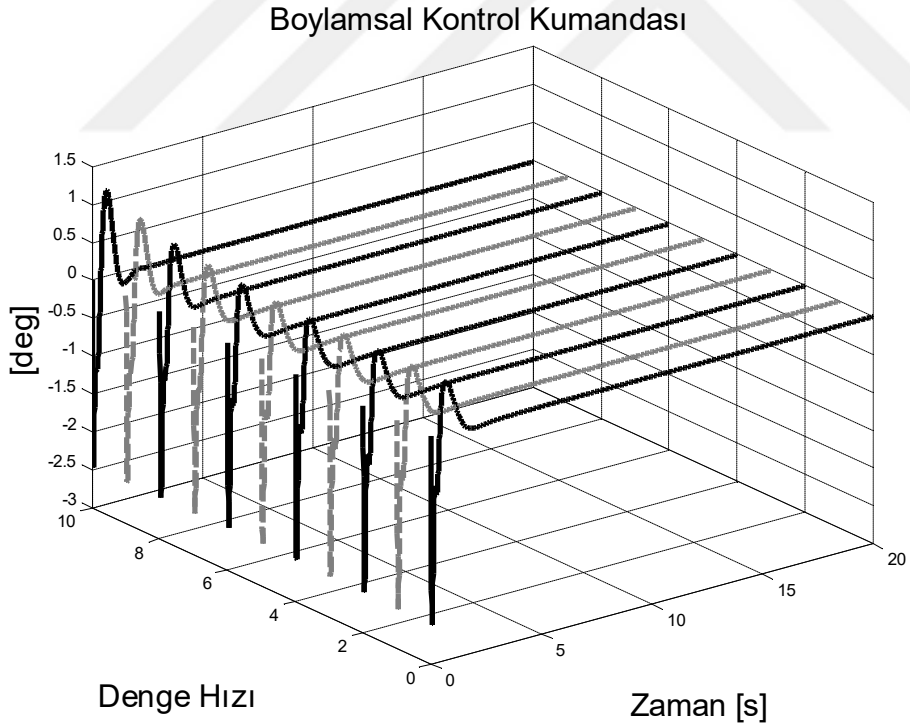


Şekil 4.26 : Hassasiyet (S) tekil değer fonksiyonları bütün tasarım noktaları.

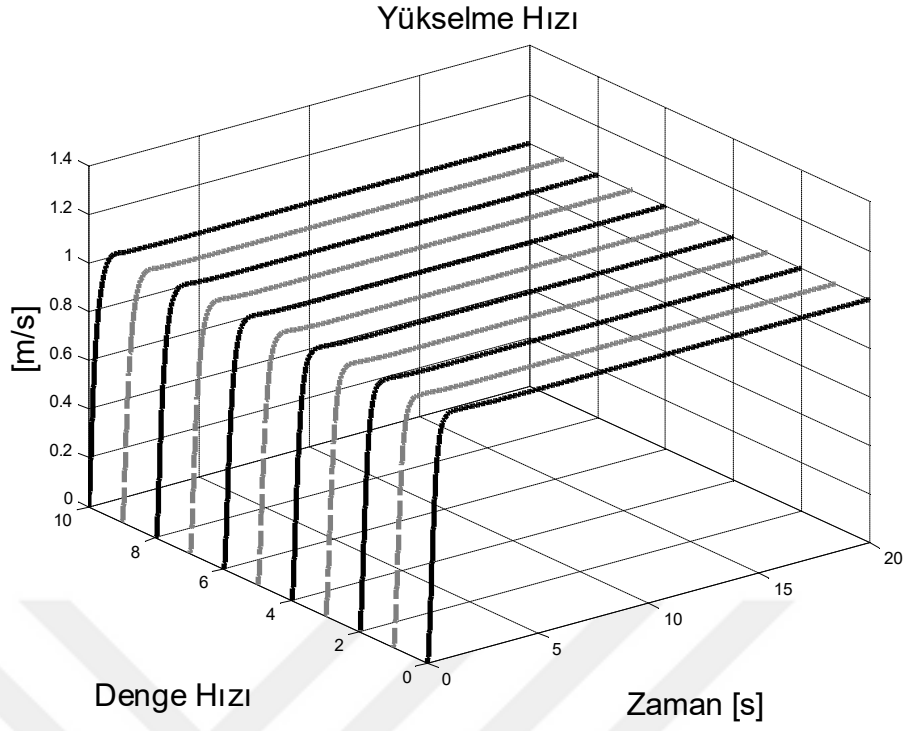
Tasarım doğrusal parametreye bağlı olarak yaklaşık bir model üzerinde olduğu için duyarlılık fonksiyonlarını diğer noktalarda sağlayamamaktadır. (Şekil 4.26). Yine de tasarımın kabul edilebilir bir duyarlılık fonksiyonuna sahip olduğunu söyleyebiliriz.



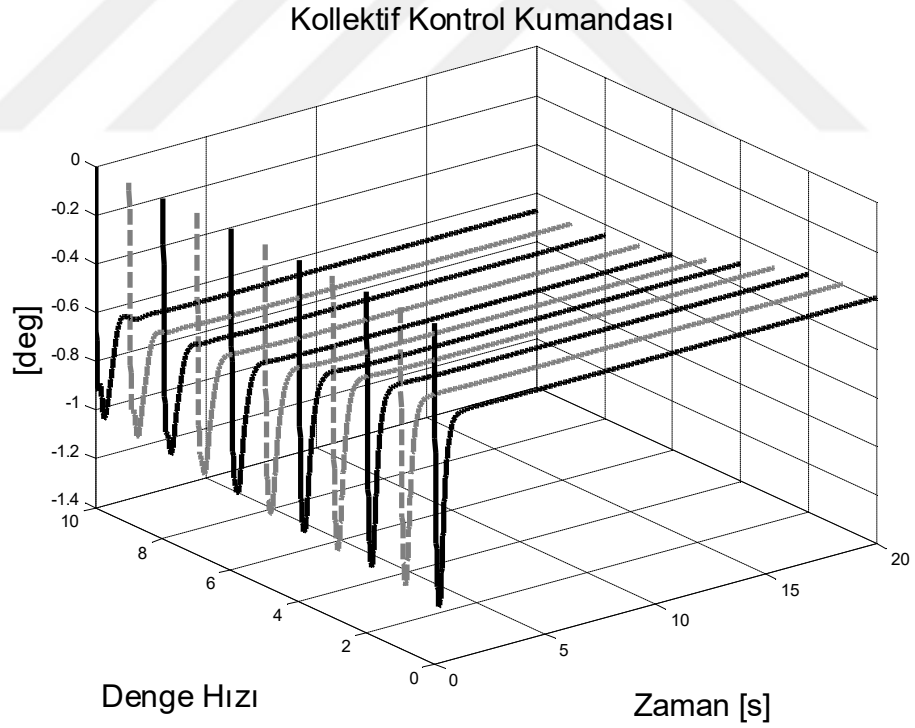
Şekil 4.27 : Yerel doğrusal modelde referans izleme ileri hız tutma.



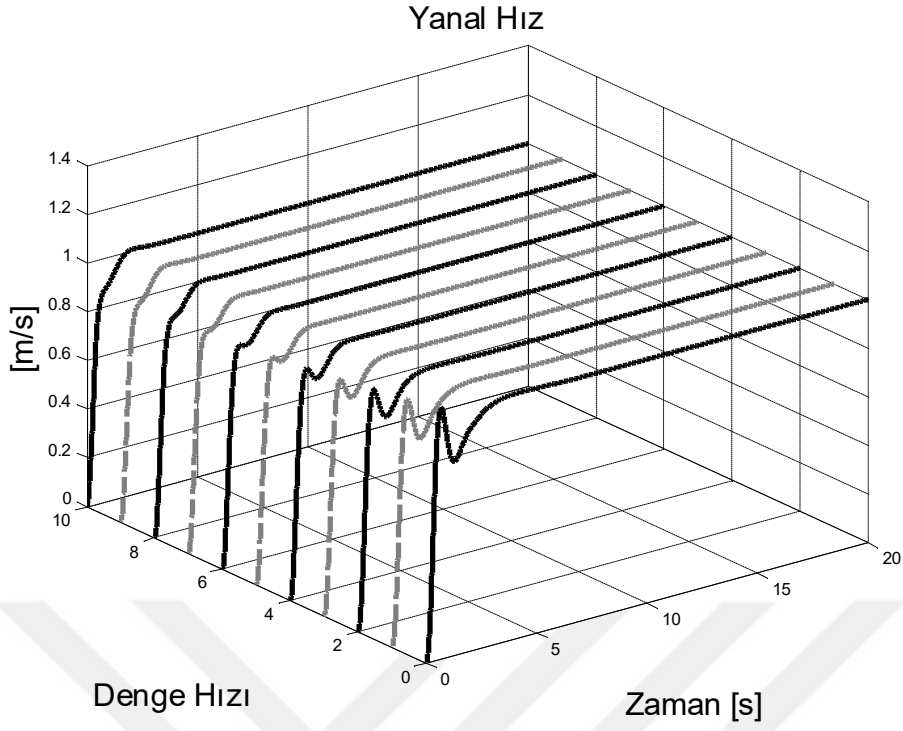
Şekil 4.28 : İleri hız tutma boylamsal kontrol kumandası.



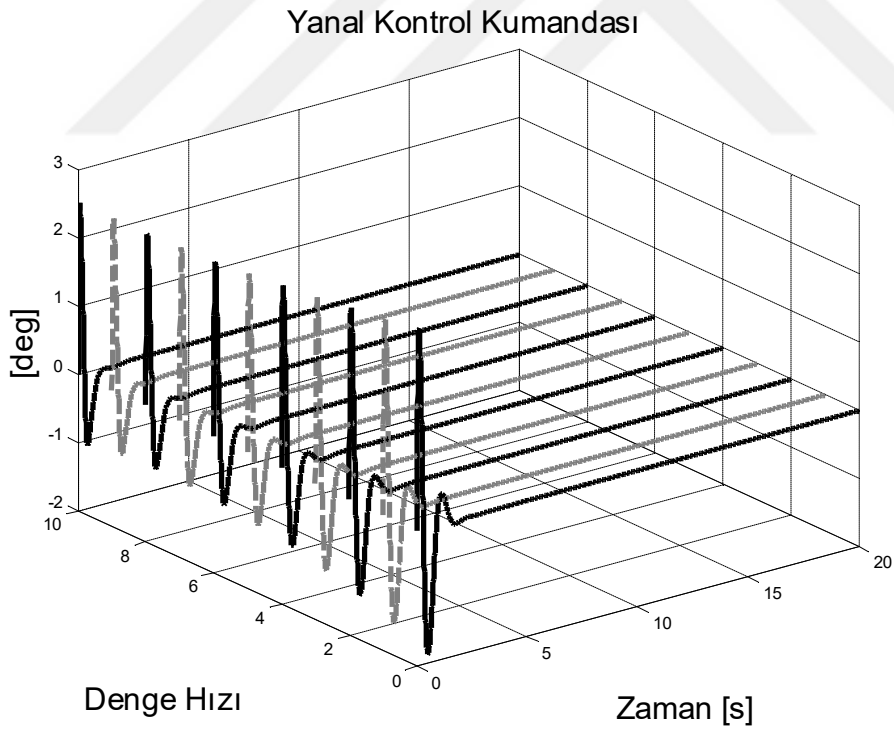
Şekil 4.29 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yükselme hızı tutma.



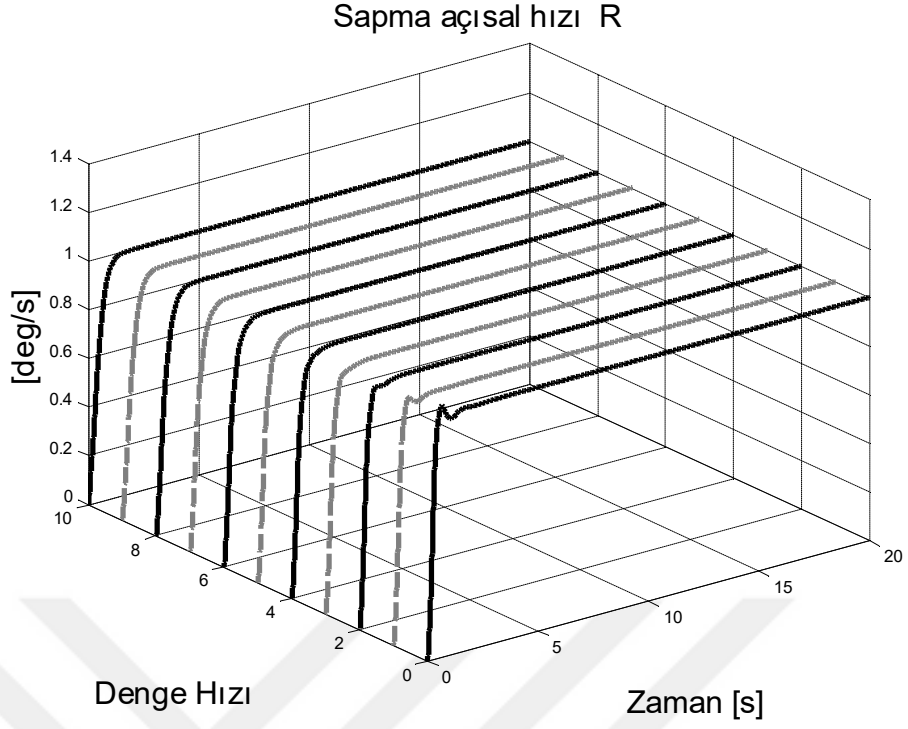
Şekil 4.30 : Yükselme hızı tutma kollektif kontrol kumandası.



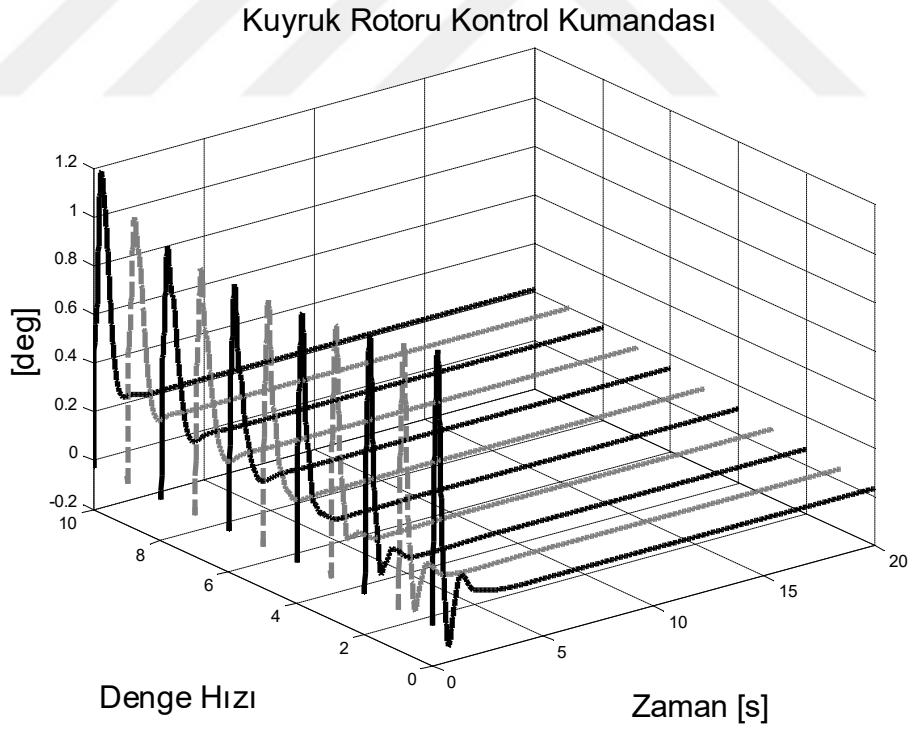
Şekil 4.31 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yanal hız tutma.



Şekil 4.32 : Yanal hız tutma yanal kontrol kumandası.



Şekil 4.33 : Yerel doğrusal modelde referans izleme sapma hızı tutma.

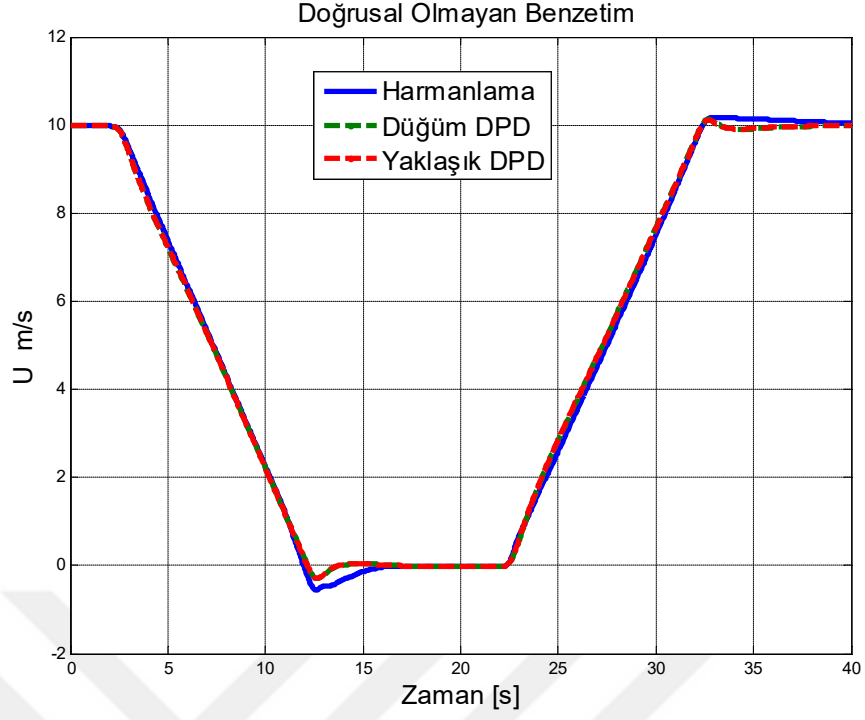


Şekil 4.34 : Sapma hızı tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.

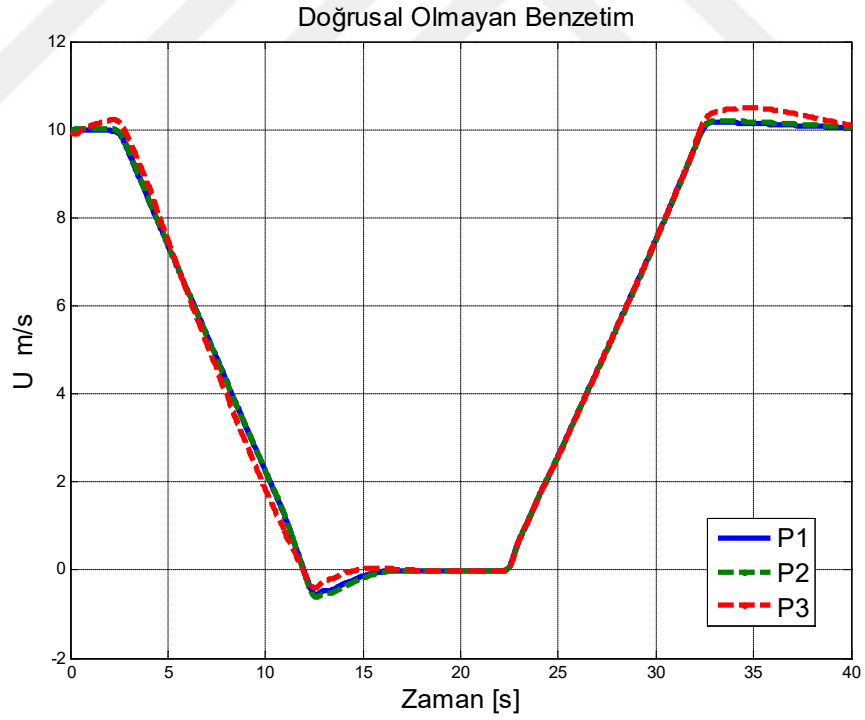
4.8.3 Doğrusal olmayan benzetim sonuçları

Doğrusal olmayan modelde, gerçek komutları üretmek için kontrol girişlerine denge durumu girişleri eklenir. Denge noktaları arasında, doğrusal parametreye bağımlı kontrol matrisleri lineer olarak interpolate edilir. Kontrol sinyali harmanlama yöntemi için yerel kontrol çıkış sinyalleri doğrusal olarak interpolate edilir. Doğrusal olmayan modelde test amaçlı helikopterin 0, 2, 4, 6, 8 ve 10 m/s hızlarında uçuğu senaryolar için tasarlanan kontrolcülerin yerel performansı doğrulandı: Bu testte pilot denge noktaları etrafında 1 m/s hızlanma ve yavaşlama talep ediyor. Her durumda kontrolcü tatmin edici kararlılık ve referans izleme sağladı. Bu sonuçlara burada yer verilmemiştir ve kontrolcünün denge etrafındaki performansı değerlendirilmiştir. Doğrusal olmayan modelde yerel performans testleri sonrasında ise asıl amacımız olan, kazanç ayarlamalı kontrolcünün tüm uçuş zarfında test edilmesi için, Şekil 4.35'de gösterilen denetleyicilerin tasarlanan tüm uçuş zarfı boyunca performansına baktık. Bu durumda, helikopter 10 m/s ileri hızda uçuyor ve pilot, önce 0 m/s ve daha sonra 10 m/s ileri hıza tekrar dönmek istiyor. Yerel denetleyicinin, tüm hız aralığında kararlılık ve referans izlemeyi başaramadığı görülmüştür. Oysa ortak Lyapunov fonksiyonu ile düğüm düğüm (noktasal) \mathcal{H}_∞ tasarımı ve parametre bağımlı denetleyicisi istenilen tüm zarfı başarıyla kapsadığı görülmektedir.

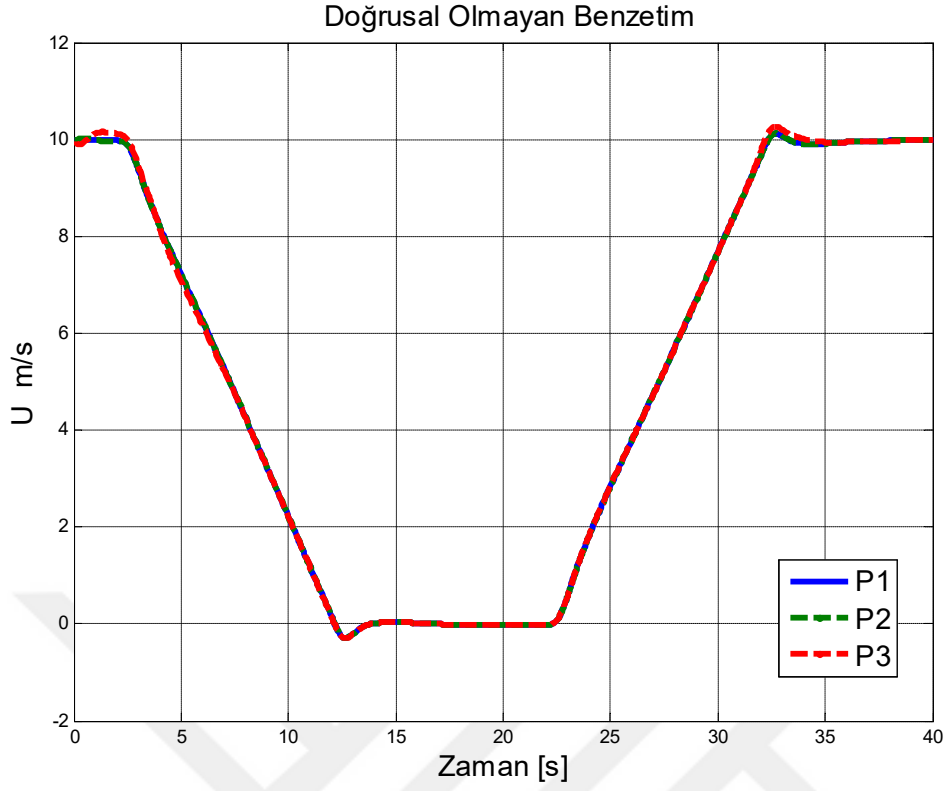
Denetleyicileri değiştirmeden kütleyi orijinal değerinin %90'ına ve %110'una ölçekleyerek denetleyicilerin gürbüzlük özelliklerini araştırdık. Yerel kontrolcü beklendiği gibi başarısız olurken, diğer tasarımların helikopter kütlelerinin değişiminden etkilenmediği Şekil 4.36, 4.37 ve 4.38'de görülebilir. Burada P1 nominal durumu, P2 kütle ve atalet değerlerinin %10 artırıldığı durumu ve P3 ise kütle ve atalet değerlerinin %10 azaltıldığı durumu göstermektedir.



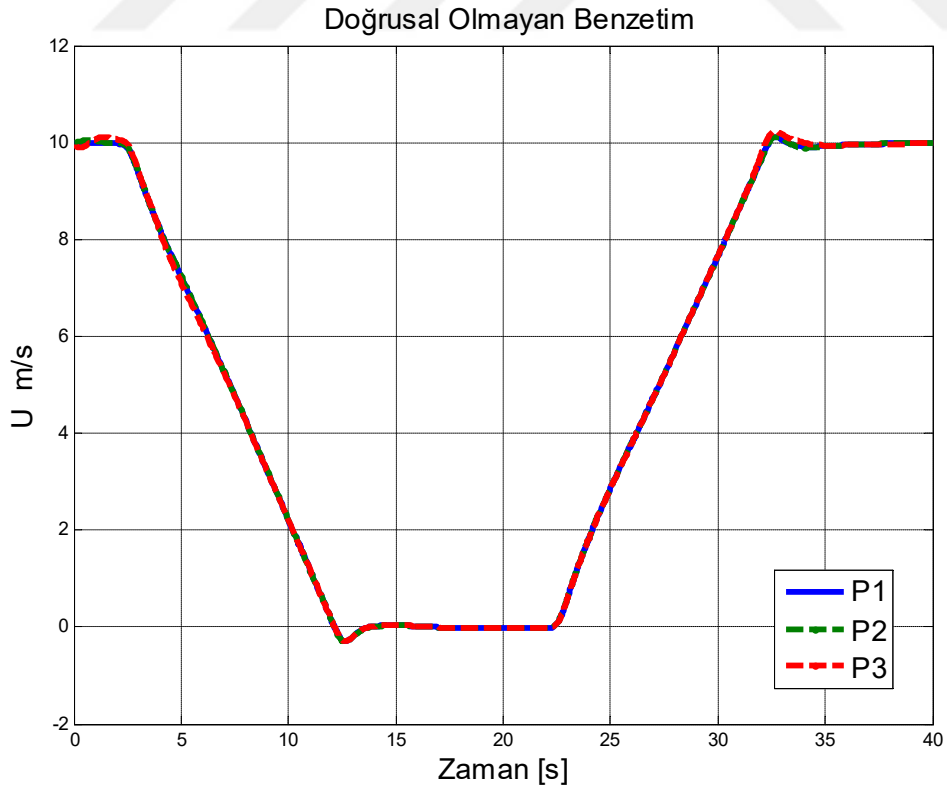
Şekil 4.35 : Doğrusal olmayan benzetim tüm zarf testi ileri hız.



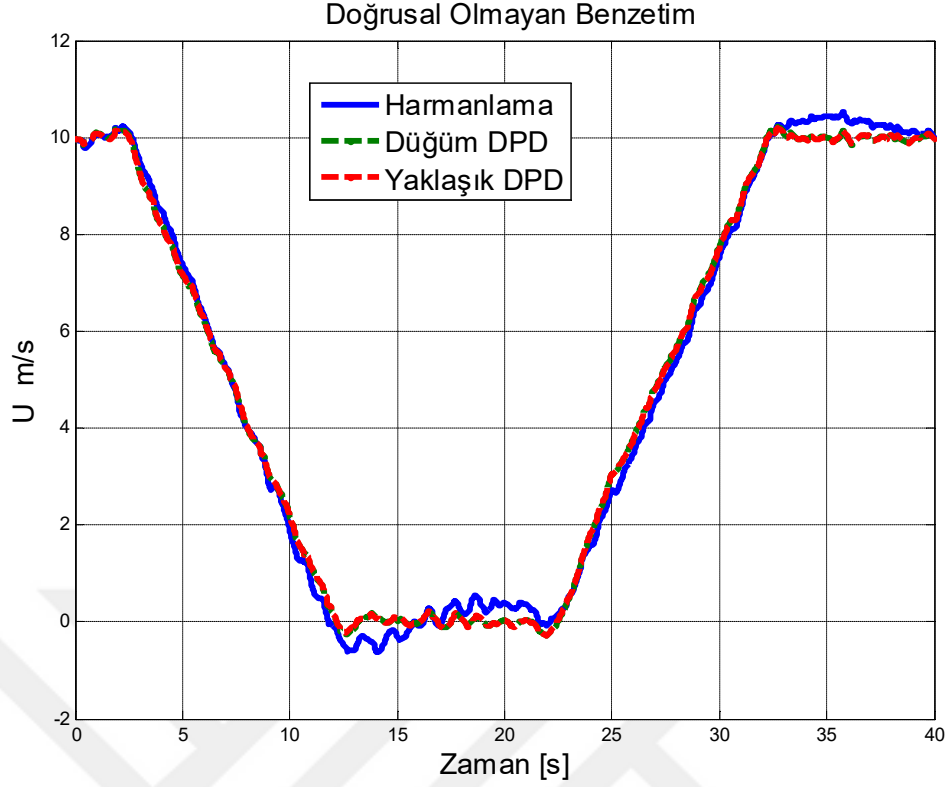
Şekil 4.36 : Kontrol harmanlama kütle ve atalet değişimi.



Şekil 4.37 : Düşüm çözümü kütle ve atalet değişimi.



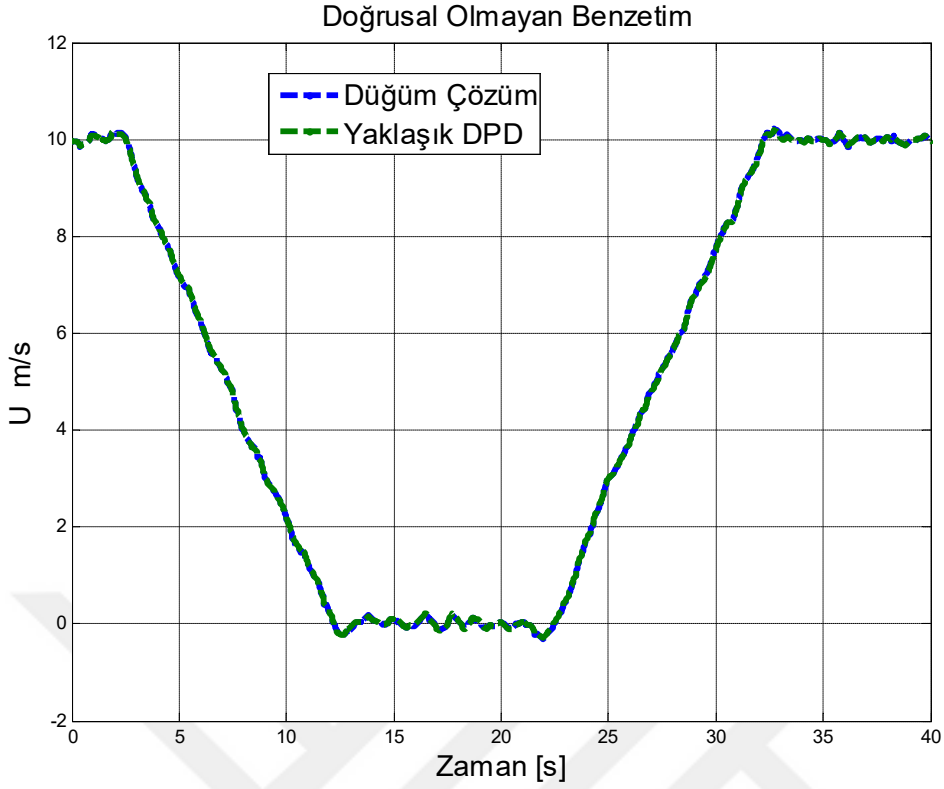
Şekil 4.38 : Yaklaşık DPD model kütle ve atalet değişimi.



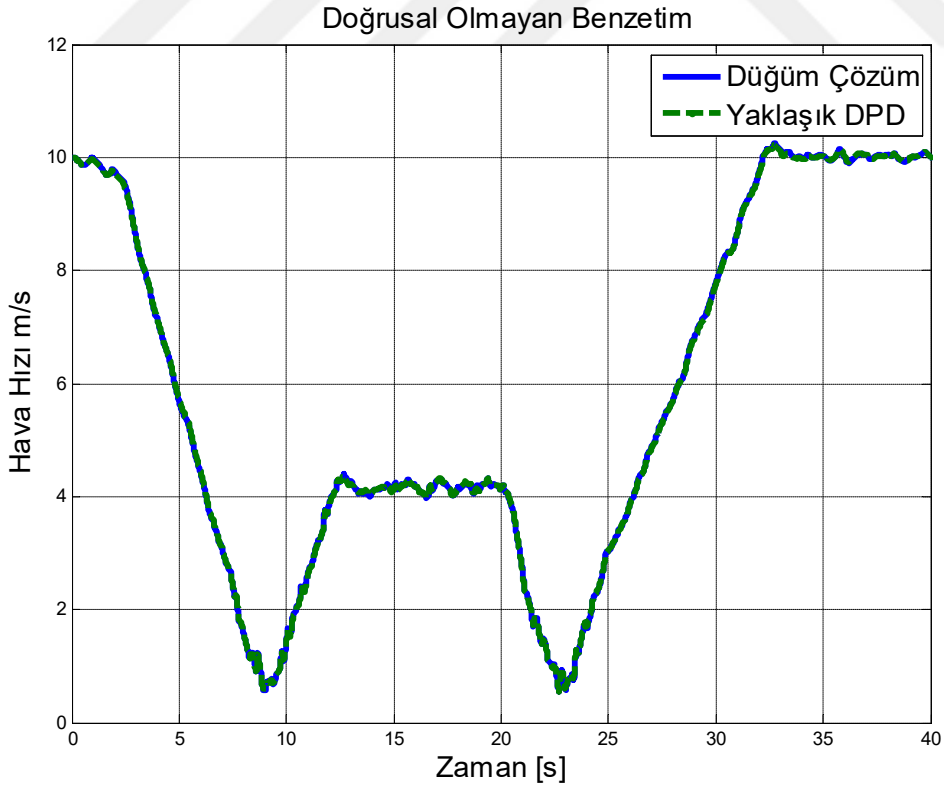
Şekil 4.39 : Ölçüm gürültüsü varlığında ileri hız.

Daha sonra doğrusal olmayan modele ölçüm gürültüsü eklenerek örnek senaryo tekrarlanmıştır. Şekil 4.39 nominal değerler için gürültü eklendiğinde ki benzetim sonuçları görülebilir.

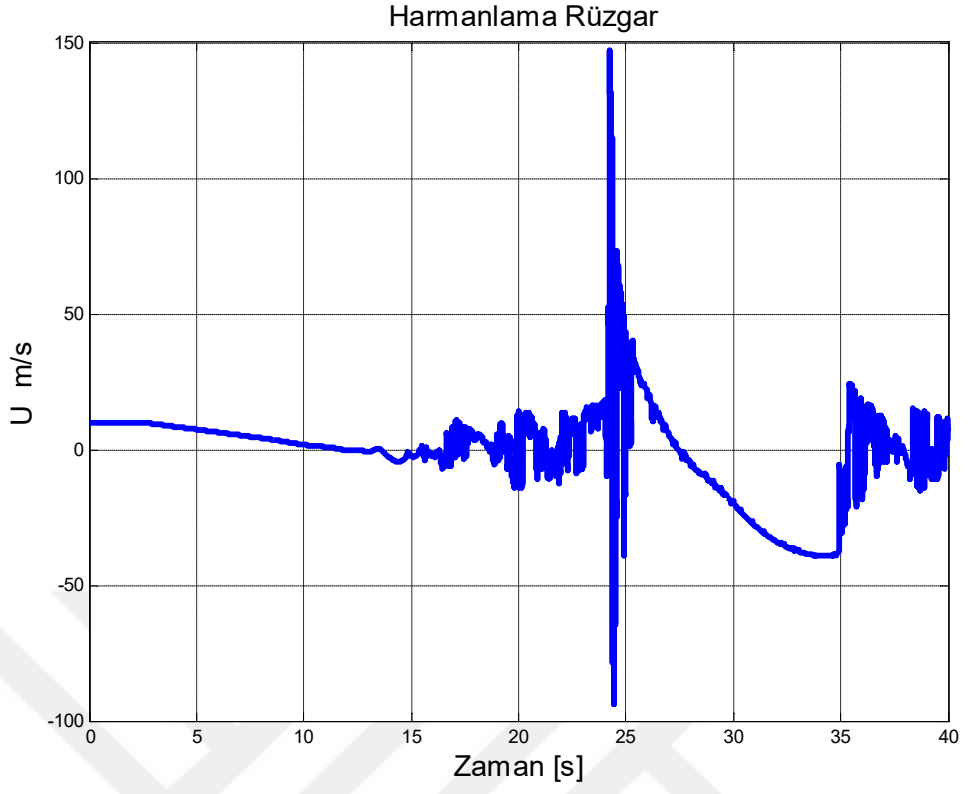
Daha sonra doğrusal olmayan modele ölçüm gürültüsü ve 8 knot rüzgâr eklenerek örnek senaryo tekrarlanmıştır. Şekil 4.40 nominal değerler için rüzgâr eklendiğinde ki benzetim sonuçları görülebilir. Kontrol harmanlama metodunun rüzgâr varlığında başarısız olduğu gözlenmiştir. Rüzgâr varlığında hava hızı ile yer hızı birbirinden ayrıştığı için Şekil 4.41’de hava hızı değerleri görülebilir. Rüzgâr eklendiğinde kontrol harmanlama metodunun başarısız olduğu Şekil 4.42’de açıkça görülmektedir.



Şekil 4.40 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken ileri hız (8 knot).



Şekil 4.41 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken hava hızı (8 knot).



Şekil 4.42 : Kontrol harmanlama Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr (8 knot).



5. İNSANSIZ HELİKOPTER İÇİN DÖNGÜ ŞEKİLLENDİRME PRENSİBİ İLE \mathcal{H}_∞ KAZANÇ AYARLAMALI KONTROL TASARIMI

5.1 Çalışmanın Amacı

Bu kısımda, gürbüz kararlılığı olan otonom küçük bir helikopter için ayarlamalı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrolcüsü tasarımı incelenmiştir. Öncelikle \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme ve parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemi kısaca incelenmiştir. Durum geribildirim ve dinamik çıkış geri bildirim denetleyicisi tasarımı için sentez koşulları parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme biçiminde doğrusal matris eşitsizlikleri (DME) kullanarak türetilmiştir. Parametre bağımlı bir kontrolcü oluşturmak için sonuçlar parametreye bağımlı sistemler için genişletilmiştir. Mevcut \mathcal{H}_∞ optimizasyon yöntemleri kullanılarak ayarlanmalı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi kontrol tasarımı için kullanılabilirken, bunlar ara noktalarda kararlılık ve performans konusunda garanti sunmamaktadır. Teorik olarak garanti edilen planlanmış bir kontrol yasası için doğrusal helikopter modellerinin parametrelere bağımlılığını kullanmak için bir parametre bağımlı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme denetleyicisi tasarlanmıştır. Önerilen tasarım, ortak bir Lyapunov fonksiyonuyla kazançlı parametreye bağlı değişen parametreye bağımlı bir kontrolcü sentezlemek için kullanılmıştır. Bu kontrolcüler birbirine bağlandığında, pratik bir kazanç ayarlamalı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrolcüsü elde edilebilir. Bu tasarım yöntemi ile kararlılık ve performans tüm çalışma alanı içinde garanti edilmiş olur. Yerel \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme denetleyicileri yerel modeller için kararlılık ve dayanıklılık sağlarken, tüm uçuş zarfı boyunca otonom helikopteri kontrol etmede yeterli olmadıkları görülmüştür. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme denetleyicileri kazançlarının tüm tasarım zarfında daha iyi performans sağladığı görülmektedir. Denge noktalarında düğüm düğüm yapılan sentez istenen uçuş zarfında tatmin edici bir performans verirken yerel kontrol yaklaşımının başarısız olduğu görülmüştür.

5.2 Giriş

\mathcal{H}_∞ optimizasyon tabanlı kontrolcü tasarımında çokça kullanılan iki ana yöntem vardır. Bunlar karma hassasiyet ve döngü şekillendirme prensiplerinin matematiksel \mathcal{H}_∞ optimizasyon problemine dönüştürülmesidir. Önceki kısımda karışık hassasiyet prensibine dayanan ayarlamalı kontrolcülerin sentezi yapılmıştır. Bu kısımda ise \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesi prensibine dayalı kontrolcülerin sentezi işlenecektir. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesi, belirsizlik temsili için sistemin eş asal (koprim) faktörlerini kullanır ve bu belirsizlik temsili karşısında gürbüz kontrolcülerin tasarımını mümkün kılmaktadır. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesi, sağladığı gürbüzlük ve tasarım kolaylığı nedeniyle birçok kontrol uygulamasında kullanılmaktadır. Glover-McFarlane \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme [20] geleneksel bant genişliği kavramlarını ve döngü kazanımını modern fikirlerle birleştirerek \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme çerçevesini oluşturmuştur. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tekniğinin temel avantajı, sadece açık döngü transfer fonksiyonuna odaklanarak gürbüz bir geri besleme denetleyicisi hesaplamak için klasik frekans alanı tasarımına dayanmasıdır. Döngü şekillendirme yöntemi, döngü kazancının arzu edilen frekanslarında yüksek ve alçak açık çevrim özelliklerini belirlemek için nominal sistemin tekil değerlerini şekillendirmektedir. Normalleştirilmiş eş asal (koprim) faktörü belirsizlik gösterimi, şekillendirilmiş sisteminin sağlam dengelemesi için kullanılır [41]. Diğer bir alternatif yaklaşım, ağırlıklı karma hassasiyet minimizasyonu için parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesidir [44]. \mathcal{H}_∞ kontrol probleminde hassasiyet ve tamamlayıcı hassasiyetin minimize edilmelerini sağlamak için fazladan bir serbest parametre kullanılabilir. Parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme sorununun çözümü, Cebirsel Riccati denklemi (ARE) veya eşdeğer doğrusal matris eşitsizlikleri (DME) formülasyonu şeklinde [45]'de verilmiştir. Döngü şekillendirmenin havacılık uygulamalarına çeşitli uygulamaları aşağıdaki gibi sıralanabilir: [72], [73], [74], [75], [76], [64] ve [33].

Bu çalışmanın temel amacı küçük ölçekli helikopterler için gürbüz ayarlamalı kontrolcülerin sentezlenmesidir. Bunun yanında kontrolcülerin tasarımın ara noktalarında da benzer kararlılık ve performans özellikleri göstermesi hedeflenmektedir. Açık döngü uçuş özellikleri çalışma koşullarına bağlı olarak çok fazla değişiklik gösterdiği için böyle bir yöntem tercih edilmiştir. Örneğin: Aski'dan

ileri hızlara geçişte sistem dinamikleri değişmektedir. Bu problem karşısında ortak yaklaşım, birkaç çalışma noktasında bağımsız olarak denetleyicileri tasarlayarak kazanç ayarlama yöntemini kullanmaktır. Sentezlenen kontrolcü daha sonra çalışma noktalarına yakınlığa bağlı olarak gerçek zamanlı olarak interpolate edilebilir. Bu yöntem kararlılık ve performans konusunda herhangi bir teorik güvence vermemesine rağmen birçok havacılık uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır [77], [17]. Kararlılık ve performans, genel olarak çalışma alanı boyunca yapılan kapsamlı benzetimleriyle doğrulanır. Alternatif olarak, sistemin parametrelerin doğrusal değiştiği durumlarda, doğrusal parametre ile değişen kontrol sentez yöntemi kullanılabilir [78] [71]. Bu yaklaşım, parametre bağımlı sistemler için kararlılık ve performans üzerine teorik garantinin oluşturulmasına olanak tanır. DPD kontrolcüler için DME formülasyonları da türetilmiş ve sistematik sayısal uygulamalar yapılmıştır [79] ve [80]. DPD (LPV) yöntemi, savaş uçakları da dâhil olmak üzere sayısız uçakta [81], [65], helikopterde [66], [67], yeniden giriş araçlarında [82] ve füzelerde [83] başarıyla kullanılmıştır

Helikopterlerde, yukarıda bahsedilen \mathcal{H}_∞ yöntemleriyle ilgili diğer dikkate değer kontrol yaklaşımlarından bahsedilmelidir. Örneğin [61], \mathcal{H}_∞ Kontrolcüler Bell 205 helikopteri için doğrusallaştırmalar kullanılarak sentezlenir. İçinde [62], bir statik çıktı geribildirim döngü-şekillendirme denetleyicisi bir elektronik kumanda ile uçuş (fly-by-wire) helikopter için tasarlanmıştır. [63]'de, kapalı döngü kararlılığını ve uçuş esnasında manevra kabiliyetini artırmak için karışık hassasiyet kullanılarak helikopter için bir uçuş kontrol sistemi sunulmaktadır. Bu çalışma kararlılık ve gürbüzlük garantileri matematiksel olarak verilmiş kontrolcülerin küçük bir helikopter için DME (LMI) tabanlı bir \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrolcülerin tasarımını anlatmaktadır. Bununla birlikte, tüm çalışma alanı üzerinde gürbüz kararlılığı garanti etmek için özel kısıtlamalar uygulanmaktadır.

Önceki çalışmalar genellikle tek bir çalışma koşulunda tek bir \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme denetleyicisi tasarlamaktadırlar [63]. Farklı tasarım noktalarında döngü şekillendirme metodu ile kazanç ayarlamalı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme denetleyicileri [64]'de tasarlanmıştır. Bu pratikte çoğu zaman işe yarasa da, kararlılık için matematiksel bir garanti yoktur. Bu çalışmada muhafazakârlık karşılığında, tasarımın ara noktalarında da kararlılığı ve performansı garanti eden denetleyicileri tasarlamak için bir yapı oluşturdu. DPD tabanlı yaklaşım kullanılarak [82]'de kararlılığı ve

performansı garanti eden kontrolcüler tasarlanmıştır. Denetleyiciler denge durumlarında tasarlanır ve sonra interpolasyon yapılır. Bu çalışmada kontrolcüler, tasarımcı tarafından belirlenen çalışma noktalarında düğüm düğüm oluşturulmuştur. Bu nedenle kazanç-ayarlama tasarımına daha yakın bir metodudur, ancak DMEler eş zamanlı çözüldüğü için ara noktalarda da kararlılık ve performans garantisi sunmaktadır. Parametrik döngü şekillendirme [44] [45] döngü şekillendirmeye fazladan bir esneklik kazandıran tasarım yöntemidir. Pratik yararlılık için, tüm hesaplar (teorik ve pratik) Doğrusal Matris Eşitsizliği (DME) koşulları etrafında incelenmiştir [69]. Hesaplama gücü, depolama kapasitesi ve güçlü DME çözücülerin kullanılabilirliği sayesinde sentez koşulları kontrol edilebilir ve oldukça verimli bir şekilde çözülebilir. Burada kullanılan yöntemde YALMIP [53] ve SEDUMI [54] programlarından yararlanılmıştır.

5.3 Parametrik \mathcal{H}_∞ Döngü Şekillendirme

Parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tekniği, standart döngü şekillendirme \mathcal{H}_∞ kontrol probleminin çözümü için daha esnek bir tasarım çerçevesi sağlamaktadır [44] Ölçeklendirme miktarı λ , genelleştirilmiş sistemin giriş matrisini ölçeklemek için kullanılır. Bu, şekillendirilmiş sistemin açık döngü şeklini veya normalleştirilmiş eş asal (koprim) faktörlerini değiştirmez ancak basitçe döngü şekillendirme objektif maliyet fonksiyonunu ölçeklendirerek tasarıma esneklik kazandırır. Bu aslında, girdi matrisinin ölçeklendirilmesi de olarak görülebilir ve dolayısıyla belirsizlik tanımını $\Delta N \lambda^{-1}$ olarak ölçeklendirir (Şekil 5.1) fakat normalleştirilmiş eş asal faktörlerini değiştirmez. Parametrik döngü şekillendirme problemi, şekillendirilmiş sistem için aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\tilde{G}_s = (M + \Delta M)^{-1}(N + \Delta N)\lambda^{-1} \quad (5.1)$$

Burada eş asal (koprim) faktörizasyon belirsizlik temsilini ΔM ve $\Delta N\lambda^{-1}$ ifade etmektedir. Yapılandırılmamış belirsizlikler ΔM ve $\Delta N\lambda^{-1}$ karşısında gürbüz kararlılık sağlayan kontrolcüler tasarlanır. Burada nominal sistem: $\tilde{G}_s := M^{-1}N\lambda^{-1}$ şeklinde tanımlıdır. Parametrik döngü şekillendirme kontrolcüsü ölçeklendirilerek $\tilde{K}_\infty := \lambda K_\infty$ elde edilir. G_s ve \tilde{G}_s arasında ki ilişkiye dikkat edecek olursak $G_s = M^{-1}N$ ve $\tilde{G}_s = M^{-1}N\lambda^{-1}$, yani $G_s = \tilde{G}_s\lambda$ elde edilir. Şekillendirilmiş sistem için

normalleştirilmiş sol eş çarpımı faktörleri, standart eş asal faktörleştirmeyi kullanarak elde edilebilir. Daha sonra gürbüz kontrolcü K_∞ ,

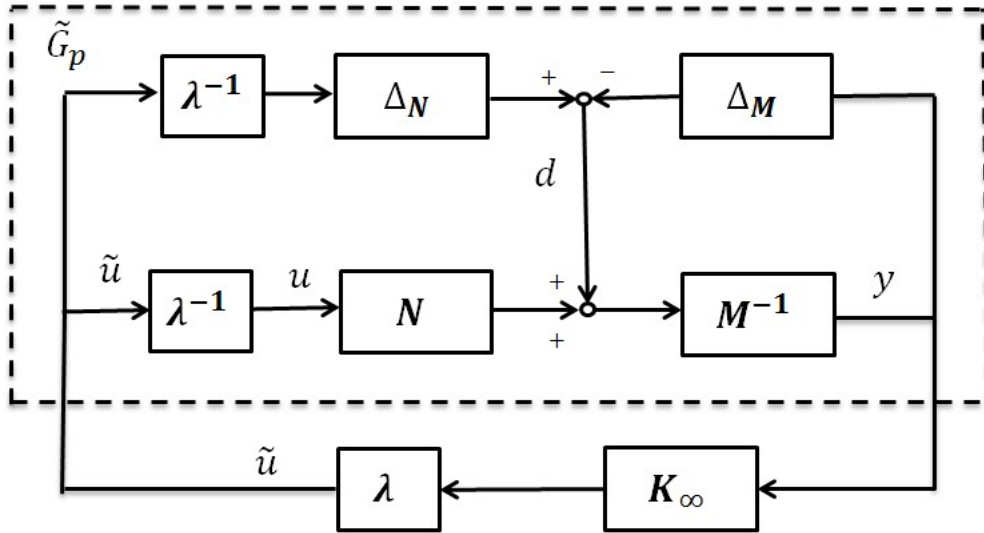
$$\inf_{K_\infty \text{ kararlaştırıcı}} \left\| \begin{bmatrix} I \\ \lambda K_\infty \end{bmatrix} (I - G_S K_\infty)^{-1} M^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\epsilon} = \gamma \quad (5.2)$$

probleminin minimizasyonu ile elde edilir. Sonra ortaya çıkan kontrolcü $\|\lambda^{-1} \Delta N \quad \Delta M\|_\infty \leq \epsilon = \frac{1}{\gamma}$ kadar kararlılık marjı sağlar. $\lambda = 1$ olduğunda, parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemi standart \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemine dönüşür.

Açıklama 5.1: Yukarıdaki G_S ve K_∞ tanımlarını kullanarak parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemine uygularsak:

$$\inf_{K_\infty \text{ kararlaştırıcı}} \left\| \begin{bmatrix} I \\ \tilde{K}_\infty \end{bmatrix} (I - \tilde{G}_S \tilde{K}_\infty)^{-1} M^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\epsilon} = \gamma$$

elde edilir. Bu aslında G_S için standart \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemidir. Dolayısıyla parametrik döngü şekillendirme, döngü şekillendirmenin özelliklerini etkilemeksizin girdi matrisinin ve belirsizlik tanımlamasının ölçeklenmesine olanak tanır. Bu durumda, (5) 'deki genelleştirilmiş sistem P_{aug} için $A = A_S$, $B_1 = -L$, $B_2 = B_S \lambda^{-1}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_S \end{bmatrix}$, $C_2 = [C_S]$, $D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $D_{12} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$ ve $D_{22} = 0$ şeklinde tanımlanır.



Şekil 5.1 : Parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme [45].

5.4 DMELer ile \mathcal{H}_∞ Döngü Şekillendirme Kontrolcü Sentezi

5.4.1 Durum geri besleme için \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrolcü sentezi

Durum geri besleme sistem için kapalı döngü sistemi $P_{cl}(s)$ şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2K & B_1 \\ C_1 + D_{12}K & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = P_{cl}(s). \quad (5.3)$$

$$\begin{bmatrix} (A + B_2K)^T P + P(A + B_2K) & P B_1 & (C_1 + D_{12}K)^T \\ B_1^T P & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 + D_{12}K & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Önden ve arkadan $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ ile çarpıp $P^{-1} =: Y$ tanımlamırsa:

$$\begin{bmatrix} YA^T + Y K^T B_2^T + AY + B_2KY & * & * \\ B_1^T & -\gamma I & * \\ C_1Y + D_{12}KY & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

elde edilir. Yukardaki denklem DME değildir. Fakat $M := KY$ tanımlanırsa:

$$\begin{bmatrix} YA^T + M^T B_2^T + AY + B_2M & B_1 & Y C_1^T + M^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1Y + D_{12}M & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

elde edilir. Böylece sorunun DME formülasyonunu tamamlamış oluruz. Bilinmeyen parametreler Y ve M ile optimizasyon probleminin çözülmesi, kapalı döngü sistemi için \mathcal{H}_∞ normu minimize etmeyi sağlayan yani kararlı ve gürbüzlük marjını maksimize eden durum geri besleme kontrolcüsü $K = MY^{-1}$ şeklinde bulunur.

Teorem 5.1: Açık döngü LTI sistemi için belirsizlik gösterimi açısından \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme soruna kararlı ve gürbüz yerel durum geri bildirim sentezi ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlandığında vardır. $\|\Delta N \quad \Delta M\|_\infty \leq \epsilon = \frac{1}{\gamma}$.

$$\begin{bmatrix} YA_s^T + M^T B_s^T + A_s Y + B_s M & * & * & * \\ -L^T & -\gamma I & * & * \\ M & 0 & -\gamma I & * \\ C_s Y & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.4)$$

$$Y > 0 \quad (5.5)$$

İspat: Genel çözüme $A = A_s$, $B_1 = -L$, $B_2 = B_s$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_s \end{bmatrix}$, $C_2 = [C_s]$, $D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$,

$D_{12} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$ ve $D_{22} = 0$ ifadeleri yerleştirildiğinde şu ifade elde edilir.

$$\begin{bmatrix} YA_S^T + M^T B_S^T + A_S Y + B_S M & -L & [M^T & Y C_S^T] \\ & -L^T & -\gamma I & [0 & I] \\ & \begin{bmatrix} M \\ C_S Y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

ve γ 'u minimum seviyeye indirmek, küçük kazanç teoremi kullanarak asal faktörizasyon belirsizlik gösterimine karşı sağlamlığı en üst düzeye çıkardığı söylenebilir. $\|\Delta N \quad \Delta M\|_\infty \leq \epsilon$. ■

Açıklama 5.2: Parametrik döngü şekillendirme problemi için, basitçe $A = A_S$, $B_1 = -L$, $B_2 = B_S \lambda^{-1}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_S \end{bmatrix}$, $C_2 = [C_S]$, $D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $D_{12} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$ ve $D_{22} = 0$ seçilir. Genel sentez probleminde yerine konulduğunda

$$\begin{bmatrix} YA_S^T + M^T \lambda^{-1} B_S^T + A_S Y + B_S \lambda^{-1} M & -L & M^T & Y C_S^T \\ & -L^T & -\gamma I & 0 & I \\ & M & 0 & -\gamma I & 0 \\ & C_S Y & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

elde edilir. Bu DME değildir fakat bu problem λ sabitlenebilerek çözülür.

Açık döngü LTI sistemi için belirsizlik gösterimi açısından \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme soruna gürbüz kararlılık sağlayan yerel durum geri bildirim sentezi filtre durumundan bağımsız olmalıdır. Eğer Teorem 5.1, değişkenler Y ve M üzerinde kısıtlama uygulanırsa:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } M = [0 \quad M_{12} \quad 0].$$

Elde edilen kontrolcü filtre durumundan bağımsız hale gelecektir. $K = [0 \quad M_{12} Y_{22}^{-1} \quad 0]$. Arama değişkenleri sentez prosedüründen önce kısıtlandığından, çözüm alanı kısıtlıdır bu nedenle daha muhafazakâr bir sonuç elde edilecektir.

5.4.2 Dinamik çıkış geri besleme için \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme sentezi

Sentez koşulları, karar değişkenlerinde konveks olan bir DME fizibilite problemi olarak ifade edilmiştir. Bu kısımda dinamik çıktı geribildirim \mathcal{H}_∞ kontrol problemine DME sub-optimal çözüm ile devam edeceğiz. Dinamik çıkış geri bildirim kontrolcü sentez koşulları, genel \mathcal{H}_∞ optimizasyon şeklinde DME formunda ifade edilen problem \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemine uygulanmıştır.

Teorem 5.2: Açık döngü LTI sistemi için belirsizlik gösterimi açısından \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemine gürbüz kararlılık sağlayan yerel dinamik çıktı geribildirim

sentezi $\|\Delta N \quad \Delta M\|_\infty \leq \epsilon = \frac{1}{\gamma}$ ancak ve ancak aşağıdaki ifadeler sağlandığında mevcuttur.

$$A_s^T X + X A_s + X L C_s + C_s^T L^T X - \gamma C_s^T C_s < 0 \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} A_s Y + Y A_s^T - \gamma B_s B_s^T & Y C_s^T & -L \\ C_s Y & -\gamma I & I \\ -L^T & I & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & \gamma \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.8)$$

İspat: Genel çözümde ifadeler yerine konulduğunda: $A = A_s$, $B_1 = -L$, $B_2 = B_s$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_s \end{bmatrix}$, $C_2 = [C_s]$, $D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $D_{12} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$ ve $D_{22} = 0$. Burada $N_X =$

$\begin{bmatrix} I \\ -C_s \end{bmatrix}$ ve $N_Y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B_s^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ olarak seçilmelidir.

Öncelikle birincil eşitsizliği yazarsak

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s^T X + X A_s & -X L & \begin{bmatrix} 0 & C_s^T \end{bmatrix} \\ L^T X & -\gamma I & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ C_s \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Hiçbir katkısı olmayan üçüncü satır ve sütunu silersek,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C_s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s^T X + X A_s & -X L & C_s^T \\ L^T X & -\gamma I & I \\ C_s & I & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C_s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A_s^T X + X A_s + X L C_s + C_s^T L^T X - \gamma C_s^T C_s & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

İlk eşitsizliği elde etmek için,

$$A_s^T X + X A_s + X L C_s + C_s^T L^T X - \gamma C_s^T C_s < 0$$

İkincil eşitsizlik için,

$$[*]^T \begin{bmatrix} A_s Y + Y A_s^T & Y \begin{bmatrix} 0 & C_s^T \end{bmatrix} & -L \\ \begin{bmatrix} 0 \\ C_s \end{bmatrix} Y & -\gamma I & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ -L^T & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B_s^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Hiçbir katkısı olmayan ikinci satır ve sütunu silersek

$$\begin{bmatrix} A_s Y + Y A_s^T - \gamma B_s B_s^T & Y C_s^T & -L \\ C_s Y & -\gamma I & I \\ -L^T & I & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

elde edilir. ■

Açıklama 5.3: Parametrik döngü şekillendirme için basitçe $B_2 = \lambda^{-1}B_s$ seçersek [45]'de teorem 5.2 verilen sonucu elde ederiz. İstenilen parametreler yerine konulduğunda

$$A_s^T X + X A_s + X L C_s + C_s^T L^T X - \gamma C_s^T C_s < 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} A_s Y + Y A_s^T - \gamma \lambda^{-2} B_s B_s^T & Y C_s^T & -L \\ C_s Y & -\gamma I & I \\ -L^T & I & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.11)$$

aynı sonuç elde edilir.

5.5 Parametreye Bağlı Sistem için Kontrolcü Sentezi

5.5.1 Parametreye bağımlı sistemler için durum geri besleme ile gürbüz kontrol

Teorem 5.3: Çıkarılmış \mathcal{L}_2 normunu γ 'dan daha düşük bir değere garanti ederek parametreye bağımlı bir sistem için

$$\begin{bmatrix} H^T + A(\rho)Y + B_2 M & * & *^T \\ B_1^T(\rho) & -\gamma I & * \\ C_1(\rho)Y + D_{12} M & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \rho \in P \quad (5.12)$$

$$Y \succ 0 \quad (5.13)$$

Sağlandığında $K = MY^{-1}$ gürbüz kararlılık sağlayan bir kontrolcüdür. Burada $H = A(\rho)Y + B_2 M$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat : $u(t) = Kx(t)$ dersek kapalı çevrim sistem şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) + B_2 K & B_1(\rho) \\ C_1(\rho) + D_{12} K & D_{11}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Kapalı çevrim sistemi, γ minimizasyonu ile durum geri besleme sentezi problemine koyarsak

$$\begin{bmatrix} YA(\rho)^T + M^T B_2^T + A(\rho)Y + B_2 M & * & * \\ B_1(\rho)^T & -\gamma I & * \\ C_1(\rho)Y + D_{12} M & D_{11}(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \rho \in P$$

$$Y \succ 0$$

elde edilir.

Açıklama 5.4: Sentez DME'leri ρ 'da sonsuz boyutludur. Sistem matrislerinin parametre bağımlılığının doğrusal olduğunu varsayarak, tepe özelliğini kullanarak sonlu boyutlu DME ile yukardaki problem çözülebilir. [71]

Burada ise parametrelere bağımlı sistemin düğümlerdeki temsili yerel tasarım noktaları olarak değerlendirilebilir. Düğüm tabanlı parametre bağımlı model, doğrusal olmayan matematik modelinin doğrusallaştırılmasıyla elde edilebilir. Çünkü parametre vektörü ρ çalışma zarfı boyunca değişir ve bu değişen koşullarda doğrusal olmayan matematik modelinin doğrusallaştırılmasıyla yerel parametre bağımlılığı olan bir model oluşturulur. Sonuç olarak doğrusal model ailesi parametreye bağımlı hale getirilecektir. $\rho = \rho_i$ olduğunda çıkan yerel sistem matrisi $A(\rho_i) =: A_i$ şeklinde tanımlanır. Parametrelere bağımlılığı daha iyi ifade edebilmek daha çok bir düğüm noktası tanımlamak mümkündür. Bu ekstra düğümler fazladan hesaplama yükü getirecektir. Ayrıca, herhangi bir düğüm noktası arasındaki doğrusal parametre bağımlılığı varsayımı, daha fazla düğüm kullanılarak çözülebilir. Düğüm noktasındaki sistem P_i şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_2 \\ C_{1i} & D_{11} & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

durum geri besleme denetleyicisini, $u(t) = K x(t)$, için kapalı çevrim sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_{2i}K & B_{1i} \\ C_{1i} + D_{12i}K & D_{11i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Elde edilir.

Teorem 5.4: *Düğüm tabanlı sistem ailesi için ancak*

$$\begin{bmatrix} YA_i^T + M^T B_2^T + A_i Y + B_2 M & * & * \\ B_{1i}^T & -\gamma I & * \\ C_{1i} Y + D_{12} M & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \quad (5.16)$$

$$Y > 0 \quad (5.17)$$

sağlandığında karesel performansı $\gamma \leq \left\| \frac{z}{d} \right\|_{\infty}$ garanti eden olan tek bir durum geri besleme denetleyicisi $K = MY^{-1}$ vardır.

İspat: Basitçe $u(t) = Kx(t)$, seçilerek ve durum geri besleme denetleyicisi K 'yi bağlayarak açık döngü sistem P_i verildiğinde, kapalı döngü P_{cli} için γ minimizasyonu amacı ile kapalı döngü sistemi için analiz eşitsizliklerini uygularsak:

$$\begin{bmatrix} YA_i^T + M^T B_2^T + A_i Y + B_2 M & B_{1i} & Y C_{1i}^T + M^T D_{12}^T \\ B_{1i}^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_{1i} Y + D_{12} M & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i$$

elde edilir. Böylece, bilinmeyen parametreler Y ve M ile optimizasyon probleminin çözülmesi ile kapalı çevrim sistemi kararlı eden durum geri besleme kontrolcüsü $K =$

MY^{-1} elde edilmiş olur. Kapalı döngü sistemi için \mathcal{H}_∞ normu minimize edildiği için elde edilen kontrolcü asal faktörler belirsizlik temsili karşısında maksimum gürbüzlüğe sahiptir. ■

Açıklama 5.5: Ortaya çıkan durum geri besleme denetleyicisi, belirsizlik gösterimi $\|\Delta N \ \Delta M\|_\infty \leq \epsilon = \frac{1}{\gamma}$ ile ilgili gürbüzlük sağlar. Dolayısıyla, γ 'yı asgariye indirmek, küçük kazanç teoreminin direkt sonucundan daha büyük bir belirsizlik gösterimi kümesine karşı sağlam kararlılık sağlar. Dolayısıyla, \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemi için gürbüz kararlılık kapalı döngü sisteminin performansı ile doğrudan bağlantılıdır.

5.5.2 Yerel \mathcal{H}_∞ kontrolcüler

Basitçe kazanç ayarlamalı durum geri besleme kontrolcüsü $u(t) = K_i x(t)$, seçilerek ve durum geri besleme kontrolcüsü K_i tarafından kapatılan açık döngü sistem P_i verildiğinde kapalı döngü $P_{cli}(s)$ verilebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_2 K_i & B_{1i} \\ C_{1i} + D_{12} K_i & D_{11i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Teorem 5.5: *Düğüm tabanlı sistem ailesi için ancak*

$$\begin{bmatrix} Y A_i^T + M_i^T B_2^T + A_i Y + B_2 M_i & * & * \\ B_{1i}^T & -\gamma I & * \\ C_{1i} Y + D_{12} M & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.19)$$

$$Y > 0 \quad (5.20)$$

sağlandığında karesel performansı $\gamma \leq \left\| \frac{z}{d} \right\|_\infty$ garanti eden durum geri besleme denetleyicileri $K_i = M_i Y^{-1}$ vardır.

İspat : Kapalı çevrim sistem için analiz eşitsizliğini yeniden yazdık,

$$\begin{bmatrix} (A_i + B_2 K_i)^T P + P (A_i + B_2 K_i) & P B_{1i} & (C_{1i} + D_{12} K_i)^T \\ B_{1i}^T P & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} + D_{12} K & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i$$

Öncesi ve sonrası $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(A_i + B_2 K_i)^T + (A + B_2 K_i)P^{-1} & B_{1i} & P^{-1}(C_{1i} + D_{12} K_i)^T \\ B_{1i}^T & -\gamma I & D_{11i}^T \\ (C_{1i} + D_{12} K)P^{-1} & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i$$

elde edilir. $P^{-1} =: Y$ tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} YA_i^T + Y K_i^T B_2^T + A_i Y + B_2 K_i Y & * & * \\ B_{1i}^T & -\gamma I & * \\ C_{1i} Y + D_{12} K Y & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i$$

Yukarıdaki eşitsizliği bir DME değil, ancak $M_i := K_i Y$ seçildiğinde DME çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} YA_i^T + M_i^T B_2^T + A_i Y + B_2 M_i & * & * \\ B_{1i}^T & -\gamma I & * \\ C_{1i} Y + D_{12} M & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i$$

Bilinmeyen parametreler Y ve M_i ile optimizasyon probleminin çözülmesi stabilize kazanç ayarlamalı durum geri besleme kontrolcüsü $K_i = M_i Y^{-1}$ 'e ve düğüm tabanlı kapalı döngü sistemi için \mathcal{H}_∞ norm minimizasyonuna ulaşacaktır. Y fonksiyonu, düğüm tabanlı sistem ailesi için ortak bir Lyapunov fonksiyonu oluşturmaktadır. Ayrıca sistem dinamikleri her bir düğüm noktası arasında doğrusal olarak değişiyorsa, her bir tasarım noktası arasındaki ara noktaların kararlılığı ve performans sınırlarını γ karşıladığını göstermek gerekecektir.. Önce i ve $j = i + 1$ olarak iki düğüm noktası seçilir. Daha sonra her bir tasarım noktası arasındaki iç noktalar, $\alpha_i + \alpha_j = 1$ olduğu politopik koordinatlarda α_i ve α_j ile gösterilebilir. Not olarak $\alpha_i = 1$, i 'inci düğüme karşılık gelir ve $\alpha_j = 1$, j 'inci düğüme karşılık gelir. $0 < \alpha_i < 1$ ise tüm ara noktaları kapsar. Doğrusal interpolasyon kontrolcü ara noktalarda $u(t) = (\alpha_i K_i + \alpha_j K_j) x(t)$ olarak tanımlanmıştır. Ara noktalardaki kapalı çevrim sistemi yazacak olursak:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i A_i + \alpha_j A_j & \alpha_i B_{1i} + \alpha_j B_{1j} & B_2 \\ \alpha_i C_{1i} + \alpha_j C_{1j} & \alpha_i D_{11} + \alpha_j D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

durum geri besleme denetleyicisini $K = \alpha_i K_i + \alpha_j K_j$, iken kapalı döngü P_{cl}

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_i A_i + \alpha_j A_j) + B_2(\alpha_i K_i + \alpha_j K_j) & \alpha_i B_{1i} + \alpha_j B_{1j} \\ (\alpha_i C_{1i} + \alpha_j C_{1j}) + D_{12}(\alpha_i K_i + \alpha_j K_j) & \alpha_i D_{11} + \alpha_j D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

Bu sistem için analiz denklemini yazacak ve parçalara ayırırsak

$$\alpha_i \begin{bmatrix} YA_i^T + M_i^T B_2^T + A_i Y + B_2 M_i & * & * \\ B_{1i}^T & -\gamma I & * \\ C_{1i} Y + D_{12} M & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} + \alpha_j \begin{bmatrix} YA_j^T + M_j^T B_2^T + A_j Y + B_2 M_j & * & * \\ B_{1j}^T & -\gamma I & * \\ C_{1j} Y + D_{12} M & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

elde edilir bu denklemler zaten teorem koşullarında garanti edilmiştir. ■

5.5.3 Kazanç ayarlamalı dinamik çıkışlı geri besleme

Teorem 5.6: (Düğüm tabanlı \mathcal{H}_∞ Sentezi Karesel Performans) \mathcal{H}_∞ problemine kararlılık sağlayan ve karesel performansı garanti eden yerel doğrusallaştırma ailesi için ancak

$$*^T \begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \quad (5.21)$$

$$*^T \begin{bmatrix} A_i Y + Y A_i^T & Y C_{1i}^T & B_{1i} \\ C_{1i} Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.23)$$

sağlanırsa yerel bir sentez vardır ve ara noktalarda kararlılık garanti edilir.

İspat: Her çalışma noktasında ortak Lyapunov fonksiyonu kullanıldığından yukarıdaki DME çözümlerinin düğüm noktalarında gerekli şartları sağladığı açıkça görülebilir. Böylece kararlılık ve performansın düğüm koşullarında sağlandığı gösterilmiş olur. Ayrıca, sentez eşitsizliklerinin tasarımın ara noktalarında da geçerli olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. Sistemin doğrusal kombinasyonu kullanılarak ara noktalardaki sistem:

$$P_{ij} := \begin{bmatrix} (\alpha_i A_i + \alpha_j A_j) & (\alpha_i B_i + \alpha_j B_j) \\ (\alpha_i C_i + \alpha_j C_j) & (\alpha_i D_i + \alpha_j D_j) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Burada $\alpha_i, \alpha_j \geq 0$ ve $\alpha_i + \alpha_j = 1$. Daha sonra sentez eşitsizliği şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \alpha_i \begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T X & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{bmatrix} + \alpha_j \begin{bmatrix} A_j^T X + X A_j & X B_{1j} & C_{1j}^T \\ B_{1j}^T X & -\gamma I & D_{11j}^T \\ C_{1j} & D_{11j} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Eğer sentez eşitsizlikleri hem i hem de j için sağlanırsa, bunların doğrusal birleşimi yukarıdaki gereksinimi karşılayacaktır. Aynı gözlem ikincil eşitsizlik için de yapılabilir. Ardından, ara noktalar için performansın ve kararlılığın sağlandığını garanti etmiş oluruz. ■

Teorem 5.7: Açık döngü doğrusal zamanla değişmez (DZD-LTI) sistem ailesi için ancak

$$A_{si}^T X + X A_{si} + X L_i C_s + C_s^T L_i^T X - \gamma C_s^T C_s < 0 \quad \forall i \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} A_{si} Y + Y A_{si}^T - \gamma B_s B_s^T & Y C_s^T & -L_i \\ C_s Y & -\gamma I & I \\ -L_i^T & I & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \quad (5.25)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.26)$$

sağlandığında asal (koprim) faktörler belirsizlik gösterimi $\|\Delta N \quad \Delta M\|_\infty \leq \epsilon = \frac{1}{\gamma}$ açısından \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme soruna gürbüz kararlılık sağlayan düğüm tabanlı dinamik çıktı geribildirim sentezi mevcuttur.

İspat: Genel çözüme $A = A_{si}$, $B_1 = -L$, $B_2 = B_s$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_s \end{bmatrix}$, $C_2 = [C_s]$, $D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $D_{12} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$ ve $D_{22} = 0$ değerleri konulduğunda ve $N_X = \begin{bmatrix} I \\ -C_s \end{bmatrix}$ ve $N_Y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B_s^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ seçilirse Teorem 5. 4'e benzer bir şekilde ispat tamamlanabilir. ■

5.6 Otonom helikopter için Kazanç Ayarlamalı Kontrolcü Sentezi

Arzu edilen özelliklere sahip bir açık çevrim sistem şekli bulma süreci oldukça standarttır, ancak istenen bir döngü şekline ulaşılan kadar deneme yanılma gerektirir. Öncelikle, açık döngü sistem için bir ön ve arka filtre kullanılarak arzu edilen açık döngü frekans cevabı elde edilmeye çalışılmalıdır. Nominal sistem G ve şekillendirme fonksiyonları W_1 ve W_2 , elde edilmek istenen sistemi oluşturmak üzere birleştirilir, burada $G_s = W_2 G W_1$ 'dir. G_s oluşturulurken

- 1) düşük frekanslarda yüksek değerde,
- 2) istenen bant genişliğinde 20dB /onluk düşüm oranı,
- 3) yüksek frekanslarda daha yüksek frekans düşüm oranı,

olması beklenir.

W_2 kontrol edilecek çıktıların görece önemini vurgulamak için bir sabit olarak seçilebilir. Çıkış ölçekleme filtresini sabit olarak bıraktık. W_1 giriş filresi ise kontrol girişlerini ölçeklendiren dinamik şekillendirici elemanları içerir. Düşük frekans

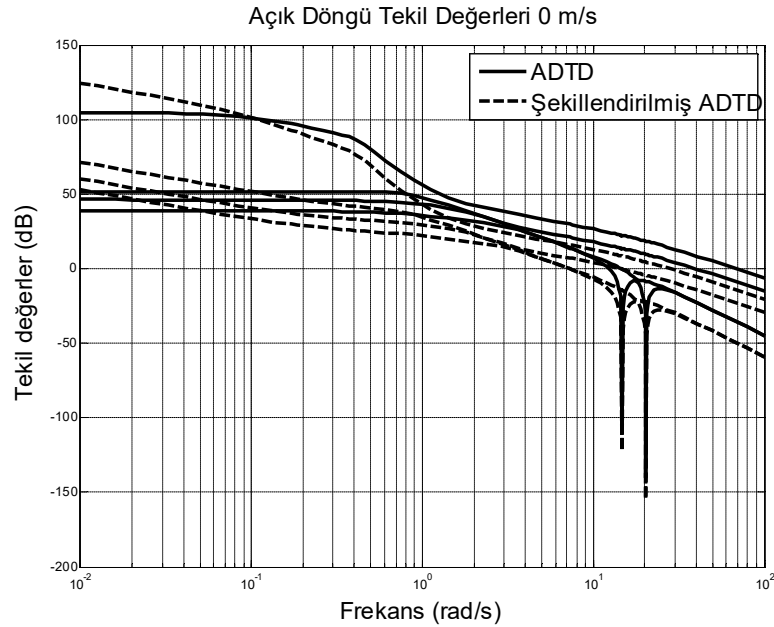
performansını iyileştirmek ve kapalı döngü bant genişliğini sınırlamak için ön filtre W_1 şeklinde seçilmiştir:

$$W_1(s) = \text{diag} \left(\frac{2s + 0.5}{10s}, \frac{2s + 1}{10s}, \frac{2s + 1}{10s}, \frac{2s + 0.5}{10s} \right)$$

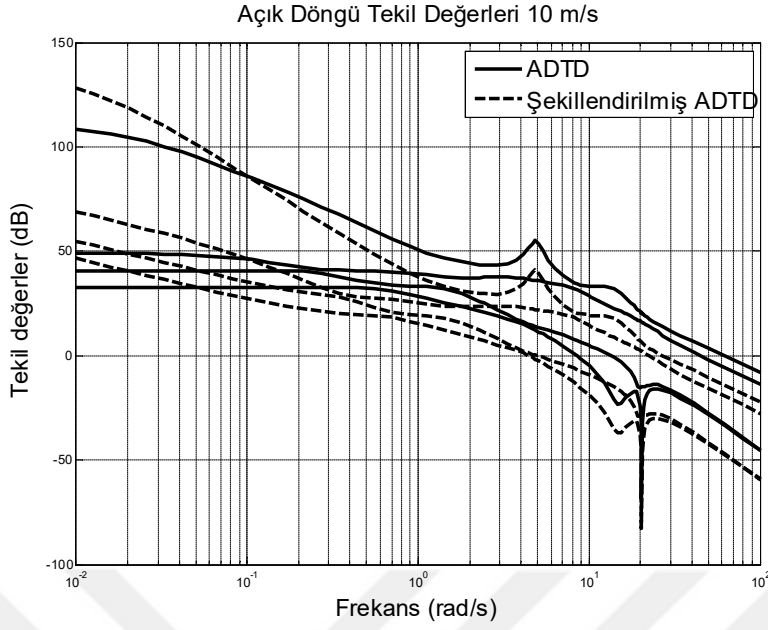
Çıkış filtresi ise sabit alınmıştır ve

$$W_2(s) = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$$

Gibi tanımlanır. $W_1(s)$ filtresi temelde bir oransal/integral tipi kontrolcü gibi davranır. Düşük frekanslı performansı artırmak için integral etkisi de W_1 ile eklenmiş oldu. Nominal sistem ile birlikte şekillendirilmiş sistemin tekil değerleri (kesik çizgili) Şekil 6'da gösterilmektedir. Parametrik döngü şekillendirme için, istenen döngü şeklini etkilemeksizin kontrol giriş ağırlığını ölçeklendirilmiştir. Bu uygulamada $\lambda = 0.25$ olarak seçilmiştir. Bu temelde \mathcal{H}_∞ optimizasyon problemindeki hedef fonksiyonun ağırlığını değiştirir. Bu dolaylı olarak istenen açık çevrim sisteminin belirsizlik tanımını ölçeklendirir. Fiziksel olarak, bu istenen sistem çıkışı y ve kontrol girişi u arasında ağırlıklı bir veren daha esnek bir tasarım yapmak için kontrol girişinin birimlerini değiştirmektedir. Verilen $W_1(s)$ ve $W_2(s)$ ve λ ile tatmin edici gürbüz kararlılık marjı sağlandığında kontrolcü elde edilmiş olur. Tasarlanan kontrolcü ve sistem için açık döngü tekil değerleri Şekil 7'de görülebilir.

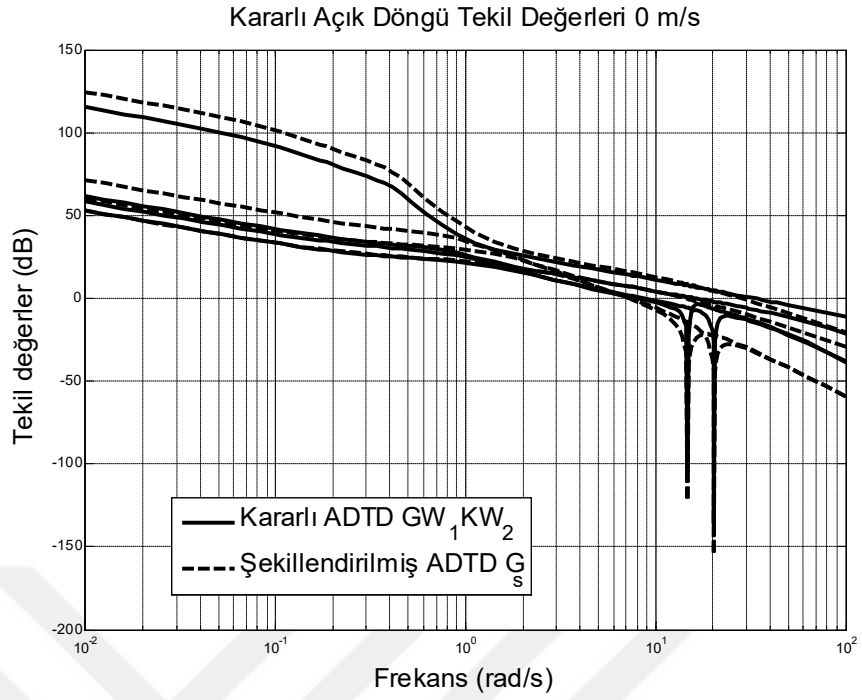


Şekil 5.2 : Açık döngü tekil değerleri askı durumu.

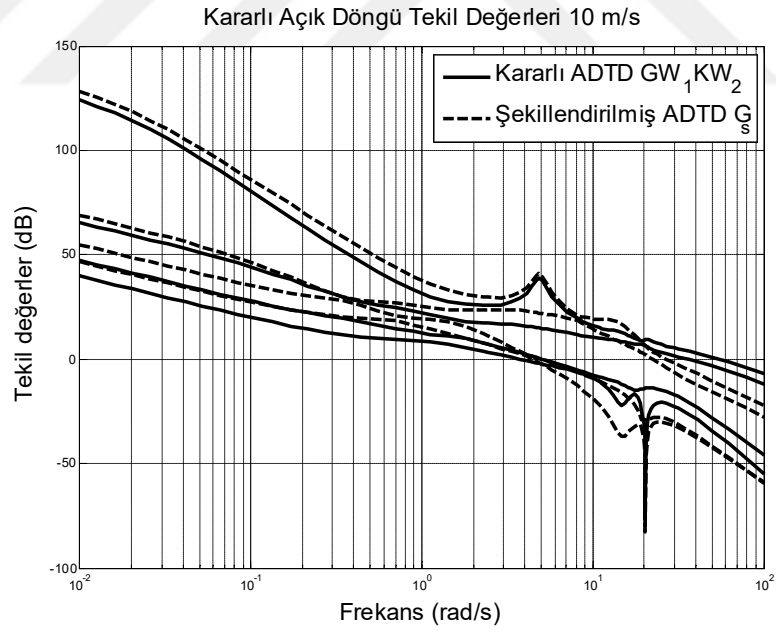


Şekil 5.3 : Açık döngü tekil değerleri ileri hız.

Şekil 5.2'de (askı) ve Şekil 5.3'de (ileri hız), açık döngü frekans cevabı ve şekillendirilmiş sistemin açık çevrim frekans cevabı karşılaştırılmıştır. Kararlı hale getirilmiş açık döngü tekil değerleri ile şekillendirilmiş açık döngü tekil değerleri arasındaki fark Şekil 5.4'de (askı) ve Şekil 5.5'de (ileri hız) görülebilir. Şekil 5.6'da (askı) ve Şekil 5.7'de (ileri hız) hassasiyet fonksiyonları görülebilir. Şekil 5.8'de (askı) ve Şekil 5.9'da (ileri hız) tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonları görülebilir. Burada gösterilen fark tasarım hedefi ile yakından ilişkilidir. $\epsilon_i = \frac{1}{\gamma_i}$. ($\gamma_1 = 3.0950$, $\gamma_2 = 3.1386$, $\gamma_3 = 3.1547$, $\gamma_4 = 3.1613$, $\gamma_3 = 3.1875$, ve $\gamma_3 = 3.1153$). Bunun yanında sentez prosedürü, tabii ki daha muhafazakâr olan düğüm tabanlı sentez için ortak Lyapunov fonksiyon yaklaşımı ile tekrarlandı, $\gamma_{common} = 3.8895$ elde edilmiştir ve sistem ailesi için halen yeterli bir kararlılık marjı sağlandığı görülmüştür. Başka bir deyişle, küçük γ , elde edilen döngü şeklinin belirtilen döngü şeklinin yakın olduğunu gösterir. Yani, büyük bir ϵ değeri, başarılı bir döngü şekillendirme tasarımı ve kapalı döngü sistemi için daha büyük bir kararlılık marjı sağlar. Dengelenmiş açık çevrim sistemin bozucu reddi için düşük frekanslarda yüksek olduğu ve kapalı döngü sisteminin bant genişliği 4-5 rad/s civarında olduğu gösterilmiştir.

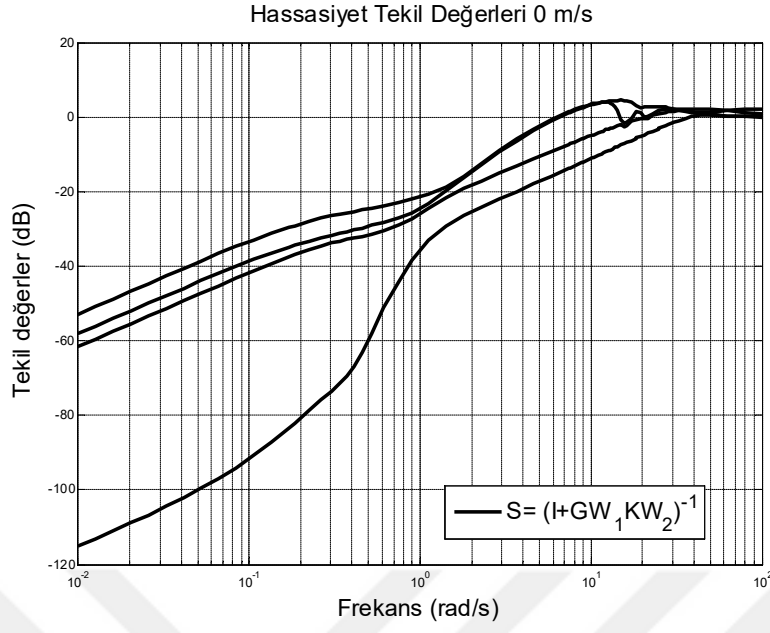


Şekil 5.4 : Şekillendirilmiş ve kararlı döngü tekil değerleri askı.

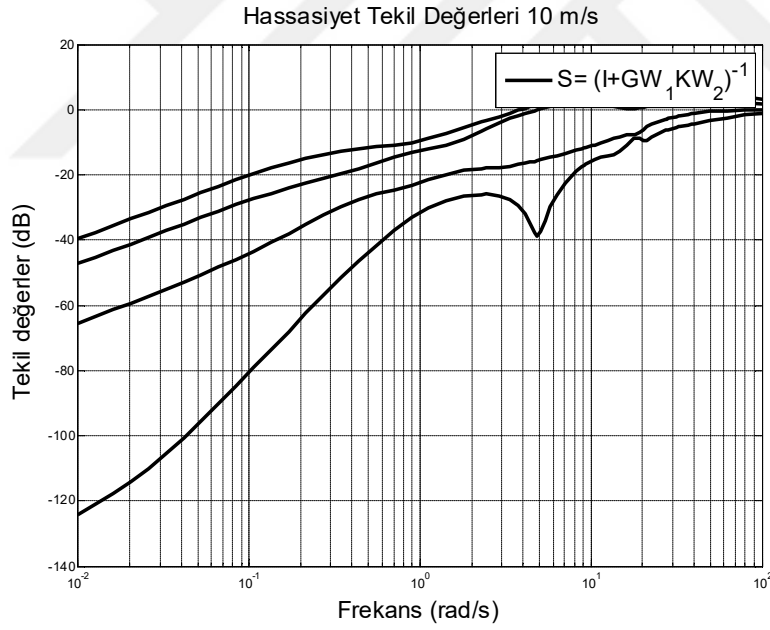


Şekil 5.5 : Şekillendirilmiş ve kararlı döngü tekil değerleri ileri hız.

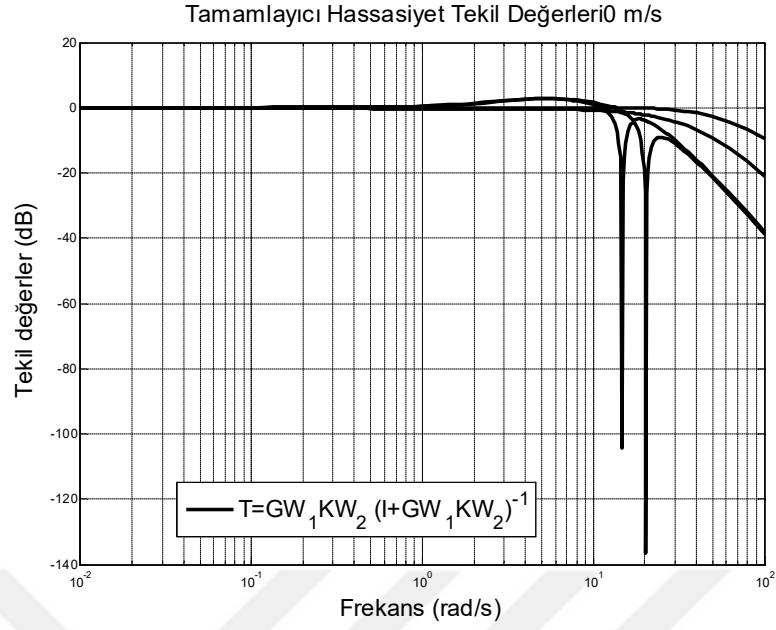
Hassasiyet ve tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonları Şekil 5.6-5.9'da görülebilir. Bu fonksiyonlar askı durumundaki hassasiyet fonksiyonudur. Diğer durumlardaki hassasiyet fonksiyonları da benzer özelliklere sahiptir.



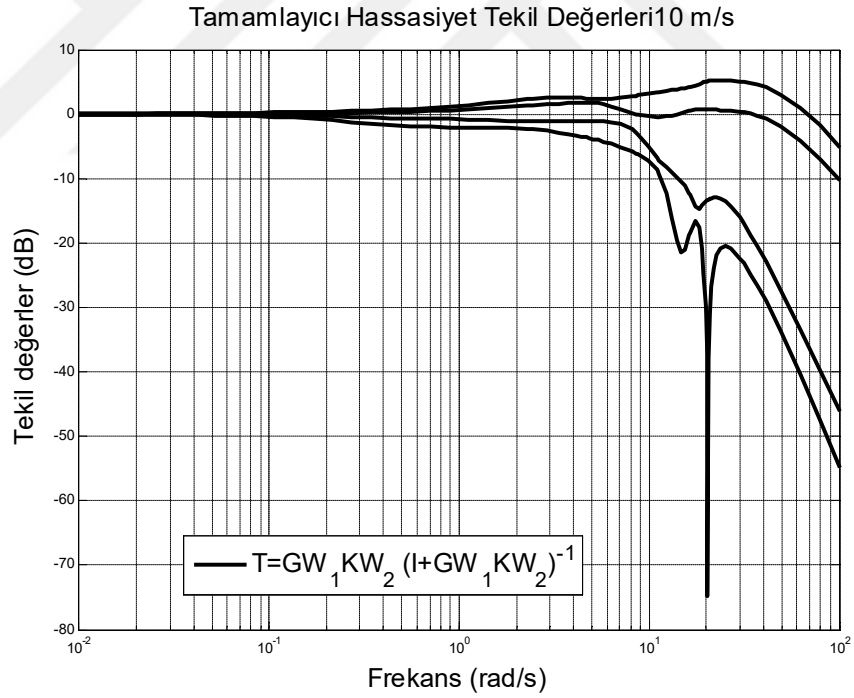
Şekil 5.6 : Hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri askı.



Şekil 5.7 : Hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri ileri hız.



Şekil 5.8 : Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri askı.



Şekil 5.9 : Tamamlayıcı hassasiyet fonksiyonu tekil değerleri ileri hız.

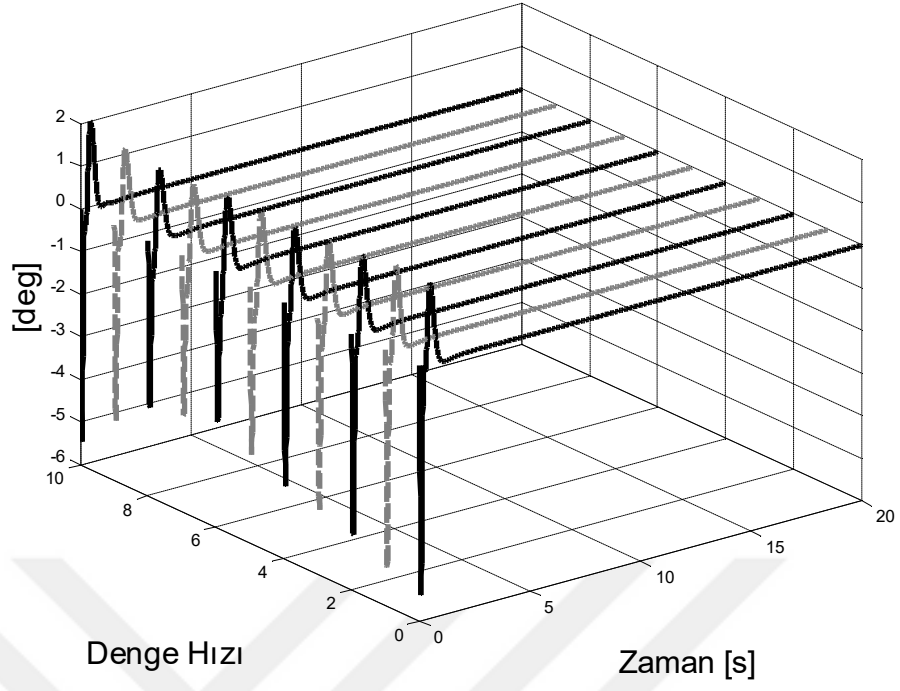
Denetleyici tasarımı hem doğrusal hem de doğrusal olmayan benzetimler kullanılarak değerlendirilmiştir. Frekans bölgesi analizi ile kontrolcü tasarımının etkililiğinin tekil değer analizi ile kabaca bir gösterge olmasına rağmen, sistemin geçici davranış

seviyesi ile ilgili yeterli bilgi vermek için yeterli olmamaktadır. Frekans bölgesi analizi burada sunulan zaman alanı sonuçları ile tamamlanmalıdır. Öncelikle, her düğüm noktasında doğrusal benzetim ile her eksendeki denetleyicilerin referans takibi performansını inceledik. Doğrusal benzetim sonuçları Şekil 5.10-17’de verilmiştir. Farklı denge koşulları için tasarlanan kontrolcülerin, kontrolcü ve sistemin çapraz bağlanmasıyla kapalı döngü öz değerlerini basitçe kontrol ederek doğrusal sistemi diğer koşullarda kararlı hale getiremediğini gözlemledik. Bu aynı zamanda doğrusal olmayan benzetimde doğrulanmadı çünkü kazanç ayarlamalı kontrolcü senaryoları, beklenen şekilde kapalı döngü hedeflerini başaramadı. Bu ayrıca, tüm uçuş zarfı için kazançlı ayarlamalı kontrolcüye duyulan ihtiyacı da tekrardan doğrulamaktadır.



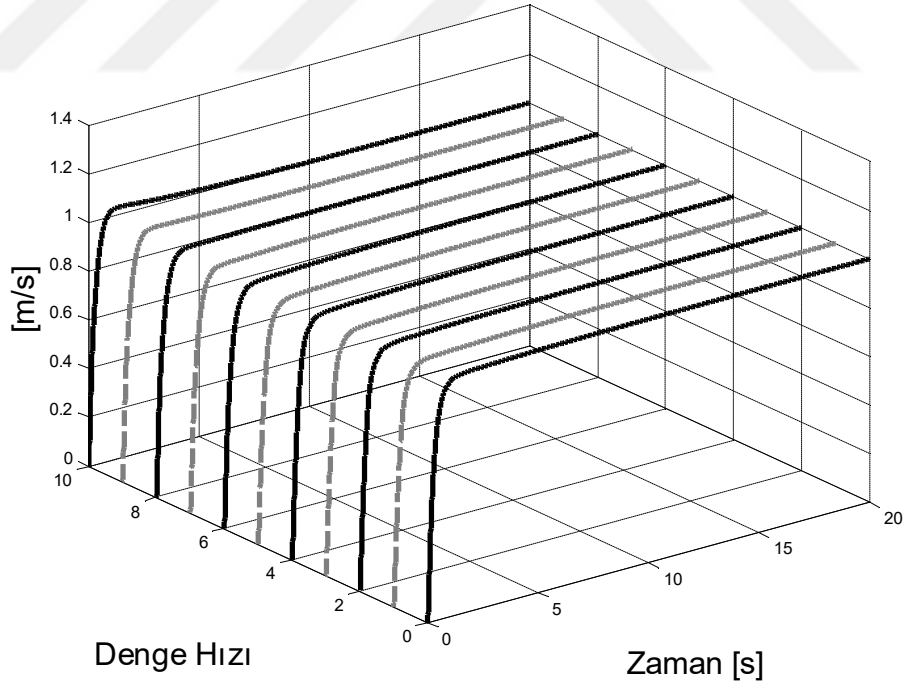
Şekil 5.10 : Yerel doğrusal modelde referans izleme ileri hız tutma.

Boylamsal Kontrol Kumandası



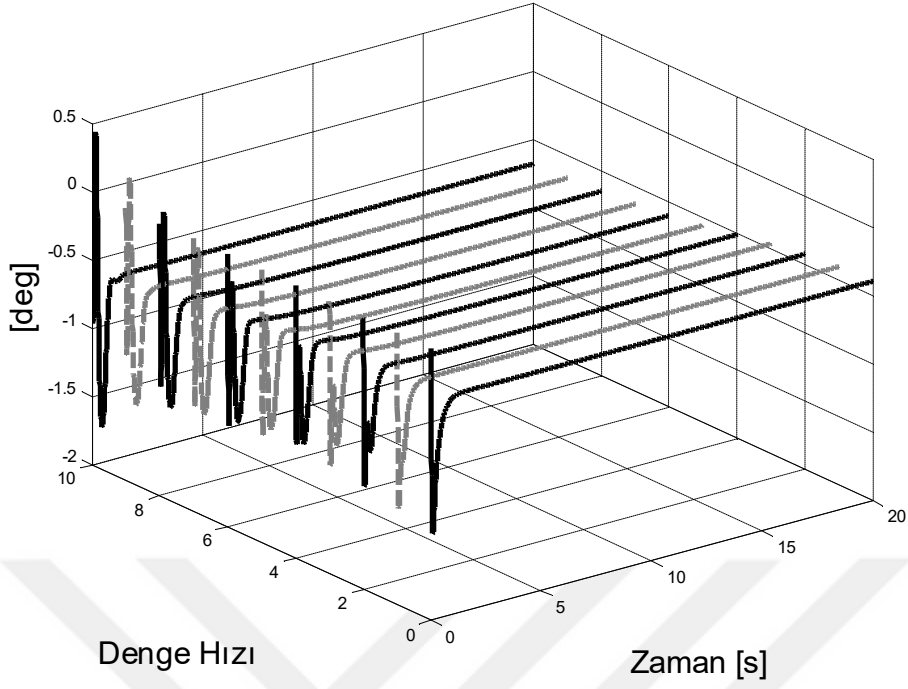
Şekil 5.11 : İleri hız tutma boylamsal kontrol kumandası.

Yükselme Hızı



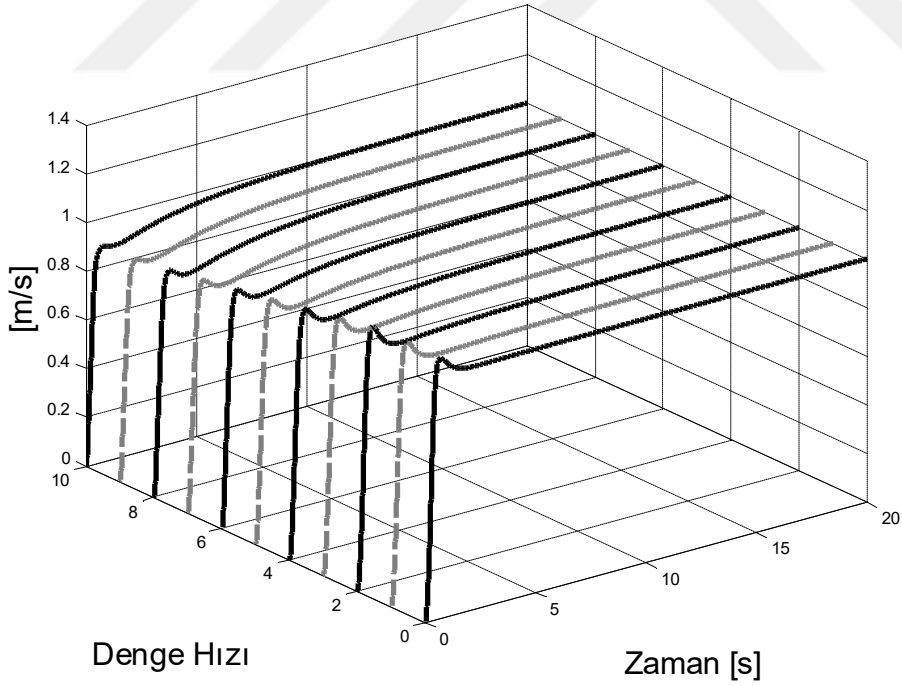
Şekil 5.12 : Yerel modelde referans izleme yükselme hızı tutma.

Kollektif Kontrol Kumandası



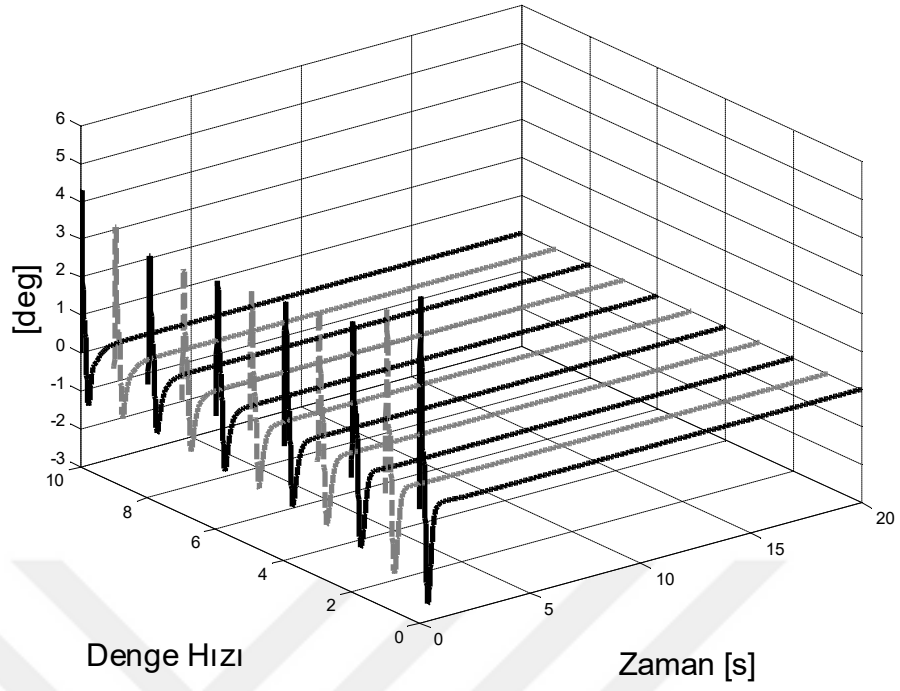
Şekil 5.13 : Yükselme hızı tutma kollektif kontrol kumandası.

Yanal Hız



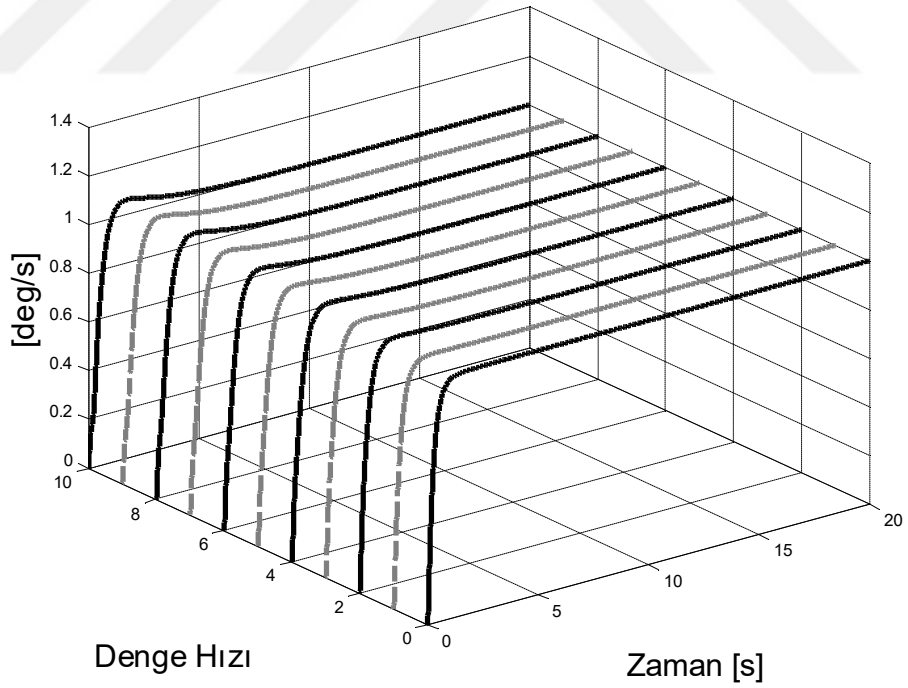
Şekil 5.14 : Yerel doğrusal modelde referans izleme yanal hız tutma.

Yanal Kontrol Kumandası



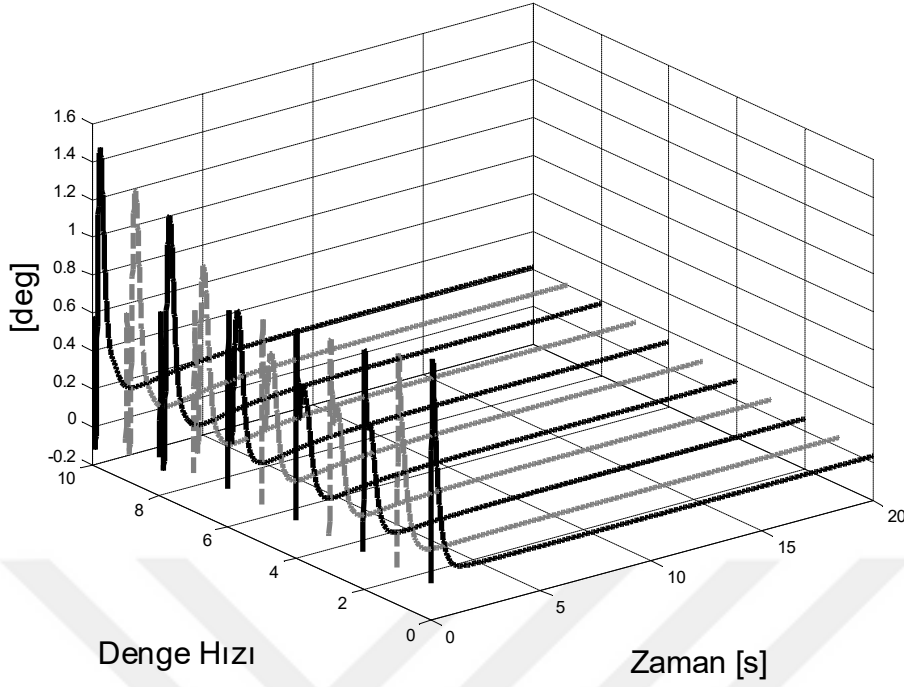
Şekil 5.15 : Yanal hız tutma yanal kontrol kumandası.

Sapma açısız hızı R



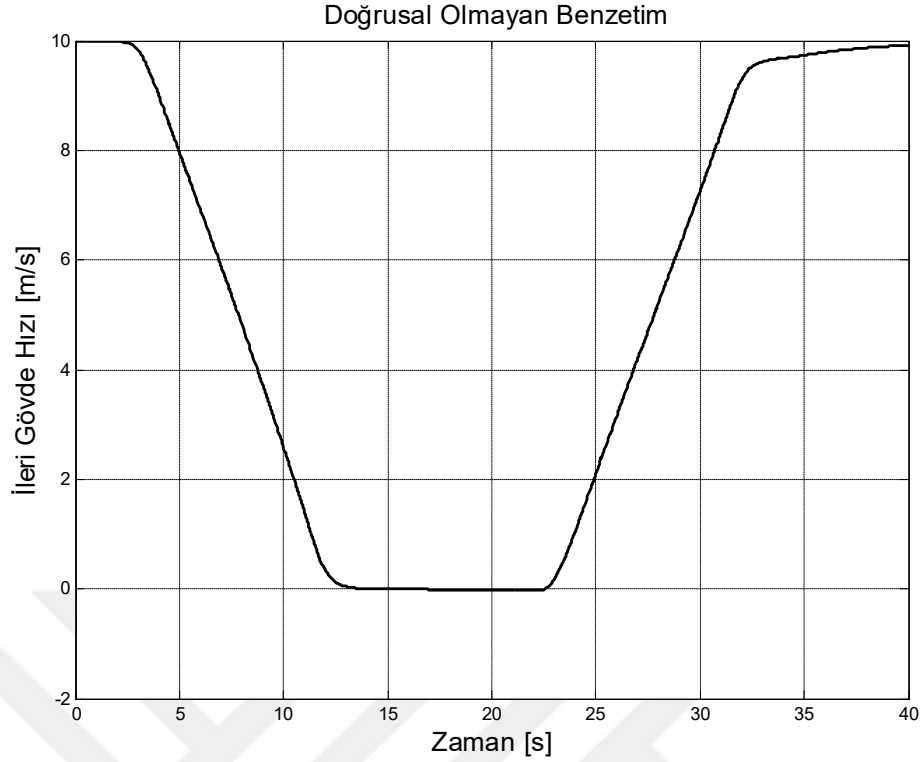
Şekil 5.16 : Yerel doğrusal modelde referans izleme sapma hızı tutma.

Kuyruk Rotoru Kontrol Kumandası



Şekil 5.17 : Sapma hızı tutma kuyruk rotoru kontrol kumandası.

Doğrusal olmayan modelde, gerçek komutları üretmek için kontrol girişlerine denge durumu girişleri eklenir. Denge noktaları arasında, doğrusal parametresine bağımlı kontrol matrisleri lineer olarak interpolate edilir. Doğrusal olmayan modelde test amaçlı helikopterin 0, 2, 4, 6, 8 ve 10 m/s hızlarında uçtuğu senaryolar için tasarlanan kontrolcülerin yerel performansını doğrulandı, burada pilot denge noktaları çevresinde 1 m/s hızlanma ve yavaşlama talep ediyor. Her durumda kontrolcü tatmin edici kararlılık ve referans izleme sağladı. Doğrusal olmayan modelde yerel performans testleri sonrasında ayarlamalı kontrolcünün tüm uçuş zarfında testi için, Şekil 5.18’de gösterilen denetleyicilerin tasarlanan tüm uçuş zarfı boyunca performansına baktık. Bu durumda, helikopter 10 m/s ileri hızda de uçuyor ve pilot, 0 m/s ve 10 m/s ileri hıza ulaşmak istiyor. Tasarlan kontrolcü, doğrusal olmayan matematiksel benzetim modelini işletme zarfı boyunca etkin bir şekilde kontrol edebildiğini göstermek için doğrusal olmayan modele benzetim yapılmıştır. Benzetim sonuçları Şekil 5.18’de görülebilir.



Şekil 5.18 : Doğrusal olmayan benzetim tüm zarf testi ileri hız.

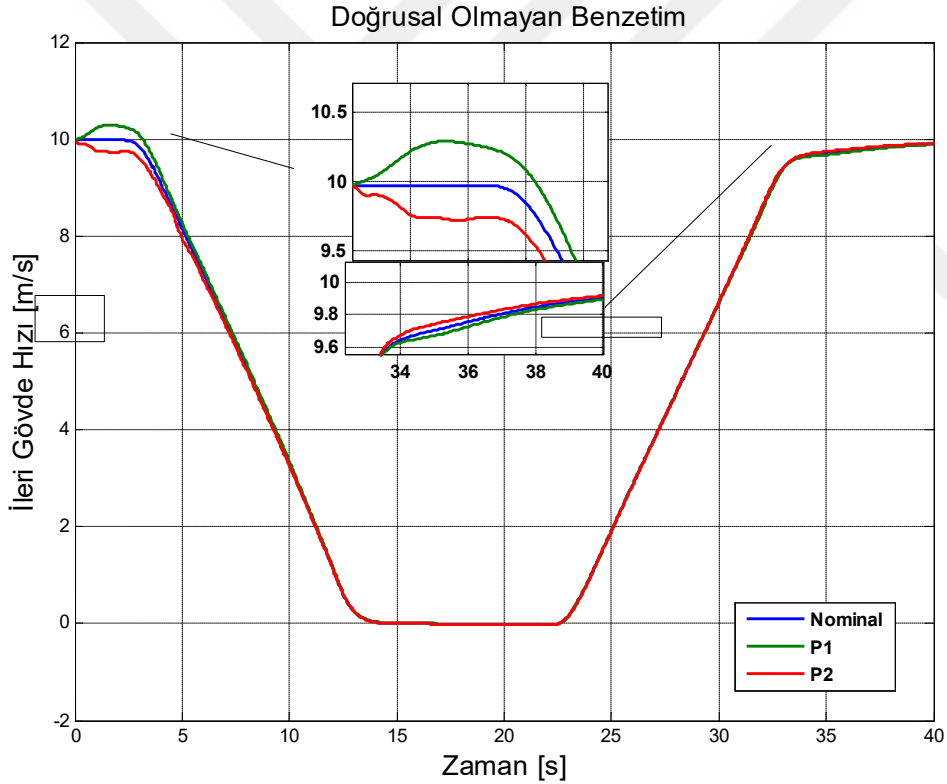
Kendinden ayarlamalı kontrolcü tasarımı, hem test edilen uçuş koşullarında hem de denge noktalarında hem de ara noktalarda performanslı bir kapalı çevrim sistem sağladığı gözlenmiştir. Denetleyicinin gürbüzlük özelliklerinin incelenmesi için, doğrusal olmayan modelin kütle ve eylemsizlik özelliklerini, orijinal değerlerinin yaklaşık %10'una karşı gelecek şekilde değiştirilmiştir. Çevrimdışı tasarlanan kontrolcüler ile olduğu gibi bırakılmıştır. Şekil 5.19'dan, denetleyicinin başlangıçta gerekli denge girişlerini 5 saniyeden kısa sürede bulduğu gözlemlenebilir. Daha sonra, doğrusal olmayan benzetim modeline ölçüm gürültüsü eklenmiştir. Şekil 5.20'de görülebileceği gibi doğrusal olmayan benzetim modeline ölçüm gürültüsü eklendiğinde kapalı döngü sistemin ölçüm gürültüsü varlığın da halen kararlı olduğu görülebilir. Bu da tasarlanan kontrolcünün gürbüzlük özelliğini doğrulamaktadır.

Daha sonra, doğrusal olmayan benzetim modeline ölçüm gürültüsünün yanı sıra rüzgâr eklenmiştir. Şekil 5.21'de görülebileceği gibi doğrusal olmayan benzetim modeline ölçüm gürültüsü ve rüzgâr eklendiğinde kapalı döngü sistemin halen kararlı olduğu görülebilir. Rüzgâr varlığında kontrolcünün performansı azalmaktadır ve salınımlar görülmektedir. Kontrolcü 5 knota kadar olan rüzgârlara dayanabilmektedir. Bu açıdan

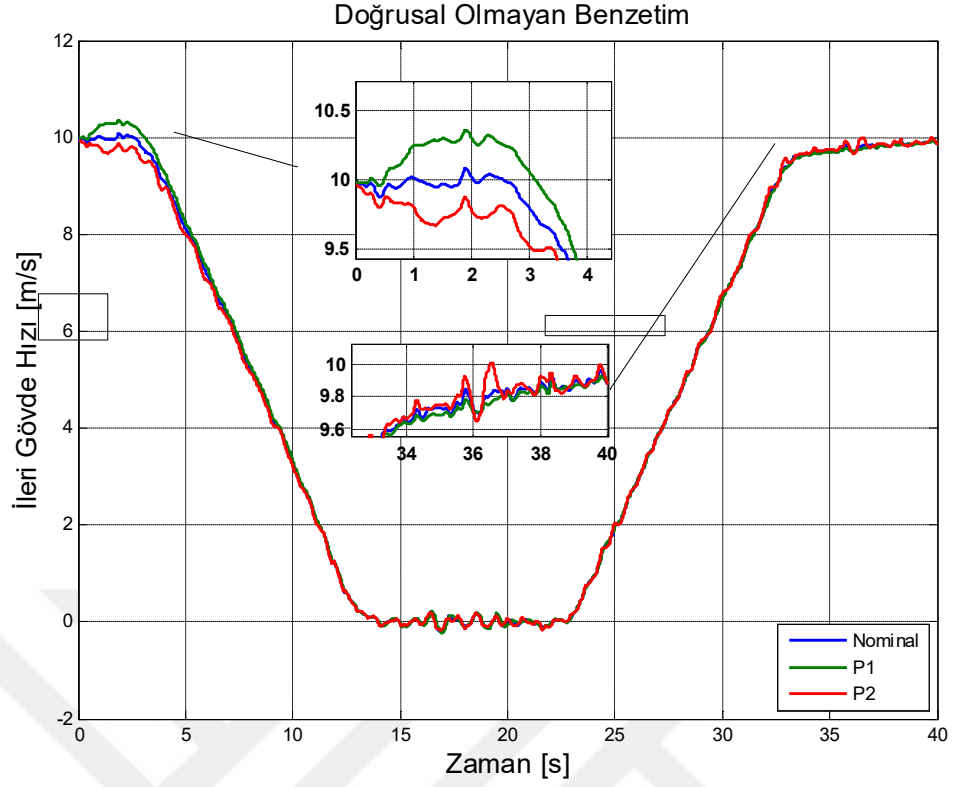
karma duyarlılık kontrol tasarımının rüzgâra karşı daha dayanıklı olduğu söylenebilir. Şekil 5.22’de hava hızı verisi incelenebilir.

Aynı benzetimleri kütle ve atalet değerlerini belli sınırlar içinde rassal olarak değiştirerek tekrarlayalım. Şekil 5.23’de görülebileceği gibi doğrusal olmayan benzetim modeline ölçüm gürültüsü varken ve kütle ve atalet değerleri olarak %10’luk bir belirsizlik ile değiştirirken kapalı döngü sistemin halen kararlı olduğu görülebilir.

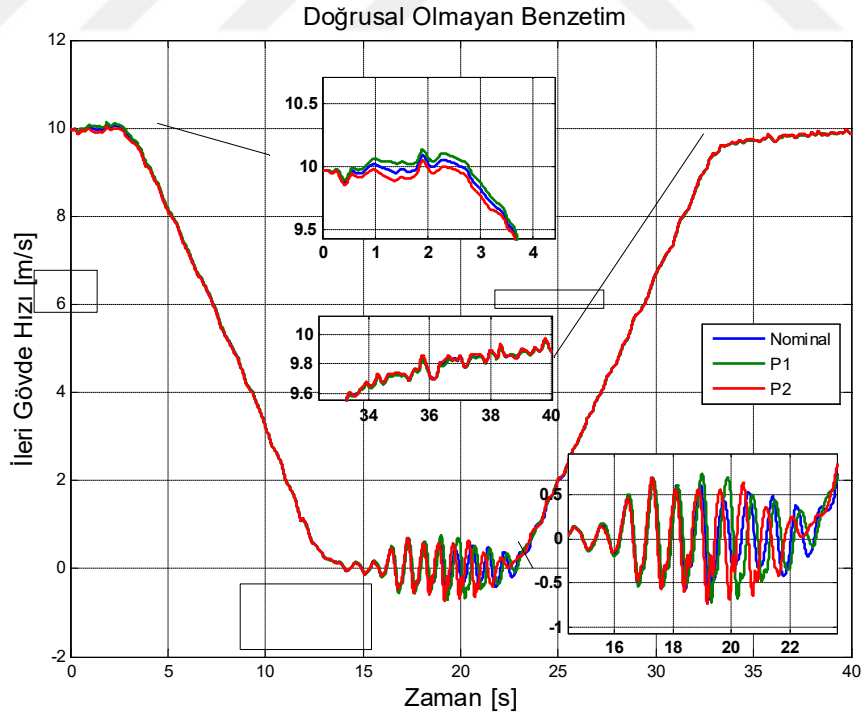
Şekil 5.24’de görülebileceği gibi doğrusal olmayan benzetim modeline ölçüm gürültüsü ve rüzgâr eklendiğinde ve kütle ve atalet değerleri olarak %10’luk bir belirsizlik ile değiştirirken kapalı döngü sistemin halen kararlı olduğu görülebilir. Rüzgâr varlığında kontrolcünün performansı azalmaktadır ve salınımlar görülmektedir. Kontrolcü 5 knota kadar olan rüzgârlara dayanabilmektedir. Şekil 5.25’de hava hızı verisi incelenebilir.



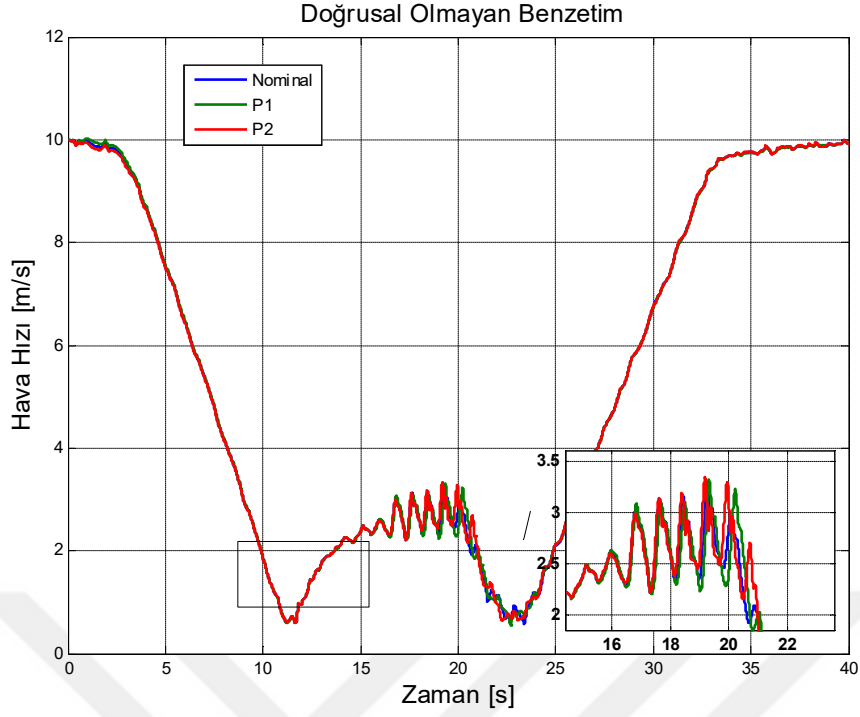
Şekil 5.19 : Kütle ve atalet değişimi.



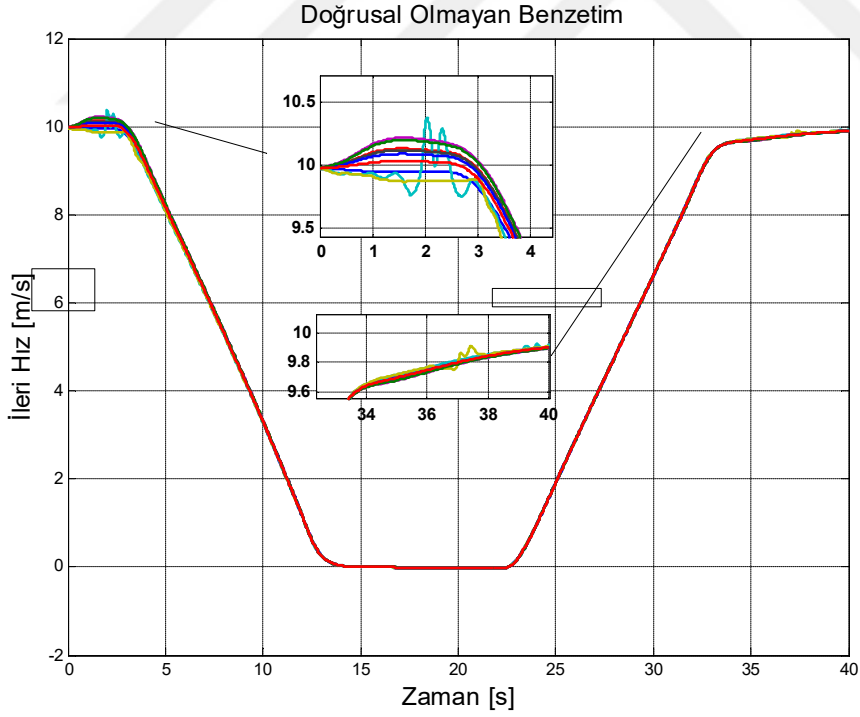
Şekil 5.20 : Ölçüm gürültüsü ileri hız kütle ve atalet değişimi.



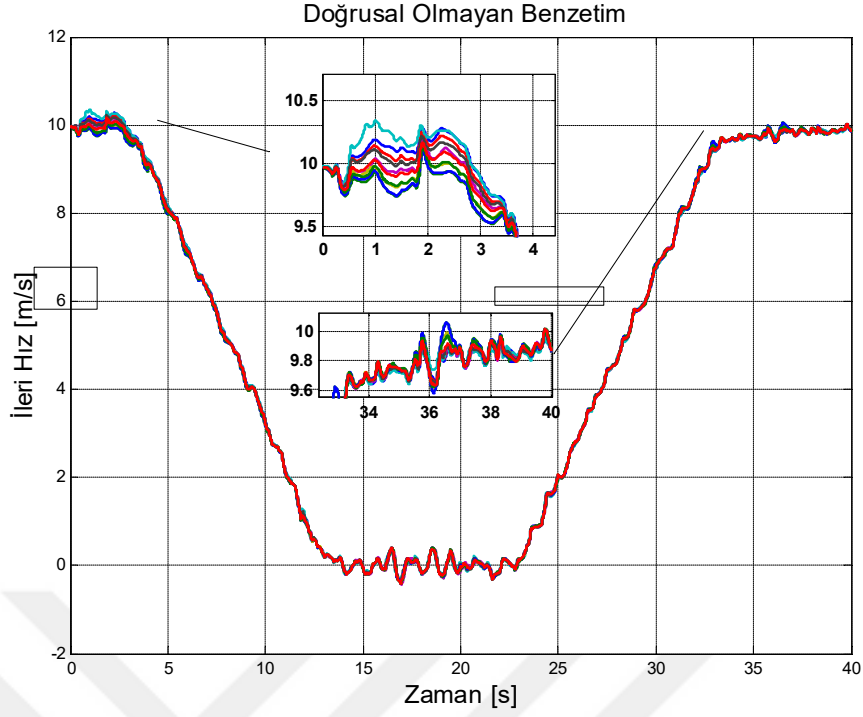
Şekil 5.21 : İleri hız ölçüm gürültüsü ve rüzgâr (5 knot).



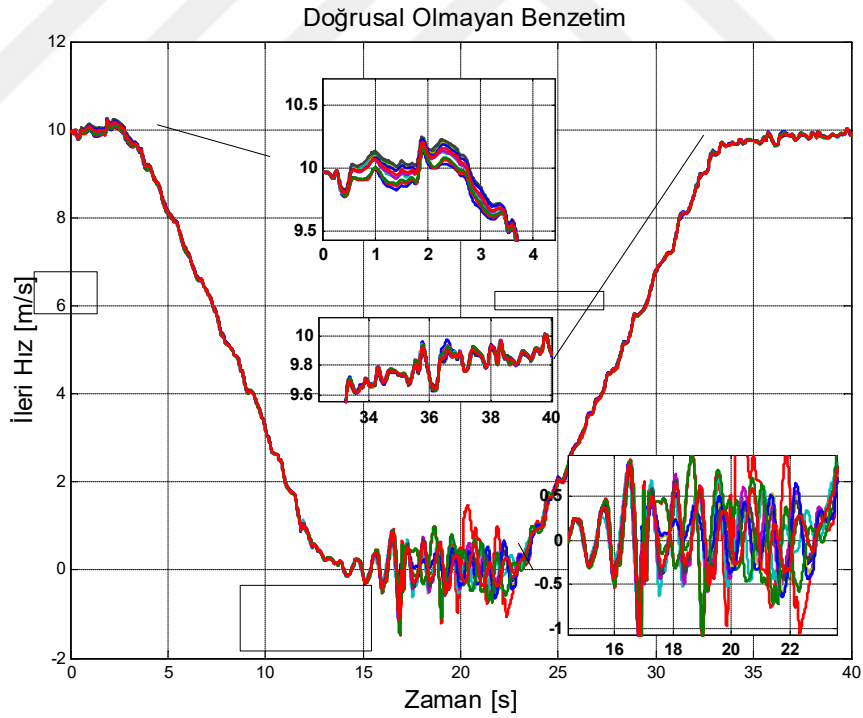
Şekil 5.22 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken hava hızı (5 knot).



Şekil 5.23 : Kütle ve atalet değişimi (rassal).



Şekil 5.24 : İleri hız ölçüm gürültüsü, kütle ve atalet değişimi (rassal).



Şekil 5.25 : Ölçüm gürültüsü ve rüzgâr varken hava hızı hız kütle ve atalet değişimi (rassal) (5 knot).

5.7 Sonuç

Bu kısımda uçuş zarfı boyunca küçük ölçekli otonom bir helikopterin \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirmesi yöntemi ile kontrol edilmesi hedeflenmiştir. \mathcal{H}_∞ kontrol optimizasyonuna dayalı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kontrol metodolojisini kullanılarak kazanç ayarlamalı döngü şekillendirme kontrolcüler elde edilmiştir. Öncelikle yerel denetleyicileri tasarladık ve bu kontrolcülerin tüm uçuş zarfını kapsamada eksik olduğu görülmüştür. Daha sonra, tüm denge noktalarında ortak bir Lyapunov fonksiyonu kullanarak düğüm-düğüm kontrol sentezi yapılmıştır. Burada doğrusal olmayan modelin her denge noktası arasında bir doğrusal parametreye bağımlı olarak değiştiğini varsayarak ara noktalarda da kararlılık ve performans garantisi sunulmuştur. Bu kabul denge yani tasarım noktaları birbirine yeterince yakınsa doğrudur. Teorik katkı esas olarak artan hesaplama çabası pahasına, uçuş zarfı boyunca kararlılığı garanti eden kontrolcülerin ortak Lyapunov fonksiyonu kullanılarak kazanç ayarlamalı bir kontrolcü tasarımını düğüm tabanlı olarak yapılmasıdır. Bu düğüm tabanlı kontrolcüler, uçuş zarfı içerisinde bir doğrusal parametre bağımlı modelini göz önüne alarak doğrusal parametreye bağlı kontrolcülerdir. Bu kontrolcüler kullanılarak kapalı çevrim sistem için kararlılık ve performansı garanti eder. Doğrusal olmayan modelde model belirsizliklerine ölçüm gürültüsüne ve belli derecede rüzgâr varlığında kapalı çevrim sistemin kararlı olduğu görülmüştür.

6. YANAL KONTROL YÜZEYİ SIKIŞMIŞ İNSANSIZ HAVA ARACI İÇİN GÜRBÜZ ACİL DURUM OTOPILOT TASARIMI

6.1 Çalışmanın Amacı

Bu kısımda, yanal kontrol yüzeyi kanatçığın (aileron) sıkışıp ve kullanılamaz hale geldiğinde bir insansız hava aracı (İHA) için acil durum otopilot tasarımını ele alınmaktadır. Tasarlanan otopilot yanal kontrol yüzeyi sıkışması durumunda otomatik kurtarma prosedürü ile İHA'nın acil iniş işlemlerini gerçekleştirmektedir. Doğrusal olmayan bir uçak modeli İHA için boylamsal ve yanal kanallarını ayrıştırmadan çok girdili çok çıktılı (ÇGÇÇ) kontrol tasarımı gerçekleştirilmektedir. Kontrol tasarımında \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme teorisi kullanarak uçuş kontrol yasaları oluşturulmuştur. Tasarlanan otopilot, kanatçık eyleyici motoru sıkışması durumunda oluşan örnek tehlike senaryosunda test edilmiştir. Otopilot tasarımının, hata senaryosu altında güvenli uçuş ve otonom navigasyonu sürdürme kabiliyetine sahip olduğu ve İHA'yı bir hedef piste emniyetli bir şekilde inebileceği, döngüde donanım (HIL -hardware-in-the-loop) benzetimleri ile de teyit edilmiştir.

6.2 Giriş

Çok sayıda havacılık kazası, eyleyici motor sıkışmaları da dâhil olmak üzere yanal kontrol yüzey kayıplarından, meydana gelmiştir [84] [85]. Kontrol yüzeyinde bir arıza veya kayıp olması, uçağın koordinasyonsuz alışılmadık bir duruma düşmesine neden olur. Eyleyici sıkışması esnasında temel sorunlar: uçağın uçuşunu sürdürmek için yeterli kontrol gücünün olup olamaması ve bu durumda uçuşun nasıl devam edeceğidir [86]. Bunun yanında, olumsuz atmosferik koşullar durumu daha kötü hale getirebilir: örneğin, yan rüzgârlar, tarihteki birkaç kazanın sorumlusu olarak anılmaktadır [87] [88]. Kalan kontrol yüzeyleriyle uçuşu sürdürmek matematiksel olarak mümkün olsa bile, panik, sıkıntı ve ek iş yükü bir insan pilotunun dayanabileceğinden daha fazla olabilir [89].

Uçuş esnasındaki arızaları tespit etmek ve gidermek için çeşitli hataya dayanıklı/yeniden yapılandırılabilen yöntemler önerilmiştir. Bunlara, çoklu model uyarlamalı kontrol [90], backstepping [91], kayan kipli kontrol [92], özyapı atama [93], uzlaşma tabanlı kontrol, [94] model referans artı dinamik tersleme [95], aktif gözlemcisiz algoritmalar [96] ve uyarlanabilir bulanık kontrol [97] örnek olarak verilebilir. İnsansız hava aracı (İHA) özel durumu için, ek bir sorun, uçağın uzak bir yerden pilotaj yapılmasıdır. Bu nedenle pilotlar alışılmadık tutum ve yan rüzgârlar kaynaklı ani güçleri fiziksel olarak hissedemezler. Küçük sabit kanatlı İHA'lar için otopilotlar tasarlamak için yapılan araştırma çalışmaları arasında taşıyıcılardan otomatik kalkış/inişler yapan otopilot [98] ve kesirli düzen kontrolcülerini kullanan otopilot [99] tasarımlarından bahsedilebilir.

Buradaki amaç, Çok Girişli Çok Çıkışlı (MIMO) sistem için gürbüz kontrol yöntemi ile birleştirilerek ve düzgün zamanlama ile acil uçuş kontrolcüsünün tasarlanmasıdır. Araçlar, döngüde donanım (HIL) testleri örnek bir İHA üzerinde doğrulanmıştır. Literatür, büyük resmin bazı yönleri ile parça parça ilgilenirken, i) eyleyici yüzeyi sıkışan bir uçak için boylamsal/yanal modları ayırarak elde edilmektedir Buradaki tasarımda boylamsal/yanal modları yarılmamıştır. ii) Gürbüz Çok Girişli Çok Çıkışlı kontrolcü yumuşatılmış bir şekilde kontrolcü ayarlama metodu kullanarak büyük bir uçuş zarfında kontrol sağlanmıştır ve iii) önerilen yöntem yarı-deneysel olarak HIL (hardware-in-the-loop) testiyle doğrulanmıştır. Bu çalışma kısmen daha önceki çalışmalara dayanmaktadır. [100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107].

Bu kısımdaki çalışmanın geri kalan kısmı aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir: Öncelikle, İHA'nın dinamik modeli özetlenmiştir. Daha sonra, kullanılan yazılım ve donanım ayarları açıklanmaktadır. Yanal yüzey eyleyici sürücüsü arızası için önerilen otomatik pilot tasarım yaklaşımı ayrıntılarıyla anlatılmaktadır. Son olarak, HIL testlerinin sonuçları sunulmaktadır.

6.3 İHAnın Matematiksel Modeli

Durum inceleme amacıyla, RQ-2 Pioneer insansız hava aracı (İHA), üzerinde çalışacağız. Bu İHA için ayrıntılı spesifikasyonlar, [108]'de inceleyebilir. Bununla birlikte, geliştirilen metot bu İHA'nın özelliklerinden bağımsızdır ve diğer herhangi bir hava aracına uygulanabilir.

İHA için tasarlanan otomatik pilot, otomatik kurtarma, istikrarlı bir manevra uçuşu ve nihayet istenen bir hava alanına iniş gerçekleştirmektedir. Burada kontrolcü tasarımı model tabanlı olduğu için yüksek doğrulukta doğrusal olmayan dinamik bir model oluşturulmalıdır. Model durum vektörü x olarak tanımlanmıştır.

$$x = [V_t, \alpha, \beta, p, q, r, \psi, \theta, \phi, x_e, y_e, z_e]^T \quad (6.1)$$

Burada V_t toplam hız, α hucum açıcı, β kayma açısı, p yalpalama açısal hızı, q yunuslama açısal hızı, r sapma açısal hızı, ψ baş (sapma) açısı, θ yunuslama, ϕ yalpa açısı ve x_e, y_e, z_e , dünya sabit eksen takımına göre konum koordinatlarıdır. Durum değişkenlerinin dinamikleri diferansiyel denklemler şeklinde ifade edilmiştir.

$$\dot{V}_t = \frac{1}{m} (F_x \cos \alpha \cos \beta + F_y \sin \beta + F_z \sin \alpha \sin \beta) \quad (6.2)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{V_t \cos \beta} \left[\frac{1}{m} (-F_x \sin \alpha + F_z \cos \alpha) \right] + q - (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \tan \beta \quad (6.3)$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{V_t} \left[\frac{1}{m} (-F_x \cos \alpha \sin \beta + F_y \cos \beta - F_z \sin \alpha \sin \beta) \right] + p \sin \alpha - r \cos \alpha \quad (6.4)$$

$$\dot{p} = P_{pp} p^2 + P_{pq} pq + P_{pr} pr + P_{qq} q^2 + P_{qr} qr + P_{rr} r^2 + P_l L + P_m M + P_n N \quad (6.5)$$

$$\dot{q} = Q_{pp} p^2 + Q_{pq} pq + Q_{pr} pr + Q_{qq} q^2 + Q_{qr} qr + Q_{rr} r^2 + Q_l L + Q_m M + Q_n N \quad (6.6)$$

$$\dot{r} = R_{pp} p^2 + R_{pq} pq + R_{pr} pr + R_{qq} q^2 + R_{qr} qr + R_{rr} r^2 + R_l L + R_m M + R_n N \quad (6.7)$$

$$\dot{\psi} = q \sin \phi + r \cos \phi \cos \theta \quad (6.8)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (6.9)$$

$$\dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \quad (6.10)$$

$$\dot{x}_e = [u \cos \theta + (v \sin \phi + w \cos \phi) \sin \theta] \cos \psi - (v \cos \phi - w \sin \phi) \sin \psi \quad (6.11)$$

$$\dot{y}_e = [u \cos \theta + (v \sin \phi + w \cos \phi) \sin \theta] \sin \psi + (v \cos \phi - w \sin \phi) \cos \psi \quad (6.12)$$

$$\dot{H} = -\dot{z}_e \quad (6.13)$$

burada

$$\dot{z}_e = -u \sin \theta + (v \sin \phi + w \cos \phi) \cos \theta \quad (6.14)$$

$$\dot{u} = \frac{F_x}{m} - qw + rv \quad (6.15)$$

$$\dot{v} = \frac{F_y}{m} + pw - ru \quad (6.16)$$

$$\dot{w} = \frac{F_z}{m} - pv + qu \quad (6.17)$$

ve $P_{pp}, P_{pq}, P_{pr}, P_{qq}, P_{qr}, P_{rr}, P_l, P_m, P_n, Q_{pp}, Q_{pq}, Q_{pr}, Q_{qq}, Q_{qr}, Q_{rr}, Q_l, Q_m, Q_n, R_{pp}, R_{pq}, R_{pr}, R_{qq}, R_{qr}, R_{rr}, R_l, R_m, R_n$ değerleri atalet değerleri ile ilişkilidir.¹

Bunlar aşağıdaki gibi kompakt biçimde yazılabilir:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x, F_{tot}(t), M_{tot}(t)) \quad (6.18)$$

burada x durum vektörü, $F_{tot} = [F_x F_y F_z]^T$ toplam harici kuvvet, ve $M_{tot} = [L M N]^T$ toplam harici moment değerlerini temsil etmektedir.

Çizelge 6.1 : RQ-2 Pioneer geometri ve kütle değerleri.

\bar{c}	0.5486 m
b	5.1511 m
S	2.8261 m ²
I_{xx}	47.226 kg. m ²
I_{yy}	90.948 kg. m ²
I_{zz}	111.48 kg. m ²
J_{xy}	0 kg. m ²
J_{xz}	-6.6462 kg. m ²
J_{yz}	0 kg. m ²
m	190.51 kg

Durum değişkenlerine ek olarak, daha sonraki referans için, azimut açısı χ ve aşağıdaki gibi tanımlanan yanal ivme A_y ile tanımlanırsa:

$$\chi = \psi + \beta \quad (6.19)$$

$$A_y = \dot{v} \quad (6.20)$$

¹ Denklemler East, North, Up (ENU) referans frame. z_e işareti değiştirilerek North, East, Down (NED) frame elde edilir.

sırasıyla χ uçağın gerçek yönünü ve A_y uçağın yanlamasına ivmesini (ve dolayısıyla kuvveti) belirtir. Uçağın kontrol girdileri, uzunlamasına itki F_x , irtifa dümeni açısı δ_e , kanatçık açısı δ_a ve dümen açısı δ_r olarak tanımlanmıştır. Bu girdilerin bileşimi kontrol girdisini $u = [F_x, \delta_e, \delta_a, \delta_r]$, oluşturmaktadır. Bu girdiler, verilen geometrik ve kütle parametreleri ile F_{tot} ve moment M_{tot} değerleri aerodinamik türevler de hesaba katılarak hesaplanmalıdır. RQ-2 Pioneer uçakları için gerekli bilgileri içermektedir. Modelin tüm ayrıntıları ve türetilmesi [109]'da bulunabilir

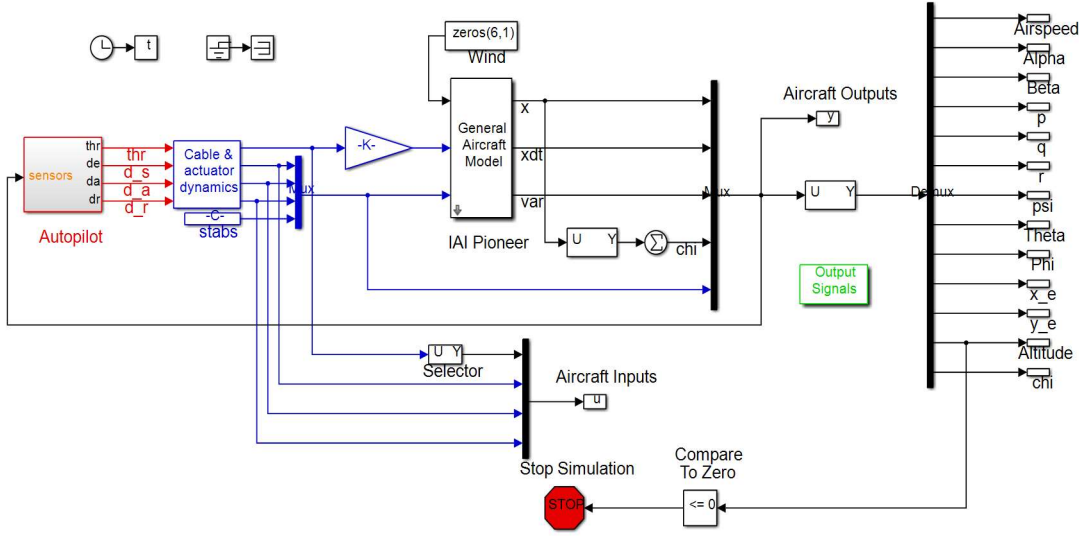
Çizelge 6.2 : RQ-2 Pioneer için aerodinamik katsayılar.

D-Kuvvet		L-Kuvvet		Y-Kuvvet		L-moment		M-Moment		N-moment	
C_{D_0}	0.060	C_{L_0}	0.385	C_{Y_0}	0	C_{l_0}	0	C_{m_0}	0.194	C_{n_0}	0
C_{D_α}	0.430	C_{L_α}	4.78	C_{Y_β}	-0.819	C_{l_β}	-0.023	C_{m_α}	-2.12	C_{n_β}	0.109
C_{D_q}	0	C_{L_q}	8.05	C_{Y_p}	0	C_{l_p}	-0.450	C_{m_q}	-36.6	C_{n_p}	-0.110
$C_{D_{\delta_e}}$	0.0180	$C_{L_{\delta_e}}$	0.401	C_{Y_r}	0	C_{l_r}	0.265	$C_{m_{\delta_e}}$	-1.76	C_{n_r}	-0.200
$C_{D_{i_h}}$	0	$C_{L_{i_h}}$	0	$C_{Y_{\delta_a}}$	0.191	$C_{l_{\delta_a}}$	-0.161	$C_{m_{i_h}}$	0	$C_{n_{\delta_a}}$	0.0200
				$C_{Y_{\delta_r}}$	0	$C_{l_{\delta_r}}$	-0.0022			$C_{n_{\delta_r}}$	-0.091

6.4 Yazılım ve Donanım Kurulumu

MATLAB/Simulink sayısal programlama ortamında geliştirilen doğrusal olmayan model ve otopilot mimarisi Şekil 6.1'de gösterilmiştir. *Autopilot* başlıklı en soldaki blok, gerekli uçak çıktılarından geribildirim alarak gerekli komutları üretir. Bu bloğun sıkışma senaryoları altında tasarımı bu yazının temel ilgi alanını oluşturmaktadır. Bu blok tarafından üretilen komutlar sol taraftan *Cable & actuator dynamics* başlıklı ikinci bloğa girer, bu da eyleyicinin mekanik elemanlardan gelen dinamik ve gecikmeyi modellemiş olur. Bu blok girişlerin farklı tepki sürelerinde reaksiyon vermesine izin verir, örn. Gazın (throttle) değiştirilebilme oranı, irtifa dümeni (elevator), kanatçık (aileron) ve dümenin (rudder) değiştirilebilme oranından daha düşük olacaktır. Bu yönü modele dâhil etmek çok önemlidir, özellikle de takip eden bölümlerde düşünülmesi gereken eyleyici tahrikli sıkışma senaryoları için önemlidir. Her bir eyleyici motor dinamiği, aşağıdaki aktarım fonksiyonuyla temsil edilir.

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} e^{-t_d s} \quad (6.21)$$

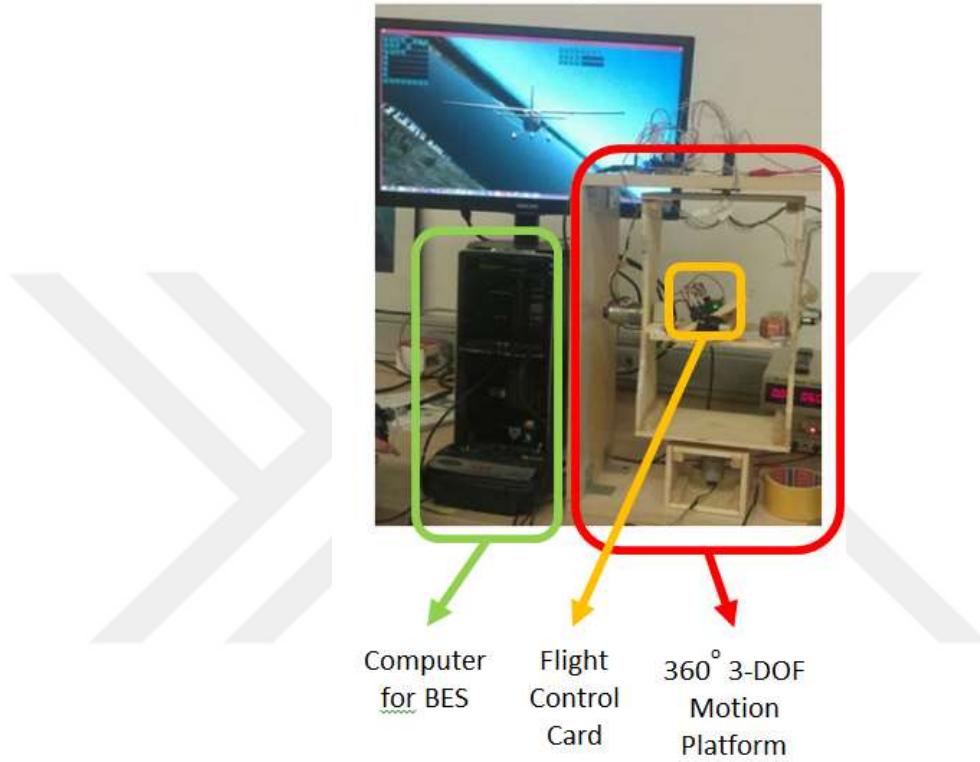


Şekil 6.1: UAV otopilotu için modelleme ve kontrol blok diyagramı.

burada τ , eyleyicinin tepki süresi için zaman sabiti ve t_d , zaman gecikmesidir. Bu aktarım fonksiyonu tarafından üretilen komut, eyleyicinin minimum ve maksimum fiziksel kapasiteleri içinde kalacak şekilde bir sınırlayıcı blok içinden geçirilir. Gaz, elevator, kanatçık ve dümen için zaman sabitleri (τ) sırasıyla 0,25 s, 0,0667 s, 0,025 s ve 0,0667 s'dir. Tüm eyleyiciler için zaman gecikmesi (t_d) 0.03 s'dir. Gaz kolu için sınır değerleri $[0, 485]$ N'dir. İrtifa dümeni, kanatçık ve dümen kumanda değer sınırları $[-0.3491, 0.3491]$ radyandır. Şekil 6.1'deki diğer bloklar esas olarak benzetim sonuçlarını kaydetmek ve görüntülemek içindir.

Şekil 6.1'deki Simulink modeli esasen kontrolcü tasarımı ve ilk test için kullanılmaktadır. Nihai test için üç serbestlik dereceli (3-DOF) hareket platformuna dayanan HIL (Döngüde Donanım Hardware-In-the-Loop) benzetimler yapılmıştır. (Resim6.1). Kontrolcü, otopilot tasarımlarımızı işlemek üzere özelleştirilmiş bir kart olan APM 2.6 ArduPilot kartı olan Uçuş Kontrol Kartı'na kodlanmıştır. Uçuş Kontrol Kartındaki MPU6000 atalet ölçüm birimi (IMU), kontrol cihazı tarafından kullanılacak gerçek zamanlı açısal konumlar, hızlar ve ivmelenmeleri kontrolcüye geri beslenmektedir. Bu kart, uçaklarla birlikte dönen 360 derece 3-DOF Hareket Platformuna yerleştirilmiştir. Rotasyonlar, entegre dişli kutuları ve enkoderlere sahip 12V DC motorlarla sağlanmaktadır. Bunlar 75 rpm'e kadar hıza erişebilir, 20 kg/cm tork sağlayabilir ve doğru açısal ölçümler sağlayabilir. Sıkışma uçakların kontrolsüz

yalpalar (rolls) ve sarmallar (spirals) yapmasına neden olabileceğinden platforma giden tüm kablolar kayma halkaları (slip ring) vasıtasıyla sınırsız 360° döndürür. Kayma halkası telleri aracılığıyla uçaklara gelen giriş komutları, Uçuş Kontrol Kartından X-Plane uçuş simülatörünü çalıştıran bir Bilgisayara geçirilir. X-Plane, tüm uçak yüzeylerinin "pala elemanları" olarak modellendiği pala elemanı teorisini (Blade Element Theory-BET) kullanır [110], [111].



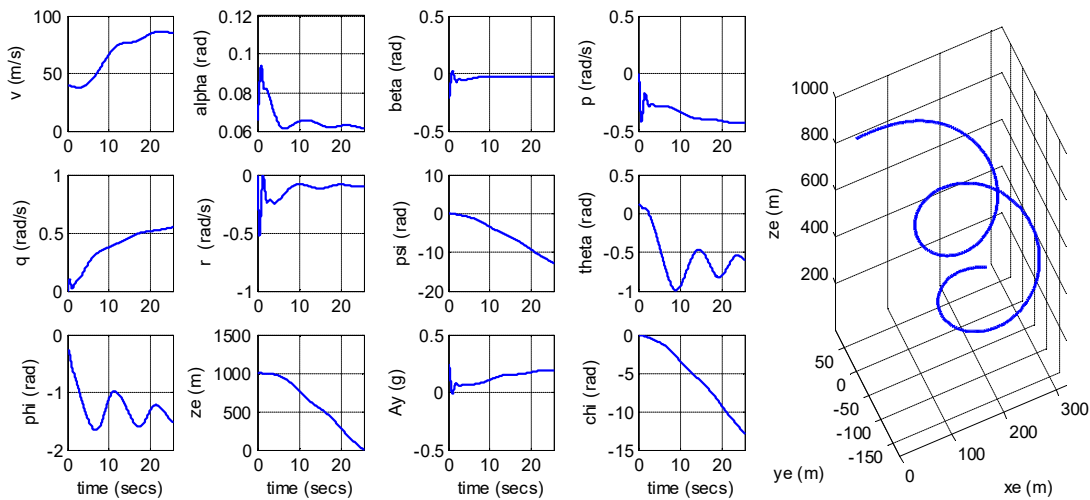
Resim 6.1: Döngüde donanım otopilot testi için kullanılan sistem.

BET uçuş benzetimleri gerçekçi sonuçlar verir ve uçakların adi diferansiyel denklem modellerine dayanmazlar. Bunlar tipik olarak uçuş kontrol cihazlarının tasarımında kullanılır, böylece test aşamasında aynı tipteki modellerden kaçınılması avantajlıdır. Uçak yönelimi, konumu ve diğer veriler, girdi komutlarına ve çevresel faktörlere (ör. Rüzgârlara) dayalı BET benzetimleriyle oluşturulur. Bunlar daha sonra kayma halka tellerinden Flight Control kartına geçirilerek HIL benzetimleri için döngü tamamlanır. Çalışmanın tüm sonuçları, HIL sistemi kullanılarak elde edilmektedir. HIL test platformumuzun ve çeşitli uygulamaların daha ayrıntıları için [100], [101], [102], [103] ve [112] incelenebilir.

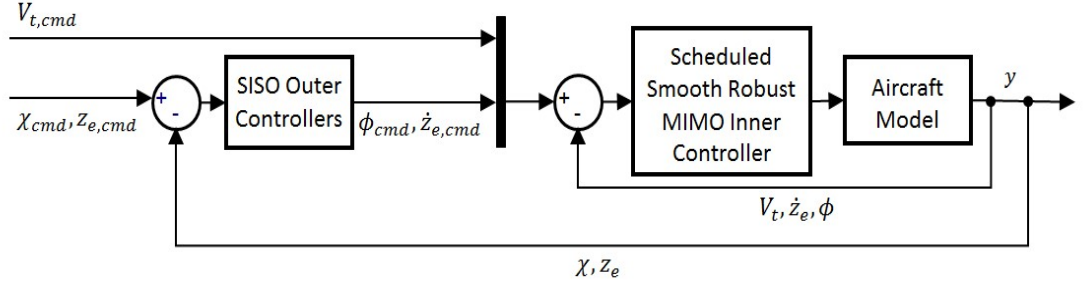
6.5 Eyleyici Arızası Durumunda Acil Uçuş Otopilotu Tasarımı

Tam deplasmanın %20'sinde (bu İHA için 10°) eyleyici motorunun takıldığı durumu ele alacağız, böylece $\delta_a = 2^\circ = 0.0349$ radyanda takılı kalacaktır. Bu anda İHA, 40 m/s hız ve 1000 m 'lik bir yükseklikte seyir halindedir. Eyleyici sorunlarının nasıl tespit edildiği üzerinde durulmamış ve sıkışma olduğunda bazı mekanizmalar tarafından tespit edilebileceği varsayılmıştır [113].

Arıza durumunun ciddiyetini daha iyi anlamak için, öncelikle Şekil 6.2'deki uçakların kontrolsüz davranışını gösteriyoruz. Şekilden görüleceği üzere, İHA kendi ekseninde etrafında dönmeye başlıyor, yüksekliği kaybediyor ve 30 saniyeden az bir sürede yeryüzüne yüksek bir hızla vuruyor. Bu süre uzaktaki bir insan pilotunun, uygun bir tepki göstermesi için oldukça kısa bir süredir, bu nedenle, bu tür bir senaryoda acil durum otopilotu buldurmanın avantajı açık bir şekilde görülmektedir. Bu tür acil durumları ele almak üzere önerilen kontrolcü tasarımı Şekil 6.3'te gösterilmiştir. Öncelikle tüm uçuş zarfında istenen performans/sağlamlık özelliklerine sahip bir kontrolcü elde etmek için yumuşak geçişli ayarlamalı gürbüz çok girişli çok çıkışlı (MIMO) iç denetleyicisi tasarlanmıştır. Bu kontrolcü hava aracının kararlılığını sağlarken, aynı zamanda kanallar arası etkileri ayırıştırılmaktadır. Bu sayede dış döngü için basit tek girişli tek çıkışlı (SISO) denetleyicileri kullanılarak gezinme işlemine uygun bir kontrolcü elde edilmiştir.



Şekil 6.2 Metin içinde açıklanan hava aracı sıkışma senaryosu için HIL simülasyonlarından elde edilen hava aracı durumu (solda) ve yörünge (sağda).



Şekil 6.3 Otopilot tasarımında kullanılan kontrolcü yapısı.

6.5.1 Çalışma koşullarındaki doğrusal modellerin elde edilmesi

Acil iniş otopilotunun iç döngüsünün tasarımında ilk adım, belirli bir hava hızı ve yükseklik değerine karşılık gelen her bir denge noktasında doğrusal uçak modelleri elde etmektir. Kanatçık sıkışması sırasında düz uçuş elde etmek için bir düzeltme noktası için örnek aşağıda verilmiştir

$$V_t = 40 \text{ m/s}, z_e = 1000 \text{ m}, \delta_a = 0.0349 \text{ rad}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

$$= \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \quad (6.22)$$

Denge prosedürü, yukarıdaki koşulu sağlayan bir durumun ve girdinin bulunması şeklinde formüle edilebilir; bu, formun doğrusal olmayan bir programlama ifadesine eşdeğerdir:

$$\min_{x,u} g(x, u) \text{ öyle ki } c(x) = 0 \quad (6.23)$$

burada

$$g(x, u) = \max \left(\left| \frac{\partial V_t}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \beta}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial r}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial z_e}{\partial t} \right| \right) \quad (6.24)$$

$$c(x) = |V_t - 40| + |z_e - 1000| + |\delta_a - 0.0349| \quad (6.25)$$

ve $g(x, u)$ 'daki türev terimlerin ifadeleri model denklemlerinde verilmiştir. (6.23)'deki standart doğrusal olmayan programlama formuna girildiğinde, problem sıralı karesel programlama (SQP) kullanılarak çözülür. (SQP) [114]. Bu problem çözüldüğünde aşağıdaki denge noktası bulunur.

$$x_0 = [V_t, \alpha, \beta, p, q, r, \psi, \theta, \phi, x_e, y_e, z_e]$$

$$= [40, 0.065279, -0.21917, 0, 0, 0, 0.21917, 0.11901, -0.25506, 0, 0, 1000] \quad (6.26)$$

$$u_0 = [F_x, \delta_e, \delta_a, \delta_r] = [327.7, 0.031596, 0.034907, -0.2529]$$

burada x_0 , denge durumundaki uçağın durum uzayı ve u_0 ise kullanılacak girdi vektörünü belirtir. Bu düzeltme noktasının bir analizi şu şekilde yorumlanabilir: 1) Kanatçık kilidini telafi etmek için, diğer yöne dümen girişi (δ_r) uygulamak gereklidir, yani $\delta_r = -0.2529$. 2) İstenen hız ve yükseklik seviyesini korumak için, İHA alışılmadık bir yönelimde uçmalıdır. β ve ϕ açılarının değerlerine dikkat edildiğinde, uçağın alışılmışın dışında bir durumda olduğu görülebilir.

Kanatçık δ_a sıkıştığı için kullanılamaz haldedir ve bu nedenle sadece üç kontrol girişi (F_x, δ_e ve δ_r) kalır. Normal uçuş esnasında kullanılan 4 yüzeyin yerine kalan 3 kontrol yüzeyi kullanılarak uçak kontrol edilebilir. Bu durumu farklı kılan bir durum da yan kayma açısı β normal uçuş esnasında ve koordineli dönüşlerde sıfıra yakın tutulur, β sıfır olmadığı için eşdeğer yanal hızlanma A_y oluşacaktır. Otomatik pilotun kullanıcıdan edineceği üç referans, hava hızı $V_{t,cmd}$, irtifa $z_{e,cmd}$ ve gerçek uçuş yönü olan Azimut açısı χ_{cmd} 'dir. Sadece İHA'nin sapma açısı (ψ) değerinden ziyade kontrol edilmesi gereken gerçek uçuş açısı (χ) olduğuna dikkat edilmelidir, anormal durumlarda sabit olmayan kayma açısı nedeniyle Azimut açısı ile sapma açısı birbirinden ayrılmaktadır. $\chi = \psi + \beta \neq \psi$. Azimut açısında (χ) bir değişiklik, yalpalama (yani ϕ 'de bir değişim) ile gerçekleştirildiğinden, ilk önce sapma açısını (ϕ) bir referans değerine getirmek için bir iç kontrolcü oluşturulur ve sonra ϕ_{cmd} komutunu iç denetleyiciye besleyecek bir dış döngü kontrolcüsü tasarlanabilir.

Burada, z_e irtifayı, yüksekliğin türevi olan tırmanma hızı $\dot{z}_e = \frac{dz_e}{dt}$ aracılığıyla dolaylı olarak kontrol edilmiştir. Bu seçim kontrol edilen çıkışın doğrudan \dot{z}_e 'yi kullanarak daha iyi performans gösterdiği için yapılmıştır. Bu sonuç büyük olasılıkla \dot{z}_e ve hava aracı durumu (özellikle α ve θ) arasında doğrudan bir bağlantıya dayanmaktadır. Özetle, iç döngü için düzenlenecek çıktılar $y = [V_t, \dot{z}_e, \phi]$ olarak seçilir.

Yukarıda açıklanan tasarım, tüm uçuş zarfını kapsayan çalışma noktaları ve kontrolcülerini elde etmek için aynı şekilde tekrarlanır. Hız ve irtifa için denge noktalarının listesi, uçuş zarfını aşağıdaki gibi kapsayacak şekilde seçilir

$$\begin{aligned} V_{t,List} &= [20, 25, 30, 35, 40, 45] \text{ m/s,} \\ z_{e,List} &= [0, 250, 500, 1000, 1250, 1500] \text{ m} \end{aligned} \quad (6.27)$$

ve $V_{t,i}$, $z_{e,i}$ ilgili listenin i 'inci üyesini belirtir. Denge noktalarının tüm kombinasyonları alınarak, 36 çalışma noktası hesaplanır ve bu çalışma noktaları Çizelge 6.3'de verilmiştir. Bütün birimler SI'dır.

Çizelge 6.3 : RQ-2 Pioneer tasarım noktalarındaki denge durumları.

		Denge Durumları (x_0)										Denge Girdileri (u_0)				
V_{t0}	z_{e0}	v	α	β	p	q	r	ψ	θ	ϕ	x_e	y_e	F_x	δ_e	δ_a	δ_r
20	0	20	0.489	-0.219	0	0	0	0	0.504	-0.078	0	0	237.72	-0.478	0.035	-0.252
25	0	25	0.285	-0.219	0	0	0	0	0.307	-0.113	0	0	247.6	-0.232	0.035	-0.252
30	0	30	0.169	-0.219	0	0	0	0	0.202	-0.159	0	0	272.42	-0.093	0.035	-0.252
35	0	35	0.098	-0.219	0	0	0	0	0.142	-0.215	0	0	304.83	-0.006	0.035	-0.252
40	0	40	0.05	-0.219	0	0	0	0	0.109	-0.281	0	0	342.66	0.051	0.035	-0.252
45	0	45	0.016	-0.219	0	0	0	0	0.093	-0.358	0	0	384.92	0.092	0.035	-0.252
20	250	20	0.503	-0.219	0	0	0	0	0.517	-0.077	0	0	237.97	-0.494	0.035	-0.252
25	250	25	0.294	-0.219	0	0	0	0	0.316	-0.11	0	0	246.44	-0.243	0.035	-0.252
30	250	30	0.176	-0.219	0	0	0	0	0.208	-0.155	0	0	270.33	-0.1	0.035	-0.252
35	250	35	0.102	-0.219	0	0	0	0	0.146	-0.21	0	0	301.88	-0.012	0.035	-0.252
40	250	40	0.054	-0.219	0	0	0	0	0.112	-0.274	0	0	338.82	0.047	0.035	-0.252
45	250	45	0.019	-0.219	0	0	0	0	0.094	-0.349	0	0	380.16	0.088	0.035	-0.252
20	500	20	0.517	-0.219	0	0	0	0	0.53	-0.076	0	0	238.31	-0.511	0.035	-0.252
25	500	25	0.303	-0.219	0	0	0	0	0.325	-0.108	0	0	245.34	-0.254	0.035	-0.252
30	500	30	0.182	-0.219	0	0	0	0	0.213	-0.151	0	0	268.3	-0.108	0.035	-0.252
35	500	35	0.107	-0.219	0	0	0	0	0.15	-0.205	0	0	298.98	-0.018	0.035	-0.252
40	500	40	0.058	-0.219	0	0	0	0	0.114	-0.267	0	0	335.05	0.042	0.035	-0.252
45	500	45	0.022	-0.219	0	0	0	0	0.095	-0.34	0	0	375.48	0.084	0.035	-0.252
20	1000	20	0.545	-0.219	0	0	0	0	0.558	-0.073	0	0	239.32	-0.545	0.035	-0.252
25	1000	25	0.323	-0.219	0	0	0	0	0.343	-0.104	0	0	243.32	-0.278	0.035	-0.252
30	1000	30	0.196	-0.219	0	0	0	0	0.226	-0.145	0	0	264.38	-0.125	0.035	-0.252
35	1000	35	0.118	-0.219	0	0	0	0	0.158	-0.195	0	0	293.36	-0.031	0.035	-0.252
40	1000	40	0.066	-0.219	0	0	0	0	0.12	-0.255	0	0	327.7	0.032	0.035	-0.252
45	1000	45	0.029	-0.219	0	0	0	0	0.098	-0.324	0	0	366.35	0.076	0.035	-0.252
20	1250	20	0.56	-0.219	0	0	0	0	0.572	-0.072	0	0	240	-0.563	0.035	-0.252
25	1250	25	0.333	-0.219	0	0	0	0	0.353	-0.101	0	0	242.4	-0.29	0.035	-0.252
30	1250	30	0.204	-0.219	0	0	0	0	0.232	-0.141	0	0	262.5	-0.134	0.035	-0.252
35	1250	35	0.123	-0.219	0	0	0	0	0.163	-0.19	0	0	290.64	-0.037	0.035	-0.252
40	1250	40	0.07	-0.219	0	0	0	0	0.122	-0.248	0	0	324.13	0.027	0.035	-0.252
45	1250	45	0.033	-0.219	0	0	0	0	0.1	-0.316	0	0	361.89	0.072	0.035	-0.252
20	1500	20	0.575	-0.219	0	0	0	0	0.587	-0.071	0	0	240.82	-0.581	0.035	-0.252
25	1500	25	0.343	-0.219	0	0	0	0	0.363	-0.099	0	0	241.54	-0.302	0.035	-0.252
30	1500	30	0.211	-0.219	0	0	0	0	0.239	-0.138	0	0	260.68	-0.143	0.035	-0.252
35	1500	35	0.129	-0.219	0	0	0	0	0.167	-0.186	0	0	287.97	-0.044	0.035	-0.252
40	1500	40	0.074	-0.219	0	0	0	0	0.125	-0.242	0	0	320.62	0.022	0.035	-0.252
45	1500	45	0.036	-0.219	0	0	0	0	0.102	-0.308	0	0	357.51	0.068	0.035	-0.252

6.5.2 Her çalışma noktası için kontrolcülerin elde edilmesi

İç döngüdeki kontrolcüyü oluşturmak için önce doğrusal olmayan bir uçak modeli verilmiştir. Çizelge 3'te verilen her bir çalışma noktası etrafında (x_0, u_0)

doğrusallaştırılmıştır. Doğrusallaştırılmış sistem G için bir model aile kümesi elde edilir. Burada

$$G: = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (6.28)$$

x durum uzayı, u kontrol girişleri ve y kontrol edilecek ölçüm değerlerinin bulunduğu vektördür. $y = [V_t, \dot{z}_e, \phi]$ olarak belirlenmiştir. Hedef, kapalı döngüde istenen bir referansın ($V_{t,cmd}, \dot{z}_{e,cmd}, \phi_{cmd}$) izlenmesini sağlayacak bir kontrolcü oluşturmaktır. Uçaklar için kontrolcü geliştirmede tipik strateji, yanal ve uzunlamasına yönler için iki bağımsız kontrolcü oluşturmak ve sonuçta bu kontrolcülerini, iki dinamikler ayrılmış gibi düşünerek birbirinden bağımsız kontrol tasarımları yapılmasıdır [115]. Bu yaklaşım, basitliği nedeniyle çoğunlukla tercih edilmesine rağmen, gerçek dünyada, eksenler arasındaki bağıllık ihmal edilemeyecek kadar büyüktür; bu da, iki ayrı kontrolcünün beraber kullanımında istenmeyen problemlerin oluşmasına neden olabilir. Bu problem, uçakta aniden gerçekleşen bir kontrol yüzeyi kaybında daha belirgin hale gelecektir. Bu nedenle farklı kanallar arasındaki bağlantı etkilerini de açıkça ele alıp azaltabileceğimiz bir tasarım yapılmıştır. Seçilen metot \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme kullanılarak açık çevrim sistemin istediğimiz frekans özelliklerine sahip bir iç döngüye sahip olmasını amaçlamaktadır. \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme stratejisi, sistem G için, açık döngü transfer fonksiyonunun GK 'nin tekil değerlerinin sigma (σ) γ genişliğinde bir bant içinde istenen bir döngü şekli G_d 'ye sahip olacak şekilde kararlı hale getiren \mathcal{H}_∞ tabalı optimizasyon yöntemi ile kontrolcü K elde edilir. İdeal olarak γ , mümkün olduğunca küçük olmalıdır. Döngü şekli G_d yaklaşık mümkün olan en küçük miktarda şekillendirilmiş sisteme G_s benzer olmalıdır [116].

$$\sigma(G_d) \approx \sigma(G_s) \quad \forall \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \quad (6.29)$$

burada σ tekil değerleri temsil eder ve $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ ilgili frekans aralığıdır. Bu aşamadan sonra, şekillendirilmiş sistem G_s için normalleştirilmiş sol eş asal faktörlerine ayrılır. Burada izlenen prosedür [117]'de detayları verilmiş olan \mathcal{H}_∞ optimizasyon yöntemi kullanılarak G_d 'ye en yakın olan G_s 'nin bulunup buradan kontrolcü K_s 'nin türetilmesini içermektedir. Burada elde edilen kontrolcü G_s türetilirken kullanılan ön ve arka filtreleri eklenerek tamamlanmış olur.

$$K = W_1 K_s W_2 . \quad (6.30)$$

Şimdi önerilen yumuşak geçişler için ayarlanmış kontrolcünün kararlılık ve performans şartlarını belirlenmiş oldu. Her çalışma noktasında $(V_t, z_{e,j})$ şekillendirilmiş sistem $G_{s,i,j}$ şeklinde tanımlanır:

$$G_{s,i,j} := \begin{bmatrix} A_{s,i,j} & B_{s,i,j} \\ C_{s,i,j} & D_{s,i,j} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

V_t ve z_e parametreleri tasarım noktaları arasında değiştiği için sistem dinamiklerinin lineer olarak değiştiğini varsayalım. Bu varsayım, denge noktası sayısı yeterince yüksek olduğunda geçerli olacaktır ve yumuşak geçişler yapacaktır. Daha sonra herhangi bir V_t ve z_e için ayarlamalı kontrolcüler tasarlanabilir. Herhangi bir V_t ve z_e için şekillendirilmiş sistem şu şekilde yazılır:

$$\bar{G}_s(\rho) := c_1 G_{s,i,j} + c_2 G_{s,i+1,j} + c_3 G_{s,i,j+1} + c_4 G_{s,i+1,j+1} \quad (6.32)$$

Burada $\rho = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]$ ve $c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t) \in \mathbb{R}^+$

$$c_1(t) + c_2(t) + c_3(t) + c_4(t) = 1. \quad (6.33)$$

Durum uzayı temsiline \bar{G}_s dersek

$$\bar{G}_s(\rho) = \begin{bmatrix} \bar{A}(\rho) & \bar{B}(\rho) \\ \bar{C}(\rho) & \bar{D}(\rho) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

burada

$$\bar{A}(\rho) = c_1 A_{s,i,j} + c_2 A_{s,i+1,j} + c_3 A_{s,i,j+1} + c_4 A_{s,i+1,j+1} \quad (6.35)$$

$$\bar{B}(\rho) = c_1 B_{s,i,j} + c_2 B_{s,i+1,j} + c_3 B_{s,i,j+1} + c_4 B_{s,i+1,j+1} \quad (6.36)$$

$$\bar{C}(\rho) = c_1 C_{s,i,j} + c_2 C_{s,i+1,j} + c_3 C_{s,i,j+1} + c_4 C_{s,i+1,j+1} \quad (6.37)$$

$$\bar{D}(\rho) = c_1 D_{s,i,j} + c_2 D_{s,i+1,j} + c_3 D_{s,i,j+1} + c_4 D_{s,i+1,j+1} \quad (6.38)$$

\bar{G}_s üzerinde transfer fonksiyonu bir ön filtre F ve bir arka filtre H , \bar{B} ve \bar{C} 'nin parametre üzerindeki bağımlılığı kaldırılabilir. \bar{D} matrisi zaten filtreleme aşamasında sıfırlanmıştır. Durum uzayı gösterimi şu şekilde yapılabilir:

$$\bar{G}_s(\rho) := \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}(\rho)\bar{x} + \bar{B}(\rho)\bar{u} \\ \bar{y} = \bar{C}(\rho)\bar{x} + \bar{D}(\rho)\bar{u} \end{cases} \quad (6.39)$$

$$F := \begin{cases} \dot{x}_F = A_F x_F + B_F u_F \\ y_F = C_F x_F \end{cases} \quad (6.40)$$

$$H := \begin{cases} \dot{x}_H = A_H x_H + B_H u_H \\ y_H = C_H x_H \end{cases} \quad (6.41)$$

Yukarıdaki sistemler için giriş ve çıkışlar $u_F = \tilde{u}$, $\bar{u} = y_F$, $u_H = \bar{y}$, $\tilde{y} = y_H$ olacak şekilde tanımlanır. Burada \tilde{u} iç içe geçmiş sistemin girişi ve \tilde{y} 'da onun çıktısıdır. İç içe geçmiş sistemin daha sonra aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{G}_s(\rho) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\rho) & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(\rho)\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases} \quad (6.42)$$

burada

$$\tilde{A}(\rho) = \begin{bmatrix} \bar{A}(\rho) & \bar{B}(\rho)C_F & 0 \\ 0 & A_F & 0 \\ B_H\bar{C}(\rho) & B_H\bar{D}(\rho)C_F & A_H \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.43)$$

$$\tilde{C} = [0 \quad 0 \quad C_H], \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_F \\ x_H \end{bmatrix}.$$

yalnızca $\tilde{A}(\rho)$ parametresine bağlı olduğunu ve D matrisinin sıfır olduğu görülebilir. $\rho_{i,j}$ parametre vektörü için $(V_{t,i}, z_{e,j})$ 'ye karşılık sistem:

$$\tilde{G}_{s,i,j} := \tilde{G}_s(\rho_{i,j}) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i,j} & \tilde{B}_{i,j} \\ \tilde{C}_{i,j} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

burada $\tilde{A}_{i,j} = \tilde{A}(\rho_{i,j})$, $\tilde{B}_{i,j} = \tilde{B}$ ve $\tilde{C}_{i,j} = \tilde{C}$. $L_{i,j}$ ise seçilirken $\tilde{A}_{i,j} + L_{i,j}\tilde{C}$ 'yi kararlı hale getiren $L_{i,j}$ seçilmelidir. $L_{i,j}$ 'ti bulmak için cebirsel Riccati denkleminin çözümü

$$\tilde{A}_{i,j}Z_{i,j} + Z_{i,j}\tilde{A}_{i,j}^T + Z_{i,j}\tilde{C}^T\tilde{C}Z_{i,j} - \tilde{B}\tilde{B}^T = 0 \quad (6.45)$$

kullanılmıştır.

Pozitif yarı kesin $Z_{i,j}$ bulunur ve $L_{i,j} = Z_{i,j}\tilde{C}^T$ elde edilir. Şekillendirilmiş sistemin $\rho_{i,j}$ 'deki sol eş asal (koprim) faktörleri, $\tilde{G}_{s,i,j} = M^{-1}N$ belirsizlik temsili için kullanılacaktır. Belirsizlik temsili için

$$[N \quad M] = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i,j} + L_{i,j}\tilde{C} & \tilde{B} & L_{i,j} \\ \tilde{C} & 0 & I \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

kullanılır. Standart \mathcal{H}_∞ problemi için genelleştirilmiş sistemi yazacak olursak:

$$P_{i,j} := \begin{bmatrix} A_{i,j} & B_{1,i,j} & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{21} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

İfadedeki değerleri yerine koyacak olursak:

$$P_{i,j} := \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i,j} & -L_{i,j} & \tilde{B} \\ [0] & [0] & [I] \\ [\tilde{C}] & I & 0 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

$B_{1,i,j} = -L_{i,j}$, $B_2 = \tilde{B}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C} \end{bmatrix}$, $D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $D_{21} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_2 = \tilde{C}$, $D_{21} = I$ ve $D_{22} = 0$ elde edilir. Parametre bağımlılığı yalnızca $\tilde{A}_{i,j}$ ve $L_{i,j}$ ile sınırlandığından, kontrolcü tasarımında köşe çalışma noktaları değerlendirilir ve bu tasarım tüm dikdörtgen çalışma bölgesi üzerinde kararlılık ve performans elde eder $(V_{t,i}, z_{e,j})$, $(V_{t,i+1}, z_{e,j})$, $(V_{t,i}, z_{e,j+1})$, $(V_{t,i+1}, z_{e,j+1})$ Doğrusal parametreye bağımlı (LPV) tasarım problemini çözmek için aşağıdaki doğrusal matris eşitsizlikleri (DME) uyarlanmıştır,

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{kl}^T X + X A_{kl} & X B_{1kl} & C_1^T \\ B_{1k}^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.49)$$

$$k = [i, i + 1], \quad l = [j, j + 1]$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{kl} Y + Y A_{kl}^T & Y C_1^T & B_{1kl} \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_{1k}^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.50)$$

$$k = [i, i + 1], \quad l = [j, j + 1]$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.51)$$

burada X ve Y matrisleri ortak bir Lyapunov fonksiyonu tanımlar; DME'lerinin türetilmesi, parametrelerinin açıklaması ve kontrolcülerin bunlardan yapılması, detaylandırılmıştır [47]. DME'ler tüm köşeler için ortak bir Lyapunov fonksiyonu için çözümlerse, bu mantık, tüm alana kolayca yayılır;

$$\begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{kl}^T X + X A_{kl} & X B_{1kl} & C_1^T \\ B_{1kl}^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i, \forall j \quad (6.52)$$

$$\begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{kl} Y + Y A_{kl}^T & Y C_1^T & B_{1kl} \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_{1kl}^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i, \forall j \quad (6.53)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0. \quad (6.54)$$

hava hızı ve yükseklikteki herhangi bir değişim için tam uçuş zarfında kararlılığı ve performansı garanti eder. Bu sorumuz için \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme problemine uygun bir çözüm elde edebildik. Bir örnek çalışma noktası için, $V_t = 40 \text{ m/s}$ ve $z_e = 1000 \text{ m}$ 'ye karşılık gelen ve performans ve sağlamlık ölçümleri ile üst üste getirilen sistem için elde edilen tekil değer grafiğini göstermektedir. $|W_1^{-1}(j\omega)|$ ise arzu edilen bozucu zayıflatma faktörüdür $|W_3(j\omega)|$ çarpımsal bir pertürbasyon olarak ifade edilen sistemin en büyük beklenen belirsizliğidir. $S(j\omega)$ 'nın tekil değerleri bozucu

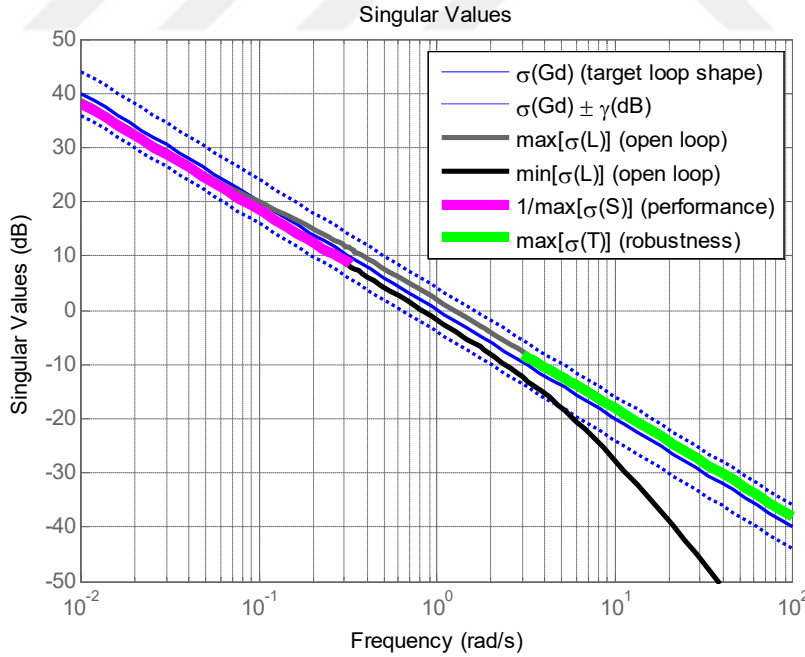
zayıflamasını göstermektedir. Aslında bir bozucu etkisi d 'den sistem çıktısı y 'ye kapalı çevrim transfer fonksiyonudur. Ayrıca, $T(s)$ tüm sistem için kapalı döngü transfer fonksiyonudur.

Bant genişliği ω_c , $G_d(j\omega)$ 'un tekil değerlerinin 0 dB 'yi geçtiği yer olarak tanımlanmıştır. $\bar{\sigma}(L(s)) \gg 1$.

$$\underline{\sigma}(L(j\omega)) \geq \frac{1}{\gamma} \underline{\sigma}(G_d(j\omega)), \quad \forall \omega < \omega_c \quad (6.55)$$

$$\bar{\sigma}(L(j\omega)) \leq \gamma \bar{\sigma}(G_d(j\omega)), \quad \forall \omega > \omega_c \quad (6.56)$$

ve Şekil 6.3'te görülen tasarım için $\gamma \approx 1.5941$ (4.0505 dB) olan döngü şekillendirme işlemini göstermektedir. Uçaklar dâhil fiziksel sistemlerde, matematiksel modelin düşük frekanslarda doğru olduğu, ancak yüksek frekanslarda zayıf olduğu bilinen bir konudur. Genellikle, referans sinyalleri düşük frekans aralığında bulunurken, gürültü sinyalleri yüksek frekans aralığındadır. Dolayısıyla, sistem modelinin daha doğru olduğu düşük frekans bölgesinde yüksek sağlamlığa ulaşıldığı ve referans takibi için yüksek performans elde edilmiş oldu. Sistem modelinin daha az doğru olduğu yüksek frekanslarda ise gürültü etkileri daha güçlüdür ve bu frekanslarda $|L(j\omega)|$ hızlıca azalmaktadır.



Şekil 6.4: Performans ve gürbüzlük ölçüleri ile örnek çalışma noktasında tekil değerler.

Bu tasarımda hedef olarak yerleşim süresi $t_s = 5\tau = 5\frac{1}{1} = 5$ saniye olarak seçilmiştir. Hedeflenen modelde kanallar arası etkileşim istenmediği için tasarım aşamasında kontrolcüler bu etkileri minimize edecek şekilde oluşmaktadır. Ayrıntıları açıklanan bu işlem, benzer sonuçlar elde edilen tüm çalışma noktaları için tekrarlandı. Bu noktada, her bir çalışma noktası için bir (ÇGÇÇ) MIMO gürbüz kontrolcü tasarlandı.

6.5.3 Ayarlamalı küresel kontrolcülerin elde edilmesi

Her çalışma noktasında gürbüz bir denetleyici hesaplandığından, bu kontrolcüler birleştirilerek tüm zarfı kapsayan bir kontrolcü üretilebilir. Herhangi bir t anında $v(t)$ ve $z_e(t)$ parametrelerinin sınırlı olduğunu kabul edersek:

$$v_i < v(t) \leq v_{i+1}, \quad z_{e,i} < z_e(t) \leq z_{e,i+1} \quad (6.57)$$

Uçağın kontrol girdisi kontrolcülerin çıktılarının konveks birleşimi olarak ifade edilebilir. [118]

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t) + c_3(t)u_3(t) + c_4(t)u_4(t) \quad (6.58)$$

burada $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$ düğüm noktalarında tasarlanan kontrolcülerin sırasıyla çıktılarıdır $(v_i, z_{e,i})$, $(v_{i+1}, z_{e,i})$, $(v_i, z_{e,i+1})$, $(v_{i+1}, z_{e,i+1})$ ve $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, $c_4(t)$

$$c_1(t) + c_2(t) + c_3(t) + c_4(t) = 1 \quad (6.59)$$

sağlamaktadır. $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, $c_4(t)$ ağırlıkları geçerli hızın $v(t)$ ve yüksekliğin $z(t)$ tasarım noktalarına ne kadar yakın olduğunu belirtmek için kullanılmıştır. Bu ağırlıklar şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (1 - \lambda_1(t))(1 - \lambda_2(t)) \\ c_2(t) &= \lambda_1(t)(1 - \lambda_2(t)) \\ c_3(t) &= (1 - \lambda_1(t))\lambda_2(t) \\ c_4(t) &= \lambda_1(t)\lambda_2(t) \end{aligned} \quad (6.60)$$

burada

$$\lambda_1(t) = \frac{v(t) - v_i}{v_{i+1} - v_i} \quad (6.61)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{z_e(t) - z_{e,i}}{z_{e,i+1} - z_{e,i}} \quad (6.62)$$

Böylece

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ z_e(t) \end{bmatrix} = c_1(t) \begin{bmatrix} v_i \\ z_{e,i} \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ z_{e,i} \end{bmatrix} + c_3(t) \begin{bmatrix} v_i \\ z_{e,i+1} \end{bmatrix} + c_4(t) \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ z_{e,i+1} \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

elde edilir. İç döngüdeki tüm kontrolcileri bu şekilde birleştirilerek ayarlamalı kontrolcü elde edilmiş olur.

6.5.4 Döngü şekillendirme kontrolcü tasarımı

Tasarımı tamamlamak için belirli bir uçuş yönü χ_{cmd} ve istenen bir yükseklik $z_{e,cmd}$ için uygun yalpa açısı ve tırmanma hızı referanslarını (ϕ_{cmd} ve $\dot{z}_{e,cmd}$) üretecek bir dış kontrolcü ile yukarıda oluşturulan iç kontrolcü birleştirilmelidir. İç kontrolcü gürbüz kararlılığı sağladığı ve eksenler arasındaki etkileşimi ortadan kaldırdığından, dış döngüde biri χ_{cmd} ile ϕ_{cmd} arasında ve diğeri de $z_{e,cmd}$ ile $\dot{z}_{e,cmd}$ olmak üzere iki ayrı denetleyici tasarlanabilir. Bunlar, tek girdili tek çıkışlı (TGTC-SISO) denetleyiciler olduğundan) basit bir oransal integral türev (PID) kontrolcüler kullanılabilir.

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{s/N + 1} . \quad (6.64)$$

PID denetleyicileri için kullanılan katsayılar deneysel olarak $K_p = 4$, $K_i = 3$, $K_d = 3$ ve $N = 10$ olarak belirlendi. Türev filtresi için $N = 10$ değeri, $f_c = 10/2\pi \approx 1.5915$ Hz'den daha hızlı olan değişimlerin bastırıldığını gösterir. Bu sayede referans komutları agresif olmayan bir şekilde oluşturulmaktadır.

6.5.5 Referans komutlarının üretilmesi

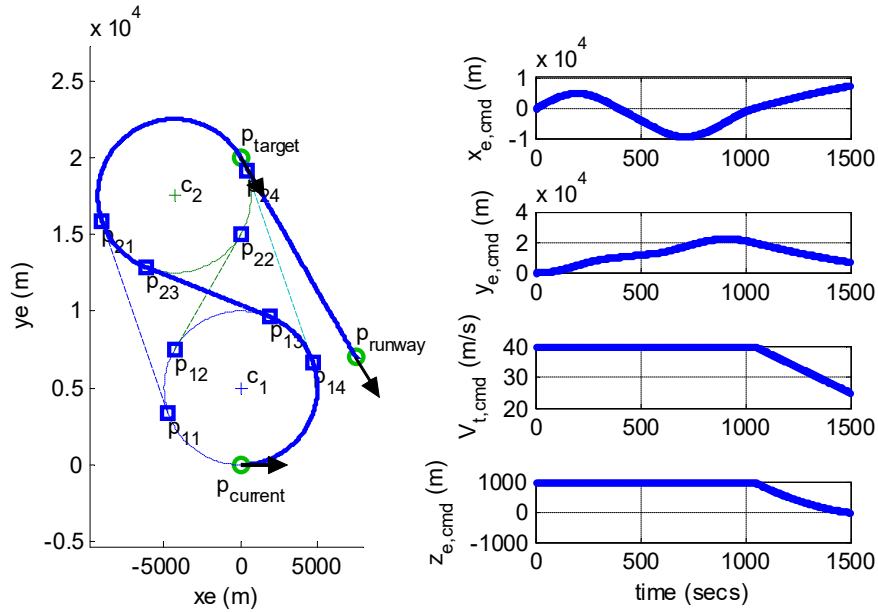
Bu bölümde, aşağıdaki örnek acil durum senaryosunda istenen yörüngeyi izlemek için dış döngü için referans komutu oluşturulmasını açıklıyoruz: Düzlem $p_{current} = (0,0)$ konumunda $\chi_{current} = 0^\circ$, hız $V_t = 40$ m/s ve yükseklik $z_e = 1000$ m durumunda kanadın sıkışmasına neden olan bir eyleyici arızasıyla karşılaşır. Amaç İHA'ye ilk önce $\chi_{target} = -60^\circ$ azimut açısıyla p_{target} 'a ulaşmak ve daha sonra acil iniş prosedürünü başlatmaktır. Pist, $p_{runway} = (7500, 7010)$ noktasında hedef noktadan 15000 m uzaklıktadır. p_{target} 'a erişildiğinde, acil iniş prosedürü başlayacaktır, irtifayı $z_e = 1000$ m'den sıfıra indirirken $V_t = 40$ m/s 'lik hızdan $V_t = 25$ m/s 'lik iniş hızına düşürmektedir. Uçak kanadı sıkışmış olduğu için, referans yörünge üretimi iki ana nedenden ötürü standart değildir: 1) Normalde bu İHA, 100 m'lik bir yarıçapta dönüş gerçekleştirebilir. Bununla birlikte kanadı kaybettikten sonra manevra kabiliyeti azaltıldı. Bu nedenle dönme yarıçapları 5000 m olarak seçilmiştir. 2) Normalde bu İHA, kısa ve dik inişler gerçekleştirebilir, ancak bu, kanadı sıkışmış bir uçak için daha

güvenli bir iniş planlanmıştır. Bu nedenle uçak ilk olarak piste yaklaşık 15000 m'lik bir mesafede hizalanır ve bu noktadan acil iniş başlar.

Dış döngü (Şekil 6.3) için azimut açısı komutu χ_{cmd} çevrimiçi olarak $x_{e,cmd}$ ve $y_{e,cmd}$ referansları ve uçağın gerçek pozisyon durumu (x_e, y_e) kullanılarak üretilmiştir.

$$\chi_{cmd} = \text{atan2}(y_{e,cmd} - y_e, x_{e,cmd} - x_e) \quad (6.65)$$

burada atan2 ters tanjant fonksiyonudur.

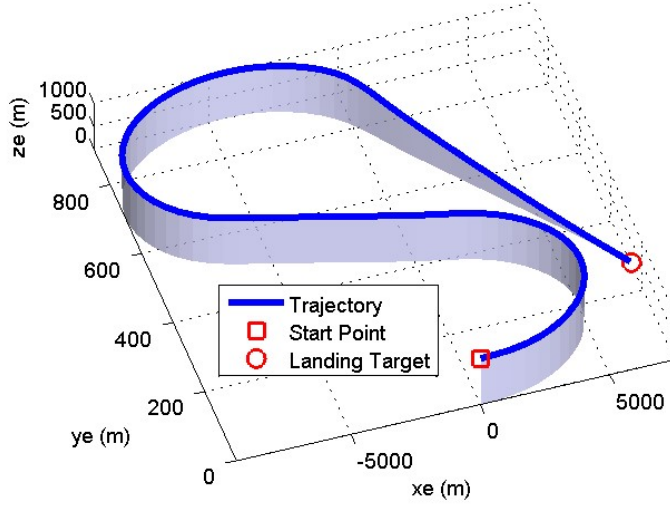


Şekil 6.5: Referans yörüngesi (solda) ve karşılık gelen komutlar.

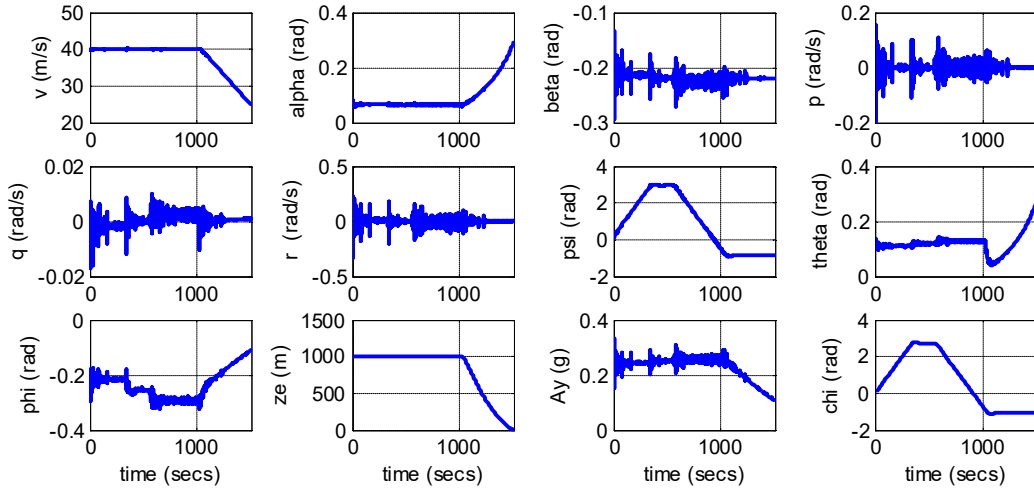
6.6 Doğrusal olmayan Benzetim Sonuçları

Dış döngüdeki kontrolcüler, iç döngüdeki kontrolcüler ve doğrusal olmayan İHA modeli birleştirilir ve genel sistemin döngüde donanım (HIL) benzetimleri önceki bölümde açıklanan senaryo için gerçekleştirilir. Kapalı döngü döngüde donanım (HIL) benzetimlerinden sonucunda elde edilen uçak yörüngesi Şekil 6.5'de gösterilmektedir. Gerçekçi bir değerlendirme için, benzetimlere atmosfer etkileri de eklenmiştir 15 m/s'ye kadar ulaşan güçlü rüzgârlar ve 7 – 8 m/s 'e kadar yan rüzgâr bileşenleri eklenmiştir. Uçağın istenen yörüngeyi izlediği görülmektedir. Öncelikle hedef pistten kabaca 15000m uzaklaşıldığı ve uçuş yönünün pist yönüyle hizalandığı görülebilir. Bu noktadan sonra, iniş prosedürü uygulanır ve İHA, hedef piste başarılı bir şekilde güvenli bir iniş gerçekleştirmiştir. İtki ve yüzey deplasmanları her zaman makul sınırlar içinde kalmaktadır. Kontrol girişleri de belli frekans bandında sınırlı kalmıştır. Bu eyleyici sıkışması yaşayan uçakları daha fazla risk altına sokmamak için önemlidir.

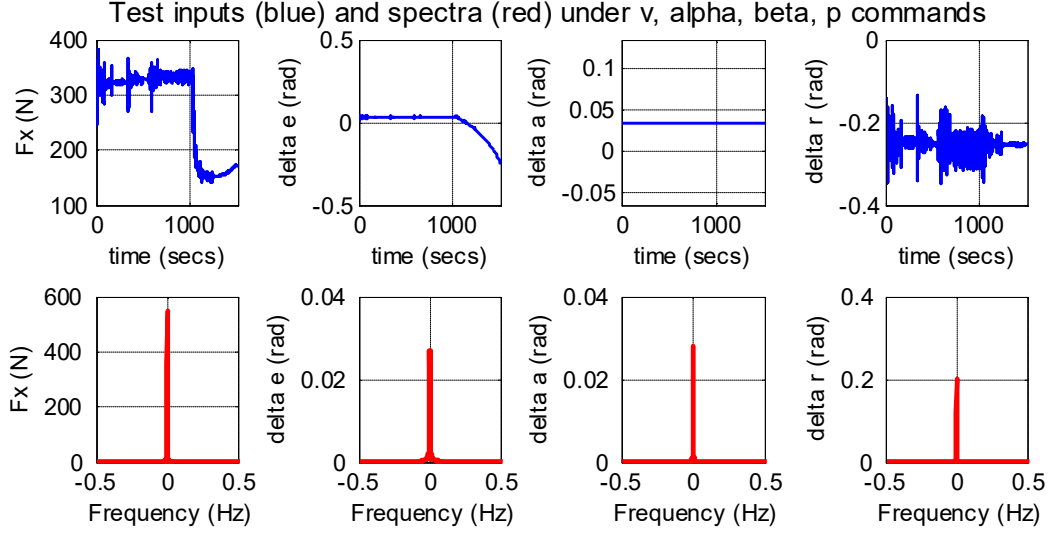
Önerilen yöntem, doğrudan diğer tür yanal yüzey arızalarına da uygulanabilir. Örneğin, Şekil 6.6 başlangıç noktasında 10° dümen kilidini (tam sapmanın yaklaşık% 40'ı) yaşayan, bir hedef noktaya gidip bir iniş hedefine değen bir uçağı göstermektedir. Şekil 6.7'de acil uçuş esnasında uçağın durum vektörü elemanları görülebilir. Şekil 6.8'de kanatçık arızası esnasında kontrol yüzeyi komutları ve frekans analizi görülebilir.



Şekil 6.6: Kanatçık arızası esnasında döngüden donanım benzetim sonuçları.



Şekil 6.7: Kanatçık arızası esnasında uçağın durumları.



Şekil 6.8: Kanatçık arızası esnasında kontrol yüzeyi komutları (üstte) ve frekans analizi(alta).

6.7 Sonuçlar

Bu kısımda, yanal kontrol yüzey sıkışması altındaki uçaklar için ayarlamalı gürbüz bir ÇGÇÇ (MIMO) otopilot geliştirme metodu sunulmuş ve döngüde donanım (HIL) testleri ile doğrulanmıştır. Eksenler arasındaki etkileşim bu tür acil durumlarda çok önemlidir, bu nedenle modelleme ve kontrol tasarımı tüm dinamikler üzerinde gerçekleştirilir. Eksen arasındaki ayrıştırma ÇGÇÇ (MIMO) gürbüz \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tasarımı ile gerçekleştirilir. Bu şekilde tasarlanan kontrolcüler geniş bir uçuş zarfını kapsayacak şekilde birleştirilir. HIL deneyleri ile önerilen stratejinin başarıyla çalıştığı ve olumsuz atmosfer koşullarında bile iniş yapabildiği doğrulanmıştır. Bu çalışmanın ana katkısı, yanal yüzeyi sıkışan uçaklar ayarlamalı ÇGÇÇ gürbüz kontrol metodolojisi sunmaktır.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde temel olarak \mathcal{H}_∞ optimizasyonu kullanılarak farklı kontrol tasarımları ele alınmıştır. Gürbüz kontrol tasarımında yaygın olarak kullanılan \mathcal{H}_∞ karma hassasiyet ve \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme metotları ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu tasarım ile hava araçlarında çokça kullanılan kazanç ayarlama yöntemi birleştirilerek tüm uçuş zarfını kapsayan gürbüz kontrolcülerin elde edilmesi planlanmıştır.

Öncelikle küçük ölçekli insansız bir helikopter için \mathcal{H}_∞ karma hassasiyet yöntemi kullanılarak yerel tasarımlar yapılmış ve kontrol çıktısı harmanlama yöntemi teorik garanti olmadan uygulanmıştır. Daha sonra bu çözüm ortak Lyapunov fonksiyonu kullanılarak tüm tasarım noktalarında eşzamanlı bir çözüm ile düğüm tabanlı bir çözüm elde edilmiştir. Bu tasarım sistemin denge noktaları etrafında doğrusal değiştiği kabulü ile ara noktalarda da kararlılık ve performans garantisi vermektedir. Buna ek olarak sistemin tüm zarf boyunca yaklaşık olarak doğrusal değiştiği varsayılarak, doğrusal parametreye bağımlı kontrolcüler de tasarlanmıştır. Sonuç olarak düğüm tabanlı çözüm ve parametreye bağımlı değişen kontrolcülerin sınırlı parametre değişimlerine, ölçüm gürültüsüne ve rüzgâra dayanıklı olduğu doğrusal olmayan benzetim modelinde doğrulanmıştır.

Daha sonra ise küçük ölçekli insansız bir helikopter için \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi kullanılarak yerel tasarımlar yapılmış ve teorik garanti olmadan uygulanmıştır. Daha sonra bu çözüm ortak Lyapunov fonksiyonu kullanılarak tüm tasarım noktalarında eşzamanlı bir çözüm ile düğüm tabanlı bir çözüm elde edilmiştir. Bunu tasarımı mümkün kılmak için parametre bağımlı sistemler için parametrik \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi için doğrusal matris eşitsizlikleri ile bir sentez metodu sunulmuştur. Bu tasarım eğer sistemin denge noktaları etrafında doğrusal değiştiği kabulü ile ara noktalarda da kararlılık ve performans garantisi vermektedir. Sonuç olarak düğüm tabanlı çözüm sınırlı parametre değişimlerine, ölçüm gürültüsüne ve rüzgâra dayanıklı olduğu doğrusal olmayan benzetim modelinde doğrulanmıştır.

Son olarak ise önerilen metodun daha geniş bir perspektifte değerlendirilebilmesi için yine insansız küçük bir uçak için \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi kullanılarak eyleyici arızası durumunda acil iniş pilotu tasarlanmıştır. Bu yöntemde farklı hız ve irtifalarda denge noktaları bulunun uçağın yerel modelleri kullanılarak yerel kontrolcüler tasarlanmış ve bu kontrolcüler birleştirilerek tüm acil durum uçuş zarfını kapsayan kazanç ayarlamalı kontrolcü elde edilmiştir. Daha sonra bu tasarım döngüde donanım testleri ile doğrulanmıştır. Tasarımın ölçüm gürültüsü ve rüzgârlara karşı dayanıklı olduğu görülmüştür.

Bu tezde yapılan üç farklı tasarım yöntemi de hava araçları için kazanç ayarlamalı gürbüz kontrolü için \mathcal{H}_∞ tabanlı çözümün ne kadar uygun bir alternatif olduğu gösterilmeye çalışılmıştır. Bu metotlar arasında düğüm tabanlı sentez üzerinde durulmasının ana nedeni kontrol mühendislerine hava araçları için denge noktaları ve doğrusallaştırılmış model aile kümesi verildiğinde tüm doğrusal model aile kümesini dikkate alarak bir tasarım yapılmasına olanak sağlamasıdır. Bu açıdan değerlendirildiğinde çok pratik bir soruna da çözüm üretmektedir. Bunun yanında ise ara noktalarda da kararlılık ve performans garantisi veriliyor olması ara noktalarda ekstra benzetim yapma ihtiyacını karşılamaktadır. Bu tezde yapılan ana teorik katkı ise tasarımın ara noktalarında da beklenen teorik garantiyi sağlayan bir tasarım yapılmış olmasıdır. Gürbüzlük ise problemin nasıl sorulduğuna, dinamik filtrelerin seçimine, ağırlıklandırma fonksiyonlarına bağlı olarak değişecektir. Uygulama olarak ise parametre bağlı değişen sistemler için çok geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar ve çıkarımlar aşağıdaki maddelerde özetlenmiştir.

1) Düğüm tabanlı \mathcal{H}_∞ karma duyarlılık prensibine dayalı kontrolcüler tasarımın ara noktalarında da kararlılık ve gürbüzlük garantisi verilerek küçük ölçekli bir helikopter için kazanç ayarlamalı gürbüz kontrol tasarımı yapılmıştır. Tasarımın kararlılık ve gürbüz kararlılık gösterdiği gözlenmiştir.

2) Sol eş asal faktörler belirsizlik gösterimine karşı parametreye bağımlı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme tasarım metodu ile küçük ölçekli bir helikopter için kazanç ayarlamalı gürbüz kontrol tasarımı yapılmıştır. Tasarımın kararlılık ve gürbüzlüğü doğrusal olmayan matematik modelde benzetim yoluyla teyit edilmiştir.

3) Parametre bağımlı \mathcal{H}_∞ döngü şekillendirme yöntemi kullanılarak küçük ölçekli bir model uçak için parametreye bağımlı gürbüz acil iniş otopilotu tasarlanmıştır. Yapılan

acil iniş otopilotunun eyleyici arızası oluştuğunda devreye girerek güvenli bir şekilde acil inişi gerçekleştirebildiği döngüde donanım benzetimi ile gösterilmiştir.

4) Yapılan tasarımlarda kontrolcü tasarlanırken tüm tasarım noktalarında eş zamanlı bir çözüm yapılarak ortak Lyapunov fonksiyonuna dayanan kontrolcüler sentezlenmiştir. Ortak Lyapunov fonksiyonu kullanılmasına rağmen kontrolcüler birbirinden farklıdır ve aynı durum uzayını paylaşmaktadırlar.

5) Tasarım yöntemlerini kıyaslandığında, döngü şekillendirme yönteminde girdi ve çıktı filtrelerinin seçimi daha kolaydır. Girdi ve çıktı filtreleri istenen açık döngü şekline uygun bir şekilde seçilip kolayca ayarlanabilir. Bunun yanında karma hassasiyet kontrol problemindeki filtrelerin seçimi ve ağırlıklandırılması biraz daha zaman alıcı ve zor bir işlemdir. Bununla birlikte iki metotta aslında açık çevrim sistemin döngü şeklinin istenen forma gelmesini amaçlanmaktadır.

6) Pratik açıdan bakılacak olursa, elde edilen kontrolcülerin durum vektörü kontrol edilecek sistemin ve filtrelerin durum elemanlarının toplamı boyutunda olacaktır. Yani elde edilen kontrolcüler yüksek boyutlu dinamik sistemlerdir. Bunun yanında bu sistem matrislerinin sürekli interpolasyonu gerekmektedir. Bunlar ise işlemciye ekstra yük getirmektedir. Bu karmaşıklıkta kontrolcülerin günümüzde küçük bir hava aracı otopilot kartına gömülmesi kolay olmasa da hızlı teknolojik gelişmeler ile kısa sürede bu tarz kontrolcülerin kolayca uçuş kontrol kartlarına yazılabileceği düşünülmektedir.

7) \mathcal{H}_∞ kontrol probleminde çokça karşılaşılan bir problemde kontrolcünün çok hızlı gelişen dinamikleri barındırmasıdır. Bu problemi aşmak için kapalı çevrim sisteme yani kontrolcüye kök kısıtları konulmalıdır. Bu şekilde kontrolcünün minimum çalışma frekansını ayarlamak mümkündür.



KAYNAKLAR

- [1] **Tischler, M. B., Fletcher, J. W., Morris P. M., Tucker G, T.,** (1988). Application of Flight Control System Methods to an Advanced Combat Rotorcraft, *Proceedings of Royal Aeronautical Society International Conference*, London.
- [2] **Glusman, S.I., Landis K.H., Dabundo C.,** (1986). Handling Qualities Evaluation of the ADOCS Primary Flight Control System., *Annual Forum of the American Helicopter Society*, Washington DC,.
- [3] **Mettler B., Tischler M., Kanade T.,** (1999). System identification of small-size unmanned helicopter dynamics, *Annual Forum of the American Helicopter Society*.
- [4] **H.J. Kim, D.H. Shim,** (2003). A flight control system for aerial robots: algorithms and experiments, *Control Engineering Practice*, no. 11, p. 1389–1400.
- [5] **Doyle, J. C., Stein G.,** (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, no. 26, pp. 4-16.
- [6] **Stein G., M. Athans,** (1987). The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Transactions on Automatic Control* , cilt 32, no. 2, pp. 105 - 114 , March 1987.
- [7] **Wendel, T., Schmidt D.,** (1989). Flight Control Synthesis for Unstable Fighter Aircraft Using the LQG/LTR Methodology, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference* , Boston MA, 1989, pp. 247-254., 1989.
- [8] **Murphy, R. D., Narendra, K. F.,** (1969). Design of Helicopter Stabilization Systems Using Optimal Control Theory, *Journal of Aircraft* , cilt 6, no. 2, pp. 129-136, 1969.
- [9] **Hofmann, L. G., Riedel S. A., McRuer, D.,** *Practical Optimal Flight Control System Design for Helicopter Aircraft*, Technical Report, NASA. (1980).
- [10] **Holdridge, R.D., Hindson, W.S., Bryson, A.E.,** (1985). LQG - Design and Flight Test of a Velocity - Command System for a Helicopter, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Snowmass, CO.
- [11] **Gribble J. J.,** (1993). Linear quadratic gaussian loop transfer recovery design for a helicopter in low speed flight, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, cilt 16, p. 754–761..
- [12] **Baillie S. W., J. M. Morgan, K. R. Goheen,** (1994). Practical Experiences in Control Systems Design using the NRC Bell 205 Airborne Simulator, *Flight Mechanics Panel Symposium*.

- [13] **Holdridge R. D., Hindson W. S., Bryson A. E.** (1985). LQG-Design and Flight Test of a Velocity Command System for a Helicopter, *Navigation and Control Conference Proceedings of AIAA Guidance*, Snowmass, CO.
- [14] **Shin J., K. Nonami, D. Fujiwara, K. Hazawa,** (2005). Model-based optimal attitude and positioning control of small-scale unmanned helicopter, *Robotica* , cilt 23, no. 01, p. 51–63.
- [15] **Hald U.B. ,Hesselbæk M.V. ,Holmgaard J.T. , Jensen C. S. ,Jakobsen S. L., Siegumfeldt M.,** (2005). *Autonomous Helicopter– Modelling and Control*, Aalborg University, Aalborg.
- [16] **Pieper J. K., S. Baillie, K. R. Goheen,** (1994). Linear-quadratic optimal model-following control of a helicopter in hover, *American Control Conference*.
- [17] **Abulhamitbilal E., Jafarov M.,** (2001). Gain Scheduled Automatic Flight Control Systems Design for a Light Commercial Helicopter Model, *Wseas Transactions on Systems and Control*, vol. 6, no. 12, 2011.
- [18] **Andrew Y., Postlethwaite, I.,** (1988). Robust Helicopter Control Laws for Handling Qualities Enhancement, *Proceedings of Royal Aeronautical Society Conference on Helicopter Handling Qualities and Control*, London.
- [19] **Walker, D., Postlethwaite, I.,** (1994). Full Authority Active Control System Design for a High Performance Helicopter, *European Rotorcraft Forum*, Glasgow, Scotland.
- [20] **McFarlane D., Glover K. ,** (1992). A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, cilt 37, no. (6), pp. 759–769,
- [21] **Walker D.J. , Postlethwaite I.,** (1996). Advanced helicopter flight control using two-degree-of- freedom H_∞ optimization, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* , cilt 19, pp. 461–468.
- [22] **Postlethwaite I., Smerlas A., Walker D.J., Baillie S.W., Strange M.E., Howitt J.,** (1999). H. control of the NRC Bell 205 fly-by-wire helicopter, *Journal of the American Helicopter society* , cilt 44, no. 4, pp. 276-284.
- [23] **Walker D.J.,** (2003). Multivariable control of the longitudinal and lateral dynamics of a fly-by-wire helicopter, *Control Engineering Practice*, cilt 11(7).
- [24] **Walker D.J., Turner M.C. , Smerlas A., Gubbels A.W., Strange, M.E.,** (1999). Robust control of the longitudinal and lateral dynamics of the Bell 205 helicopter, *American Control Conference*, USA, 1999.
- [25] **Postlethwaite I., Prempain E., Turkoglu E., Turner M. C., Ellis K., Gubbels A.W.,** (2005). Design and flight testing of various H_∞ controllers for the Bell 205 helicopter, *Control Engineering Practice*, vol. 13, p. 383–398, 2005.
- [26] **Prempain E., Postlethwaite I.,** (2005). Static H_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter, *Automatica*, cilt 41, p. 1517–1528, 2005.

- [27] **La Civita M.**, (2002). *Integrated modeling and robust control for full envelope flight of robotic helicopters*, PhD thesis, Carnegie Mellon University.
- [28] **La Civita M., Papageorgiou G., Messner W., T. Kanade.**, (2006). Design and flight testing of an H8 controller for a robotic helicopter, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, cilt 29(2), p. 485–494, 2006..
- [29] **Gadewadikar J., Lewis F., Subbarao K. , and Chen B.**, (2008). H_{∞} static output-feedback control for rotorcraft, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, cilt 54, pp. 629 -646, 2008..
- [30] **Luo C., Liu R., Yang C., and Chang Y.**, (2003). Helicopter H_{∞} control design with robust flying quality, *Aerospace Science and Technology*, pp. 159-169, 2003.
- [31] **Chi-Chung Luo, Ru-Feng Liu, Ciann-Dong Yang, Yeong-Hwa Chang**, (2003). Helicopter H_{∞} control design with robust flying quality, *Aerospace Science and Technology*, pp. 159-169, 2003.
- [32] **Bates D. and Postlethwaite I.**, *Robust Multivariable Control of Aerospace Systems*, Delft: Delft University Press, (2002).
- [33] **Gadewadikar J. , F. Lewis, K. Subbarao, and B. Chen.** (2008). Structured H1 Command and Control-Loop Design for Unmanned Helicopters, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, cilt 31(4), pp. 109-127, 2008. .
- [34] **Papageorgiou G., and Glover K.**, (1999). H_{∞} loop-shaping: Why is it a sensible procedure for designing robust flight controllers, *AIAA Conference on Guidance, Navigation and Control*, 1999.
- [35] **Shamma S., and Athans M.**, (1990). Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants., *IEEE Transactions on Automatic Control* , cilt 35, p. 898–907, 1990.
- [36] **Rugh, W. and Shamma, J.** (2000). Research on gain scheduling, *Automatica*, cilt 36, p. 1401–1425, 2000.
- [37] **Leith, D. and Leithead, W.** (2000). Survey of gain-scheduling analysis and design, *International Journal of Control*, cilt 73, no. 11, pp. 1001-1025, 2000.
- [38] **Doyle J., Glover K, Khargoeker P., and Francis B** , (1989). State space solution to standard H_2 and H_{∞} control problem, *IEEE Transaction on Automatic Control*, cilt 34, pp. 831-847, 1989.
- [39] **Skogestad S. and Postlethwaite I.**, *Multivariable Feedback Control - Analysis and Design*, Wiley, (1996).
- [40] **Sefton J.A. and Glover K. ,** (1990). Pole/zero cancellations in the general H_{∞} problem withreference to a two block design, *Systems & Control Letters*, cilt 14(4), pp. 295–306., 1990.
- [41] **K. Glover and D. C. McFarlane**, (1989). Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_8 -bounded uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 821–830., 1989.

- [42] **Hoyle, D., Hyde, R., and Limebeer, D.,** (1991). A H_∞ Approach to Two Degrees of Freedom Design, *Proceedings of the 30th IEEE conference on decision and control*, Brighton, UK, 1991.
- [43] **Limebeer J. N., E. M. Kasenally and J. D. Perkins,** (1993). On the Design of Robust Two Degree of Freedom Controllers, *Automatica*,, vol. 29, no. 1, pp. 157-168,, 1993.
- [44] **Gu, G., Chen, J., and Lee, E. B.** (1999). Parametric H_8 loop shaping and weighted mixed sensitivity minimization, *IEEE Trans. on Automatic Control* , vol. 44, no. 4, pp. 846-852, 1999.
- [45] **Patra S., S.Sen, and G.Ray ,** (2011). A linear matrix inequality approach to parametric H_8 loop shaping control, *Journal of the Franklin Institute* , vol. 348, p. 1832–1846 , 2011.
- [46] **Packard A.,** (1994). Gain Scheduling via Linear Fractional Transformations, *System and Control Letters*, vol. 2, no. 2, pp. 79-92, 1994.
- [47] **Apkarian, P., P. Gahinet and G. Becker,** (1995). Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example, *Automatica* , vol. 31, no. 9, p. 1251–1261, 1995.
- [48] **Kemin Zhou, John Comstock Doyle, Keith Glover,** *Robust and optimal control*, Prentice Hall, (1996).
- [49] **Boyd S., L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan,** *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, 1994: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1994)..
- [50] **Scherer C. W. and S. Weiland,,** *Lecture Notes: Linear Matrix Inequalities in Control*, DISC, 1999).
- [51] **Gahinet P., and Apkarian P.,** (1994). A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *International journal of robust and nonlinear control*, cilt 4, no. 4, pp. 421-448, 1994.
- [52] **Andy Packard, Kemin Zhou, Pradeep Pandey and Greg Becker,** (1991). A collection of robust control problems leading to LMI's, *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brlghton, England, 1991.
- [53] **Löfberg J.,** (2004). YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB, *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, , 2004..
- [54] **Sturm J. F.,** (1999). Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones, *Optimization Methods and Software* , , vol. V.11, pp. 625-653 , 1999.
- [55] **Chilali M. and Pascal Gahinet,** (1996). Hinf Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Transactions On Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 358-368, 1996.
- [56] **Gahinet P., ,Aplarian P. and Chilali M.,** (1994). Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions for Real Parainetric Uncertainty, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, Vista, FL, 1994.

- [57] **Apkarian P. and Tuan H. D.**, (2000). Parametrized LMIs in control theory, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 4, pp. 1241-1264, 2000.
- [58] **Rantzer A.**, (1996). On the Kalman—Yakubovich—Popov lemma, *Systems & Control Letters*, vol. 28, no. 1, pp. 7-10, 1996.
- [59] **Apkarian P, Gahinet Pascal**, (1995). A Convex Characterization of Gain-Scheduled H_∞ Controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 5, pp. 853-864, 1995.
- [60] **Apkarian P. and Adams R.J.**, (1998). Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 6, no. 1, pp. 21-33, 1998.
- [61] **Postlethwaite I., Prempain E., Turkoglu E., Turner M. C., Ellis K., and Gubbels A.W.**, (2005). Design and flight testing of various H_∞ controllers for the Bell 205 helicopter, *Control Engineering Practice*, vol. 13, p. 383–398, 2005.
- [62] **Prempain E., and Postlethwaite I.**, (2005). Static H_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter, *Automatica*, vol. 41, p. 1517–1528, 2005.
- [63] **Luo C., Liu R., Yang C., and Chang Y.**, (2003). Helicopter H_∞ control design with robust flying quality, *Aerospace Science and Technology*, pp. 159-169, 2003.
- [64] **La Civita M., Papageorgiou G., Messner W., and T. Kanade.**, (2006). Design and flight testing of an H_∞ controller for a robotic helicopter, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.*, vol. 29(2), p. 485–494, 2006..
- [65] **Lhachemi H. , Saussié D., and Zhu G.**, A structured H_∞ -based optimization approach for integrated plant and self-scheduled flight control system design, *Aerospace Science and Technology*, vol. 45, pp. 30-38, 2015.
- [66] **Postlethwaite I., Konstantopoulos I. K., Sun X-D., Walker D. J., and Alford A. G.**, (2000). Design, Flight Simulation, and Handling Qualities Evaluation of an LPV Gain-Scheduled Helicopter Flight Control System, *European Journal of Control*, vol. 6, pp. 553-566, 2000.
- [67] **Sahin, I.H. and Kasnakoglu C.**, (2015). An Affine Parameter Dependent Controller for an Autonomous Helicopter at Different Flight Conditions, *Advanced Control and Navigation for Autonomous Aerospace Vehicles*, Seville, Spain, 2015.
- [68] **Sahin I.H and Kasnakoglu C.**, (2017). A stability guaranteed smooth-scheduled MIMO robust emergency autopilot for a lateral surface jammed UAV, *Proc. IMechE Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 0, no. 0, pp. 1-14, 2017.
- [69] **Gahinet P., and Apkarian P.**, (1994). A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *International journal of robust and nonlinear control*, vol. 4, no. 4, pp. 421-448, 1994.
- [70] **Caigny, J.D., Camino J.F., Olivera R.C.L.F, Peres P.L.D and Swevers J.**, (2012). Modelling and Control of LPV Systems: A Vibroacoustic

application, Control of *Linear Parameter Varying Systems with Applications*, Springer, 2012, pp. 357-379.

- [71] **Apkarian P., Gahinet P., and Biannic J.M.**, (19954). Gain-Scheduled H_{∞} Control of Missile via Linear Matrix Inequalities *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 28, no. 3, 1994.
- [72] **E. Prempain, I. Postlethwaite**, (2005). Static H_8 Loop Shaping Control of a Fly-by-wire Helicopter, *Automatica*, 2005.
- [73] **Zhiyan Dong, Shunan Liu, Yongming Yao, Linqiang Hu and Chunxue Wang**, (2016). Flexible performance design for the HN loop-shaping control based on the linear matrix inequality approach: Application to the coaxial rotor helicopter, *Advances in Mechanical Engineering*, cilt 8, no. 8, pp. 1-9, 2016.
- [74] **Swapnil Pramod Kanade and Abraham T. Mathew**, (2013). 2 DOF H- Infinity Loop Shaping Robust Control for Rocket Attitude Stabilization, *International Journal of Aerospace Sciences*, cilt 2, no. 3, pp. 71-91, 2013.
- [75] **Renan Lima Pereira And Karl Heinz Kienitz**, (2013). Practical Investigation Of H_8 Loop Shaping Controllers Using The Lmi Framework For A Hover System, *22nd International Congress Of Mechanical Engineering (COBEM 2013)*, Ribeirão Preto, SP, Brazil, 2013.
- [76] **Matt Rich, Nicola Elia and Phillip Jones** , (2013). Design and implementation of an H_8 controller for a quadrotor helicopter,» 2013 21st *Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)* , Platania-Chania, Crete, Greece, 2013.
- [77] **La Civita M., Papageorgiou G., Messner W., and T. Kanade.**, (2006). Design and flight testing of an H_{∞} controller for a robotic helicopter, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*,, vol. 29(2), p. 485–494, 2006..
- [78] **Shamma J. S. and Cloutiert J. R.**, (1993). Gain-Scheduled Missile Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 16, no. 2, pp. 256-263, 1993.
- [79] **Prempain E.**, (2006). Coprime factorizations for parameter-dependent systems, *Proceedings of ROCOND*, Toulouse, 2006.
- [80] **Prempain. E.**, (2006). Gain scheduling H-infinity loop shaping control for linear parameter-varying systems, *Proceedings of ROCOND*, Toulouse, 2006.
- [81] **Balas G.J., Mueller J.B., and Barker J.**, (1999). Application of Gain-Scheduled Multivariable Control Techniques to the F/A-18 System Research Aircraft, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, -99-4206, 1999.
- [82] **Prathyush P. Menon, Emmanuel Prempain, Ian Postlethwaite, Declan Bates and Samir Bennani**, (2009).An LPV loop shaping controller design for the NASA-HL-20 re-entry vehicle, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Chicago, Illinois, 2009.

- [83] **Hiret A., G. Duc, and J.P. Friang**, (1999). A Self Scheduled H8 Loop-Shaping Control of a Missile, *European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [84] **Brady C.**, (2011). *The Rudder Story*, Kingsley, Cheshire: Tech Pilot Services, 2011.
- [85] **McCormick McCormick B. W., M. P. Papadakis**, (2003). *Aircraft accident reconstruction and litigation*, Tucson, AZ: Lawyers & Judges Publishing Company, 2003.
- [86] **Burcham F. W. J., T. A. Maine, C. G. Fullerton ve L. D. Webb**, (1996). *Development and Flight Evaluation of an Emergency Digital Flight Control System Using Only Engine Thrust on an F-15 Airplane*, NASA, 1996.
- [87] **Walters J. M. ve R. L. Sumwalt**, *Aircraft accident analysis: final reports*, Highstown, NJ: McGraw-Hill Professional, (2000).
- [88] **Ranson L.**, (2010). 737 overrun prompts crosswind call, *Flight International*, cilt 178, no. 5252, p. 12, 2010.
- [89] **Maille N. P. ve L. Chaudron**, (2014). Towards more integrated safety management tools for airlines, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, cilt 228, no. 3, pp. 342-354, 2014.
- [90] **Fekri, M. Athans ve A. Pascoal**, Issues, progress and new results in robust adaptive control, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, cilt 20, no. 10, p. 519–579, 2006.
- [91] **Zheng F. Y., H. J. Gong ve Z. Y. Zhen**, (2015). Adaptive constraint backstepping fault-tolerant control for small carrier-based unmanned aerial vehicle with uncertain parameters, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, p. 0954410015592169, 2015.
- [92] **Shtessel Y., J. Buffington ve S. Banda**, (2002). Tailless Aircraft Flight Control Using Multiple Time Scale Reconfigurable Sliding Modes, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, cilt 10, no. 3, pp. 288-296, 2002.
- [93] **Zhang Y. ve J. Jiang**, (2001). Integrated Active Fault-Tolerant Control Using IMM Approach, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, cilt 37, no. 4, pp. 1221-1235, 2001.
- [94] **Seo J., Y. Kim, S. Kim ve A. Tsourdos**, (2012). Consensus-based reconfigurable controller design for unmanned aerial vehicle formation flight, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, cilt 226, no. 7, pp. 817-829, 2012.
- [95] **Bodson M.**, Reconfigurable Nonlinear Autopilot, (2003). *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, cilt 26, no. 5, p. 719–727, 2003.
- [96] **Lungu M. ve R. Lungu**, (2014). Reconfigurable Controller for Active Fault-tolerant Control Systems with Applicability to Flight Control, *Proceedings of the Romanian Academy Series A-Mathematics Physics*

Technical Sciences Information Science, cilt 15, no. 2, pp. 191-199, 2014.

- [97] **Ran D., X. Chen ve T. Sheng**, (2016). Adaptive fuzzy fault-tolerant control for rigid spacecraft attitude maneuver with finite-time convergence,» *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, cilt 230, no. 5, pp. 779-792, 2016.
- [98] **Wenzel K., A. Masselli ve A. Zell**, (2011). Automatic Take Off, Tracking and Landing of a Miniature UAV on a Moving Carrier Vehicle, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, cilt 61, no. 1-4, pp. 221-238, 2011.
- [98] **Luo Y.**, (2011). Lateral directional fractional order Pi- lambda control of a small fixed-wing unmanned aerial vehicles: controller designs and flight tests, *IET Control Theory & Applications*, cilt 5, no. 18, pp. 2156-2167.
- [100] **Ertin O. B., H. Korkmaz, U. Kaynak ve C. Kasnakoglu**, (2013). Hardware-in-the-Loop Test Platform for a Small Fixed Wing Unmanned Aerial Vehicle Embedded Controller, The 32nd IASTED *International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2013)*, Innsbruck, Austria, 2013.
- [101] **Kasnakoglu C. ve U. Kaynak**, (2010). Automatic Recovery and Autonomous Navigation of Disabled Aircraft After Control Surface Actuator Jam, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Toronto, Canada, 2010.
- [102] **Kaynak U., R. Akbaba, A. Kibar, C. Kasnakoğlu, N. Sezer-Uzol, E. Güleç, S. Tekelioğlu ve M. Solmaz**, (2010). Design and Manufacture of a Fuel Cell Powered Unmanned Air Vehicle, *International Unmanned Vehicles Workshop UVW2010*, Istanbul, Turkey, 2010.
- [103] **Korkmaz H., O. B. Ertin, C. Kasnakoglu ve U. Kaynak**, (2010). Design of a Flight Stabilizer System for a Small Fixed Wing Unmanned Aerial Vehicle Using System Identification, *IFAC Workshop on Advances in Control and Automation Theory for Transportation Applications (ACATTA 2013)*, Istanbul, Turkey, 2013.
- [104] **Akyürek Ş., B. Kürkçü, Ü. Kaynak ve C. Kasnakoğlu**, (2016). Control Loss Recovery Autopilot Design for Fixed-Wing Aircraft, *IFAC-PapersOnLine*, cilt 49, no. 9, pp. 117-123, 2016.
- [105] **Akyurek S., U. Kaynak ve C. Kasnakoglu**, (2016). Altitude Control for Small Fixed-Wing Aircraft Using H_{∞} Loop-Shaping Method, *IFAC-PapersOnLine*, cilt 49, no. 9, pp. 111-116, 2016.
- [106] **Kasnakoğlu C.**, (2016). Investigation of Multi-Input Multi-Output Robust Control Methods to Handle Parametric Uncertainties in Autopilot Design, *PloS one*, cilt 11, no. 10, p. e0165017, 2016.
- [107] **Kasnakoğlu C.**, (2016). Scheduled smooth MIMO robust control of aircraft verified through blade element SIL testing, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, p. 0142331216661760, 2016.
- [108] **US Navy**, (2002). NATOPS for the RQ-2B/RQ-2A Pioneer Unmanned Aerial Vehicle.

- [109] **Rauw M.**, (2001). *FDC 1.2 - A Simulink Toolbox for Flight Dynamics and Control Analysis*, Haarlem, The Netherlands, 2001.
- [110] **Ingram G.**, (2005). *Wind Turbine Blade Analysis using the Blade Element Momentum Method*, Durham, UK: School of Engineering, Durham University, 2005.
- [111] **Burton T., D. Sharpe, N. Jenkins ve E. Bossanyi**, *Wind energy handbook, West Sussex: John Wiley & Sons*, 2001.
- [112] **Atlas E., M. İ. Erdoğan, O. B. Ertin, A. Guclu, Y. E. Saygi, U. Kaynak ve C. Kasnakoglu**, (2015). Hardware-in-the-loop Test Platform Design for UAV Applications,» *Applied Mechanics and Materials*, cilt Manufacturing Science and Technology, no. VI, p. 681, 2015.
- [113] **Marzat J., H. Piet-Lahanier, F. Damongeot ve E. Walter**, (2012). Model-based fault diagnosis for aerospace systems: a survey, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of aerospace engineering*, p. 0954410011421717, 2012.
- [114] **Nocedal J., S. J. Wright.**, *Numerical Optimization*, 2nd., Springer Verlag, (2006).
- [115] **Stevens B., F. Lewis**, *Aircraft Control and Simulation*, 2nd Edition dü., Wiley-Interscience, (2003)..
- [116] **Le V., M. Safonov**, (1992). Rational matrix GCD's and the design of squaring-down compensators--a state space theory,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, cilt 36, no. 3, pp. 384-392, 1992.
- [117] **Chiang R., M. Safonov**, (1992). H-infinity synthesis using a bilinear pole-shifting transform, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, cilt 15, no. 5, pp. 1111-1115, 1992.
- [118] **Boyd S., L. Vandenberghe**, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, (2004).
- [119] **Mnich. R. H. M.**, (1988). Minimum-complexity helicopter simulation math model., *Technical report, NASA.*, Moffett,CA., 1988.
- [120] **Gavrilets V., B. Mettler, and E. Feron.**, (2001). Dynamic model for a miniature aerobatic helicopter., *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Montreal, 2001.
- [121] **Padfield G.**, *Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modelling*, Oxford: Blackwell Publishing, (2007). .



EKLER

EK 1: Helikopter Dinamik Modeli

EK 2: Denge(Trim) Sonuçları

EK 3: Doğrusallaştırma Sonuçları

EK 4: Jakobian Doğrusallaştırma Yöntemi ile Doğrusal Aile Kümesi Elde Edilmesi

EK 5: Kontrolcü Sentezi Değişken Değişimi

EK 6: Kontrolcü Sentezi Parametre Eleme Yöntemi



EK 1 Helikopter Dinamik Modeli

Bu kısımda kontrol tasarımında kullanılmak üzere küçük ölçekli bir helikopterin basit matematiksel modelinin elde edilmesi için izlenen sistematik metot anlatılmaktadır. Öncelikle kontrol perspektifinden bakacak olursak, helikopter modelinin helikopterin dinamik karakteristiğini olabildiğince yakın bir şekilde yansıtan olabildiğince basit bir modele gereksinim duyulmaktadır. Bu yüzden ilk ilkeler prensibi (first principles) yaklaşımı ile minimum kompleksliğe sahip bir matematiksel model (minimum complexity math modelling) aşağıda anlatıldığı gibi oluşturulmuştur. Minimum Kompleks Helikopter Benzetim Matematik Modeli [119], ilk-ilkeler prensibine dayalı bir örnek sunmaktadır. Daha güncel olarak küçük ölçekli helikopter bir helikopter modeli Gavrilets [120] tarafından verilmiştir. Modellenen helikopter MIT üniversitesi tarafından geliştirilen X-Cell 60 helikopteridir. Helikopter ile ilgili tüm parametrelere [120]'de verilmiştir. Burada bizde burada kullanılan yaklaşıma çok benzer bir yaklaşım ile küçük ölçekli bir helikopteri modelleyebiliriz.

Koordinat dönüşümleri

Helikopterin dinamik modelinin oluşturulması için öncelikle helikopterin ağırlık merkezine sabitlenmiş gövde eksen takımı tanımlanmıştır. X eksenini helikopterin önünü, z eksenini helikopterden aşağıya doğru olan yön ve y eksenini sağ el kuralı ile belirlenmiştir. Bu eksen takımı atalet eksenine olduğundan dolayı hareket denklemleri bu eksen takımına göre çıkarılır. Helikopterin hareketi ile bu eksen takımı da hareket etmektedir. X,Y,Z ve ekseninde ataletsel hızlar gövde ekseninde u, v, w olarak tanımlanmıştır. Gövde ekseninde açısal hız ise p, q, r olarak tanımlanmıştır. Euler açıları φ, θ, ψ , helikopterin dünyaya sabitlenmiş eksen takımına (earth frame) göre yönelimini ifade etmektedir. Euler açıları dünya eksen takımı ve gövde eksen takımı arasındaki açıları tanımlamak için kullanılmıştır. Euler açıları gövde ekseninden dünya eksenine özel bir sırayla uygulanan dönüşümlerin toplam etkisi ile hesaplanmaktadır. Genel olarak uçuş mekaniğinde baş açısı yunuslama ve yalpa sırası tercih edilmektedir. Burada baş açısı ψ z eksenindeki rotasyon, yunuslama θ y eksenindeki rotasyon ve yalpa ϕ x eksenindeki rotasyondur. Dünya eksen takımından helikopter eksen takımına olan toplam rotasyon matrisi şu şekildedir;

$$R_{B2E} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

Sin ve cos terimleri “s” ve “c” olarak yazılmıştır. Gövde ekseninden dünya eksenine olan dönüşüm şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = [R_{B2E}] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Rotasyon matrisi ortonormal olduğu için rotasyon matrisinin transpozu tersine eşittir.

$$R_{E2B} = R_{B2E}^T$$

Bunun yanında açısal hızlar ile Euler açılarının zamana bağlı değişimi arasındaki ilişki şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi\tan\theta & c\phi\tan\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi\sec\theta & c\phi\sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Newton-Euler denklemleri

Newton'un hareket kanununa göre; bir cisme etki eden toplam kuvvet lineer momentumun zamanla değişimine eşittir. Burada;

$$m \frac{d\mathbf{V}_E}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}_E}{dt} = \mathbf{M}$$

Burada helikopterin ağırlık merkezine uygulanan harici kuvvet vektörü $\mathbf{F} = [X \ Y \ Z]^T$ ve $\mathbf{M} = [L \ M \ N]^T$ ise harici moment vektörüdür. Daha açık olarak ifade edecek olursak “X”, “Y” ve “Z” helikopterin ağırlık merkezine çakılı olan koordinat eksenine göre helikoptere etkiyen, sırasıyla “x”, “y” ve “z” yönündeki harici kuvvetlerin toplamlarıdır. “L”, “M” ve “N”, “x”, “y” ve “z” eksenlerinde helikopterin ağırlık merkezine etkiyen toplam harici momentlerdir. Helikopterde harici kuvvet ve momentler ana rotor, kuyruk rotoru, yerçekimi kuvvetleri ve gövde ve kuyruk yüzeyleri tarafından oluşturulan aerodinamik kuvvetlerin bileşkesidir

Hareket eden referans koordinat sistemi prensibi kullanılarak, hareket denklemleri gövde sabit referans koordinat takımında aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$m\dot{\mathbf{v}} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}$$

Burada gövde koordinatlarındaki hız $\mathbf{v} = [u \ v \ w]^T$ ve açısal hız $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$ olarak tanımlanmıştır. \times işareti vektör çarpımı işlemi ifade etmektedir. 6 serbestlik dereceli bir sistem için kuvvetler denklemleri helikopterin gövde eksenindeki öteleme hareketini ifade eden üç tane diferansiyel denklem oluşturur. Benzer olarak, moment

denklemleri ise helikopterin açısal hareketini ifade eden üç tane diferansiyel denklem oluşturmaktadır. Burada basitleştirme amacıyla atalet matrisinin köşegen olmayan elemanlarının küçük olduğu kabul edilmiş ve ihmal edilmiştir. ($I_{xy} = I_{yx} = 0, I_{zx} = I_{xz} = 0, I_{yz} = I_{zy} = 0$.) Euler açılarının (ϕ, θ) kinematik ilişkisini ifadesi için 2 tane daha denklem eklendikten sonra 6 serbest dereceli katı cisim hareket denklemlerine ulaşılır. (Baş açısı, ψ , genel olarak katı cisim hareketine dâhil edilmektedir.)

Euler açıları dünyaya sabitlenmiş eksen takımından gövde eksen takımına 3 peş peşe rotasyonu ifade eder. Dünyaya sabitlenmiş eksen takımı sırasıyla x, y ve z eksenlerinde kuzey, doğu ve aşağı yönlerine karşılık gelmektedir.

Hareket denklemlerinin yani sıra Euler açılarının zamanla değişiminin gövde eksenindeki açısal hızlara olan kinematik ilişkisi şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi \tan\theta & c\phi \tan\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Vektörel ve skalar işlemlerden sonra gövde ekseninde öteleme ve açısal ivmeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vr - wq + \frac{X}{m} \\ \dot{v} &= wp - ur + \frac{Y}{m} \\ \dot{w} &= wp - ur + \frac{Z}{m} \\ \dot{p} &= \frac{qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} + \frac{L}{I_{xx}} \\ \dot{q} &= \frac{pr(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} + \frac{M}{I_{yy}} \\ \dot{r} &= \frac{pq(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} + \frac{N}{I_{zz}} \\ \dot{\phi} &= p + s\phi \tan\theta q \\ \dot{\theta} &= c\phi q \end{aligned}$$

Kuvvet ve momentler (Forces and moments)

Bu bölümde helikopter bileşenleri tarafından üretilen helikoptere etkiyen kuvvetleri ve momentleri tanımlayan denklemlerin çıkarılışı anlatılacaktır. Beş ana helikopter bileşeni düşünülebilir. Bunlar; “MR” alt indisi ile gösterilen ana rotor, “TR” alt indisi ile gösterilen kuyruk rotor ve “FUS” alt indisi ile gösterilen gövde, “HT” alt indisi ile

gösterilen yatay kuyruk ve “VF” alt indisi dikey Fin tarafından üretilen kuvvet ve momentlerin ayrı ayrı temsili için kullanılmıştır. Diğer bileşenler önemsiz kabul edilir. Bundan dolayı toplam harici kuvvet ve momentler aşağıdaki bileşenlerin toplamından oluşmaktadır. Helikopteri etkileyen net harici kuvvetler şu şekildedir;

$$\begin{aligned}
 X &= X_{MR} + X_{FUS} + G_x \\
 Y &= Y_{MR} + Y_{FUS} + Y_{TR} + Y_{VF} + G_y \\
 Z &= Z_{MR} + Z_{FUS} + Z_{HT} + G_z \\
 L &= L_{MR} + L_{VF} + L_{TR} \\
 M &= M_{MR} + M_{HT} \\
 N &= N_{MR} + N_{VF} + N_{TR} + N_{TR}
 \end{aligned}$$

Burada X , Y , Z ve L , M , N sırasıyla farklı bileşenlerden gelen kuvvet ve momentlerin toplamıdır. (l_M, y_M, h_M) ve (l_T, y_T, h_T) ise sırasıyla ana rotor ve kuyruk rotorunun ağırlık merkezine olan bağıl konumunu ifade etmektedir. (G_x, G_y, G_z) ise yerçekimi kuvvetlerinin gövde eksenindeki bileşenleridir.

Ana rotor kuvvet ve momentler (Main rotor forces and moments)

Döner kanatlı hava araçlarında hava aracını havada tutan kaldırma kuvvetini ana rotorun ürettiği itki kuvveti sağlamaktadır. Bu kuvvetin değişimi ile de helikopterin dikey hareketi sağlanır ve bunun yanında bu itki kuvvetinin yönünün değişimi ile de helikopterin boylamsal ve yanal ekseninde hareketi sağlanmaktadır. Ana-rotorun itkisini, M_{TR} , hesaplamak için momentum disk teorisi kullanılacaktır. İç akışın gelişimi ve sabit bir değere ulaşması için gereken süre katı cisim dinamiklerinden çok daha hızlı gerçekleştiği varsayılarak, iç akışın sabit olduğu kabul edilmiştir. İç akışta oluşan geçici etkilerin katı cisim dinamikleri üzerinde etkisi olmadığı kabul edilmiştir. Momentum teorisi için iç akış ve itki arasındaki ilişki hava hızının, rotor hızının ve kolektif kumandasının bir fonksiyonu olarak verilmiştir ve tekrarlamalı olarak hesaplanmaktadır. Çırpma açılarının ana-rotor itkisi üzerindeki etkisi ihmal edilmiştir. Ana rotor pallerinde burulma olmadığı kabul edilmiştir. Açısız hızın ve saykık (cyclic) kumandalarında düşük ileri hız oranında (advance ratio range $\mu < 0.15$) itkiye tesiri olmadığı kabul edilmiştir. Momentum teorisi uygulanırken [121] sf.123’de verilmiş olan tekrarlamalı çözüm kullanılmıştır.

İtki katsayısı C_T (thrust coefficient) olarak tanımlanırsa, ana rotor itki kuvveti şu şekildedir;

$$T_{MR} = C_T \rho (\Omega R)^2 \pi R^2$$

Aşağıdaki iki denklem itki katsayısı C_T ve iç akış λ_i için tekrarlamalı olarak çözülmelidir ve elde edilen itki katsayısı C_T kullanılarak ana rotor itki kuvveti hesaplanır.

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2 \sqrt{\mu^2 + (\lambda_0 - \mu_z)^2}}$$

$$C_T = \frac{a \sigma}{2} \left(\theta_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{2} \right) + \frac{\mu_z - \lambda_i}{2} \right)$$

Burada

$$\mu = \frac{\sqrt{(u-u_{wind})^2 + (v-v_{wind})^2}}{\Omega R} \text{ ana rotor ileri hız oranı (MR advance ratio)}$$

$$\mu_z = \frac{w-w_{wind}}{\Omega R} \text{ ana rotor diskinde dik gelen hava akışı (MR normal air flow)}$$

$$\sigma = \frac{2c}{\pi R} \text{ katılık oranı (solidity ratio)}$$

a lift slope curve

θ_0 kolektif açıcı (collective angle)

Ana rotor tork katsayısı C_Q (Main rotor Torque Coefficient) şu şekildedir;

$$C_Q = C_T (\lambda_i - \mu_z) + \frac{C_{D_o} \sigma}{8} \left(1 + \frac{7}{3} \mu^2 \right)$$

burada C_{D_o} profil sürüklenme kuvveti (profile drag coefficient). $C_{D_o} = 0.008$. Sonuç olarak, ana rotorun oluşturduğu tork şu şekildedir.

$$Q_{MR} = C_Q \rho (\Omega R)^2 \pi R^3$$

Ana rotor çarpınma dinamiği (Main rotor flapping dynamics)

Ana rotordaki çarpınma dinamiğinin çok hızlı olduğu kabul edilmiştir. Çarpınma dinamiğinin çok hızlı olduğu durumlarda kontrol girdileri ve çarpınma arasında direk cebirsel bir yaklaşık ilişki elde etmek mümkündür. Bunun yanında, kontrol kumandaları ile çarpınma dinamikleri arasında birinci dereceden bir dinamik model oluşturulabilir. Boylamsal ve yanal çarpınma dinamiklerinin birinci dereceden dinamik modeli şu şekildedir

$$\dot{\beta}_{lon} = -q - \frac{\beta_{lon}}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_e} \left(\frac{\partial \beta_{lon}}{\partial \mu} \frac{u - u_{wind}}{\Omega R} + \frac{\partial \beta_{lon}}{\partial \mu_z} \frac{w - w_{wind}}{\Omega R} \right) + \frac{A \delta_{lon}}{\tau_e} \delta_{lon}$$

$$\dot{\beta}_{lat} = -p - \frac{\beta_{lat}}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_e} \left(\frac{\partial \beta_{lat}}{\partial \mu_v} \frac{v - v_{wind}}{\Omega R} \right) + \frac{B \delta_{lat}}{\tau_e} \delta_{lat}$$

Burda $A_{\delta_{lon}}$ ve $B_{\delta_{lat}}$ sırasıyla boylamsal ve yanal kontrol kumandalarından (δ_{lon} ve δ_{lat}) ana-rotor çarpınma açılarına (β_{lon} ve β_{lat}) sabit hal kazançlarıdır. τ_e ana-rotorun etkin zaman sabitidir. (effective rotor time constant)

Parçalı türevler için aşağıdaki gibi yaklaşılanmıştır. (benzetilmiştir)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_{lon}}{\partial \mu} &= 2 K_{\mu} \left(\frac{4\delta_{coll}}{3} - \lambda_0 \right) \\ \frac{\partial \beta_{lat}}{\partial \mu_v} &= - \frac{\partial \beta_{lon}}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \beta_{lon}}{\partial \mu_z} &= K_{\mu} \frac{16 \mu^2}{8|\mu| + a\sigma} \text{sign}(\mu)\end{aligned}$$

İtke vektörü ana rotorun Tip-Path-Plane (TPP) dik olarak bir kuvvet oluşturmaktadır. TPP eğimi kontrol edilerek dolaylı olarak helikopterin hareketi kontrol edilmiş olur. T_{MR} ana-rotor tarafından üretilen toplam itki kuvveti ise gövde sabit koordinat takımında gösterimi şu şekildedir:

$$T_M^B = \begin{bmatrix} X_{MR} \\ Y_{MR} \\ Z_{MR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s(\beta_{lon})c(\beta_{lat}) \\ c(\beta_{lon})s(\beta_{lat}) \\ -c(\beta_{lon})c(\beta_{lat}) \end{bmatrix} T_{MR} \approx \begin{bmatrix} -\beta_{lon} \\ \beta_{lat} \\ -1 \end{bmatrix} T_{MR}$$

Yukardaki denklemde, çarpınma açılarının küçük olduğu kabul edilerek, küçük açı yaklaşımı ile ifade basitleştirilmiştir. ($c(\cdot) \approx 1$ ve $s(\cdot) \approx (\cdot)$)

$$\begin{aligned}X_{MR} &= -T_{MR}s(\beta_{lon}) \\ Y_{MR} &= T_{MR}s(\beta_{lat}) \\ Z_{MR} &= -T_{MR}c(\beta_{lon})c(\beta_{lat})\end{aligned}$$

Ana rotorun oluşturduğu tork nedeniyle oluşan moment şu şekilde verilmiştir;

$$\begin{aligned}L_{MR} &= Q_{MR}s(\beta_{lon}) \\ M_{MR} &= -Q_{MR}s(\beta_{lat}) \\ N_{MR} &= Q_{MR}c(\beta_{lon})c(\beta_{lat})\end{aligned}$$

Girdilere karşılık gelen çarpınma açıları hesaplandıktan sonra, küçük açı yaklaşımı ile X, Y ve Z yönlerindeki ana rotorun ürettiği itki şu şekildedir;

$$\begin{aligned}X_{MR} &= -T_{MR}\beta_{lon} \\ Y_{MR} &= T_{MR}\beta_{lat} \\ Z_{MR} &= -T_{MR}\end{aligned}$$

Küçük açı yaklaşımı ile L, M ve N yönlerindeki ana rotorun ürettiği moment şu şekildedir;

$$L_{MR} = Q_{MR}\beta_{lon}$$

$$M_{MR} = -Q_{MR} \beta_{lat}$$

$$N_{MR} = Q_{MR}$$

Burada L ve M momentleri küçük olduğu için ihmal edilmiştir.

Kuyruk rotoru kuvvet ve momentleri (Tail rotor)

Kuyruk rotor itki kuvvetidir, T_{TR} , ana rotorun ürettiği torku dengelemek için, kuyruk rotoru tarafından üretilir. Bu itkiyi belirlemek için kuyruk rotoru da ana rotorun modellenmesine benzer bir yöntemle modellenecektir. Kuyruk rotoru pedal kumandası θ_{ped} ile kontrol edilir.

Kuyruk rotorunda herhangi bir çarpma dinamiği olmadığı varsayılmıştır. Ana rotor hesaplamalarına benzer olarak kuyruk rotoru itkisini, T_{TR} , hesaplamak için momentum disk teorisi kullanılacaktır. İç akışın sabit ve değişmez olduğu kabul edilmiştir. Momentum teorisi için iç akış ve itki arasındaki ilişki tekrarlamalı olarak hesaplanmaktadır. Momentum teorisi uygulanırken [121] sf. 123 de verilmiş olan tekrarlamalı çözüm kullanılmıştır.

İtki katsayısı C_T olarak kabul edilmiş ve kuyruk rotoru itki kuvveti T_{TR} şu şekildedir;

$$T_{TR} = C_T \rho (\Omega_{TR} R_{TR})^2 \pi R_{TR}^2$$

Aşağıdaki iki denklem itki katsayısı C_T ve iç akış λ_i için tekrarlamalı olarak çözülmelidir ve elde edilen itki katsayısı C_T kullanılarak ana rotor itki kuvveti hesaplanır.

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2 \sqrt{\mu^2 + (\lambda_0 - \mu_z)^2}}$$

$$C_T = \frac{a \sigma}{2} \left(\theta_{ped} \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{2} \right) + \frac{\mu_z - \lambda_i}{2} \right)$$

Burada

$$\mu = \frac{\sqrt{(u-u_{wind})^2 + (w-w_{wind})^2}}{\Omega R} \text{ kuyruk rotoru ileri hız oranı (TR advance ratio)}$$

$$\mu_z = \frac{v-v_{wind}}{\Omega R} \text{ kuyruk rotoru diskinde dik gelen hava akışı (TR normal air flow)}$$

$$\sigma = \frac{2c}{\pi R} \text{ katılık oranı (solidity ratio)}$$

a kaldırma katsayısı eğimi (lift slope curve)

θ_{ped} Kuyruk kolektif kumandası

Kuyruk rotoru gövde y eksenine ters olduğu için itki kuvvetinin işareti değiştirilerek gövde eksenindeki yanal kuvvet şu şekildedir;

$$Y_{TR} = -T_{TR}$$

Kuyruk rotorunun x ve y eksenlerinde kuvvet üretmediği varsayılmıştır

Kuyruk rotoru tork katsayısı C_Q (Main rotor Torque Coefficient) şu şekildedir;

$$C_Q = C_T (\lambda_i - \mu_z) + \frac{C_{D_o} \sigma}{8} (1 + \frac{7}{3} \mu^2)$$

burada C_{D_o} profil sürüklenme kuvveti (profile drag coefficient).. $C_{D_o} = 0.024$. Sonuç olarak, kuyruk rotorunun oluşturduğu tork şu şekildedir.

$$Q_{TR} = C_Q \rho (\Omega R_{TR})^2 \pi R_{TR}^3$$

Kuyruk rotorun oluşturduğu tork nedeniyle gövde ekseninde oluşan moment şu şekilde verilmiştir; (Can be neglected small compared to the other force moment contributions)

$$N_{TR} = -Q_{TR}$$

N_{TR} diğer momentlere kıyasla küçüktür ve etkisi ihmal edilebilir.

Küçük helikopterlerde ana ve kuyruk rotorunun yarattığı güç ve momentler aerodinamik gövde ve kuyruk yüzeylerinin yarattığı güç ve momentlerden çok daha fazla olduğu varsayımı ile bazen gövde ve kuyrukta yaratılan güç ve momentler ihmal edilebilir. Buradaki yaklaşımın nedeni küçük helikopterlerin gövde kuyruklarındaki aerodinamik yüzeylerin ana ve kuyruk rotoruna kıyasla fiziksel olarak küçük olmasıdır. Bununla birlikte ana ve kuyruk rotorunun çok yüksek hızda dönüyor olması böyle bir kabul yapılmasına olanak sağlamaktadır. Gövdede oluşan sürüklenme kuvveti, dikey kuyruk ve yatay stabilizatörün oluşturduğu kuvvetler kabaca aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Gövdede oluşan kuvvetler (Fuselage forces and moments)

Hava direncinden dolayı gövde kuvvetleri oluşur. " X_{FUS} ", " Y_{FUS} " ve " Z_{FUS} ", gövde ekseninde oluşan sürüklenme kuvvetleri olarak tanımlanmıştır. " S_X ", " S_Y " ve " S_Z " gövdenin etkili sürüklenme yüzey alanlarıdır. X, Y ve Z yönündeki sürüklenme kuvvetleri etkili sürüklenme yüzey alanlarının bir fonksiyonu olarak şu şekilde tanımlanmıştır.

$$X_{FUS} = -\frac{1}{2} S_X \rho u_a V_\infty$$

$$Y_{FUS} = -\frac{1}{2} S_Y \rho v_a V_\infty$$

$$Z_{FUS} = -\frac{1}{2} S_Z \rho (w_a + V_{imr}) V_\infty$$

$$V_{\infty} = \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + (u_a + V_{imr})^2}$$

burada u_a , v_a ve w_a gövde merkezinde havanın hızıdır. $u_a = u - u_{wind}$, $v_a = v - v_{wind}$ ve $w_a = w - w_{wind}$.

Bu kuvvetlerin hepsi uçuş yönüne zıt etki edecek şekilde tanımlanır. Bu kuvvetler gövde basınç merkezinin helikopterin ağırlık merkezi ile aynı noktada olduğu kabulü moment oluşturmadığı varsayılmıştır.

Dikey fin (Vertical fin)

Dikey Fin alanı S_{vf} olarak tanımlanmıştır. Dikey kuyruk tarafından üretilen yanal Y kuvvetin yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$Y_{VF} = -\frac{1}{2} S_{vf} \rho (C_{L\alpha}^{vf} V_{\infty}^{TR} + |v_{vf}|) v_{vf}$$

burada

$C_{L\alpha}^{vf}$ Kaldırma kuvveti sabiti (lift curve slope)

$V_{\infty}^{TR} = \sqrt{u_a^2 + w_{TR}^2}$ kuyruk rotorundaki aksenal hız (axial velocity at the location of the tail rotor)

v_{vf} dikey findeki yanal hava hızı (side velocity relative to air at the location of the vertical fin)

w_{TR} dikey findeki yanal dikey hava hızı (vertical velocity relative to air at the location of the vertical fin).

Dikey kuyruğun X ve Z yönlerinde kuvvet üretmediği kabul edilmiştir. Dikey kuyruğun oluşturduğu yanal Y kuvveti dikey kuyruğun ağırlık merkezine olan konumunda dolayı yuvarlanma ve yalpalama momentleri oluşturmaktadır. Bu momentler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$N_{VF} = -Y_{VF} l_{TR}$$

$$L_{VF} = Y_{VF} h_{TR}$$

Yatay kuyruk (Horizontal stabilizer)

Yatay kuyruk Z yönünde bir kuvvet oluşturarak kararlılığı artırıcı bir yunuslama momenti oluşturmaktadır. Yatay kuyruk alanı S_{ht} olarak tanımlanmıştır. Daha sonra yatay kuyruğun oluşturduğu Z yönündeki kuvvet yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$Z_{HT} = -\frac{1}{2} S_{ht} \rho (C_{L\alpha}^{ht} |u_a| w_{ht} + |w_{ht}| w_{ht})$$

Burada,

$C_{L\alpha}^{ht}$ Kaldırma kuvveti sabiti (lift curve slope)

w_{ht} yatay kuyruktaki dikey hız (effective vertical speed at the horizontal tail location)

Yatay kuyruk tarafından oluşturulan yunuslama momenti şu şekildedir;

$$M_{HT} = Z_{HT} l_{ht}$$

Yerçekimi kuvvetleri

Yerçekimi kuvveti dünya ekseninde z yönünde etki etmektedir. Bu etkiyi gözde eksinine taşıdığımızda helikopterde oluşan yerçekimi kuvveti şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} G_X \\ G_Y \\ G_Z \end{bmatrix} = R_{E2B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

burada R_{E2B} dünya ekseninden gövde eksinine olan dönüşümdür.

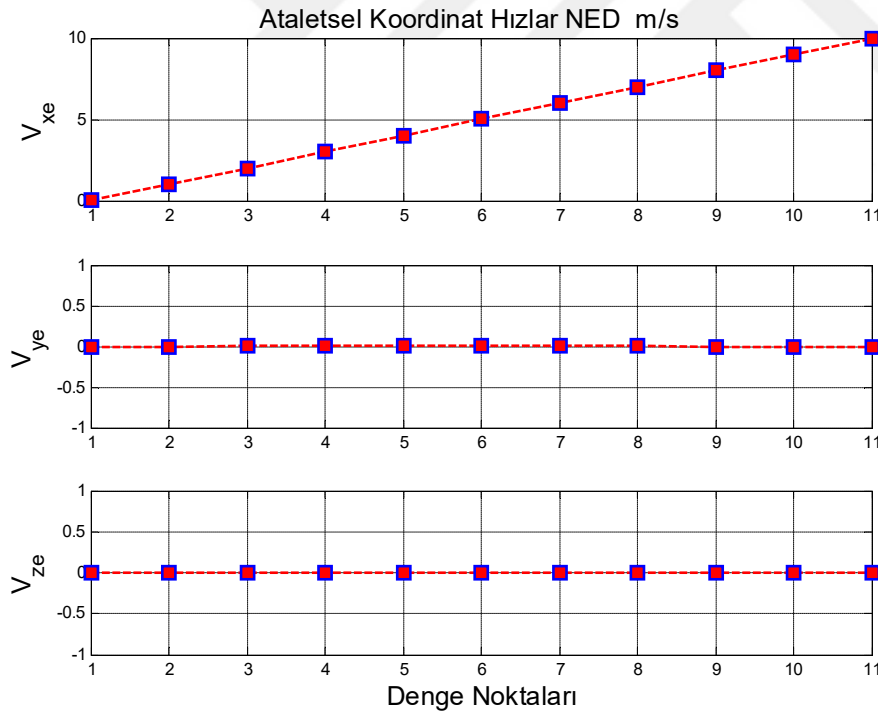
Harici Kuvvet ve momentlerin toplamı

Burada küçük bir helikopter dinamiğinde etkili olabilecek bütün kuvvet ve momentlerin hesaplanması gösterilmiştir. Burada hesaplanan bütün kuvvet ve momentler kullanılarak Newton-Euler denklemlerinde yerine konulabilir

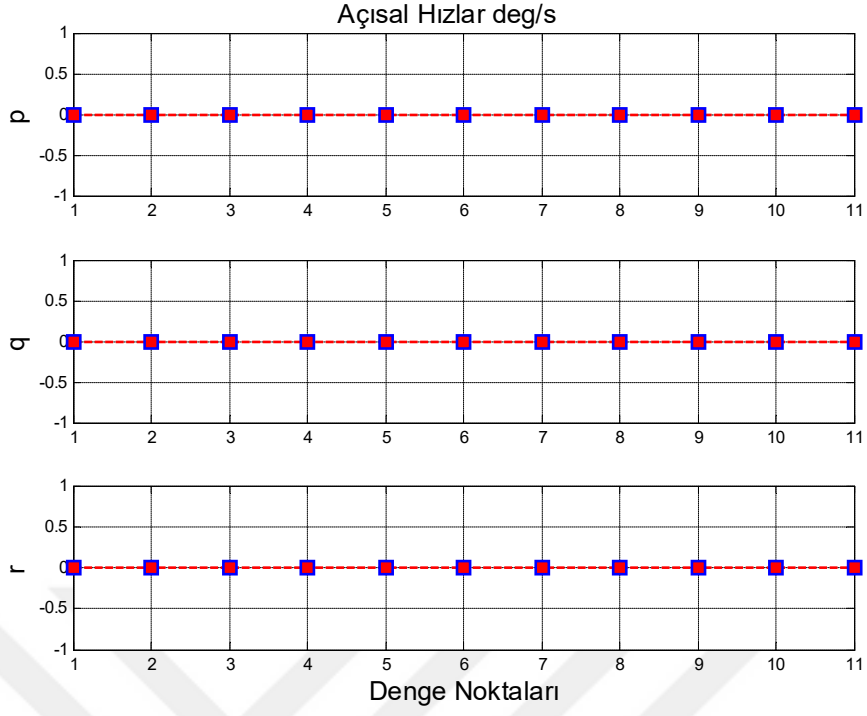
EK 2 Denge(Trim) Sonuçları

Denge(trim) koşulları, doğrusal olmayan modelin, helikoptere özgü uçuş koşulları olarak kabul edilebilen bir çalışma noktası olarak tanımlanır. Bu bağlamda, trim koşulu, doğrusal olmayan modelin denge noktasıdır, yani, durum türevleri sıfıra yaklaştırılmaktadır.

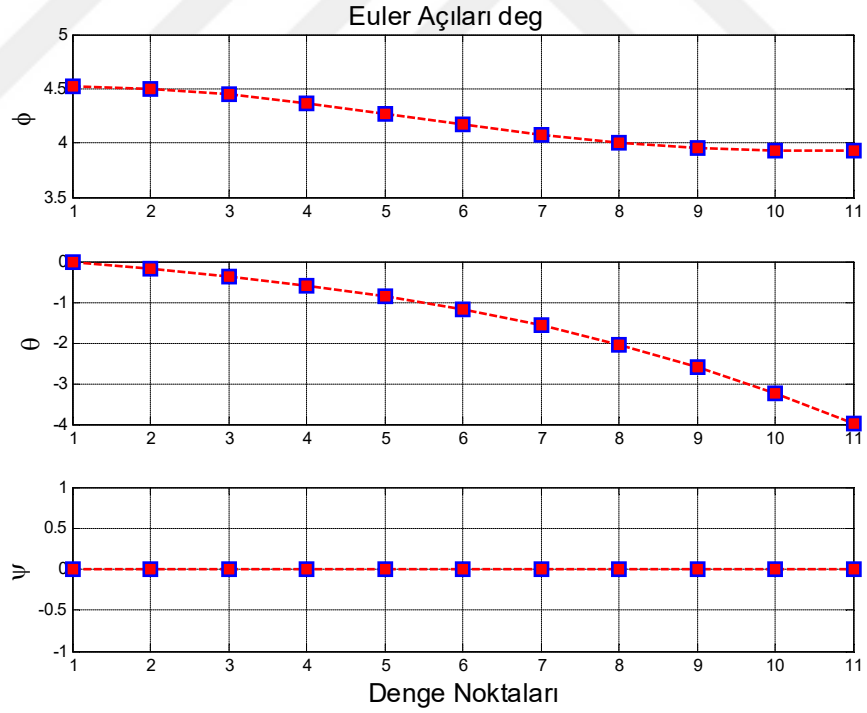
Uçuş dinamiklerinin üç temel probleminin çözümü, denge, kararlılık ve sistem cevabı kavramlarını içermektedir. Denge(trim) genellikle, durum değişkenlerinin hiçbiri zamanla değişmeyen (yani, tüm durum değişkenlerinin değişimi sıfırdır) ve uygulanan kuvvetlerin ve momentlerin sonucunun sıfır olduğu bir koşul olarak tanımlanır. Trim çözümü doğrusal olmayan bir cebirsel fonksiyonun sıfırlanması ile sağlanır; burada kontrol girdisi, tanımlanmış bir hali dengede tutmak için gereklidir. Denge sonuçları ŞekilEk.1-2-3-4-5’de görülebilir.



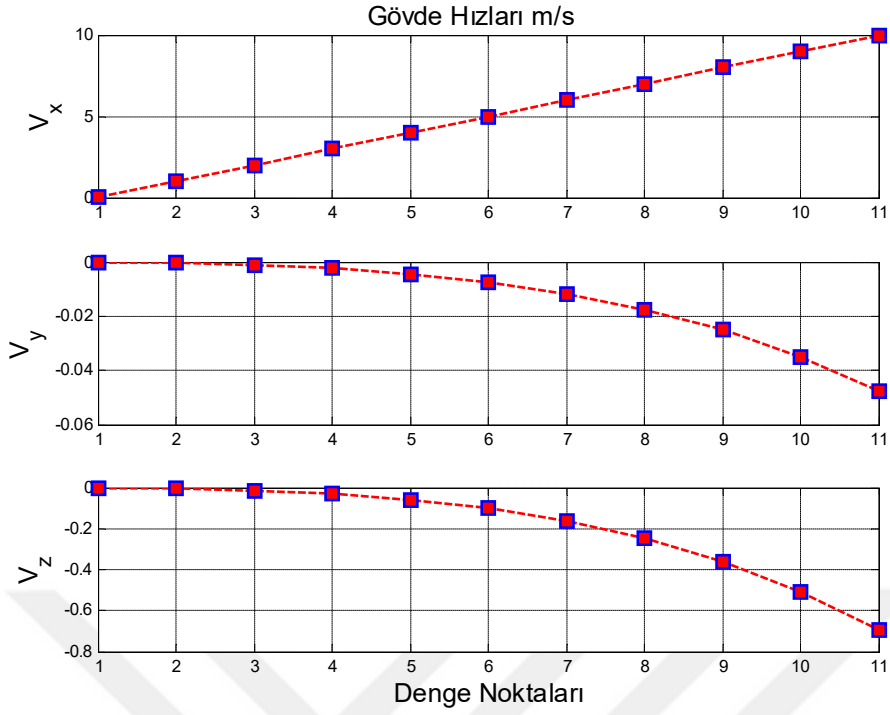
Şekil Ek.1 : Dünya hızları.



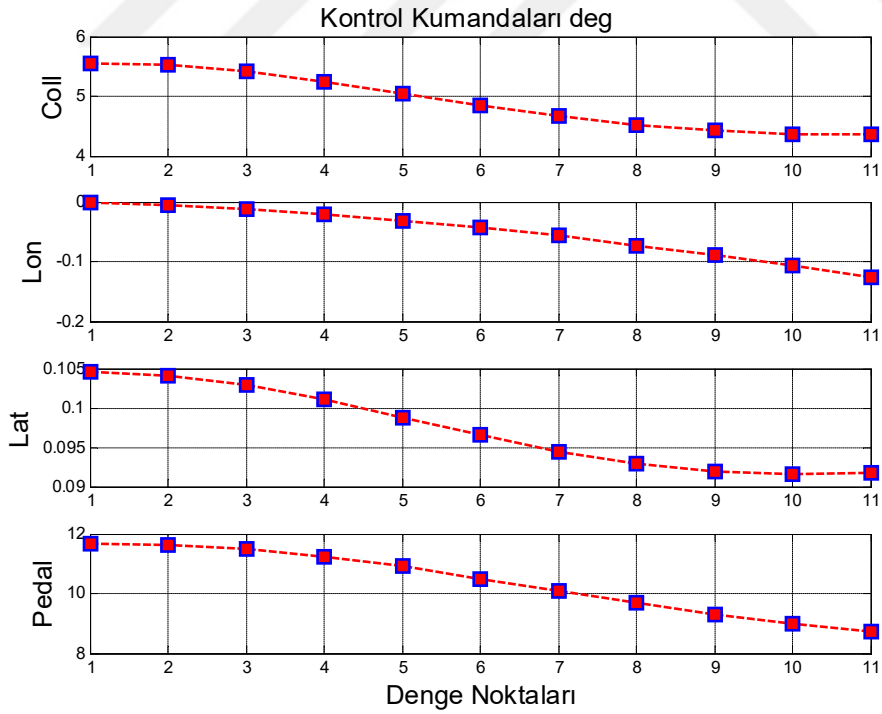
Şekil Ek.2 : Açısal hızlar.



Şekil Ek.3 : Euler açıları.



Şekil Ek.4 : Gövde hızları.



Şekil Ek.5 : Kontrol denge girdileri

EK3 Doğrusallaştırma Sonuçları

Belirli bir denge koşulunda doğrusal olmayan denklemlerin doğrusallaştırılması ve hava aracı sistem matrisinin öz değerlerinin incelenmesi ile sistemin yerel yaklaşık modelinin kararlılığı incelenebilir. Bu şekilde elde edilen kararlılık, denge noktası etrafındaki küçük hareketleri ifade eder; daha büyük hareketler için, doğrusal olmayan davranışından farklı davranış gösterebilir. Denge noktaları göz önüne alındığında, doğrusal olmayan helikopter modeli, küçük pertürbasyon yaklaşımına dayanan Jacobian doğrusallaştırması yoluyla doğrusallaştırılır. Genellikle doğrusal zamanla değişmeyen modelin geçerliliği, helikopterin belirli bir çalışma koşulunun yakınında sınırlandırılmıştır. Uçuş zarfının geniş bir bölümünün açıklaması için, farklı çalışma koşulları için birden çok doğrusal model gereklidir. Doğrusallaştırmalar, ilgi uçuşu zarfını temsil eden çeşitli denge değerlerinde gerçekleştirilir. Bizim durumumuzda, doğrusal olmayan helikopter modelleri, çeşitli uçuş koşullarında doğrusal olmayan helikopter modelini yakalayan doğrusal modellerden oluşan bir aileyi oluşturmak için 11 farklı ileri hızda doğrusallaştırma yapılmıştır. (0,2,4, ..., 10 m / s ileri hız). Doğrusallaştırılmış modelin 14 durumu, dört girişi ve on beş çıktısı vardır.

Durum vektörü

$$x = [u_b \quad v_b \quad w_b \quad p \quad q \quad r \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad a_1 \quad b_1]$$

kontrol girdileri

$$u = [u_{coll} \quad u_{lon} \quad u_{lat} \quad u_{ped}]$$

ve model çıktıları

$$y = [u_b \quad v_b \quad w_b \quad p \quad q \quad r \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad a_1 \quad b_1 \quad u_e \quad v_e \quad w_e \quad \lambda_{mr}]$$

Şeklinde tanımlanmıştır.

EK 4 Jakobian Doğrusallaştırma Yöntemi ile Doğrusal Aile Kümesi Elde Edilmesi

Genellikle, kontrol tasarımcıları sistemin doğrusal parametreye bağımlı modelini elde etmek için operasyonel zarf boyunca farklı noktalara doğrusal, zamanla değişmeyen (LTI) bir sistem ailesini kullanırlar. İlgilenilen uçuş zarfını temsil eden bir dizi denge noktasına göre doğrusallaştırılmış bir sistem ailesi kullanılarak doğrusal parametreye bağımlı sistemi oluşturulabilir. Elde edilen model, denge noktalarının kümesi etrafındaki doğrusal olmayan sistemin dinamiklerine yerel bir yaklaşımdır. Bu yöntemin temeli, doğrusal olmayan modelin birinci derece Taylor serisi açılımı kullanmaktır. Denge değerlerinin ve durum-uzay matrislerindeki tüm elemanların ayarlama değişkenlerine bağlı değerleri bulunabilir. Çoğu uygulamada, sistem bir DPB modeli veya doğrusal modeller topluluğu olarak verilmez. Bunun yerine, sistem dinamikleri doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri ile tanımlanır ve sistemin yerel davranışını yaklaşıklemek için denge noktaları bulunur ve bu noktalar etrafında doğrusallaştırma yapılır.

Amaç, doğrusal olmayan modelin birinci dereceden Taylor serisi açılımı ile doğrusal sistem ailesi elde etmek için sistemi her bir çalışma noktası etrafında doğrusallaştırmaktır. Bu aslında doğrusal sistemlerin bir ailesi olup ρ ile parametrelendirilir. Bu sistematik yaklaşım doğrusal sistemlerden oluşan bir aileye doğrudan yol açar; burada interpolasyon basamağı algoritma tarafından halledilir. Aşağıdakiler tarafından tanımlanan doğrusal olmayan bir sistemi düşünün:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

Zamanlama değişkenlerine bağlı doğrusal modeller ailesini elde etmek için farklı çalışma koşullarına göre Jacobian doğrusallaştırması ile doğrusallaştırıldığında

$$\dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)u$$

$$y = C(\rho)x + D(\rho)u$$

elde edilir. Burada

$$[A(\rho)] = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$[B(\rho)] = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$[C(\rho)] = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

$$[D(\rho)] = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{x_{eq}, u_{eq}}$$

ve x_{eq} ve u_{eq} denge koşullarıdır.

Bu Jacobian doğrusallaştırma yaklaşımı olarak bilinir. Denge noktaları kümesine göre birinci dereceden doğrusal yaklaşımlara dayanmaktadır. Kazançla zamanlanan denetleyiciler genellikle çizelgeleme değişkenlerine bağlı doğrusal modeller ailesini kullanarak tasarlanır ve ayarlanır. Bu modeller ailesi doğrusal parametre değişen (DPD) bir model olarak adlandırılır. DPD modeli, (doğrusallaştırılmış) sistem dinamiklerinin zaman, çalışma koşulları veya başka herhangi bir zamanlama değişkeni ile nasıl değiştiğini açıklar.

Doğrusal olmayan sistemin DPD sistem ile yaklaştırılması için en yaygın yaklaşım, doğrusal olmayan sistemin bir çalışma noktası (denge noktaları) etrafında Jacobian doğrusallaştırmasına dayanmaktadır. Bu şekilde, doğrusallaştırılmış sistemlerden oluşan parametreleştirilmiş bir sistem aile kümesi elde edilebilir. Çoğu zaman yalnızca LTI durum uzayı matrisleri bulunabilir ve LTI sistem ailesinin üyeleri arasında interpolasyon gereklidir. Jacobian doğrusallaştırma denge noktalarında doğrusallaştırılabilen herhangi bir doğrusal olmayan sistem için geçerlidir bu yüzden doğrusal olmayan sistemlerin en geniş sınıfı için de geçerlidir. Jacobian DPD yaklaşımı, sistemin denge noktalarına birinci dereceden bir yaklaşımıdır ve genellikle doğrusal olmayan modelin geçici davranışını yakalamak mümkün değildir. Ayrıca, DPD modeli seçilen denge noktalarında değerlendirilen bir LTI sistem ailesini oluşturarak elde edilirse, sistemin düzeltme noktaları arasındaki davranışını modellemek için gerekli interpolasyonlar yaklaşık hatalara neden olabilir.

Bu doğrusal helikopter modeli, doğrusal olmayan matematiksel modelin sayısal pertürbasyonuyla elde edilir. Yerel doğrusal modellerin bir ailesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x + B_i u \\ y &= C_i x \end{aligned}$$

burada A_i , B_i , ve C_i doğrusal olmayan modelin yerel yaklaşımının sistem matrisleridir. Doğrusal olmayan modelin doğrusallaştırılmasından elde edilen doğrusal modeller özel bir durum uzayı yapısına sahiptir ve tüm durumların bazı fiziksel yorumları

vardır. Dolayısıyla parametre bağımlı modelin yapımında bu durum uzayı yapısını korumak zorundayız. Nitekim bazı elementlerin kararlılık türevi olarak adlandırılan özel önemi vardır. Bazı önemli istikrar türevleri şunlardır: Sürüklenme sönümü X_u , Yan Kuvvet Sönümü Y_v , dikey sönümü Z_w , ve Hız kararlılığı M_u . Bazı önemli kararlılık türevlerinin değişimi ŞekilEk.6-7-8-9-10'de gösterilmektedir. Ayrıca, önemli kararlılık türevlerinin değişiminin doğrusal yakın olduğunu göstermek için ŞekilEk.6-7-8-9-10 incelenebilir.

Helikopterin doğrusal parametreye bağımlı modellenmesi sırasında durum uzay yapısının korunduğunu belirtmek önemlidir. Durum-uzay yapısını koruyarak, yerel model sistem matrisleri ile interpolasyon parametresine bağımlı model sistem matrisleri arasındaki farkı en aza indirgeyerek bir interpolasyon parametresine bağımlı model oluşturabilir. İnterpolasyon yapan parametrelere bağlı model, [70] 'te sunulan yaklaşıma dayalı olarak oluşturulabilir. Yerel sistem matrisleri ile interpolasyon parametresine bağımlı model sistem matrisleri arasındaki farkı en aza indirdik

$$\sum_{i=1}^N \left\| \sum_{k=1}^2 \alpha_{i,k} \bar{A}_k - A_i \right\|_F^2$$

burada $\| \cdot \|_F$ Frobenius normunu temsil eder, $\alpha_{i,1} = \frac{N-i}{N-1}$ ve $\alpha_{i,2} = \frac{i-1}{N-1}$.

Bu problem, standart bir doğrusal en küçük kareler optimizasyon problemi olarak çözülebilir. Bu nedenle, yerel doğrusal modeller, bilinmeyen parametrelerin bulunması için optimizasyon probleminin çözümlenmesiyle interpolasyona tabi tutulmaktadır: \bar{A}_k, \bar{B}_k ve \bar{C}_k için $k=1, 2$.

Sistem matrisi için politopik parametrizasyon şu şekilde verilir

$$A_p(\rho) = A_p(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{A}_k$$

burada $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1$, ve \bar{A}_1 ve \bar{A}_2 poltopik modelin kenarlarındaki sistem matrislerini temsil eder.

Ardından basitlik uğruna aşağıdaki basitleştirme yapılabilir:

$$\rho = \alpha_1 \text{ ve } 1 - \rho = \alpha_2$$

Son olarak, aşağıdaki gibi doğrusal parametre bağımlı modeli oluşturabiliriz:

$$A_p(\rho) = \bar{A}_2 + (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) \rho$$

Benzer şekilde, giriş ve çıkış matrisleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$B_p(\rho) = \bar{B}_2 + (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \rho$$

$$C_p(\rho) = \bar{C}_2 + (\bar{C}_1 - \bar{C}_2) \rho$$

Bir doğrusal model ailesi şimdi parametre bağımlı bir model olarak ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &\approx A_p x + B_p u \\ y_p &\approx C_p x\end{aligned}$$

burada $A_p = \bar{A}_2 + (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) \rho$, $B_p = \bar{B}_2 + (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \rho$, ve ρ ileri hızdır. Parametreye bağılı model, birinci dereceden eyleyici dinamikleri eklenerek güçlendirilir; burada eyleyici sistem matrisleri şu şekilde verilebilir: $A_{act} = \text{diag}(-20, -20, -20, -20)$, $B_{act} = \text{diag}(5, 5, 5, 5)$, $C_{act} = \text{diag}(4, 4, 4, 4)$ ve $D_{act} = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$. Dolayısıyla eyleyici dinamikleri ile parametrelere bağılı model şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\rho)x + B_1 d + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} d + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} d + D_{22} u\end{aligned}$$

burada $A(\rho) = \begin{bmatrix} A_p(\rho) & B_p(\rho)C_{act} \\ 0 & A_{act} \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{act} \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D_{11} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 \end{bmatrix}$, $D_{21} = I$, $D_{22} = 0$, ve $x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_{act} \end{bmatrix}$.

Referans modeli sistem modeline dâhil edilebilir. Aşağıdaki referans modelini düşünün:

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + B_r r \\ r_d &= C_r x_r + D_r r\end{aligned}$$

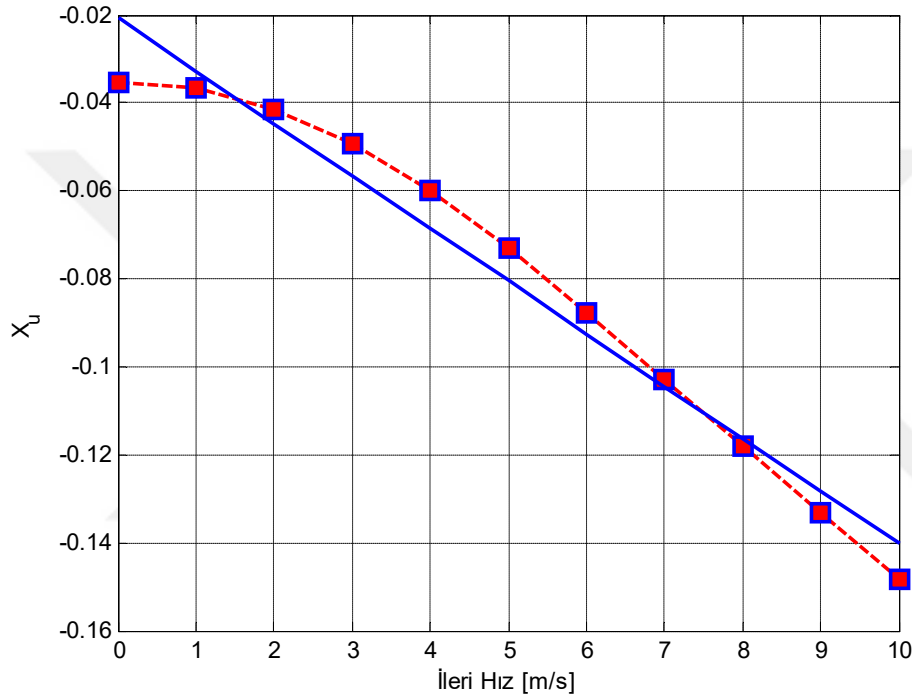
burada r_d i istenen referans sinyalidir. Referans modeli, kapalı döngü sisteminde hava aracının istenen cevap karakterini zorlar. Dolayısıyla, referans modeli, arzu edilen referans sinyalinin izlenmesini sağlayarak örtülü olarak model takip hedeflerini koymuştur. Referans modeli yerel doğrusal modele uyarlanmıştır. Referans model dinamikleri için $A_r = \text{diag}(-4, -4, -4, -4)$, $B_r = \text{diag}(2, 2, 2, 2)$, and $C_r = \text{diag}(2, 2, 2, 2)$ ve $D_r = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$ Burada $A(\rho) = \begin{bmatrix} A_p(\rho) & B_p(\rho)C_{act} & 0 \\ 0 & A_{act} & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{act} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -C_p & 0 & C_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad C_2 = \\ [-C_p & 0 & C_r], \quad D_{21} = D_r, \quad D_{22} = 0, \quad \text{ve } x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_{act} \\ x_r \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

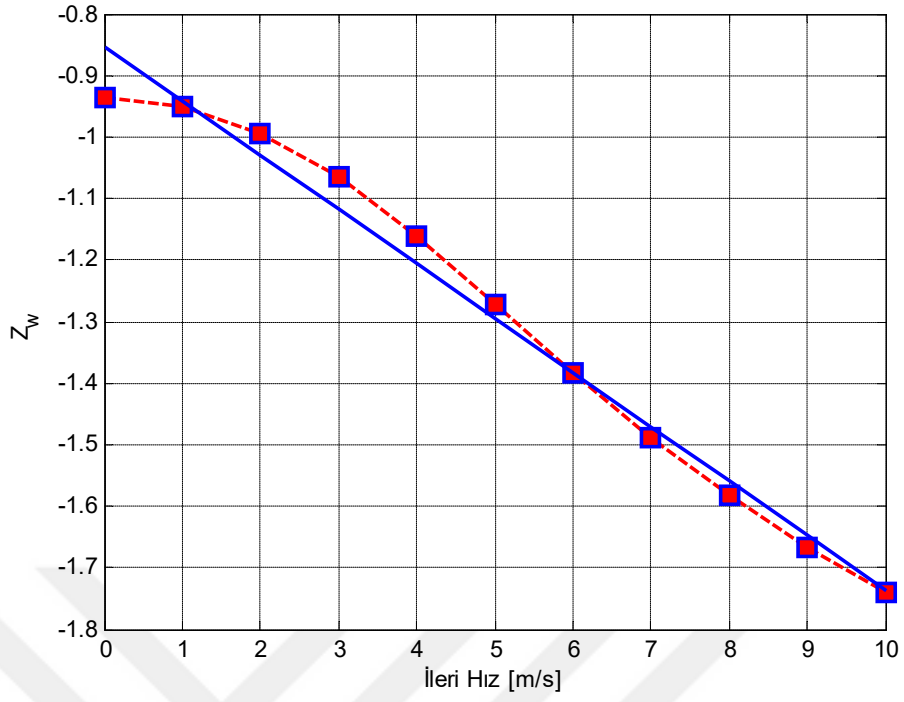
Sistem matrisinin bir doğrusal parametreye bağlı sistem matrisine

dönüştürülebileceğini hatırlarsak, $A(\rho) = \begin{bmatrix} A_p(\rho) & B_p(\rho)C_{act} & 0 \\ 0 & A_{act} & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$, ve giriş

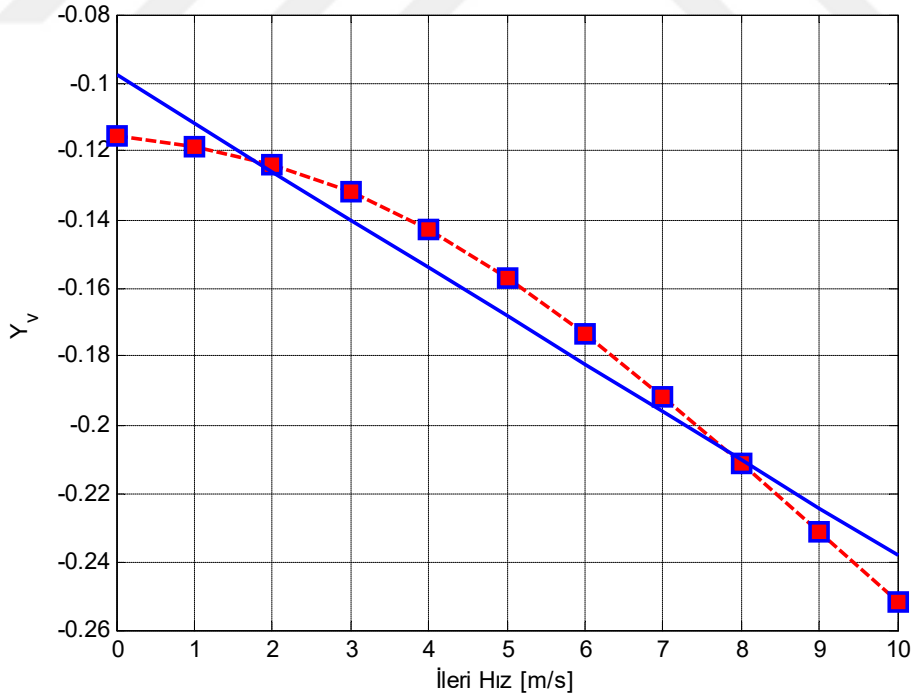
matrisleri B_d ve B_u 'nin ρ parametresinden bağımsız hale getirildiği görülür. Kontrol edilecek çıktılar, durum vektöründen türetilir, bu nedenle C parametreden ρ bağımsızdır. Gerçekten de, eyleyici dinamikleri eklenmesi, giriş matrisindeki parametre bağımlılığını sistem matrisine aktarır.



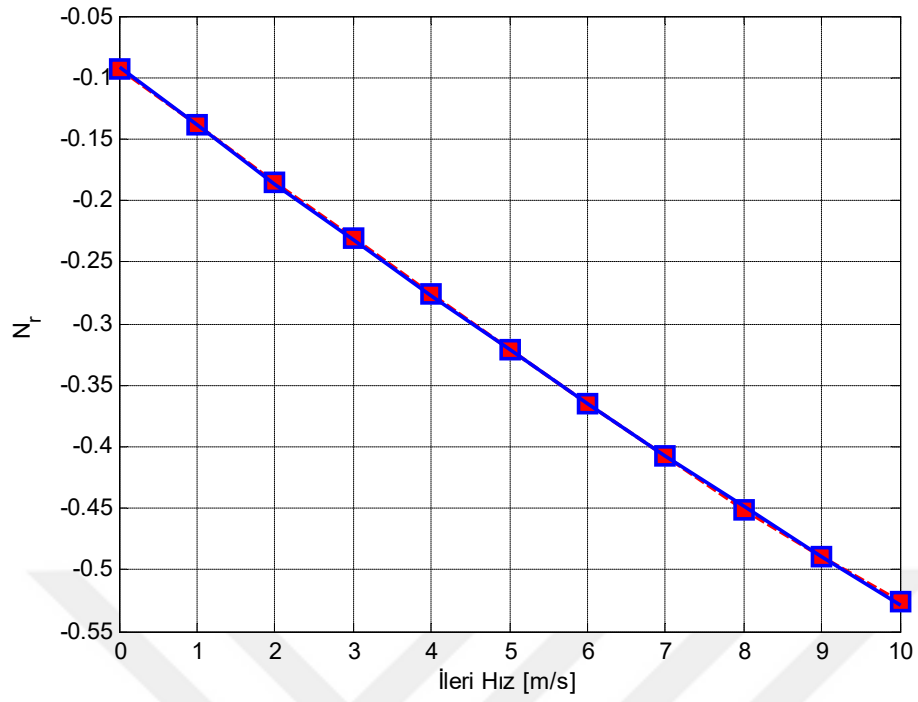
Şekil Ek.6 : Kararlılık türevi X_u değişimi.



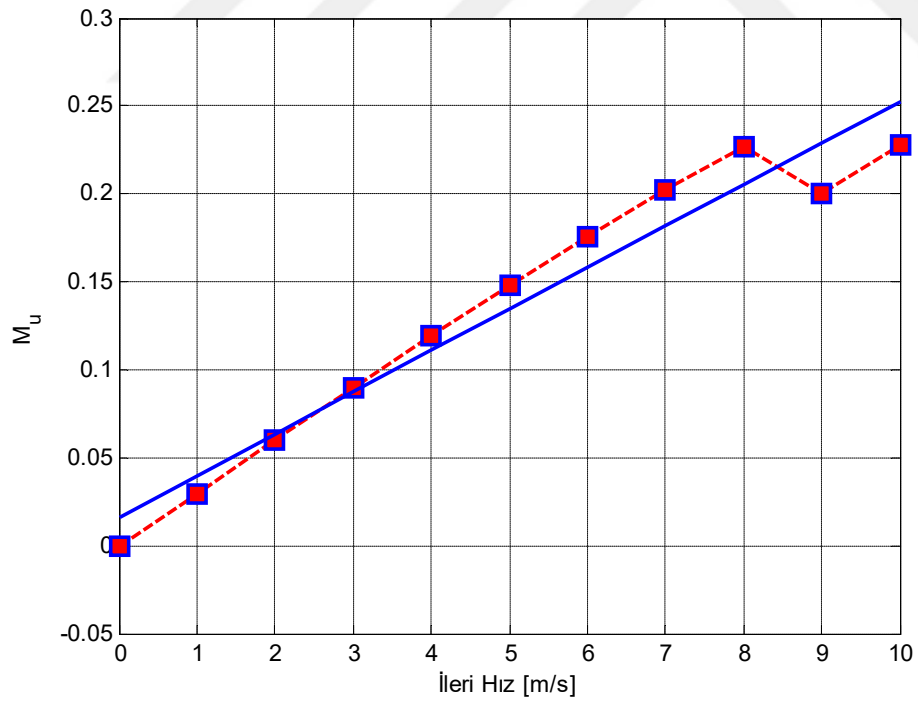
Şekil Ek.7 : Kararlılık türevi Z_w değişimi.



Şekil Ek.8 : Kararlılık türevi Y_v değişimi.



Şekil Ek.9 : Kararlılık türevi N_r değişimi.



Şekil Ek.10 : Kararlılık türevi M_u değişimi.

Örnek olarak askı ve ileri uçuş koşullarındaki sitem matrisleri aşağıda ve verilmiştir.

ÇizelgeEk.1 : Sistem matrisi A askı.

Sistem Matrisi A Askı Durumu											
<i>Askı</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	ϕ	θ	ψ	<i>a</i> ₁	<i>b</i> ₁
<i>u</i>	-0.032	0	0	0	0	0	0	-9.81	0	-9.568	0
<i>v</i>	0.0038	-0.118	0.0059	0	0	0.0025	-9.77	0	0	0	9.568
<i>w</i>	-0.0001	0	-0.935	0	-0.001	0	-0.773	0	0	0	0.0733
<i>p</i>	0.0139	-0.171	0.0633	0	0	0.0127	0	0	0	0	402.43
<i>q</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	213.05	0
<i>r</i>	-.1020	1.251	-.0449	0	0	-.0930	0	0	0	0	0
ϕ	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
θ	0	0	0	0	0.9968	-.0788	0	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0	0.0788	0.9968	0	0	0	0	0
<i>a</i> ₁	.00205	0	0	0	-1	0	0	0	0	-6.944	0
<i>b</i> ₁	0	.00205	0	-1	0	0	0	0	0	0	-6.944

ÇizelgeEk.2 : Girdi matrisi B askı.

Girdi Matrisi B Askı Durumu				
<i>Askı</i>	δ_{coll}	δ_{lon}	δ_{lat}	δ_{ped}
<i>u</i>	-.000225	0	0	0
<i>v</i>	1.0215	-0.118	0.0059	-5.7809
<i>w</i>	-136.2	0	-0.935	0
<i>p</i>	10.935	0	0	-21.068
<i>q</i>	0	-0.171	0.0633	0
<i>r</i>	-152.53	0	0	154.06
ϕ	0	0	0	0
θ	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0
<i>a</i> ₁	0	29.167	0	0
<i>b</i> ₁	0	0	29.167	0

ÇizelgeEk.3 : Sistem matrisi A ileri hız.

Sistem Matrisi A İleri Hız											
10	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	ϕ	θ	ψ	a_1	b_1
<i>u</i>	-1455	.00033	-0.001	0	0.6929	-0.047	0	-9.786	0	-9.715	0
<i>v</i>	-.0241	-.2544	0.0123	-0.692	-.0008	-9.956	-9.773	.04671	0	0	9.715
<i>w</i>	-.2837	0.0014	-1.738	0.047	9.972	0	-.6709	0.6797	0	-.0647	0.0652
<i>p</i>	-.0766	-.3278	0.1195	0	-.0031	0.072	0	0	0	0	404.01
<i>q</i>	0.227	.00012	-.1042	0	-.0632	0	0	0	0	213.89	0
<i>r</i>	0.7335	2.3969	0.3807	0	0.022	-.5265	0	0	0	0	0
ϕ	0	0	0	1	-.0047	-.0694	0	0	0	0	0
θ	0	0	0	0	0.9976	-.0685	0	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0	0.0687	1.0001	0	0	0	0	0
a_1	.00195	0	0.0006	0	-1	0	0	0	0	-6.944	0
b_1	0	.00197	0	-1	0	0	0	0	0	0	-6.944

ÇizelgeEk.4 : Girdi matrisi B ileri hız.

Girdi Matrisi B İleri Hız				
10m/s	δ_{coll}	δ_{lon}	δ_{lat}	δ_{ped}
<i>u</i>	0.72978	0	0	0
<i>v</i>	1.0069	-0.118	0.0059	-5.3392
<i>w</i>	-146.94	0	-0.935	0
<i>p</i>	10.492	0	0	-19.458
<i>q</i>	-1.8996	-0.171	0.0633	0
<i>r</i>	-110.84	0	0	142.29
ϕ	0	0	0	0
θ	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0
a_1	0.24164	29.167	0	0
b_1	-0.00115	0	29.167	0

EK 5 Kontrolcü Sentezi Değişken Değişimi

Kapalı çevrim sistemi açıkça yazacak olursak;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c C_2 & A_c & B_c D_2 \\ C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kapalı çevrim sistem için $\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix}$ analiz denklemini yazacak olursak

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} \mathcal{A}_{cl} & X_{cl} \mathcal{B}_{cl} & \mathcal{C}_{cl}^T \\ \mathcal{B}_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & \mathcal{D}_{cl}^T \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

\mathcal{A}_{cl} kontrolcüye bağımlı olduğu için yukardaki denklem bir DME değildir. K kapalı çevrim sistemde aşağıdaki gibi bir etki yapmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{cl}(K) &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_{cl}(K) &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_2 \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_{cl}(K) &= [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c] \\ \mathcal{D}_{cl}(K) &= D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{aligned}$$

Kapalı çevrim sistem için aşağıdaki doğrusallaştırma dönüşümü tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} X_{cl} \mathcal{A}_{cl} & X_{cl} \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{cl} \mathcal{A}_{cl} & X_{cl} \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Burada $T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}$, $X_{cl} = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & * \end{bmatrix}$ ve $X_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & * \end{bmatrix}$ *onemi olmayan

elemanlardır. $X_{cl} = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & X_{cc} \end{bmatrix}$ matris tamamlama yöntemi ile hesaplanır. $X_{cc} =$

$U^T (X^{-1} - Y)^{-1} U$. Kapalı çevrim sistem için Lyapunov fonksiyonu X_{cl} ise

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & U^T (X^{-1} - Y)^{-1} U \end{bmatrix}$$

Sonrasında faktörizasyon ile U ve V hesaplanır.

$$I - XY = UV^T$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix} X_{cl} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix}$$

Sonrasında;

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix}$$

W yi aşağıdaki gibi tanımlarsak;

$$W := T^T X_{cl} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix}$$

Not olarak $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$ ve X_{cl} arasındaki ilişki verilmiştir.

$$T^T X_{cl} T = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{cl} \mathcal{A}_{cl} & X_{cl} \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^T X_{cl} \mathcal{A}_{cl} T & T^T X_{cl} \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} T & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W \mathcal{A}_{cl} T & W \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} T & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{cl}(K) = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{cl}(K) = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{cl}(K) = [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c]$$

$$\mathcal{D}_{cl}(K) = D_{11} + D_{12} D_c D_{21}$$

$$\begin{bmatrix} W \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} T & W \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_2 \end{bmatrix} \\ [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c] T & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix}$$

Burada $T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}$ ve $W = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_2 \end{bmatrix} \\ [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c] \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix} & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} AY + B_2 D_c C_2 Y + B_2 C_c V^T & A + B_2 D_c C_2 & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ XAY + XB_2 D_c C_2 Y + UB_c C_2 Y + XB_2 C_c V^T + UA_c V^T & XA + XB_2 D_c C_2 + UB_c C_2 & XB_1 + XB_2 D_c D_{21} + UB_c D_2 \\ YC_1 + YD_{12} D_c C_2 + VD_{12} C_c & C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix}$$

Kontrolcüye bağımlı kısımları çıkartacak olursak

$$= \begin{bmatrix} AY & A & B_1 \\ XAY & XA & XB_1 \\ YC_1 & C_1 & D_{11} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} B_2 D_c C_2 Y + B_2 C_c V^T & B_2 D_c C_2 & B_2 D_c D_{21} \\ XB_2 D_c C_2 Y + UB_c C_2 Y + XB_2 C_c V^T + UA_c V^T & X B_2 D_c C_2 + UB_c C_2 & XB_2 D_c D_{21} + UB_c D_2 \\ YD_{12} D_c C_2 + VD_{12} C_c & D_{12} D_c C_2 & D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix}$$

Yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} AY & A & B_1 \\ XAY & XA & XB_1 \\ YC_1 & C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} U & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ C_2 Y & I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} AY & A & B_1 \\ 0 & XA & XB_1 \\ YC_1 & C_1 & D_{11} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} U & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ C_2 Y & I \end{bmatrix} \right\} \\
&\quad + \begin{bmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & D_{21} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki tanım yapılırsa

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K & L \\ N & N \end{bmatrix} &:= \left\{ \begin{bmatrix} U & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ C_2 Y & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} AY & A & B_1 \\ 0 & XA & XB_1 \\ YC_1 & C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & L \\ N & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} AY & A & B_1 \\ 0 & XA & XB_1 \\ YC_1 & C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 M & B_2 N C_2 & B_2 N D_{21} \\ K & L C_2 & L D_{21} \\ D_{12} K & D_{12} N & D_{12} N D_{21} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} T^T X_{cl} \mathcal{A}_{cl} T & T^T X_{cl} \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} T & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} AY + B_2 M & A + B_2 N C_2 & B_1 + B_2 N D_{21} \\ K & XA + L C_2 & XB_1 + L D_{21} \\ YC_1 + D_{12} K & C_1 + D_{12} N & D_{12} N D_{21} \end{bmatrix} \\
&=: \begin{bmatrix} \mathbf{A}(v) & \mathbf{B}(v) \\ \mathbf{C}(v) & \mathbf{D}(v) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Hatırlayalım

$$\begin{bmatrix} X_{cl} \mathcal{A}_{cl} & X_{cl} \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{cl} \mathcal{A}_{cl} & X_{cl} \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Bu şekil değiştirme sonucunda kapalı çevrim sistem için analiz denkleminde her şey doğrusal olarak görünmektedir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(v) + \mathbf{A}^T(v) & \mathbf{B}(v) & \mathbf{C}^T(v) \\ \mathbf{B}^T(v) & -\gamma I & \mathbf{D}^T(v) \\ \mathbf{C}(v) & \mathbf{D}(v) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{Yani } \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} \mathcal{A}_{cl} & X_{cl} \mathcal{B}_{cl} & \mathcal{C}_{cl}^T \\ \mathcal{B}_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & \mathcal{D}_{cl}^T \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \text{ çözmek yerine}$$

$$\begin{bmatrix} AY + B_2 M + YA^T + M^T B_2^T & A + B_2 N C_2 + K^T & B_1 + B_2 N D_{21} & C_1^T Y + K^T D_{12}^T \\ K + A^T + C_2^T N^T B_2^T & XA + L C_2 + A^T X + C_2^T L^T & XB_1 + L D_{21} & C_1^T + N^T D_{12}^T \\ B_1^T + D_{21}^T N^T B_2^T & B_1^T X + D_{21}^T L & -\gamma I & D_{21}^T N D_{12}^T \\ YC_1 + D_{12} K & C_1 + D_{12} N & D_{12} N D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Çözülür. DME çözüldükten sonra geri dönüşüm için aşağıdaki prosedür izlenebilir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K - XAY & L \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ C_2Y & I \end{bmatrix}^{-1} \\
\begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} &:= \left\{ \begin{bmatrix} U & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ C_2Y & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
\begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} &:= \left\{ \begin{bmatrix} U & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_cV^T + B_cC_2Y & B_c \\ C_cV^T + D_cC_2Y & D_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
\begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} &:= \left\{ \begin{bmatrix} UA_cV^T + UB_cC_2Y + XB_2C_cV^T + XB_2D_cC_2Y & UB_c + XB_2D_c \\ C_cV^T + D_cC_2Y & D_c \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
\begin{bmatrix} K & L \\ N & N \end{bmatrix} & \\
&= \begin{bmatrix} UA_cV^T + UB_cC_2Y + XB_2C_cV^T + XB_2D_cC_2Y + XAY & UB_c + XB_2D_c \\ C_cV^T + D_cC_2Y & D_c \end{bmatrix} \\
&\quad D_c = N
\end{aligned}$$

Not olarak $V = Y - X^{-1}$ ve $X = Z - Y^{-1}$

$$\begin{aligned}
M &= C_cV^T + NC_2Y \\
C_c &= MV^{-T} - NC_2YV^{-T} \\
L &= UB_c + XB_2N \\
B_c &= U^{-1}L - U^{-1}XB_2N \\
B_c &= U^{-1}(L - XB_2N)
\end{aligned}$$

$$K = UA_cV^T + UB_cC_2Y + XB_2C_cV^T + XB_2D_cC_2Y + XAY$$

$$UA_cV^T = K - XAY - UB_cC_2Y + XB_2C_cV^T + XB_2D_cC_2Y$$

$$A_c = U^{-1}(K - XAY - UB_cC_2Y + XB_2C_cV^T + XB_2D_cC_2Y)V^{-T}$$

Kontrolcünün sentezi tamamlanır. [50]

EK 5 Kontrolcü Sentezi Parametre Eleme Yöntemi

Kapalı çevrim sistemi açıkça yeniden yazacak olursak;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c C_2 & A_c & B_c D_2 \\ C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} \end{bmatrix} =: U_A + U_B K U_C$$

Kapalı çevrim sistem için $\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \end{bmatrix}$, analiz denklemini farklı bir formda yazacak olursak. Shur tamamlayıcı ile aşağıdaki denklem elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & I/\gamma & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{cl} & \mathcal{B}_{cl} \\ \mathcal{C}_{cl} & \mathcal{D}_{cl} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Açıkça yazarsak,

$$\begin{bmatrix} U_A + U_B K U_C \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & I/\gamma & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A + U_B K U_C \\ I \end{bmatrix} < 0$$

$U_C := \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} \end{bmatrix}$, ile önden ve arkadan çarpım sonunda kontrolcüye bağımlılıktan kurtulabiliriz.

$$*^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & I/\gamma & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I \end{bmatrix} \Phi < 0$$

Burada $\Phi := \ker(U_C)$.

$$*^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X_{11} & X_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{21} & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I/\gamma & 0 & 0 & 0 \\ X_{11} & X_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Phi < 0$$

Sıfır sütun ve satırları silerek elimizde kalanlar

$$*^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & X_{11} & 0 \\ 0 & I/\gamma & 0 & 0 \\ X_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Phi < 0$$

Aynı işlemleri ikincil denklemler içinde yaparsak.

$$*^T \Pi \begin{bmatrix} U_A + U_B K U_C \\ I \end{bmatrix} < 0$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & I/\gamma & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$*^T \Pi^{-1} \begin{bmatrix} -U_A^T - U_C^T K^T U_B^T \\ I \end{bmatrix} > 0$$

$U_B := \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix}$, ile önden ve arkadan çarpım sonunda kontrolcüye bağımlılıktan

kurtulabiliriz.

$$*^T \Pi^{-1} \begin{bmatrix} -U_A^T \\ I \end{bmatrix} \Phi > 0$$

$$\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\gamma \end{bmatrix}$$

$$*^T \begin{bmatrix} 0 & Y & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^T & 0 & -C_1^T \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_1^T & 0 & -D_{11}^T \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Psi > 0$$

$$\Psi := \ker \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \\ 0 & D_{12} \end{pmatrix}$$

$$*^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Y_{11} & Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{21} & Y_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -I/\gamma & 0 & 0 & 0 \\ Y_{11} & Y_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^T & 0 & -C_1^T \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_1^T & 0 & -D_{11}^T \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Psi > 0$$

Sıfır sütun ve satırları silersek elimizde kalanlar

$$*^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_{11} & 0 \\ 0 & -I/\gamma & 0 & 0 \\ Y_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^T & -C_1^T \\ -B_1^T & -D_{11}^T \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Psi > 0$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = Y^{-1}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = X^{-1}$$

Matris Tamamlama Lemması kullanılarak Y hesaplanır.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Burada bilinenler sadece Y_{11} ve X_{11}

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_c \\ X_c & X_{cc} \end{bmatrix}^{-1}$$

Shur tamamlayıcı ile matris tamamlanabilir.

$$(X_{11} - X_c X_{cc}^{-1} X_c)^{-1} = Y_{11}$$

Kolaylık açısından $X_c = I$ seçilir ve X_{cc} hesaplanır.

$$X_{11} - X_{cc}^{-1} = Y_{11}^{-1}$$

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = X_{cc}^{-1}$$

$$X_{cc} = (X_{11} - Y_{11}^{-1})^{-1}$$

Sonrasında matris aşağıdaki gibi tamamlanır.

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & I \\ I & (X_{11} - Y_{11}^{-1})^{-1} \end{bmatrix}$$

Artık X hesaplandığına göre kontrolcüyü gerçeklemek için

$$\begin{bmatrix} U_A + U_B K U_C \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & I/\gamma & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A + U_B K U_C \\ I \end{bmatrix} < 0$$

Denklemleri kullanılır. Bazı ara tanımlar yapılarak

$$\begin{bmatrix} U_A + U_B K U_C \\ I \end{bmatrix}^T \Upsilon \begin{bmatrix} U_A + U_B K U_C \\ I \end{bmatrix} < 0$$

$$\Upsilon := \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & I/\gamma & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K U_C \\ I \end{bmatrix}^T \Gamma \begin{bmatrix} K U_C \\ I \end{bmatrix} < 0$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} U_B & U_A \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Upsilon \begin{bmatrix} U_B & U_A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

İkincil denklemi yeniden yazarsak,

$$*^T \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -U_C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K^T \end{bmatrix} > 0$$

Λ aşağıdaki tanımlanır

$$\Lambda := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -U_c^T \end{bmatrix}^T \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -U_c^T \end{bmatrix}$$

Denklem çözüldüğünde

$$\begin{bmatrix} I \\ K^T \end{bmatrix}^T \Lambda \begin{bmatrix} I \\ K^T \end{bmatrix} > 0$$

K elde edilebilir. Λ 'nin pozitif öz vektörleri tekrar dizildiğinde

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}^T \Lambda \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$K = (V_2 V_1^{-1})^T$$

Kontrolcü K bulunur. Durum uzayındaki gerçekteleme yapılırken

$$K =: \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

hatırlanmalıdır [50].

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : İsmail Hakkı ŞAHİN
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 13/03/1985 Amasya
E-posta : ihakisahin@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2008, Boğaziçi Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü
- **Yükseklisans** : 2010, Boğaziçi Üniversitesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2012-	TAI (TUSAŞ)	Tasarım Mühendisi
2011-2012	Deniz Harp Okulu	Yedek Subay
2010-2011	Eindhoven Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2008-2010	Boğaziçi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Şahin, İ. H.** and Kasnakoğlu C., A stability-guaranteed smooth-scheduled MIMO robust emergency autopilot for a lateral surface jammed UAV, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering 0(0) 1–14 2017. DOI: 10.1177/0954410017714291
- **Şahin, İ. H.** and Kasnakoğlu C., An Affine Parameter Dependent Controller of an Helicopter for Various Forward Velocity Conditions, Applied Mechanics and Materials Vols. 789-790 (2015) pp 1067-1072, 2015 DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.789-790.1067

- **Şahin, İ. H.** and Kasnakoğlu C., An Affine Parameter Dependent Controller for an Autonomous Helicopter at Different Flight Conditions, IFAC Workshop on Advanced Control and Navigation for Autonomous Aerospace Vehicles, June-2015, Seville, Spain.
- **Şahin, İ. H.** and Kasnakoğlu C., An Affine Parameter Dependent Controller of an Helicopter for Various Forward Velocity, International Conference on Automatic Control, April-2015 Ankara, Turkey.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Heertjes M. F., **Şahin, İ. H.**, Nathan van de Wouw, and Heemels W. P. M. H., Switching Control in Vibration Isolation Systems, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 21, No. 3, May 2013
DOI: 10.1109/TCST.2012.2188294
- Onur C., Sarsılmaz S. B., Türe U. , **Şahin, İ. H.**, Zengin U., Development of a Computational Model of Pilot Manual Control and its Application on Mission-Task-Element Evaluation of a Limited Authority Helicopter, American Helicopter Society Forum 72 May 2016
- Türe U., Sarsılmaz S. B., **Şahin, İ. H.**, Zengin U., Optimization of Flight Control System and Handling Quality Evaluation of a Limited Authority Helicopter, American Helicopter Society Forum 71 May 2015.