

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR AYRIK AV-AVCI MODELİNİN KARARLILIK VE ÇATALLANMA
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökçe SUCU

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Aralık 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

.....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142111005 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Gökçe SUCU**'nun ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "**BİR AYRIK AV-AVCI MODELİNİN KARARLILIK VE ÇATALLANMA ANALİZİ**" başlıklı tezi **19.12.2016** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Hüseyin MERDAN**
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Oktay DUMAN(Başkan)**
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Doç. Dr. Ayşe Feza GÜVENİLİR
Ankara Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Gökçe SUCU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR AYRIK AV-AVCI MODELİNİN KARARLILIK VE ÇATALLANMA ANALİZİ

Gökçe SUCU

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Tarih: Aralık 2016

Bu tezde, bir av-avcı modeline Euler metodu uygulanarak elde edilen ayırık sistemin dinamik yapısı analiz edilmiştir. Ele alınan bu modelde av ve avcı olmak üzere birbirleriyle etkileşim içerisinde olan iki popülasyon bulunmaktadır. Bu popülasyonlar lineer olmayan dinamik sistemler yaklaşımıyla modellenmiş olup popülasyonlardaki zamana göre değişim ise diferensiyel denklemler kullanılarak ifade edilmiştir. Tezde ilk olarak model Euler metodu yardımıyla ayrıklaştırılarak fark denklemleri sistemi haline getirilmiştir. Takiben elde edilen ayırık sistemin pozitif denge noktasının varlığı ve tekliği gösterilip bu noktanın kararlı olabilmesi için gerekli şartlar belirlenmiştir. Daha sonra yine bu pozitif denge noktasında flip çatallanma görülebilmesi için gereken koşullar bulunmuş ve bu koşullar altında denge noktasındaki flip çatallanmanın varlığı Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi (Center Manifold Theorem) yardımıyla ispat edilmiştir. Son olarak da elde edilen analitik sonuçlar, nümerik çalışmalar ile desteklenerek biyolojik açıdan yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dinamik sistemler, Fark denklemleri, Kararlılık analizi, Flip çatallanma, Matematiksel biyoloji, Matematiksel modelleme

ABSTRACT

Master of Science

STABILITY AND BIFURCATION ANALYSES OF A DISCRETE PREY-PREDATOR SYSTEM

Gökçe SUCU

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Date: December 2016

In this thesis, the dynamic structure of the discrete system obtained by applying the Euler method to a continuous prey-predator model is analyzed. In this model, there are two populations interacting with each other, namely prey and predator. These populations are modeled by nonlinear dynamic systems approach and the change in population with respect to time is expressed using differential equations. Firstly, the model is transformed into a system of difference equations by discretizing with the help of Euler method. Subsequently, the unity and the presence of the positive equilibrium point of the discrete system are determined and the conditions are set so that this point can be stable. Then the conditions for having flip bifurcation at this positive equilibrium point are established and the existence of the flip bifurcation under these conditions is proved with the help of the Center Manifold Theorem. Finally, the analytical results obtained are interpreted biologically in support of numerical studies.

Keywords: Dynamical systems, Difference equations, Stability analysis, Flip bifurcation, Mathematical biology, Mathematical modelling.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Hüseyin MERDAN'a, kıymetli tecrübeleri için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine, okula keyifle gelmemi sağlayan asistan arkadaşlarıma ve burs verdiği için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teşekkür ederim.

Bana hayatım boyunca sonsuz maddi ve manevi desteklerini sunan, varlıklarını ve sevgilerini daima kalbimde hissettiğim, bilim ve kitap sevgimi borçlu olduğum, çalışmalarımnda çok büyük katkıları olan, hayattaki en değerli varlıklarım; canım babam Mehmet Salih SUCU ile birtanecik annem Hülya SUCU'ya; ailemin olmadığı zamanlarda bana onların eksikliklerini hissettirmeyen, en kötü zamanlarımda adım atmam konusunda beni daima cesaretlendiren, en büyük maddi ve manevi destekçilerimden olan sevgili halam Nermin SUCU BİNZET ile değerli eniştem Abidin Celal BİNZET'e ve bu süreçte beni yalnız bırakmayan en yakın arkadaşım olan Deniz KESİCİ'ye destekleri için çok çok teşekkür ederim.

Ve teşekkürlerin en özelini; bu yola başlamamda emeklerinin çok büyük olduğuna inandığım, henüz çok küçükken matematik sevgisini oya işler gibi ruhuma işleyen ve bu yolda liyakatli bir şekilde ilerlemem için beni motive eden matematik öğretmenim ve aynı zamanda teyzem olan Ayşe AK ÖZYAŞAR'a sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
RESİM LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. DİNAMİK SİSTEMLER	3
2.1 Genel Bakış	3
2.2 Tarihçe	4
2.3 Fark Denklemleri ve Sistemleri	7
2.3.1 Tanım ve notasyon	7
2.3.2 Fark denklemlerinin çözümü	11
2.3.3 Fark denklemlerinin dinamik yapısı	14
2.3.4 Birinci mertebeden lineer sistemler	16
2.3.5 Birinci mertebeden lineer olmayan denklemler ve sistemler	25
2.3.6 Çatallanma Teorisi	30
2.3.7 Merkez Çokkatlı Uzak Teoremi	37
2.3.8 Kararlılık ve Flip Gözlemlenebilme Lemması	44
3. MODEL	51
3.1 Ayrıklaştırma	51
3.2 Pozitif Denge Noktasının Varlığı	52
3.3 Denge Noktasının Karakteristik Polinomu	53
3.4 Kararlılık ve Çatallanma Koşulları	54
4. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR	69
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	75
KAYNAKLAR	76
ÖZGEÇMİŞ	79

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: Durum ve parametre uzayı	3
Şekil 2.2: Kararlı denge noktası çeşitleri	28
Şekil 2.3: Saddle Node çatallanma diyagramı	32
Şekil 2.4: Transkritik çatallanma diyagramı	32
Şekil 2.5: Pitchfork çatallanma diyagramı	33
Şekil 2.6: Flip çatallanma diyagramı	33
Şekil 2.7: $f^2(x, r) = x$ denkleminin r değerlerine göre kökleri	36
Şekil 4.1: $\delta = 0, 2050$ olarak seçilirse $(N^*, P^*) = (75, 15)$ denge noktası kararlı olur. Böylece başlangıçta ortamda bulunan $P(0) = 17$ avcı sayısı zamanla 15 noktasına yaklaşır ve bir süre sonra bu noktada dengede kalır.	70
Şekil 4.2: $\delta = 0, 2050$ olarak seçilirse $(N^*, P^*) = (75, 15)$ denge noktası kararlı olur. Böylece başlangıçta ortamda bulunan av sayısı $N(0) = 77$ zamanla 75 noktasına yaklaşır ve bir süre sonra bu noktada dengede kalır.	71
Şekil 4.3: $\delta = 0, 2050$ iken (4.2) sisteminin faz portresi	72
Şekil 4.4: δ parametresi $0, 1 \leq \delta \leq 0, 35$ aralığında değişirken av popülasyonunun çatallanma diyagramı	73
Şekil 4.5: δ parametresi $0, 1 \leq \delta \leq 0, 35$ aralığında değişirken avcı popülasyonunun dinamik yapısı da değişir. $\delta < \delta_c$ iken sistemde tek denge noktası mevcuttur ve bu denge noktası kararlıdır. Bu yüzden başlangıçta ortamda bulunan avcı sayısı ne olursa olsun 15 sayısına yaklaşır ve dengede kalır. $\delta > \delta_c$ iken ise sistemdeki tek denge noktası kararsızdır ve sistemin kararlı n-döngüsü mevcuttur.	74

RESİM LİSTESİ

Resim 2.1: Isaac Newton (1643-1727)	5
Resim 2.2: Henry Poincaré (1854-1912)	6



1. GİRİŞ

Lotka-Volterra denklemleri olarak da bilinen ve diferensiyel denklemler kullanılarak modellenen av-avcı sistemleri; birbirleriyle etkileşimde bulunan biyolojik popülasyonların dinamiğini incelemeye önemli rol oynarlar. Bu yüzden av-avcı modellerinin dinamik yapısı, modelin ilk ortaya atıldığı 1925 yılından itibaren birçok araştırmacı tarafından analiz edilmiş ve bu analizlerde Hopf çatallanma, limit döngüsü ve kaotik davranış gibi yapılar gözlemlenmiştir. Son yıllarda ise fark denklemleri ile ifade edilen ayrık popülasyon modellerine karşı artan ilgi av-avcı sistemleri üzerine yapılan çalışmalara da yansımıştır. Boshan ve Jiejie [3] Euler metodu ile ayrıklaştırdıkları bir oran-bağımlı av-avcı modelinin dinamik yapısını fark denklemleri için Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi yardımıyla incelerken; Zhang ve Boshan [16] ayrık zamanlı av-avcı biyolojik ekonomik sistemiyle ilgili araştırmalarda bulunmuşlardır. Elabbasy, Elsadany ve Zhang [6] Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi'ni ve çatallanma teorisini kullanarak ayrık ve indirgenmiş Lorenz sisteminde kararlı bir denge noktasının varlığını ispat etmişlerdir. Ghaziani, Govaerts ve Sonck [8] fonksiyonel Holling tipinde ayrık bir sistemin mevcut olan 3 denge noktasının kararlı olabilmesi için gereken koşulları belirlemişlerdir. Bu tarz analizlerle ise ayrık av-avcı sistemlerinin sürekli av-avcı sistemlerinden çok daha zengin dinamik davranışlar sergileyebileceği gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada da daha önceden dinamiği analiz edilmiş olan sürekli bir av-avcı modelinin ayrıklaştırılmış hali incelenerek sistemde mevcut olan tek pozitif denge noktasının kararlı olabilmesi ve bu noktada flip çatallanmanın gözlemlenebilmesi için gereken koşullar belirlenecektir. Bu analizler yapılırken çatallanma teorisinden [9, 15] ve Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi'nden [4, 15] yararlanılmıştır. Problemin analiz edilebilmesi için gereken ön bilgilere "DİNAMİK SİSTEMLER" başlığında değinilecektir [1, 2, 7, 10, 12, 14]. "MODEL" kısmında ise çalışılan problem ile ilgili bilgiler verilecek ve nasıl analiz edildiğiyle ilgili çözümlerde bulunulacaktır. "NÜMERİK

SİMÜLASYONLAR" kısmında çalışılan problemde elde edilen teorik sonuçların doğruluğu nümerik çalışmalarla desteklenecektir. "SONUÇ ve ÖNERİ" başlığında bu tez çalışmasıyla ilgili kritikler yapılacaktır.

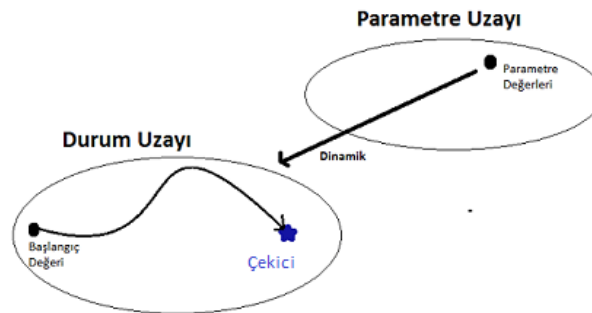


2. DİNAMİK SİSTEMLER

2.1 Genel Bakış

Zamana, konuma veya başka etkilere göre dinamiği değişen sistemlere **dinamik sistemler**; bu sistemlerin geçmişteki, şimdiki ve gelecekteki durumunu analiz eden disiplinlerarası çalışma alanına ise **dinamik** denir. Dinamik biliminde temel amaç sistemi değişkenler ile matematiksel olarak ifade ederek analiz etmek ve bu analizler üzerinden sistemin gelecekteki durumu hakkında tahminlerde bulunmaktır. Ayrıca dinamik fizikte, kimyada, biyolojide, mühendislikte ve ekonomide birçok uygulaması olan ve günümüzdeki çoğu teknolojinin ortaya çıkmasında etkin rol oynayan bir çalışma alanıdır [14].

Bir dinamik sistem genel olarak durum uzayı ve parametre uzayından oluşur. Durum uzayı sistemin geometrik olarak hareketini gösterirken parametre uzayı ise sistemin durum uzayını tanımlayan değişkenlerden ve bu değişkenlerin zamanla nasıl değiştiğini gösteren kurallardan oluşur. Eğer sistem değişkenleri ayrık bir aralıkta tanımlı ise ayrık sistem, sürekli aralıkta tanımlı ise sürekli sistem adını alır. Tanımlanan kurallar deney ve gözlemlerle elde edilmiş olup zamana ve durum uzayındaki değişkenlere bağlıdır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: Durum ve parametre uzayı

Bir dinamik sistem bir noktada dengede olabilir, salınım yapabilir veya kaotik davranış gibi çok daha karmaşık davranışlar gösterebilir. Dinamik analizi ile bu davranışların matematiksel analizi yapılır ve bundan yararlanılarak sistemin uzun vadedeki davranışı tahmin edilmeye çalışılır.

Bir dinamik sisteminin durumunu yani hareketini analiz edebilmek için öncelikle sistemin özelliklerini taşıyan deterministik bir matematiksel modelinin oluşturulması gerekmektedir. Bunun için bir veya birden fazla denklemler kullanılır. Böylece eğer mümkünse bu denklemleri sağlayan açık bir çözüm bulunarak; aksi halde denklemleri çözmeden özel metotlarla geometrik olarak yaklaşılarak analiz yapılır.

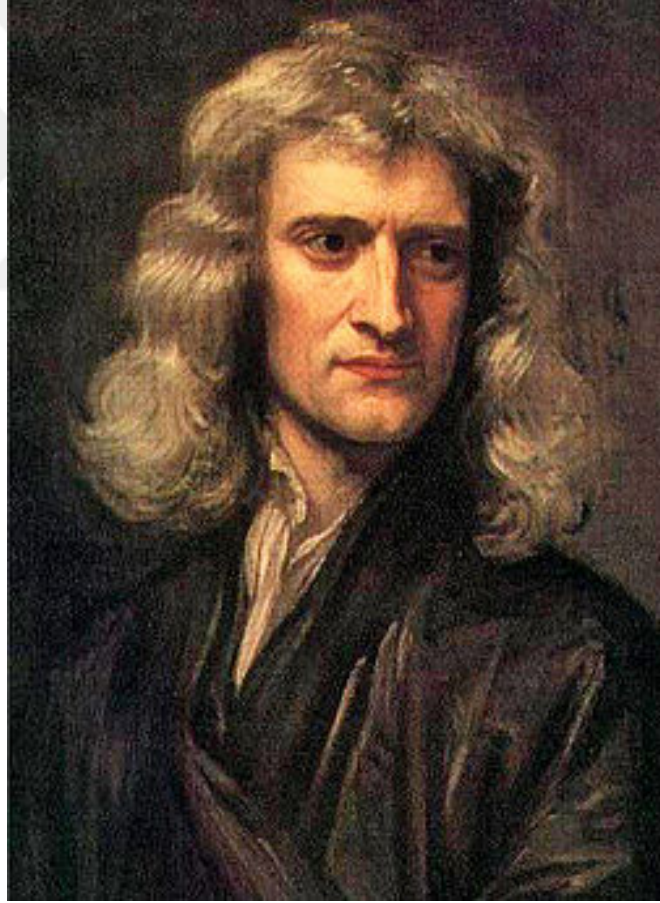
Dinamik sistemler genellikle **diferensiyel denklemler (adi ve kısmi türevli denklemler)** veya **fark denklemleri** kullanılarak modellenir. Böylece matematiksel ifadeye dönüştürülen sistemin dinamiği analiz edilerek hareketi hakkında bilgiler elde edilebilir. Sürekli aralıklarda dinamiği değişen sistemleri modellemek için diferensiyel denklemler kullanılırken, ayrık aralıklarda dinamiği değişen sistemleri modellemek için ise fark denklemleri kullanılır.

2.2 Tarihçe

Dinamiğin temelleri Isaac Newton tarafından 1600'lü yıllarda gezegenlerin hareketini açıklamak için diferensiyel denklemleri keşfetmesiyle beraber atılmıştır (Resim 2.1). Newton bu yıllarda iki gezegenin hareketini diferensiyel denklemleri kullanarak modellemiş ve analiz etmiştir. Böylece Newton bilim dünyasına farklı bir bakış açısı kazandırarak, fiziksel sistemlerin hareketinin deterministik denklemlerle modellenebileceğini ve gelecekteki durumunun tahmin edilebileceğini göstermiştir. Bu bakış açısı ile diferensiyel denklemler kullanılarak diğer basit fiziksel olaylar da modellenmeye başlanmış ve bu modellerin dinamiği denklemleri sağlayan açık çözümler bulunarak analiz edilmiştir. Bu analizlerin sonucunda ise çözümü sınırlı bir uzay içerisinde kalan sistemlerin hareketinin bir noktada dengede kaldığı (sürtünme kuvveti gibi enerji kaybına sebebiyet veren etmenlerin olduğu sistemler) veya periyodik salınımlar yaptığı

(ay ve dünya gibi ikili gezegen sistemleri, sürtünmesiz basit sarkaç sistemi) iki basit davranış gözlemlenmiştir. 19. yy sonlarına kadar ise 3-cisim problemi gibi kompleks davranış gösteren sistemler (periyodik olmayan ancak sınırlı bir uzay içerisinde kalan) açık çözümleri bulunamadığından dolayı analiz edilememiştir.

19.yy'ın sonlarına doğru ise Henry Poincaré bir modelin açık çözümünü bulmak yerine probleme geometrik olarak yaklaşmayı denemiştir (Resim 2.2). Böylece 3-cisim problemini analiz ederek iki basit hareket dışında yeni bir karmaşık davranış gözlemiştir. Bu karmaşık davranışı matematiksel olarak açıklayamasa da bazı deterministik sistemlerin başlangıç değere hassas, periyodik olmayan, kaotik davranış gösterebileceğini öngörmüştür. 20.yy'ın ilk çeyreğinde Henry Poincaré'nin geometrik yaklaşımı



Resim 2.1: Isaac Newton (1643-1727)

metodu ile lineer olmayan salınımlar analiz edilmiş ve bu analizlerin mühendislik alanına uygulanmasıyla radyo, radar ve lazer gibi teknolojik gelişmeler ortaya çıkmıştır. Ayrıca bu dönemlerde Van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson ve

Smale gibi öncü bilim insanları dinamik analizlerle ilgili önemli metotlar geliştirmişlerdir. Birkhoff ise Poincaré'nin geometrik yaklaşımını genişleterek klasik mekaniğe uyarlamıştır.

1930'lu yıllarda biyolojik popülasyonları modellemek için fark denklemleri kullanılmaya başlanmış ve 1954 yılına kadar bu tarz modellerde basit salınımlar gözlemlenmiştir. 1954 yılında ise Williem Ricker fark denklemlerini kullanarak modellediği balık popülasyonu sisteminde çok karmaşık davranışlar gözlemleyerek dikkatleri fark denklemleriyle modellenmiş sistemlere çekmiştir. 1950 yıllarında hızlı hesap yapabilen bil-



Resim 2.2: Henry Poincaré (1854-1912)

gisayarların keşfiyle beraber dinamik alanında çok önemli gelişmeler yaşanmıştır. Bu bilgisayarlar ile daha önce analiz edilmesi imkansız olan lineer olmayan sistemler çalışılmıştır. Bunlardan en dikkat çekenleri Edward Lorenz'in 1963 yılında bir bilgisayar programı yardımıyla havanın hareketi ile ilgili yapmış olduğu devrim niteliğindeki çalışmalarıdır. Bu çalışmalarla Lorenz, Poincaré'nin 3-cisim probleminde öngörmüş olduğu kaotik davranışı matematiksel temellere dayandırmıştır.

Ruelle ve Takens 1971 yılında dinamiksel metotları akışkanlara uygulayarak türbülans hareketiyle ilgili önemli teoriler ortaya atmışlardır. Birkaç yıl sonra ise May fark denklemleriyle modellenen popülasyonların dinamiğindeki kaotik yapıyı keşfetmiştir. Mandelbord ise fraktalları ön plana çıkarmış ve fraktalların bilgisayarda simülasyonunu yaparak başka alanlara nasıl uygulanacağıyla ilgili metotlar üretmiştir. Yine bu dönemlerde Winfree geometrik metotlar üreterek bu metotları matematiksel biyolojiye uygulamış ve kalp ritminin hareketini analiz etmiştir.

1980 yılından bu yana ise bilim insanları kaos, fraktal ve salınımlarla ilgili teorik çalışmalar yapıp bunları kimya, biyoloji, fizik, ekonomi, mühendislik gibi alanlara uygulamaktadırlar.

2.3 Fark Denklemleri ve Sistemleri

2.3.1 Tanım ve notasyon

Bir x_0 sayısının reel değerli f fonksiyonu altındaki

$$f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots \quad (2.1)$$

iterasyonlarından oluşan denklemlere **fark denklemleri** denir. Ayrıca (2.1) iterasyonları

$$f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots \quad (2.2)$$

notasyonu ile de gösterilebilir.

Fark denklemleri ile ayrık aralıklarda dinamiği değişen sistemler modellenmektedir. Özellikle biyolojik modellerde ayrık aralık değişkeni yani (2.1) ifadesindeki iterasyon sayısı zaman olarak alınır ve t notasyonu ile gösterilir. Ayrık zaman aralıkları arası uzunluk Δt genelde sabit kabul edilerek modelin $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ anlarındaki değişen dinamiği incelenir. İşlemlerde kolaylık olması açısından ise $\Delta t = 1$ alınır (1 gün, 1 ay, 1 yıl vb.).

Fark denklemlerinde x_0 bir başlangıç değeri olmak üzere $x(t) = f^t(x_0)$ reel değerli fonksiyonu sistemin t anındaki durumunu gösterir ve aynı zamanda x_t notasyonu ile de ifade edilebilir. Ayrıca birden fazla fark denklemleriyle ifade edilen sistemlerde sistemin t anındaki durumu $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ vektörü olup X_t notasyonu ile gösterilir. Böylece fark denklemlerinin genel tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 2.3.1. x_t bir t değişkenine bağlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x_{t+k}, x_{t+k-1}, \dots, x_{t+1}, x_t, t) = 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

formundaki denkleme k . mertebeden fark denklemi denir [1].

Genellikle (2.3) denklemi

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \dots + a_{k-1} x_{t+1} + a_k x_t = b_t \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

ile ifade edilirler. Burada a_1, \dots, a_{k-1}, a_k ile b_t katsayıları t ye ve $i = t, \dots, t+k$ için x_i lere bağlı olabilen fonksiyonlardır.

(2.4) ifadesinden de anlaşılacağı üzere bir fark denkleminin k . mertebeden olabilmesi için $a_k \neq 0$ olması gerekmektedir.

Bir (2.4) formundaki fark denkleminin a_1, \dots, a_{k-1}, a_k katsayıları sabit veya sadece t değişkenine bağlı fakat durum değişkenlerine yani $i = t, \dots, t+k$ için x_i lere bağlı değil ise bu denkleme **lineer fark denklemi** aksi halde **lineer olmayan fark denklemi** denir. Ayrıca $b_t = 0$ ise bu fark denklemine **homojen**, $b_t \neq 0$ ise **homojen olmayan** denir. Son olarak da denklem t değişkenini açık olarak içeriyorsa sisteme **otonom olmayan** denir. Aksi halde **otonom fark denklemi** adını alır.

Tanım 2.3.2. $i = 1, \dots, n$ için x_i ler t ye bağlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere;

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde n tane 1. mertebeden fark denkleminde oluşan sisteme n denklemlilik 1. mertebeden fark denklemlilik sistemi denir [1].

Ayrıca n denklemlilik 1. mertebeden bir fark denklemlilik sistemi genel olarak

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^k a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (2.6)$$

formunda da ifade edilebilir ve $X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))^T$, $B = (b_1(t), \dots, b_k(t))^T$ vektörleri ile $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tipinde bir matris olarak alınırsa (2.6) ifadesi

$$X(t+1) = A(t)X(t) + B(t) \quad (2.7)$$

matris notasyonu şekline de dönüştürülebilir.

Eğer (2.6) ifadesinde $i, j = 1, 2, \dots, k$ için a_{ij} ve b_i katsayıları durum değişkeni olan x_i fonksiyonlarına bağlı değil ise sisteme **lineerdir** denir. Aksi halde **lineer** olmayan adını alır. Eğer $b_i = 0$ ise sisteme **homojen**, $b_i \neq 0$ ise **homojen olmayan** sistem denir.

Örnek 2.3.1. a ve b sıfırdan farklı sabitler olmak üzere;

$$x_{t+1} = ax_t^2 + bx_t - 1$$

fark denklemlilik verilmiş olsun. Bu fark denklemlilik lineer olmayan, otonom ve ikinci de-

receden bir fark denklemdir.

Tanım 2.3.3. Bir (2.3) fark denkleminde $t = 0, 1, 2, \dots$, için denklemi sağlayan x_t reel değerli fonksiyonuna denklemin çözümü denir. Bir fark denkleminde ise sistemi sağlayan $X(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))^T$ vektörüne sistemin çözümü denir [1].

Örnek 2.3.2. t anındaki birey sayısı $x_t = x(t)$ fonksiyonu ile gösterilen bir popülasyonu ele alalım. Kabul edelim ki popülasyondaki her birey bir sonraki jenerasyonda a tane yavru üretsün ve sonra ölsün (Bu tarz çoğalan popülasyonlara hücre ve yıllık bitki popülasyonları örnek olarak verilebilir). Öncelikle verilen popülasyonu

$$x_{t+1} = ax_t$$

şeklinde birinci mertebeden lineer ve homojen bir fark denklemini kullanarak modelleyelim. Şimdi modellediğimiz sistemin çözümünü araştıralım.

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow x_1 = ax_0 \\ t = 1 &\Rightarrow x_2 = ax_1 \Rightarrow x_2 = a^2x_0 \\ t = 2 &\Rightarrow x_3 = ax_2 \Rightarrow x_3 = a^3x_0 \\ &\dots \\ t = n &\Rightarrow x_n = ax_{n-1} \Rightarrow x_n = a^n x_0 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$x_t = a^t x_0$$

şeklinde bir çözüm bulunur. Bu durumda eğer x_0 değeri yani başlangıçtaki birey sayısı biliniyorsa çözüm tektir. Aksi halde sonsuz çoklukta çözüm mevcuttur.

Ayrıca sistemin gelecekteki durumu $a^t x_0$ çözümüne bağlı olup;

- $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} a^t x_0 = 0$ olacağından x_0 birey sayısı ile başlayan popülasyon yok olur.
- $a = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} a^t x_0 = x_0$ olacağından x_0 birey sayısı ile başlayan popülasyondaki birey sayısı daima x_0 olarak kalır.
- $a > 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} a^t x_0 = \infty$ olacağından popülasyondaki birey sayısı daima artar.

2.3.2 Fark denklemlerinin çözümü

Bu kısımda fark denklemlerinin çözümünü bulmak için uygulanan bazı metotlar gösterilecektir.

Birinci Mertebeden Lineer Denklemlerin Çözümü

Birinci mertebeden lineer bir fark denklemi

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t \quad (2.8)$$

formunda olup şayet x_0 başlangıç değeri biliniyor ise bu denklemin bir tek çözümü mevcuttur.

Şimdi yerine koyma metodu ile birinci mertebeden lineer bir (2.8) fark denkleminin çözümünü bulalım. x_0 bir başlangıç değeri olmak üzere

$$t = 0 \quad \text{için} \quad x_1 = a_0 x_0 + b_0$$

$$t = 1 \quad \text{için} \quad x_2 = a_1 x_1 + b_1 = a_1(a_0 x_0 + b_0) + b_1 = a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1$$

$$t = 2 \quad \text{için} \quad x_3 = a_2 x_2 + b_2 = a_2(a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1) + b_2 = a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilebilir. Genel bir ifadeyle

$$x_t = \prod_{i=0}^{t-1} a_i x_0 + b_{t-1} + \sum_{i=0}^{t-2} \left[b_i \prod_{j=i+1}^{t-1} a_j \right] \quad (2.9)$$

yazılırsa x_t değeri t nin her değeri için denklemini sağlayacağından aranan çözümdür.

(2.8) ifadesinde özel olarak $a_t = a$ ve $b_t = b$ alınır

$$x_{t+1} = c^{t+1} x_0 + b \sum_{i=0}^t c^i$$

çözümü elde edilir.

Yüksek Mertebeden Denklemlerin Çözümü

Birinci mertebeden lineer fark denklemlerinde yerine koyarak çözüm elde etme metodu yüksek mertebeden denklemlerde sonuç vermez. Bu yüzden yüksek mertebeden denklemlerin genel çözümlerini bulmak için özel metotlar uygulanmalıdır.

Süperpozisyon ilkesine göre bir (2.4) fark denkleminin genel çözümü, denklemin homojen kısmının genel çözümü x_h ile homojen olmayan kısmının özel çözümü olan x_p nin toplamıdır. Bu yüzden denklemin genel çözümünün bulunabilmesi için öncelikle homojen kısmının çözümünün bulunması gerekir.

Bir (2.4) fark denkleminin genel çözümü k tane değişken içeren bir fonksiyondur. Bu k tane değişken şayet denklemin $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ başlangıç değerleri biliniyorsa tek türlü olarak ifade edilebilirler. Ayrıca (2.4) fark denkleminde $b_t = 0$ alınarak elde edilen homojen kısmının genel çözümü

$$x_h = c_1x^1 + \dots + c_kx^k = \sum_{i=1}^k c_i x^i$$

şeklinde olup c_1, \dots, c_k lar sabitler ve x^1, x^2, \dots, x^k lar ise denklemin homojen kısmının k tane lineer bağımsız çözümleridir.

(2.4) fark denkleminin özel çözümü ise x_p olup fark denkleminin genel çözümü

$$x_t = x_h + x_p = \sum_{i=1}^k c_i x^i + x_p$$

elde edilir. Eğer x_0, x_1, \dots, x_{k-1} başlangıç değerleri biliniyorsa c_1, c_2, \dots, c_k sabitlerinin değeri tektir. Bu yüzden çözüm de tektir.

Bu metodu ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen bir fark denklemi olan

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0 \quad (\text{a ve b sabit}) \quad (2.10)$$

ifadesine uygulayalım. x^1, x^2 ler (2.10) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere genellikle

$$x_t = \lambda^t \quad \lambda \neq 0$$

formunda çözümler aranır. Bu durumda $x_t = \lambda^t$ formundaki çözüm (2.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda^{t+2} + a\lambda^{t+1} + b\lambda^t = 0 \implies \lambda^t(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \quad (2.11)$$

denklemini elde edilir.

Tanım 2.3.4. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ifadesine (2.10) denkleminin karakteristik denklemi adı verilir. Ayrıca karakteristik denklemin kökleri olan λ_1 ve λ_2 değerlerine de denklemin özdeğerleri denir [1].

(2.11) ifadesinden de anlaşılacağı üzere (2.10) fark denkleminin çözümü karakteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Böylece 3 durum ortaya çıkar:

1. Durum: Özdeğerler reel ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise

$$x_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$$

2. Durum: Özdeğerler reel ve $\lambda_1 = \lambda_2$ ise

$$x_t = c_1\lambda_1^t + c_2t\lambda_1^t$$

3. Durum: Özdeğerler λ_1, λ_2 kompleks eşlenikler ise

$$x_t = c_1r^t \cos(t\phi) + c_2r^t \sin(t\phi)$$

(2.10) fark denkleminin genel çözümleridir.

Her bir durumda $x^1(t)$ ve $x^2(t)$ çözümlerinin lineer bağımsız olduğu Cesoration yöntemi ile gösterilebilir.

Tanım 2.3.5. $x^1(t)$ ve $x^2(t)$ çözümlerinin Cesoration değeri

$$C(t) = C(x^1(t), x^2(t)) = \det \begin{pmatrix} x^1(t) & x^2(t) \\ x^1(t+1) & x^2(t+1) \end{pmatrix}$$

ifadesidir [1].

$x^1(t)$ ve $x^2(t)$ iki çözümü için $C(x^1(t), x^2(t)) \neq 0$ eşitliğini sağlayan bazı $t = 0, 1, 2, \dots$, değerleri mevcut ise bu iki çözüm lineer bağımsızdır [7].

Örneğin 1. Durum daki Cesoration değeri

$$C(\lambda_1^t, \lambda_2^t) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} \end{pmatrix} = (\lambda_1 \lambda_2)^t (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

olup çözümler lineer bağımsızdır.

Cesoraiton yöntemi ikiden fazla çözümlere de uygulanabilir.

2.3.3 Fark denklemlerinin dinamik yapısı

Bir biyolojik modelde asıl istenen şey modelin dinamiğini analiz edebilmek ve sistemin nihai olarak nereye yakınsayacağını öngörmektir. Bunun için çoğu zaman denklemleri sağlayan bir çözüm bulmak yerine bazı özel metotlarla analizler yapılır. Bu bölümde bu özel metotlar üzerinde durulacaktır.

Lineer fark denklemleri ile modellenen biyolojik modellerde, sistemin dinamik yapısı özdeğerlerinin reel veya kompleks olmasına ve büyüklüğüne bağlıdır. Böylece sistemin karakteristik denkleminde bakılarak açık bir çözümü bulmadan da dinamiği

hakkında yorum yapılabilir. Sistemin özdeğerlerinden değeri en büyük olanına **baskın özdeğer** denir ve bu baskın özdeğer sistemin dinamiğini belirler. $\lambda = a$ şeklindeki reel bir özdeğerin büyüklüğü özdeğerin mutlak değeri olup $|\lambda| = |a|$ ifadesidir. $\lambda = a + ib$ şeklindeki kompleks bir özdeğerin büyüklüğü ise $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dir.

Şimdi aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.3.6. Bir karakteristik denklemin k özdeğeri sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ olsun. Bu özdeğerlerden λ_i

$$|\lambda_i| \geq |\lambda_j| \quad \forall j \neq i$$

özelliğini sağlıyorsa λ_i baskın özdeğerdir denir. Eğer λ_i

$$|\lambda_i| > |\lambda_j| \quad \forall j \neq i$$

özelliğini sağlıyorsa λ_i mutlak baskın özdeğerdir denir [1].

Denklemin çözümlerinin sınırlı veya sınırsız olması özdeğerlerinin büyüklüklerine bağlıdır. Çözümlerin salınım yapması, yakınsaması veya ıraksaması ise sistemin özdeğerlerinin reel veya kompleks olmasına bağlıdır.

Özel olarak eğer bir sistemin mutlak baskın özdeğeri λ_i

$$|\lambda_i| < 1$$

özelliğini sağlıyorsa fark denkleminin çözümü 0 a yakınsar.

Örnek 2.3.3.

$$x_{t+2} + x_t = 0$$

şeklinde bir fark denklemini ele alalım. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

olup özdeğerleri

$$\lambda_1 = i$$

$$\lambda_2 = -i$$

dir. Böylece denklemin genel çözümü

$$x_t = c_1 \cos\left(t \frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(t \frac{\pi}{2}\right)$$

olarak bulunur. Ayrıca denklemin özdeğerlerinin büyüklükleri

$$|\lambda_{1,2}| = 1$$

olduğundan mutlak baskın özdeğer mevcut değildir. Özdeğerler kompleks olduğundan çözümler salınım yapar ve özdeğerlerin büyüklükleri 1 olduğundan çözümler sınırlıdır ancak herhangi bir çözüme yakınsamazlar. Çünkü başlangıç değeri olarak x_0 ve x_1 değerleri seçilirse çözüm

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

olup periyodik olduğundan hiçbir zaman bir değere yakınsamaz.

Şimdiki kısma birinci mertebeden lineer sistemleri inceleyelim.

2.3.4 Birinci mertebeden lineer sistemler

Yüksek mertebeden denklemlerin birinci mertebeye indirgenmesi

Bir yüksek mertebeden lineer fark denklemi birinci mertebeden denklemlerden oluşan bir sisteme dönüştürülebilir. Böylece yüksek mertebeden bir fark denklemi birinci mertebeden fark denklemi sistemi olarak da düşünülebilir.

k . mertebeden lineer bir fark denklemi olan

$$x(t+k) + a_1 x(t+k-1) + \dots + a_{k-1} x(t+1) + a_k x(t) = b_t \quad (2.12)$$

ifadesini birinci mertebeden bir sisteme dönüştürmeye çalışalım. Öncelikle

$$y_1(t) = x(t)$$

$$y_2(t) = x(t + 1)$$

.

.

.

$$y_{k-1}(t) = x(t - k - 2)$$

$$y_k = x(t + k - 1)$$

dönüşümlerini uygulayalım. Böylece

$$y_1(t + 1) = y_2(t)$$

$$y_2(t + 1) = y_3(t)$$

.

.

.

$$y_{k-1}(t + 1) = y_k(t)$$

$$y_k(t + 1) = -a_1 y_k(t) - \dots - a_{k-1} y_2(t) - a_k y_1(t) + b(t)$$

ifadesi elde edilir.

Bu durumda

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{k-1}(t), y_k(t))^T$$

olmak üzere (2.12) ifadesinin birinci mertebeden bir sisteme dönüştürülmüş hali

$$Y(t + 1) = AY(t) + B$$

olur.

Burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

matrisleridir. Dikkat edilirse A matrisi süperdiyagonal olup son satırının bileşenleri (2.12) ifadesinin ters işaretli katsayılarıdır. Ayrıca A matrisine (2.12) yüksek mertebeden fark denkleminin **bileşke matrisi** denir.

Örnek 2.3.4.

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = \cos(t)$$

ile verilen 2. mertebeden bir fark denklemini ele alalım. Bu fark denklemini

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= y_2(t) \\ y_2(t+1) &= -y_1(t) + 2y_2(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

şeklinde birinci mertebeden bir sisteme dönüştürülebilir. Ayrıca sistem

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Y(t+1) = AY(t) + B$$

ile matris şeklinde de gösterilebilir.

Çözüm bulma

Süperpozisyon ilkesine göre birinci mertebeden lineer bir sistemin genel çözümü sistemin özel bir çözümü X_p ve homojen kısmının genel çözümü X_h olmak üzere

$$X_t = X_h(t) + X_p(t)$$

şeklindedir. Özel olarak

$$Y(t+1) = AY(t) + B \quad (2.13)$$

şeklindeki bir sistemin özel çözümü X_p

$$X_p(t+1) = AX_p(t) + B$$

ve homojen kısmının genel çözümü

$$X_h(t+1) = AX_h(t)$$

dir.

Homojen denklemlerde çözüm

$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))^T$ ve $A = (a_{ij})$ ise $k \times k$ tipinde bir matris olmak üzere (2.13) sisteminin homojen kısmı olan

$$X(t+1) = AX(t)$$

denkleminin çözümünü inceleyelim. Sistem $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ olacak biçimde en fazla k tane lineer bağımsız çözüme sahiptir. Ayrıca bir homojen sistemin genel çözümü

$$X(t) = \sum_{i=1}^k c_i X_i$$

şeklindedir. Şimdi homojen sistemin $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ lineer bağımsız çözümlerini bulmaya çalışalım.

λ bir sabit ve V sıfır olmayan $k \times 1$ tipinde bir vektör olmak üzere

$$X(t) = \lambda^t V$$

formunda çözümler arayalım. Çözüm adayı denklemde yerine yazıldığında

$$\lambda^{t+1} V = A(\lambda^t V)$$

olup I birim matris ve $\mathbf{0}$ sıfır matrisi olmak üzere

$$\Rightarrow (A - \lambda I)V = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

ifadesi elde edilir. Lineer cebirden bilindiği üzere (2.14) ifadesinde $V = \mathbf{0}$ aşıkâr çözüm

$$\det(A - \lambda I) \neq 0 \quad (2.15)$$

ise mevcut olan tek çözümdür. Bu yüzden (2.14) ifadesinin aşıkâr olmayan V çözümlerinin mevcut olabilmesi için

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

özelliğinin sağlanması gerekmektedir.

Tanım 2.3.7. *A bir $k \times k$ tipinde reel bir matris olsun. Bu durumda*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ifadesine A matrisinin karakteristik denklemi, bu denklemi sağlayan λ değerlerine ise A matrisinin özdeğerleri denir.

$$(A - \lambda I)V = 0$$

eşitliğini sağlayan $k \times 1$ tipindeki V vektörüne ise A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü denir [1].

Birinci mertebeden bir fark denklemi sisteminin homojen kısmı olan

$$X(t+1) = AX(t) \quad (2.16)$$

ifadesinin $X(t)$ çözümünü bulmak için uygulanan metoda geri dönelim. Şimdiye kadar $k \times k$ tipindeki bir A matrisinin k tane özdeğeri olan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ değerlerinin

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

denkleminin çözümleri olduğu ve V_i lerin ise

$$(A - \lambda_i)V_i = 0$$

denklemini sağlayan sıfır olmayan vektörler olduğu belirtildi. Ayrıca

$$X(t) = \sum_{i=1}^k c_i X_i(t)$$

ve böylece

$$X_i(t) = \lambda_i^t V_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

olduğundan

$$X(t) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^t V_i$$

bulundu. Böylece $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ çözümlerinin lineer bağımlı ve bağımsız olmasına göre 3 durum ortaya çıkar.

1. Durum: A matrisinin bütün özdeğerleri reel ve $(\lambda_i^t)V_i \quad i = 1, 2, \dots, k$ çözümleri lineer bağımsız olsun. Bu durumda homojen sistemin genel çözümü

$$X(t) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^t V_i$$

olur.

2. Durum: A matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı olsun. Bu durumda çözümler de lineer bağımsız olacağından

$$X(t) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^t V_i$$

olur.

3. Durum: A matrisinin özdeğerleri kompleks veya özvektörleri lineer bağımlı ise genel çözüm $t^n \lambda^t V$ ve $t^n r^t \cos(\phi t) V$ gibi daha karmaşık terimler içerir.

Dinamik yapı

Genel çözümü

$$X(t) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^t V_i$$

formunda olan

$$X(t+1) = AX(t)$$

şeklindeki birinci mertebeden lineer bir fark denklemi sistemini ele alalım. Bu sistemin asimptotik davranışının nasıl olacağını A matrisinin özdeğerlerinin türü ve özdeğerlerinin büyüklükleri belirler.

Örneğin bir sistemin katsayılar matrisinin bütün özdeğerleri için

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

özelliği gerçekleşiyorsa sistemin genel çözümü olan $X(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$$

ifadesini sağlar.

Tanım 2.3.8. $k \times k$ tipindeki bir A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ olsun. Bu durumda

$$\rho(A) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \{|\lambda_i|\}$$

ifadesine A matrisinin spektral çapı denir [1].

Teorem 2.3.1. A sabit bir $k \times k$ tipinde matris olsun. Bu durumda A matrisinin spektral çapı $\rho(A)$ olmak üzere

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A^t = \mathbf{0} \quad (\mathbf{0} \text{ ile sıfır matrisi gösterilmektedir})$$

gerçeklenir [1].

Yukarıdaki teoremin sonucu olarak $\rho(a) < 1$ ise

$$X(t+1) = AX(t)$$

sisteminin çözümü olan

$$X(t) = A^t X(0)$$

$t \rightarrow \infty$ iken sıfır çözümüne yaklaşır.

Örnek 2.3.5.

$$X(t+1) = AX(t) \quad \text{ve} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olan birinci mertebeden bir fark denklemi sistemini alalım.

Öncelikle A matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

olup A matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

ifadesidir. Bu karakteristik denklemin kökleri yani A matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 4$$

olarak bulunur. Böylece A matrisinin spektral çapı

$$\rho(A) = 4$$

olur. Şimdi bulduğumuz $\lambda_{1,2}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulalım. Bir λ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$(A - \lambda I)V = 0$$

ifadesini sağlayan sıfırdan farklı V vektörü idi.

$\lambda_1 = -1$ için

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)V = 0 &\Rightarrow (A + I)V = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

olup

$$\begin{cases} 3v_1 + 3v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir ve bu sistem çözümlerse $\lambda_1 = -1$ e karşılık gelen özvektör

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\lambda = 4$ için

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)V = 0 &\Rightarrow (A - 4I)V = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

olup

$$\begin{cases} -2v_1 + 3v_2 = 0 \\ 2v_1 - 3v_2 = 0 \end{cases}$$

elde edilir ve böylece $\lambda_2 = 4$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak verilen fark denklemi sisteminin genel çözümü

$$X(t) = c_1(-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(4)^t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilir.

2.3.5 Birinci mertebeden lineer olmayan denklemler ve sistemler

Birinci mertebeden bir fark denklemi

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{2.17}$$

şeklinde olup eğer bu denklem açık olarak t zaman değişkenine bağlı değilse **otonom denklem** adını alır. Bu bölümde birinci mertebeden lineer olmayan otonom fark denklemleri incelenecektir.

Tanım 2.3.9. Birinci mertebeden bir fark denklemi olan

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (2.18)$$

ifadesinin

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

eşitliğini sağlayan \bar{x} noktasına fark denkleminin denge noktası denir.

Benzer şekilde birinci mertebeden bir fark denklemi sistemi olan

$$X_{t+1} = f(X_t) \quad (2.19)$$

ifadesinin

$$\bar{X} = f(\bar{X})$$

eşitliğini sağlayan \bar{X} vektörüne sistemin denge noktası denir [1].

Örneğin iki-boyutlu birinci mertebeden bir fark denklemi sistemi olan

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \quad (2.20)$$

ifadesinin bir denge noktası (\bar{x}, \bar{y}) şeklinde gösterilir ve

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

eşitliklerini sağlar.

Tanım 2.3.10. Birinci mertebeden bir fark denkleminde $m > 1$ olmak üzere;

$$i) \quad f^m(\bar{x}_i) = \bar{x}_i \quad \text{ve} \quad f^i(\bar{x}_i) \neq \bar{x}_i \quad \ni \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1$$

özelliğini sağlayan reel bir \bar{x}_k değerine **m-periyodlu bir periyodik çözüm**,

ii) $\bar{x}_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, m$ için bir m-periyodlu çözüm olmak üzere $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ küme-

sine **m-döngüsü**,

iii) *m*-periyodlu bir çözümlerin bütün iterasyonlarının kümesi olan $f\{\bar{x}_k, f(\bar{x}_k), \dots, f^{m-1}(\bar{x}_k)\}$ ifadesine ise \bar{x}_k çözümünün **periyodik yörüngesi** denir [1].

Benzer şekilde birinci mertebeden bir fark denklemi sisteminin *m*-periyodlu çözümü reel değerli bir \bar{X} vektörü olmak üzere

$$F^m(\bar{X}_k) = \bar{X}_k \quad \text{ve} \quad F^i(\bar{X}_k) \neq \bar{X}_k \quad \ni \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

eşitliğini sağlayan değerdir. Ayrıca \bar{X}_k vektörü $\forall k = 1, 2, \dots, m$ için sistemin *m*-periyodlu bir çözümü olmak üzere $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m\}$ vektör kümesine **m- döngüsü** denir. Son olarak da sistemin *m*-periyodlu bir çözümünün bütün iterasyonlarının kümesine de **periyodik yörünge** denir.

Tanım 2.3.11. \bar{x} , (2.18) in bir denge noktası olsun.

i) Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ mevcuttur $\ni \forall t > 0$ için

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \quad \text{iken} \quad |x_t - \bar{x}| = |f^t(x_0) - \bar{x}| < \epsilon$$

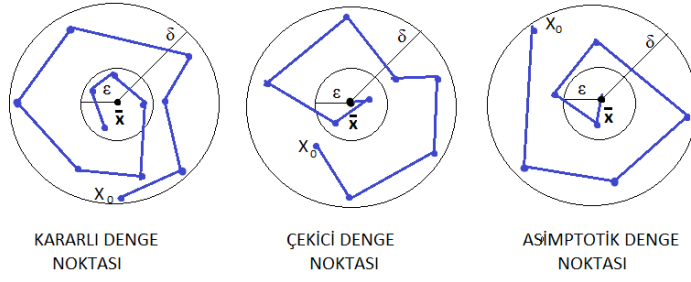
şartı sağlanıyorsa \bar{x} denge noktasına lokal kararludur aksi halde kararsızdır denir.

ii) Eğer $|x_0 - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan her x_0 değeri için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0) = \bar{x}$$

eşitliği gerçekleşiyorsa \bar{x} denge noktasına lokal çekicidir denir.

iii) \bar{x} hem lokal kararlı hem de lokal çekici ise lokal asimptotik kararludur denir [1].



Şekil 2.2: Kararlı denge noktası çeşitleri

Tanım 2.3.12. *Bir sistemin denge noktası sistemdeki bütün başlangıç değerleri için kararlı ise bu denge noktasına global kararlıdır denir [1].*

Lineerleştirme

Lineer olmayan bir dinamik sistemin kararlılık analizi yapılırken öncelikle denge noktaları belirlenir. Daha sonra lineerleştirme teknikleri uygulanarak sistemin bu denge noktalarındaki davranışı hakkında bilgiler elde edilir. Bundan sonraki kesimde birinci mertebeden fark denklemlerinin kararlılığını analiz etmek için kullanılan teknikler gösterilecektir.

Kabul edelim ki bir fark denklemi olan (2.18) ifadesinin bir denge noktası \bar{x} olsun. Öncelikle

$$u_t = x_t - \bar{x} \quad (2.21)$$

dönüşümünü tanımlayarak \bar{x} denge noktasını orijine taşıyalım. Böylece bu dönüşüm altında

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= x_{t+1} - \bar{x} \\ &= f(x_t) - \bar{x} \\ &= f(u_t + \bar{x}) - f(\bar{x}) \\ &= g(u_t) \end{aligned}$$

olmak üzere yeni bir $g(u_t) = u_{t+1}$ denklemi elde edilir. Dikkat edilirse $f(x_t)$ (2.21) dönüşümü altında yeni bir sisteme dönüştürülerek denge noktası \bar{x} dan 0 noktasına ta-

şınımlıdır. Bu durumda yeni sistemin denge noktasının 0 olabilmesi için gerek ve yeter şartın \bar{x} in $f(x_t)$ nin denge noktası olması olduğu açıktır. Ayrıca \bar{x} ile 0 denge noktalarının dinamik yapıları birebir aynıdır.

Şimdi \bar{x} noktasının lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gereken koşulları bulmaya çalışalım.

(2.18) ifadesindeki f fonksiyonunun $f \in C^2$ olduğunu kabul ederek bir $\bar{x} \in I$ aralığında Taylor serisine açalım. Böylece

$$f(x_t) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_t - \bar{x})^2$$

olacak biçimde $\exists \xi \in I$ mevcuttur. Yeterince küçük $(x_t - \bar{x})$ değerleri için

$$f(x_t) - \bar{x} \approx f'(\bar{x})(x_t - \bar{x})$$

veya

$$u_{t+1} \approx f'(\bar{x})u_t$$

şeklinde lineer yaklaşım yapılabilir. Bu lineer yaklaşımla elde edilen

$$u_{t+1} = f'(\bar{x})u_t \quad (2.22)$$

ifadesine (2.18) fark denkleminin \bar{x} denge noktasındaki **lineerleştirilmesi** adı verilir. Ayrıca \bar{x} noktasına yeterince yakın değerlerde (2.18) ile (2.22) lineerleştirmesinin dinamik yapıları birebir aynıdır.

Eğer (2.18) ifadesi incelenirse \bar{x} denge noktasının kararlı veya kararsız olması $f'(\bar{x})$ in değerine bağlıdır. Çünkü

$|f'(\bar{x})| > 1 \Rightarrow u_t$ iterasyonu 0 noktasından uzaklaşacaktır. Sonuç olarak da $x_t \rightarrow \bar{x}$ gerçekleşir.

$|f'(\bar{x})| < 1 \Rightarrow u_t$ iterasyonları 0 noktasına yakınsayacaktır. Sonuç olarak da $x_t \rightarrow \bar{x}$

gerçeklenir.

Teorem 2.3.2. *Bir (2.18) fark denkleminin bir denge noktası \bar{x} olmak üzere, f' bir $\bar{x} \in I$ açık aralığında sürekli olsun. Bu durumda $|f'(\bar{x})| < 1$ ise lokal asimptotik kararlı, $|f'(\bar{x})| > 1$ ise kararsızdır [1].*

Tanım 2.3.13. *\bar{x} bir fark denkleminin denge noktası olsun. Eğer $|f'(\bar{x})| \neq 1$ ise \bar{x} denge noktasına hiperbolik, $|f'(\bar{x})| = 1$ ise hiperbolik olmayan denge noktası denir [1].*

Eğer bir sistemin denge noktası hiperbolik ise bu takdirde sistemin bu noktadaki lineerleştirilmiş hali ile sistem lokal topolojik olarak denktir.

2.3.6 Çatallanma Teorisi

r parametresine bağlı bir dinamik sistemde, r değerinin değişmesi

Denge noktalarının sayısının azalması veya çoğalması,
Denge noktalarının tipinin veya kararlılığının değişmesi,
Periyodik çözümlerin ortaya çıkması veya kaybolması

gibi değişikliklere sebep oluyorsa bu değişikliğe **çatallanma**, r değerine de **çatallanma parametresi** denir [14].

Örneğin

$$x_{t+1} = f(x_t, r) \quad r \in \mathfrak{R} \quad (2.23)$$

şeklindeki birinci mertebeden parametreye bağlı bir fark denklemini ele alalım. Sistemin denge noktası

$$\bar{x} = f(\bar{x}, r) \Rightarrow \bar{x}(r)$$

şeklinde olup dinamik yapısı r parametresine göre değişir.

Teorem 2.3.2 gereğince bir sistemin denge noktası olan \bar{x} $|f'(\bar{x})| < 1$ iken kararlı $|f'(\bar{x})| > 1$ iken ise kararsızdır. Bu durumda parametreye bağlı bir sistemde çatallanma görülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$|f'(\bar{x}(r_c))| = 1$$

olmasıdır. Bu durumda sistemin çatallanma parametresi r , çatallanma değeri ise r_c olur.

Birinci mertebeden fark denklemlerinde görülen çatallanmalar sistemde meydana gelen değişikliklere göre

- Saddle Node Çatallanma
- Transkritik Çatallanma
- Pitchfork Çatallanma
- Flip

gibi çeşitlere ayrılırlar.

Sistemde saddle node, transkritik ve pitchfork çatallanmalarının görülebilmesi için gereken ilk koşul

$$f(\bar{x}, r_c) = 1$$

olması iken flip çatallanma ise

$$f(\bar{x}, r_c) = -1$$

olduğu durumda görülebilir [10].

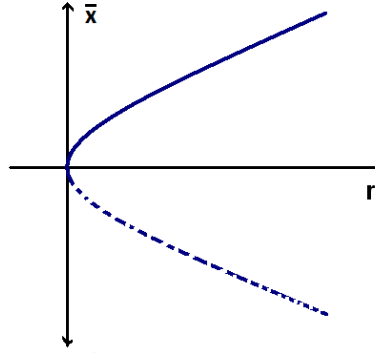
Saddle Node Çatallanma

Normal formu

$$x_{t+1} = x_t + r - x_t^2$$

şeklinde olan çatallanma çeşidir. Saddle node çatallanma başlangıçta hiçbir denge noktası mevcut değil iken r parametresinin değişimiyle beraber biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki denge noktasının ortaya çıktığı sistemlerde görülür. Çatallanma diyag-

ramı ise Şekil 2.3 de gösterilmiştir [10].



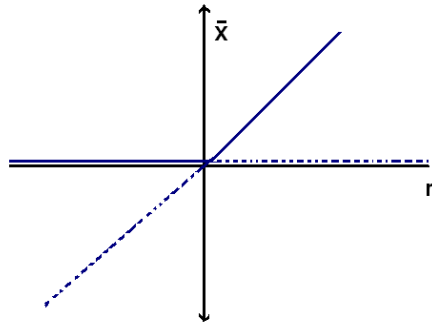
Şekil 2.3: Saddle Node çatallanma diyagramı

Transkritik Çatallanma

Transkritik çatallanmanın normal formu

$$x_{t+1} = x_t + rx_t - x_t^2$$

şeklindedir. Sistemde biri kararlı diğeri kararsız olan iki denge noktasının r_c çatallanma değerinden sonra kararlılıklarının değiştiği çatallanma çeşididir [10].



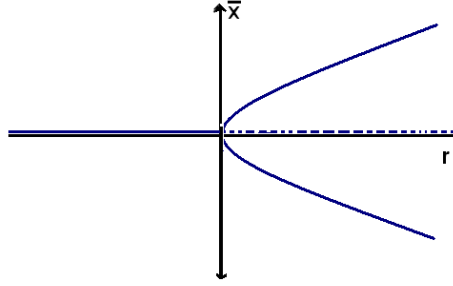
Şekil 2.4: Transkritik çatallanma diyagramı

Pitchfork Çatallanma

Normal formu

$$x_{t+1} = x_t + rx_t - x_t^3$$

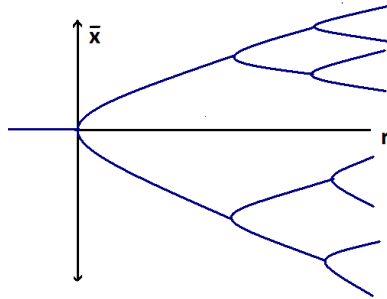
şeklindedir. Başlangıçtaki tek kararlı denge noktasının parametrenin değişimiyle kararsızlaştığı ve iki kararlı denge noktasının ortaya çıktığı çatallanma çeşididir [10].



Şekil 2.5: Pitchfork çatallanma diyagramı

Flip Çatallanma

Parametreye bağlı bir fark denklemleri sisteminde başlangıçta mevcut olan tek denge noktasının parametre değişimiyle beraber kararlılığı değişiyor ve sistemin 2-döngüsü oluşuyor ise bu çatallanmaya flip çatallanma denir [10]. Bir diğer adı ise periyot katlamadır.



Şekil 2.6: Flip çatallanma diyagramı

Flip çatallanmanın normal formu

$$x_{t+1} = -(1+r)x_t \pm x_t^3 \quad (2.24)$$

şeklindedir. Şimdi bu normal formun dinamiğini inceleyelim.

(2.24) ifadesini

$$f(x, r) = -(1+r)x + x^3 \quad (2.25)$$

olarak ele alalım ve denge noktalarını bulalım.

$$\begin{aligned} f(x, r) = 0 &\Rightarrow -(1+r)x + x^3 = x \\ &\Rightarrow -(2+r)x + x^3 = 0 \\ &\Rightarrow x(-(2+r) + x^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\sqrt{2+r} \\ &\Rightarrow \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 &= \sqrt{2+r} \end{aligned}$$

olup sistemin her r değeri için $\bar{x}_2 = 0$ sistemin denge noktasıdır. Bu durumda

$$f_x(x, r) = -(1+r) + 3x^2 \Rightarrow f_x(0, r) = -(1+r)$$

olduğundan dolayı

$$-1 < -(1+r) < 1 \Rightarrow -2 < r < 0$$

iken $\bar{x}_2 = 0$ denge noktası kararlı

$$r > 0 \text{ ve } r < -2$$

iken kararsızdır ($r = 0$ değeri için $f_x(\bar{x}, 0) = 1$ ve $r = -2$ için $f_x(\bar{x}, -2) = -1$ olduğu için bu noktaların kararlılık yapısı hakkında birşey söylenemez ve bu noktalarda çatallanma görülmesi beklenir).

Ayrıca $r > -2$ için \bar{x}_1 ve \bar{x}_2 denge noktaları da tanımlı olup

$$\begin{cases} f_x(x_1, r) = -(1+r) + 3(2+r) = 5+2r \\ f_x(x_2, r) = -(1+r) + 3(2+r) = 5+2r \end{cases}$$

denklemleri sağlanır ve böylece

$$-1 < 5+2r < 1 \Rightarrow -3 < r < -2$$

ifadesinden

$$r > -2$$

iken kararsızdırlar. Böylece

$$r_c = -2$$

parametre değerinde pitchfork çatalanma görülür.

Şimdi (2.25) ifadesinin ikinci iterasyonunun denge noktalarını yani 2-döngülerini bulalım.

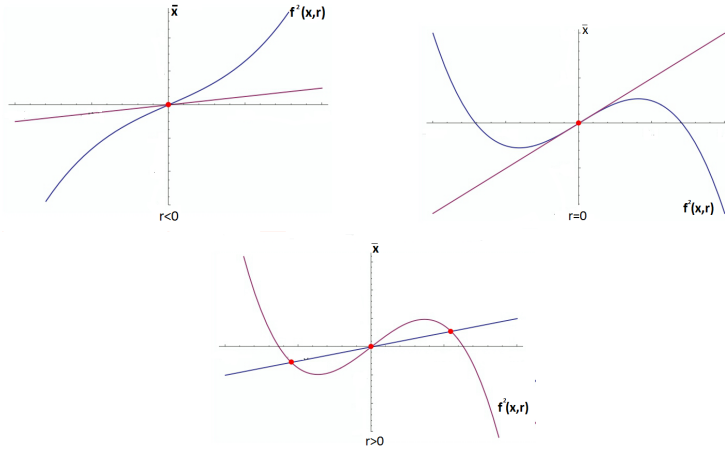
$$\begin{aligned} f^2(x, r) &= f(y, r) \\ &= -(1+r)y + y^3 \\ &= -(1+r)[-(1+r)x + x^3] + [-(1+r)x + x^3]^3 \\ &= (1+r)^2x - [(1+r)(2+2r+r^2)]x^3 + O(x^5) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f^2(x, r) = 0 &\Rightarrow (1+r)^2x - [(1+r)(2+2r+r^2)]x^3 + O(x^5) = 0 \\ &\Rightarrow (1+r)x - (2+2r+r^2)x^3 = 0 \\ &\Rightarrow x[(1+r) - (2+2r+r^2)x^2] = 0 \\ &\quad \bar{x}_1 = 0 \\ &\Rightarrow \bar{x}_2 = \sqrt{r} + O(r) \\ &\quad \bar{x}_3 = -\sqrt{r} + O(r) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda $f^2(x, r) = x$ denkleminin r parametresine göre kökleri Şekil 2.7 daki gibi



Şekil 2.7: $f^2(x, r) = x$ denkleminin r değerlerine göre kökleri

olur. Sonuç olarak sistemde iki kararlı 2-döngüsü ortaya çıkar.

Teorem 2.3.3. *Birinci mertebeden bir fark denklemleri sistemi*

$$x_{t+1} = f(x_t, r) \quad x, r \in \mathfrak{R}^1$$

formunda verilsin. Ayrıca f analitik olup $r = 0$ daki denge noktası $\bar{x} = 0$ olsun ve $f_x(0, 0) = -1$ sağlansın. Bu durumda

$$\mathbf{F1)} \quad \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) \neq 0$$

$$\mathbf{F2)} \quad f_{xr}(0, 0) \neq 0$$

şartları altında bu sistemde flip çatallanma görülür [10].

2.3.7 Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi

Dinamik sistemlerde analiz yapılırken sistemde boyut indirgenmesi yapılarak veya denge noktası civarında lineerleştirilerek işlemlerde kolaylık sağlanır. Boyut indirgenmesinde uygulanan metotlardan biri de Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi'dir. Bu bölümde bu teoreme değinilecektir.

$X \in \mathfrak{R}^n$ ve A ise $n \times n$ tipinde reel bir matris olmak üzere

$$X(t) = AX(t+1)$$

şeklinde bir sistemi ele alalım.

A matrisinin mutlak değeri 1 den küçük olan bütün özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ olmak üzere

$$E^s = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$$

uzayına sistemin **Kararlı Altuzayı** denir.

A matrisinin mutlak değeri 1 den büyük olan bütün özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri $\{e_{s+1}, e_{s+2}, \dots, e_{s+u}\}$ olmak üzere

$$E^u = \text{span}\{e_{s+1}, e_{s+2}, \dots, e_{s+u}\}$$

uzayına sistemin **Kararsız Altuzayı** denir.

A matrisinin mutlak değeri 1 e eşit olan bütün özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri $\{e_{s+u+1}, e_{s+u+2}, \dots, e_{s+u+c}\}$ olmak üzere

$$E^u = \text{span}\{e_{s+u+1}, e_{s+u+2}, \dots, e_{s+u+c}\}$$

uzayına ise sistemin **Merkez Altuzayı** denir [15].

Bir sistemin kararlı, kararsız ve merkez altuzayları sabit uzaylar olup bu uzaylardan

alınan bir başlangıç noktasının bütün iterasyonları bu uzay içerisinde kalır.

Ayrıca sistemde $t \rightarrow \infty$ iken

- i) E^s uzayından alınan bir başlangıç noktasının iterasyonları denge noktasına yakınsar.
- ii) E^u uzayından alınan bir başlangıç noktasının iterasyonları sınırsız olup ıraksar.
- iii) E^c uzayından alınan bir başlangıç noktasının iterasyonları ne yakınsar ne de ıraksar.

Eğer $E^u = \emptyset$ sağlanırsa sistemdeki her yörünge E^c uzayına yakınsar. Bu durumda uzun süreli hareketlerin analizi için, sistemin E^c uzayına indirgenmiş halini incelememiz yeterlidir.

Tanım 2.3.14. A , $c \times c$ tipinde ve özdeğerlerinin mutlak değeri 1 olan, B ise $s \times s$ tipinde özdeğerlerinin mutlak değeri 1 den küçük olan matrisler olsun. Ayrıca kabul edelim ki orijinin bir komşuluğunda $f, g \in C^r (r \geq 1)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + f(x_t, y_t) & x_t \in \mathfrak{R}^c \\ y_{t+1} = By_t + g(x_t, y_t) & y_t \in \mathfrak{R}^s \end{cases} \quad (2.26)$$

şeklinde olan ve

$$\begin{array}{lll} f(0,0) = 0 & f_x(0,0) = 0 & f_y(0,0) = 0 \\ g(0,0) = 0 & g_x(0,0) = 0 & g_y(0,0) = 0 \end{array}$$

özelliklerini sağlayan birinci mertebeden 2 fark denklemlili bir sistem verilsin. Bu durumda yeterince küçük δ değerleri için

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^c \times \mathfrak{R}^s \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, h'(0) = 0\} \quad (2.27)$$

ifadesine (2.26) sisteminin merkez çokkatlı uzayı denir [15].

Tanımdan anlaşılacağı üzere $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 0$ şartlarından dolayı $W^c(0)$ merkez çokkatlı uzayı $(0,0)$ noktasında E^c ye teğettir.

Teorem 2.3.4. *Yeterince küçük δ değerleri için (2.26) sisteminin (2.27) şeklinde C^r sınıfına ait bir merkez çokkatlı uzayı mevcuttur. Ayrıca yeterince küçük u_t değerleri için (2.26) sistemi ile*

$$u_{t+1} = Au_t + f(u_t, h(u_t)) \quad u_t \in \mathfrak{R}$$

sistemi lokal topolojik olarak denktir [15].

Şimdi bir sistemin merkez çokkatlı uzayının nasıl hesaplanacağını bulalım.

(2.26) sisteminde $y_t = h(x_t)$ yerine konursa

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + f(x_t, h(x_t)) \\ y_{t+1} = h(x_{t+1}) = Bh(x_t) + g(x_t, h(x_t)) \end{cases}$$

ifadesi elde edilir. Buradan da

$$N(h(x)) = h(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (2.28)$$

eşitliği bulunur.

Örnek 2.3.6.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} uw \\ u^2 \\ -uv \end{pmatrix} \quad (u, v, w) \in \mathfrak{R}^3$$

ifadesini inceleyelim. Sistemin denge noktalarından birinin $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ olduğu ve lineer kısmının bileşke matrisinin özdeğerlerinin

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}$$

olduğu açıktır.

Sistemde noktası hiperbolik olduğundan dolayı lineerleştirme sistemin dinamik yapısı hakkında bilgi veremez. Bu yüzden sistemin dinamiğini anlamak için Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi'ni kullanalım.

Sistemin merkez çok katlı uzayı yeterince küçük u değerleri için

$$W^c(0) = \{(u, v, w) \in \mathfrak{R}^3 \mid v = h_1(u), w = h_2(u), h_i(0) = 0, h'_i(0) = 0 \quad i = 1, 2\}$$

şeklinde olup

$$x = u$$

$$y = (u, w)$$

$$h = (h_1, h_2)$$

ve

$$A = -1 \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$N(h(x)) = h(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (2.29)$$

koşulunu sağlar. Ayrıca sistemde

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= uw \\ g(u, v, w) &= \begin{pmatrix} u^2 \\ -uv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir.

Kabul edelim ki sistemin merkez çokkatlı uzayı

$$h(u) = \begin{pmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1u^2 + b_1u^3 + O(u^4) \\ a_2u^2 + b_2u^3 + O(u^4) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

formunda olsun.

Bu durumda (2.29) eşitliğinde (2.30) ifadesini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} N(h(u)) &= \begin{pmatrix} a_1 u^2 - b_1 u^3 + O(u^5) \\ a_2 u^2 - b_2 u^3 + O(u^5) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 u^2 + b_1 u^3 + \dots \\ a_2 u^2 + b_2 u^3 + \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2 \\ -u h_1(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$u^2 : \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2}a_1 - 1 \\ a_2 - \frac{1}{2}a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$u^3 : \begin{pmatrix} -b_1 + \frac{1}{2}b_2 + a_1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olup çözüldüğünde

$$h_1(u) = \frac{2}{3}u^2 + O(u^4)$$

$$h_2(u) = \frac{4}{9}u^3 + O(u^4)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$u \longrightarrow -u + \frac{8}{27}u^5 + O(u^6)$$

sistemi elde edilir ve bu sistemle orijinal sistem lokal topolojik olarak denktirler [15].

Örnek 2.3.7.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \mathfrak{R}$$

sistemini ele alalım. Orijin sistemin bir denge noktasıdır. Fark denklemi sisteminin bileşke matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece sistemin 1-boyutlu merkez çokkatlı uzayının mevcut olduğu söylenebilir.

Sistemin merkez çokkatlı uzayını bulmak için öncelikle sistemi (2.26) formuna getirelim. Bunun için sütunları sistemin bileşke matrisinin özvektörlerinden oluşan bir T matrisini

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

olacak biçimde bir dönüşüm tanımlamış oluruz öyle ki sistem bu T dönüşüm altında

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2(u+v)^3 \\ (u+v)^3 \end{pmatrix}$$

sistemine dönüşmüş olur. Ayrıca sistemin merkez çokkatlı uzayı

$$W^c = \{(u, v) \mid v = h(u), h(0) = 0, h'(0) = 0\}$$

olup bu merkez çokkatlı uzayını

$$h(u) = au^2 + bu^3 + O(u^4)$$

formunda arayalım. Bu durumda sistemin merkez çokkatlı uzayı

$$A = 1$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$f(u, v) = -2(u + v)^3$$

$$g(u, v) = (u + v)^3$$

olmak üzere

$$N(h(u)) = h(Au + f(u, h(u))) - Bh(u) - g(u, h(u)) = 0$$

eşitliğini sağladığından aradığımız formu eşitlikte yerine yazarsak

$$N(h(u)) = a(u - 2(u + au^2 + bu^3 + O(u^4)))^3 + b(u - 2(u + au^2 + bu^3 + O(u^4)))^3 + \dots - \frac{1}{2}(au^2 + bu^3 + O(u^4)) - (u + au^2 + bu^3 + O(u^4))^3 = 0$$

ifadesini buluruz. Bu ifade düzenlenirse

$$au^2 + bu^3 - \frac{1}{2}au^2 - \frac{1}{2}bu^3 - u^3 + O(u^4) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin katsayıları sıfır olacağından

$$u^2 : a - \frac{1}{2}a = 0$$

$$u^3 : b - \frac{1}{2}b - 1 = 0$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Eşitlikler çözümlerse

$$a = 0$$

$$b = 2$$

olarak bulunur. Böylece sistemin merkez çokkatlı uzayı

$$h(u) = 2u^3 + O(u^4)$$

şeklinde olup verilen sistem aşağıdaki sisteme indirgenir.

$$u \longrightarrow u - 2u^3 + O(u^4)$$

2.3.8 Kararlılık ve Flip Gözlemlenebilme Lemması

Lemma 2.3.1. $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$ ikinci dereceden bir polinom ve λ_1 ile λ_2

$F(\lambda)$ polinomunun kökleri olsun. Bu durumda

1) $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1 \iff F(-1) > 0, F(1) > 0$ ve $C < 1$

2) $\lambda_1 = -1$ ve $|\lambda_2| \neq 1 \iff F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$

dır.

İspat. 1) İspatı yapabilmemiz için λ_1 ve λ_2 köklerinin reel veya kompleks olmalarına göre iki ayrı durumu incelememiz gerekmektedir.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}$ olsun.

(\Rightarrow) Kabul edelim ki $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ sağlansın.

Öncelikle $F(\lambda)$ polinomunu kökleri λ_1 ve λ_2 olduğundan

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad (2.31)$$

formunda yazıp $\lambda = 1$ ve $\lambda = -1$ değerleri için

$$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \quad (2.32)$$

$$F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \quad (2.33)$$

ifadelerini elde edelim. Ayrıca (2.31) ifadesini

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \quad (2.34)$$

olarak da yazabiliriz.

Şimdi $F(-1) > 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için (2.32) ifadesinin pozitif olduğunu yani

$$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) > 0$$

eşitliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

Kabulümüzden

$$\begin{aligned} |\lambda_1| < 1 &\Rightarrow -1 < \lambda_1 < 1 \\ &\Rightarrow 0 < 1 + \lambda_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |\lambda_2| < 1 &\Rightarrow -1 < \lambda_2 < 1 \\ &\Rightarrow 0 < 1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

elde edilir. $1 + \lambda_1 > 0$ ve $1 + \lambda_2 > 0$ olup

$$F(-1) > 0$$

gerçeklenir. Benzer şekilde

$$F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$$

olup kabulümüzden

$$\begin{aligned} |\lambda_1| < 1 &\Rightarrow -1 < \lambda_1 < 1 \\ &\Rightarrow 1 - \lambda_1 > 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |\lambda_2| < 1 &\Rightarrow -1 < \lambda_2 < 1 \\ &\Rightarrow 1 - \lambda_2 > 0 \end{aligned}$$

ifadesi gereğince $1 - \lambda_1 > 0$ ve $1 - \lambda_2 > 0$ koşulları olduğundan

$$F(1) > 0$$

gerçeklenir.

Son olarak $C = \lambda_1 \lambda_2 < 1$ ifadesinin gerçekleştiğini gösterelim. Her λ_1 ve λ_2 için

$$\lambda_1 \lambda_2 \leq |\lambda_1 \lambda_2| = |\lambda_1| |\lambda_2| \tag{2.35}$$

ifadesi gerçekleşir.

Ayrıca hipotez gereğince

$$|\lambda_1| < 1 \text{ ve } |\lambda_2| < 1 \Rightarrow |\lambda_1||\lambda_2| < 1$$

olup (2.35) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 < |\lambda_1||\lambda_2| < 1 &\Rightarrow \lambda_1\lambda_2 < 1 \\ &\Rightarrow C < 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ olsun.

$$\begin{aligned} F(1) > 0 &\Rightarrow (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0 \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{ai)} \ 1 - \lambda_1 > 0 \text{ iken } 1 - \lambda_2 > 0 \\ \text{veya} \\ \mathbf{aii)} \ 1 - \lambda_1 < 0 \text{ iken } 1 - \lambda_2 < 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(-1) > 0 &\Rightarrow (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) > 0 \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{bi)} \ 1 + \lambda_1 > 0 \text{ iken } 1 + \lambda_2 > 0 \\ \text{veya} \\ \mathbf{bii)} \ 1 + \lambda_1 < 0 \text{ iken } 1 + \lambda_2 < 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$C < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c)} \ \lambda_1\lambda_2 < 1$$

olmak üzere hipotezlerin sağlanabilmesi için **ai)** veya **aii)** ile **bi)** veya **bii)** ve **c)** koşulunun aynı anda sağlanması gerekmektedir.

Yukarıdaki ifadelerden **aii)** ile **c)** koşulunun aynı anda sağlanamayacağı aşikardır. Çünkü **aii)** koşulunun sağlanması durumunda $\lambda_1 > 1$ ve $\lambda_2 > 1$ olup $\lambda_1\lambda_2 > 1$ gerçekleşeceğinden bu durum **c)** şartıyla çelişir. Benzer şekilde **bii)** ile **c)** koşullarının da aynı anda

sağlanamayacağı görülebilir.

Sonuç olarak $F(-1) > 0$ ve $C = \lambda_1 \lambda_2$ hipotezlerinin gerçekleşebilmesi için

ai) $1 - \lambda_1 > 0$ iken $1 - \lambda_2 > 0$

bi) $1 + \lambda_1 > 0$ iken $1 + \lambda_2 > 0$

c) $\lambda_1 \lambda_2 < 1$

koşullarının aynı anda sağlanması gerekmektedir.

Şimdi bu koşullar altında $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ in sağlandığını ispat edelim.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ai)} \quad 1 - \lambda_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 1 \\ \text{bi)} \quad 1 + \lambda_1 > 0 \Rightarrow -1 < \lambda_1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < \lambda_1 < 1 \Rightarrow |\lambda_1| < 1$$

benzer şekilde

$$\left. \begin{array}{l} \text{ai)} \quad 1 - \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_2 < 1 \\ \text{bi)} \quad 1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow -1 < \lambda_2 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < \lambda_2 < 1 \Rightarrow |\lambda_2| < 1$$

olup ispat tamamlanmış olur.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ olsun.

(\Rightarrow) Kabul edelim ki $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ sağlansın.

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_1 = a + ib \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = a - ib$$

olacak biçimde $a, b \in \mathfrak{R}$ ($b \neq 0$) mevcuttur. Ayrıca

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = a^2 + b^2 \tag{2.36}$$

olup $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ hipotezinin gerçekleşebilmesi için

$$a^2 + b^2 < 1 \tag{2.37}$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir.

Öncelikle $F(-1) > 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}F(-1) &= (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \Rightarrow F(-1) = (1 + a + ib)(1 + a - ib) \\ &\Rightarrow F(-1) = 1 + a^2 + b^2 + 2a \\ &\Rightarrow F(-1) = (a + 1)^2 + b^2 \\ &\Rightarrow F(-1) > 0\end{aligned}$$

olup $F(-1) > 0$ şartı sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}F(1) &= (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \Rightarrow F(1) = (1 - a - ib)(1 - a + ib) \\ &\Rightarrow F(1) = 1 + a^2 + b^2 - 2a \\ &\Rightarrow F(1) = (a - 1)^2 + b^2 \\ &\Rightarrow F(1) > 0\end{aligned}$$

olduğundan $F(1) > 0$ şartı da sağlanmış olur.

Şimdi $C < 1$ olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned}C &= \lambda_1 \lambda_2 \Rightarrow C = (a + ib)(a - ib) \\ &\Rightarrow C = a^2 + b^2\end{aligned}$$

olup (2.37) ifadesinden

$$C < 1$$

şartının sağlandığı görülür.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ sağlansın.

$C = \lambda_1 \lambda_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}C < 1 &\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 1 \\ &\Rightarrow (a + ib)(a - ib) < 1 \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 < 1 \\ &\Rightarrow |\lambda_1| = |\lambda_2| < 1\end{aligned}$$

olup $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ gerçekleşip ispat tamamlanmış olur.

2) ifadesini ispat edelim.

(\Rightarrow) Kabul edelim ki $\lambda_1 = -1$ ve $|\lambda_2| \neq 1$ olsun.

$$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$$

ve hipotezden $\lambda_1 = -1$ olduğundan

$$F(-1) = 0$$

sağlanır. Ayrıca

$$B = -(\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow B = 1 - \lambda_2$$

olup hipotez gereğince $\lambda_2 \neq -1, 1$ olduğundan

$$B \neq 1 - (1) \Rightarrow B \neq 0$$

ve

$$B \neq 1 - (-1) \Rightarrow B \neq 2$$

elde edilir.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ olsun.

$$F(-1) = 0 \Rightarrow (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \text{veya} \quad \lambda_2 = -1$$

$$B \neq 0, 2 \Rightarrow -(\lambda_1 + \lambda_2) \neq 0, 2$$

hipotezlerin sağlanması için gereken koşullardır. Öncelikle $\lambda_1 = -1$ olsun.

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad B \neq 0, 2 \Rightarrow -(-1 + \lambda_2) \neq 0, 2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 \neq 1, -1$$

Benzer şekilde $\lambda_2 = -1$ olması durumunda

$$\begin{aligned}\lambda_2 = -1 \quad \text{ve} \quad B \neq 0,2 &\Rightarrow -(-\lambda_1 - 1) \neq 0,2 \\ &\Rightarrow \lambda_1 \neq 1, -1\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. \square

Sonuç olarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.3.5. *2. mertebeden lineer olmayan bir dinamik sistemin bir denge noktasındaki karakteristik polinomu $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$ ve $B, C \in \mathfrak{R}$ olmak üzere;*

1) $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $C < 1 \Rightarrow$ bu denge noktası kararlıdır.

2) $B \neq 0,2$ ve $F(-1) = 0 \Rightarrow$ bu denge noktasında flip çatallanma gözlemlenebilir.

3. MODEL

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r_1N(t) - \varepsilon P(t)N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = P(t)(r_2 - \theta \frac{P(t)}{N(t)}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Birbirleriyle av-avcı ilişkisi içerisinde bulunan iki popülasyonun bir ortamdaki zamana göre değişimlerini gösteren (3.1) modelini ele alalım.

(3.1) modelinde $N(t)$ t anında ortamdaki av sayısını, $P(t)$ ise t anında ortamdaki avcı sayısını gösterirken sistemdeki diğer parametreler ise:

- r_1 avın büyüme oranını,
- r_2 avcının büyüme oranını,
- ε avın ortamdaki ölüm oranını,
- θ avcının ortamdaki ölüm oranını

göstermektedir.

Bu modelin kararlılık analizi ve dinamiği üzerindeki Allee etkileri Zhou [13] ve de Duman ve Çelik [5]; gecikme içeren denklemin çatallanma analizleri ise Merdan ve Karaoğlu [11] tarafından çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında ise modelin ayrıklaştırılmış halinin kararlılık ve çatallanma analizi yapılacaktır.

3.1 Ayrıklaştırma

İlk olarak (3.1) modelini Euler metodunu kullanarak ayrıklaştıracağız.

$$N'(t_0) = r_1N(t_0) - \varepsilon P(t_0)N(t_0)$$

denkleminde

$$N'(t_0) \approx \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

olarak alınır ve $\delta = t_1 - t_0$ ayrıklaştırma adımı olarak seçilirse

$$N(t_1) \approx N(t_0) + \delta N(t_0)(r_1 - \varepsilon P(t_0))$$

yani

$$N \longrightarrow N + \delta N(r_1 - \varepsilon P)$$

ifadesi elde edilir.

Benzer şekilde

$$P(t_1) \approx P(t_0) + \delta P(t_0)(r_2 - \theta \frac{P(t_0)}{N(t_0)})$$

denkleminde

$$P \longrightarrow P + \delta P(r_2 - \theta \frac{P}{N})$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Euler methodu ile (3.1) sistemine karşılık gelen

$$\begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} N + \delta N(r_1 - \varepsilon P) \\ P + \delta P(r_2 - \theta \frac{P}{N}) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

ayrık modeli elde edilir.

3.2 Pozitif Denge Noktasının Varlığı

İlk olarak (3.2) modeline ait pozitif denge noktalarını araştıralım. Sistemin denge noktaları

$$\begin{cases} N^* = N^* + \delta N^*(r_1 - \varepsilon P^*) \\ P^* = P^* + \delta P^*(r_2 - \theta \frac{P^*}{N^*}) \end{cases} \quad (3.3)$$

denklemlerini sağlayan (N^*, P^*) değerleridir.

$$N^* = N^* + \delta N^*(r_1 - \varepsilon P^*) \implies 0 = \delta N^*(r_1 - \varepsilon P^*)$$

olup $\delta \neq 0$ olduğundan

$$N^* = 0 \quad \text{veya} \quad r_1 - \varepsilon P^* = 0 \implies P^* = \frac{r_1}{\varepsilon}$$

bulunur.

$$P^* = P^* + \delta P^* \left(r_2 - \theta \frac{P^*}{N^*} \right) \implies 0 = \delta P^* \left(r_2 - \theta \frac{P^*}{N^*} \right)$$

olup benzer şekilde $\delta \neq 0$ olduğundan

$$P^* = 0 \quad \text{veya} \quad \left(r_2 - \theta \frac{P^*}{N^*} \right) = 0 \implies N^* = \frac{r_2}{\theta P^*}$$

bulunur. $N^* = 0$ ve $P^* = 0$ için sistem tanımsız olur. Böylece (3.3) denklemlerini bir tek

$$(N^*, P^*) = \left(\frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right) \quad (3.4)$$

noktası sağlar ve bu nokta sistemin tek denge noktası olup $r_1, r_2, \varepsilon, \theta > 0$ sağlandığından dolayı pozitiftir.

3.3 Denge Noktasının Karakteristik Polinomu

(3.2) sisteminin Jakobiyen matrisi,

$$\begin{cases} f(N, P) = N + \delta N(r_1 - \varepsilon P) \\ g(N, P) = P + \delta P \left(r_2 - \theta \frac{P}{N} \right) \end{cases}$$

olmak üzere

$$J(N, P) = \begin{bmatrix} f_N(N, P) & f_P(N, P) \\ g_N(N, P) & g_P(N, P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \delta r_1 - \varepsilon \delta P & -\varepsilon \delta N \\ \frac{\theta \delta P^2}{N^2} & 1 + \delta r_2 + \frac{2\theta \delta P}{N} \end{bmatrix}$$

dir. Jakobiyen matrisinin (N^*, P^*) noktasındaki değeri ise

$$J^* := J(N^*, P^*) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta \theta r_1}{r_2} \\ \frac{\delta r_2^2}{\theta} & 1 - \delta r_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca (N^*, P^*) denge noktasının karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - i_z(J^*)\lambda + \det(J^*)$$

olup

$$\begin{aligned} i_z(J^*) &= 2 - \delta r_2 \\ \det(J^*) &= 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak (N^*, P^*) denge noktasının karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \delta r_2)\lambda + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 \quad (3.5)$$

olarak bulunur.

3.4 Kararlılık ve Çatallanma Koşulları

Şimdi lemmayı kullanarak (3.2) modelinin

$$(N^*, P^*) = \left(\frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right)$$

denge noktasının kararlı olabilmesi için veya bu noktada flip çatallanmanın görülebilmesi için gereken koşulları belirleyelim.

Teorem 2.3.5 2. mertebeden lineer olmayan bir dinamik sistemin bir denge noktasındaki karakteristik polinomu $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$ ve $B, C \in \mathfrak{R}$ olmak üzere;

- 1) $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $C < 1 \Rightarrow$ bu denge noktası kararlıdır.
- 2) $B \neq 0, 2$ ve $F(1) = 0 \Rightarrow$ bu denge noktasında flip çatallanma gözlemlenebilir.

Kararlılık Koşulları

Teorem 2.3.5 gereğince (N^*, P^*) denge noktasının kararlı olabilmesi için (3.5) ifadesindeki $F(\lambda)$ fonksiyonun

- K1)** $F(1) > 0$
- K2)** $F(-1) > 0$
- K3)** $1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 1$

şartlarını aynı anda sağlaması gerekmektedir. Şimdi bu şartların hangi koşullar altında sağlanacağını bulalım.

K1) $F(1) > 0$ durumunu sağlayan koşullar:

$$\begin{aligned} F(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \delta r_2)\lambda + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 &\Rightarrow F(1) = 1 - 2 + \delta r_2 + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 \\ &\Rightarrow F(1) = \delta^2 r_1 r_2 \end{aligned}$$

ve daima $r_1, r_2 > 0$ olduğundan $\forall \delta > 0$ için $F(1) > 0$ olma şartı gerçekleşir.

K2) $F(-1) > 0$ durumunu sağlayan koşullar:

$$\begin{aligned} F(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \delta r_2)\lambda + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 &\Rightarrow F(-1) = 1 + 2 - \delta r_2 + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 \\ &\Rightarrow F(-1) = r_1 r_2 \delta^2 - 2r_2 \delta + 4 \\ &\Rightarrow F(-1) = (\delta - \delta_1^*)(\delta - \delta_2^*) \end{aligned}$$

olup $F(-1) = 0$ in reel kökleri

$$\delta_1^* = \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2} \quad \text{ve} \quad \delta_2^* = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2}$$

olmak üzere $\Delta = r_2^2 - 4r_1 r_2 > 0$ için mevcuttur. Bu durumda $F(-1)$ fonksiyonun işaretini inceleyebilmemiz için reel köklerinin mevcut olup olmamasına göre iki ayrı durumu incelememiz gerekmektedir.

• Kabul edelim ki $\Delta = r_2^2 - 4r_1 r_2 > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta = r_2^2 - 4r_1 r_2 > 0 &\Rightarrow r_2(r_2 - 4r_1) > 0 \\ &\Rightarrow r_2 - 4r_1 > 0 \quad (r_2 > 0 \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

olup $F(-1)$ fonksiyonun δ_1^* ve δ_2^* reel kökleri mevcuttur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 r_2^2 - 4r_1r_2 > 0 &\Rightarrow r_2^2 > r_2^2 - 4r_1r_2 > 0 \\
 &\Rightarrow r_2 > \sqrt{r_2^2 - 4r_1r_2} > 0 \\
 &\Rightarrow r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1r_2} > 0 \\
 &\Rightarrow \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1r_2}}{r_1r_2} > 0 \\
 &\Rightarrow \delta_1^* > 0
 \end{aligned}$$

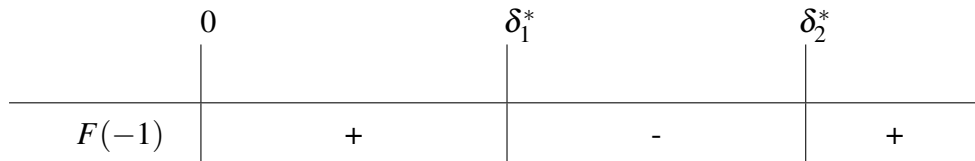
ve

$$\frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1r_2}}{r_1r_2} < \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - 4r_1r_2}}{r_1r_2}$$

ifadeleri sağlandığından

$$0 < \delta_1^* < \delta_2^*$$

elde edilir. Böylece $F(-1)$ fonksiyonunun reel köklerinin olması durumunda işaret tablosu



şeklinde olur.

Sonuç olarak $r_2 > 4r_1$ iken $0 < \delta < \delta_1^*$ veya $\delta > \delta_2^*$ olması halinde $F(-1) > 0$ sağlanır.

- Kabul edelim ki $\Delta = r_2^2 - 4r_1r_2 < 0$ yani $r_2 < 4r_1$ olsun.

Bu durumda $F(-1)$ fonksiyonunun reel kökleri mevcut olmadığından her $\delta > 0$ için pozitiftir.

Aynı durum $r_2 = 4r_1$ iken de geçerlidir. $r_2 = 4r_1$ için $F(-1)$ fonksiyonu çift katlı köke sahip olup $\forall \delta > 0$ için pozitiftir.

Sonuç olarak $r_2 \leq 4r_1$ iken $\delta > 0 \Rightarrow F(-1) > 0$ sağlanır.

K3) $1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 1$ durumunu sağlayan koşullar:

$$\begin{aligned} 1 - r_2 \delta + r_1 r_2 \delta^2 < 1 &\Rightarrow -\delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 0 \\ &\Rightarrow r_2 \delta (\delta r_1 - 1) < 0 \end{aligned}$$

ve $\delta, r_2 > 0$ olduğundan **K3** koşulunun gerçekleşebilmesi için

$$\delta r_1 - 1 < 0 \Rightarrow \delta < \frac{1}{r_1}$$

şartının sağlanması gerekmektedir.

Şimdi $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 1$ koşullarının aynı anda sağlandığı durumlara bakalım. Öncelikle şimdiye kadar elde ettiğimiz koşulları hatırlayalım:

$$\delta_1^* = \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2} \quad \text{ve} \quad \delta_2^* = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2}$$

olmak üzere:

- $\forall \delta > 0$ için $F(1) > 0$ sağlanır.
- $r_2 > 4r_1$ iken $0 < \delta < \delta_1^*$ veya $\delta > \delta_2^* \Rightarrow F(-1) > 0$ sağlanır.
- $r_2 \leq 4r_1$ iken $\delta > 0 \Rightarrow F(-1) > 0$ sağlanır.
- $\delta < \frac{1}{r_1} \Rightarrow 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 1$ sağlanır.

Ayrıca

$$\delta_1^* < \frac{1}{r_1} < \delta_2^*$$

olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Teorem 3.4.1. (3.5) ifadesindeki $F(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartlardan birisini sağlıyorsa (N^*, P^*) denge noktası karardır:

- i) $r_2 > 4r_1$ iken $0 < \delta < \delta_1^*$,
- ii) $r_2 \leq 4r_1$ iken $0 < \delta < \frac{1}{r_1}$.

Flip Çatallanma Koşulları

Teorem (2.3.5) dan (N^*, P^*) denge noktasında flip çatallanmanın görülebilmesi için

$$\mathbf{F1)} F(-1) = 0$$

$$\mathbf{F2)} -(2 - \delta r_2) \neq 0, 2$$

şartlarının aynı anda sağlanması gerekmektedir.

F1) $F(-1) = 0$ şartını sağlayan değerleri bulalım.

$$\begin{aligned} F(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \delta r_2)\lambda + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 &\implies F(-1) = 1 + 2 - \delta r_2 + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 \\ &\implies F(-1) = r_1 r_2 \delta^2 - 2r_2 \delta + 4 \end{aligned}$$

ifadesine göre **F1** koşulunu sağlayan değerler $F(-1)$ fonksiyonunun kökleri olan

$$\delta_1^* = \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2} \quad \text{ve} \quad \delta_2^* = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2}$$

dır. Ayrıca δ_1^* ve δ_2^* değerlerinin mevcut olabilmesi için,

$$\Delta = r_2^2 - 4r_1 r_2 \geq 0 \implies r^2 \geq 4r_1$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir.

Özetle $r^2 > 4r_1$ iken $\delta = \delta_1^*$ veya $\delta = \delta_2^* \implies F(-1) = 0$ gerçekleşir.

F2) $-(2 - \delta r_2) \neq 0, 2$ şartını sağlayan değerleri belirleyelim.

$$\begin{aligned} -(2 - \delta r_2) \neq 0, 2 &\implies -2 + \delta r_2 \neq 0, 2 \\ &\implies \delta r_2 \neq 2, 4 \\ &\implies \delta \neq \frac{2}{r_2}, \frac{4}{r_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.4.2. $F(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa (N^*, P^*) noktasında flip çatallanma görülebilir:

$$F) \quad r_2 \geq 4r_1 \text{ iken } \delta = \delta_1^* \text{ veya } \delta = \delta_2^* \quad \ni \quad \delta \neq \frac{2}{r_2}, \frac{4}{r_2}.$$

Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi ile Flip Çatallanma Koşullarının Belirlenmesi

(3.2) ayrık modelinin

$$(N^*, P^*) = \left(\frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right)$$

pozitif denge noktasındaki karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \delta r_2)\lambda + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2$$

olmak üzere bu noktada flip çatallanma görülebilmesi için sağlanması gereken önkoşulun

$$F) \quad r_2 \geq 4r_1 \text{ iken } \delta = \delta_1^* \text{ veya } \delta = \delta_2^* \quad \ni \quad \delta \neq \frac{2}{r_2}, \frac{4}{r_2}$$

olduğunu göstermiştik. Şimdi bu denge noktasında **F** koşulu altında flip çatallanmanın kesin varlığını Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi yardımıyla gösterelim.

Öncelikle **F** koşulunu sağlayan bir $\delta = \delta^*$ seçelim. Bu durumda bu denge noktasında flip çatallanma ortaya çıkabilir ve

$$\lambda_1 = -1$$

olur. Ayrıca (3.5) ifadesinden

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - \delta^* r_2$$

olduğundan ve kabulümüz gereğince $\lambda_1 = -1$ gerçekleştiğinden

$$\lambda_2 = 3 - \delta^* r_2$$

bulunur.

Denge Noktasını Orijine Taşıma

Sisteme Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi'ni uygulamak için öncelikle sistemin denge noktasını yeni bir dönüşümle orijine taşıyalım. Bunun için

$$\begin{cases} U_t = N_t - N^* \\ V_t = P_t - P^* \end{cases}$$

dönüşümlerini uygulayalım. Böylece $(N^*, P^*) = \left(\frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} U_t = N_t - \frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2} &\Rightarrow N_t = U_t + \frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2} \\ &\Rightarrow N_{t+1} = U_{t+1} + \frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} V_t = P_t - \frac{r_1}{\varepsilon} &\Rightarrow P_t = V_t + \frac{r_1}{\varepsilon} \\ &\Rightarrow P_{t+1} = V_{t+1} + \frac{r_1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

ifadeleri (3.2) ayrık modelde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ \frac{r_2 \delta^*}{\theta} & 1 - r_2 \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(U, V, \tilde{\delta}) \\ f_2(U, V, \tilde{\delta}) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir ve burada

$$f_1(U, V) = -\varepsilon \delta^* \mathbf{U}\mathbf{V} - \frac{\theta r_1}{r_2} \tilde{\delta} \mathbf{V} - \varepsilon \tilde{\delta} \mathbf{U}\mathbf{V} + O(|\mathbf{U}| + |\mathbf{V}| + |\tilde{\delta}|)^4$$

$$\begin{aligned} f_2(U, V) &= \frac{2\varepsilon r_2^2 \delta^*}{\theta r_1} \mathbf{U}\mathbf{V} - r_2 \tilde{\delta} \mathbf{V} - \frac{\varepsilon r_2^3 \delta^*}{\theta^2 r_1} \mathbf{U}^2 + \frac{r_2^2}{\theta} \tilde{\delta} \mathbf{U} - \frac{\varepsilon r_2 \delta^*}{r_1} \mathbf{V}^2 + \frac{\varepsilon^2 r_2^4 \delta^*}{\theta^3 r_1^2} \mathbf{U}^3 + \frac{\varepsilon^2 r_2^2 \delta^*}{\theta r_1^2} \mathbf{U}\mathbf{V}^2 - \frac{2\varepsilon^2 r_2^3 \delta^*}{\theta^2 r_1^2} \mathbf{U}^2 \mathbf{V} \\ &- \frac{\varepsilon r_2}{r_1} \tilde{\delta} \mathbf{V}^2 + \frac{2\varepsilon r_2^2}{\theta r_1} \delta \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{V} - \frac{\varepsilon r_2^3}{\theta^2 r_1} \tilde{\delta} \mathbf{U}^2 + O(|\mathbf{U}| + |\mathbf{V}| + |\tilde{\delta}|)^4 \end{aligned}$$

dir. Böylece (3.6) sisteminin denge noktası $(0, 0)$ dir.

T Matrisinin İnşası

Şimdiye kadar (3.2) sistemi orijine taşınarak dinamik yapıları lokal topolojik olarak birbirine denk olan (3.6) sistemi elde edildi. Bundan sonra ise (3.6) sistemi, Merkez

Çokkathlı Teoremi'nin uygulanabilmesi için (2.26) formuna dönüştürülmelidir. Bu yüzden

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

dönüşümü altında sistemi

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(X,Y) \\ g_2(X,Y) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

şekline dönüştüren tersinir bir T matrisi bulmamız gerekir.

Bu yüzden sütunları

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ \frac{r_2 \delta^*}{\theta} & 1 - r_2 \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrisinin özvektörleri olan bir T matrisini inşa edelim.

Öncelikle A matrisinin özdeğerlerini bulalım. (3.6) ile (3.2) sisteminin dinamikleri lokal topolojik olarak denk olduğundan dolayı bileşke matrislerinin özdeğerleri de aynıdır. Bu durumda A matrisinin özdeğerleri, $\delta = \delta^*$ kabulümüzden dolayı

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 - \delta^* r_2 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi A matrisinin özvektörlerini bulalım.

$\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ olmak üzere

$$(A - \lambda_1 I)\xi = 0$$

eşitliğini sağlar. Bu durumda

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olup buradan

$$\begin{cases} (a_{11} + 1)\xi_1 + a_{12}\xi_2 = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} + 1)\xi_2 = 0 \end{cases}$$

denklem sistemini sağlayan bütün $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ değerleri A matrisinin $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür.

Özel olarak

$$\xi = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -1 - a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

olarak alalım. Böylece

$$\begin{aligned} (a_{11} + 1)a_{12} + a_{12}(-1 - a_{11}) &= a_{11}a_{12} + a_{12} - a_{12} - a_{12}a_{11} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_{21}a_{12} + (a_{22} + 1)(-1 - a_{11}) &= a_{21}a_{12} - a_{22} - a_{22}a_{11} - 1 - a_{11} \\ &= -(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) - (a_{11} + a_{22}) - 1 \\ &= -\det(A) - i_z(A) - 1 \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} i_z(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_2 \end{aligned} \implies -\det(A) - i_z(A) - 1 = \lambda_2 + 1 - \lambda_2 - 1 = 0$$

sağlandığından $\xi = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -1 - a_{11} \end{pmatrix}$ değeri $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

λ_2 özdeğerine karşılık gelen bir özvektör bulalım. λ_2 özdeğerine karşılık gelen bir

özvektörü

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda_2)\eta_1 + a_{12}\eta_2 = 0 \\ a_{21}\eta_1 + (a_{22} + \lambda_2)\eta_2 = 0 \end{cases}$$

denklem sistemini sağlayan $\eta = \{\eta_1, \eta_2\}$ vektörüdür. Özel olarak

$$\eta = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ 2 - \delta^* r_2 \end{pmatrix}$$

alınırsa

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_2)a_{12} + a_{12}(\lambda_2 - a_{11}) &= a_{11}a_{12} - a_{12}\lambda_2 + a_{12}\lambda_2 + a_{12}\lambda_2 - a_{11}a_{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_{21}a_{12} + (a_{22} - \lambda_2)(\lambda_2 - a_{11}) &= a_{21}a_{12} + a_{22}\lambda_2 - a_{22}a_{11} - \lambda_2^2 + \lambda_2a_{11} \\ &= -\det(A) + \lambda_2 \text{iz}(A) - \lambda_2^2 \\ &= -\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_2^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

sağlandığından $\eta = \{a_{12}, \lambda_2 - a_{11}\}$ vektörü λ_2 özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Ayrıca ξ ve η vektörlerinin Cesoraiton değeri

$$\begin{aligned} \det(\xi, \eta) &= \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ -1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix} \\ &= a_{12}\lambda_2 - a_{12}a_{11} + a_{12} + a_{12}a_{11} \\ &= a_{12}(\lambda_2 + a_{11}) \\ &= a_{12}(\lambda_2 + 1) \end{aligned}$$

olup kabulümüzden $\lambda_2 \neq \mp 1$ olduğundan sıfırdan farklıdır.

Bu durumda ξ ve η özvektörleri lineer bağımsız olup aradığımız T matrisi

$$T = \begin{pmatrix} \xi, \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} & -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ -2 & 2 - \delta^* r_2 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur ve

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - \delta^* r_2 & \frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ 2 & -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \end{pmatrix}$$

olur.

Yeni Sistem Oluşturma

Bu kısımda

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} & -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ -2 & 2 - \delta^* r_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} & -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ -2 & 2 - \delta^* r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ifadesini sağlayan T dönüşümünü (3.6) sistemine uygulayalım.

$$T^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \longrightarrow T^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta r_1 \delta^*}{r_2} \\ \frac{r_2 \delta^*}{\theta} & 1 - r_2 \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right] + T^{-1} \begin{pmatrix} f_1(U, V, \tilde{\delta}) \\ f_2(U, V, \tilde{\delta}) \end{pmatrix}$$

olup bu ifade yeniden düzenlenirse $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 3 - \delta^*$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(X, Y) \\ g_2(X, Y) \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir.

Burada

$$g_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \alpha_1 \mathbf{X}^2 + \alpha_2 \mathbf{X}\mathbf{Y} + \alpha_3 \tilde{\delta} \mathbf{X} + \alpha_4 \tilde{\delta} \mathbf{Y} + \alpha_5 \mathbf{X}^3 + \alpha_6 \tilde{\delta} \mathbf{X}^2 + O(|\mathbf{X}| + |\mathbf{Y}| + |\tilde{\delta}|)^4$$

$$g_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \beta_1 \mathbf{X}^2 + \beta_2 \mathbf{X}\mathbf{Y} + \beta_3 \tilde{\delta} \mathbf{X} + \beta_4 \tilde{\delta} \mathbf{Y} + \beta_5 \mathbf{X}^3 + \beta_6 \tilde{\delta} \mathbf{X}^2 + O(|\mathbf{X}| + |\mathbf{Y}| + |\tilde{\delta}|)^4$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{6\epsilon r_2 \delta^{*2}}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4\epsilon r_2 \delta^*}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{\epsilon r_1 r_2 \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4\epsilon \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\epsilon r_2^2 \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{2\epsilon r_1 r_2 \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{4\epsilon r_2 \delta^*(2 - \delta^* r_2)}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{\epsilon r_2 \delta^{*2}(2 - \delta^* r_2)}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\alpha_3 = \frac{2r_2}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{r_1 r_2 \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{r_2(2 - \delta^* r_2)}{\delta^*(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\alpha_4 = -\frac{r_2(2 - \delta^* r_2)}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{r_1 r_2 \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{r_2(2 - \delta^* r_2)^2}{2\delta^*(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\alpha_5 = -\frac{r_1 r_2 \epsilon^2 \delta^{*4}}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4\epsilon^2 r_2 \delta^{*2}}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{4\epsilon^2 r_2 \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\alpha_6 = \frac{4r_2 \epsilon \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{r_1 r_2 \epsilon \delta^{*2}}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4r_2 \epsilon}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{2\epsilon(2 - \delta^* r_2)}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

ile

$$\beta_1 = -\frac{4r_2 \epsilon \delta^{*2}}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{4r_2 \epsilon \delta^*}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{r_1 r_2 \epsilon \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4\epsilon \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\beta_2 = -\frac{2r_2^2 \epsilon \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{2r_1 r_2 \epsilon \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4r_2 \epsilon \delta^*(2 - \delta^* r_2)}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{2r_2 \epsilon \delta^{*2}}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\beta_3 = \frac{r_1 r_2 \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{2r_2}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{2r_2}{\delta^*(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\beta_4 = \frac{r_2(2 - \delta^* r_2)}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{r_1 r_2 \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{r_2(2 - \delta^* r_2)}{\delta^*(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\beta_5 = \frac{r_1 r_2 \epsilon^2 \delta^{*4}}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{4r_2 \epsilon^2 \delta^{*2}}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4r_2 \epsilon^2 \delta^{*3}}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

$$\beta_6 = -\frac{4r_2 \epsilon \delta^*}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{r_1 r_2 \epsilon \delta^{*2}}{(\delta^* r_2 - 4)} + \frac{4r_2 \epsilon}{r_1(\delta^* r_2 - 4)} - \frac{4\epsilon}{(\delta^* r_2 - 4)}$$

dir.

Merkez Çokkatlı Uzayının Hesaplanması

En son elde edilen (3.4) lineer sisteminin merkez çokkatlı uzayı

$$W^c(0,0,0) = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tilde{\delta}) \in \mathfrak{R}^3 : \mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) = h_1 \mathbf{X}^2 + h_2 \mathbf{X} \tilde{\delta} + h_3 \tilde{\delta}^2\}$$

normal formunda olmak üzere

$$\mathbf{N}(h(\mathbf{X})) = h(-\mathbf{X} + g_1(\mathbf{X}, h(\mathbf{X}))) - \lambda_2 h(\mathbf{X}) - g_2(\mathbf{X}, h(\mathbf{X})) = 0$$

eşitliğini sağlar. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(h(\mathbf{X})) &= (h_1 - h_1(3 - \delta^* r_2) - \beta_1) \mathbf{X}^2 + (\beta_5 + h_1 \beta_2 - 2h_1 \alpha_1) \mathbf{X}^3 \\ &+ (h_2 - 2h_1 \alpha_3 - h_2(3 - \delta^* r_2 - \beta_3)) \tilde{\delta} \mathbf{X} + (h_2 \alpha_1 - h_2 \beta_2 - h_1 \beta_4 - \beta_6) \tilde{\delta} \mathbf{X}^2 \\ &+ (h_2 \alpha_3 - h_3 \beta - h_2 \beta_4) \tilde{\delta}^2 \mathbf{X} + (h_3 - h_3(3 - \tilde{\delta} r_2)) \tilde{\delta}^2 - \beta_4 h_3 \tilde{\delta}^3 \end{aligned}$$

olup çokkatlı uzayın katsayıları hesaplamalar sonucunda

$$h_1 = \frac{-4\epsilon \delta^* - 4\epsilon r_2 \delta^{*2} + \epsilon r_1 r_2 \delta^{*3} + \frac{4\epsilon r_2 \delta^*}{r_1}}{(\delta^* r_2 - 4)(\delta^* r_2 - 2)}$$

$$h_2 = \frac{4 - \delta^*(2r_2 - r_1 r_2 \delta^*)}{\delta^*(\delta^* r_2 - 4)^2}$$

$$h_3 = 0$$

olarak bulunur. Böylece (3.4) sistemi

$$\mathbf{X} \rightarrow -\mathbf{X} + g_1(\mathbf{X}, h(\mathbf{X})) \quad (3.8)$$

sistemine indirgenmiş olur. Burada

$$g_1(\mathbf{X}, h(\mathbf{X})) = \alpha_1 \mathbf{X}^2 + (h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \mathbf{X}^3 + (\alpha_2 h_2 + h_1 \alpha_4 + \alpha_6) \tilde{\delta} \mathbf{X}^2 + (\alpha_4 h_2) \tilde{\delta}^2 \mathbf{X} + \alpha_3 \tilde{\delta} \mathbf{X}$$

dir.

Teorem 2.3.4 gereğince (3.8) sisteminde flip çatallanmanın ortaya çıkması için $\tilde{\delta}$ ça-

tallanma parametresi ve

$$f(\mathbf{X}, \tilde{\delta}) = -\mathbf{X} + \alpha_1 \mathbf{X}^2 + (h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \mathbf{X}^3 + (\alpha_2 h_2 + h_1 \alpha_4 + \alpha_6) \tilde{\delta} \mathbf{X}^2 + (\alpha_4 h_2) \tilde{\delta}^2 \mathbf{X} + \alpha_3 \tilde{\delta} \mathbf{X}$$

olmak üzere $\tilde{\delta} = 0$ iken $f(\mathbf{X}, \tilde{\delta})$ nın denge noktası $\bar{x} = 0$ ve $f_x(0,0) = -1$ olup

$$\mathbf{F1} \quad \frac{1}{2}(f_{XX}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0,0) \neq 0$$

$$\mathbf{F2} \quad f_{X\tilde{\delta}}(0,0) \neq 0$$

şatlarının sağlanması gerekir.

Elde edilen (3.8) sisteminin bir denge noktasının $(\mathbf{X}^*, \tilde{\delta}^*) = (0,0)$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$f_X(\mathbf{X}, \tilde{\delta}) = -1 + 2\alpha_1 \mathbf{X} + 3(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \mathbf{X}^2 + 2(\alpha_2 h_2 + h_1 \alpha_4 + \alpha_6) \tilde{\delta} \mathbf{X} + (\alpha_4 h_2) \tilde{\delta}^2 + \alpha_3 \tilde{\delta}$$

olup

$$f_X(0,0) = -1$$

şartı da sağlanmış olur. Şimdi $f(\mathbf{X}, \tilde{\delta})$ sisteminin **F1** ve **F2** flip çatalanma koşullarını sağlaması için gereken koşulları belirleyelim.

$$f_{XX}(\mathbf{X}, \tilde{\delta}) = 2\alpha_1 + 6(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \mathbf{X} + 2(\alpha_2 h_2 + h_1 \alpha_4 + \alpha_6) \tilde{\delta}$$

olup

$$f_{XX}(0,0) = 2\alpha_1$$

bulunur. Diğer taraftan

$$f_{XXX}(\mathbf{X}, \tilde{\delta}) = 6(h_1 \alpha_1 + \alpha_5)$$

ve

$$f_{XXX}(0,0) = 6(h_1 \alpha_1 + \alpha_5)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_{XX}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0,0) &= \frac{1}{2}4\alpha_1^2 + \frac{1}{3}6(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \\ &= 2\alpha_1^2 + 2(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$f_{X\tilde{\delta}}(\mathbf{X}, \tilde{\delta}) = 2(\alpha_2 h_2 + h_1 \alpha_4 + \alpha_6) \mathbf{X} + 2(\alpha_4 h_2) \tilde{\delta} + \alpha_3$$

olup

$$f_{X\tilde{\delta}}(0, 0) = \alpha_3$$

bulunur. O halde

$$\mathbf{F1)} 2\alpha_1^2 + 2(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \neq 0$$

$$\mathbf{F2)} \alpha_3 \neq 0$$

koşulları altında sistemde flip çatallanma ortaya çıkar.

4. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR

Bu kısımda çalışılan problemde elde edilen teorik sonuçların doğruluğu nümerik çalışmalarla desteklenecektir. Bu çalışmalar Matlab programı kullanılarak yapılmıştır. Örnek olarak (3.2) modelinde:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 0,45 \\ r_2 = 10 \\ \varepsilon = 0,03 \\ \theta = 50 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

parametre değerleri alınmış ve başlangıç değer olarak $(N(0), P(0)) = (77, 17)$ seçilmiştir. Bu parametre değerleri altında nümerik olarak çözeceğimiz sistem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N + \delta N(0,45 - (0,03)P) \\ P + \delta P(10 - 50\frac{P}{N}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Verilen (4.2) sistemin denge noktası

$$(N^*, P^*) = \left(\frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right) = (75, 15)$$

ve çatallanma değeri ise

$$\delta_c = \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1} = 0,2099$$

dur. Çünkü

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -0,0127 \\ \Rightarrow \alpha_3 &\neq 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2\alpha_1^2 + 2(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) &= 1,2871 \\ \Rightarrow 2\alpha_1^2 + 2(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) &\neq 0 \end{aligned}$$

olup **F1** ve **F2** koşulları sağlandığından dolayı $\delta_c = 0,2099$ değerinde sistemde flip

çatallanma görülür.

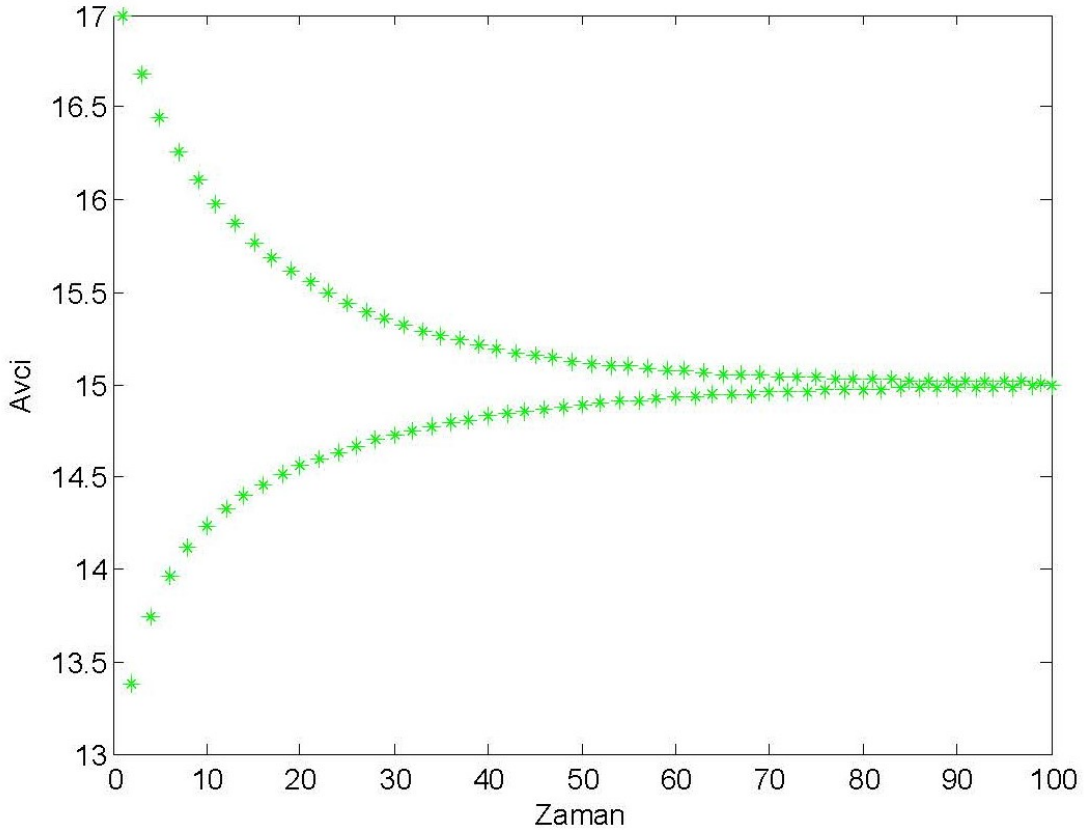
Öncelikle (4.2) sisteminde çatallanma parametresini $\delta = 0,2050$ değeri olarak alalım.

Böylece

$$10 > 4(0,45) = 1.8 \Rightarrow r_2 > 4r_1$$

$$0,2050 < 0,2099 \Rightarrow 0 < \delta < \delta_c$$

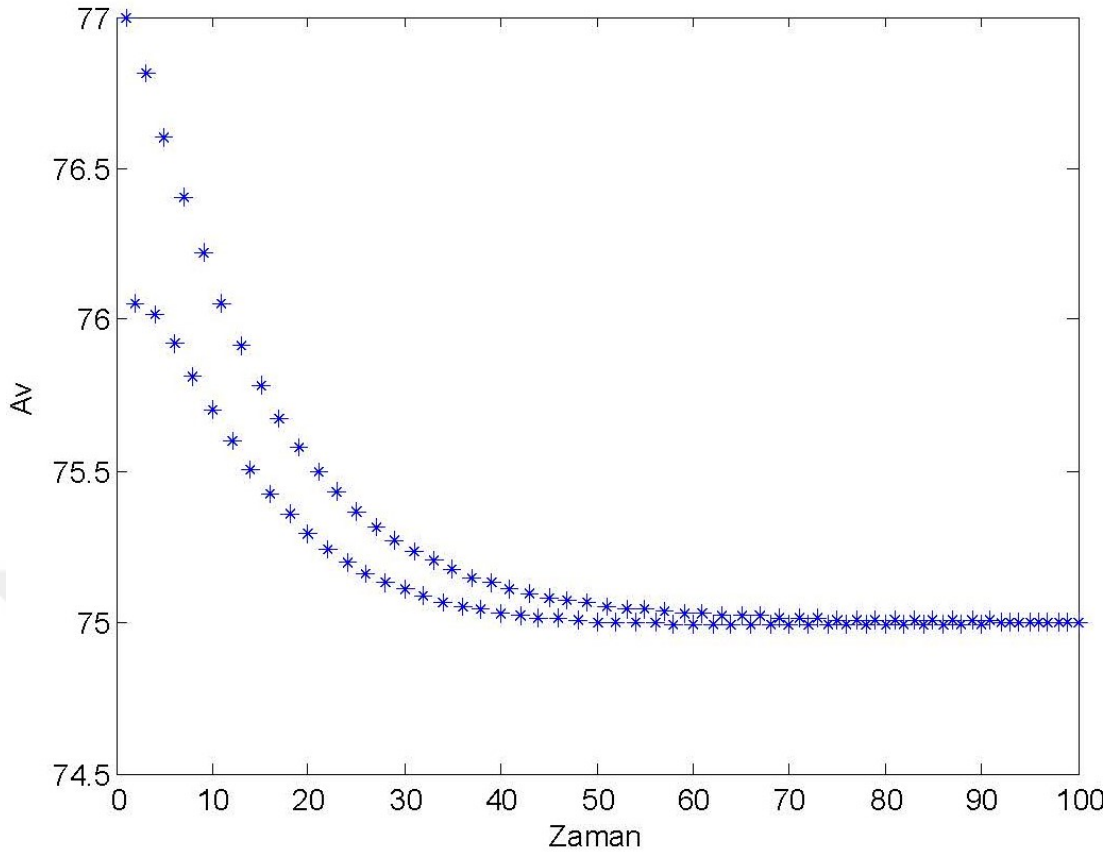
olup **Teorem 3.4.2** nin **i** koşulu gerçekleştiğinden $(N^*, P^*) = (75, 15)$ denge noktası kararlı olur. Bu durumda başlangıçtaki av-avcı sayısı zamanla denge noktasına yaklaşır. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de verilen nümerik simülasyonlar bu sonucu desteklemektedir. Şekil 4.3 ise sistemin faz portresini göstermektedir.



Şekil 4.1: $\delta = 0,2050$ olarak seçilirse $(N^*, P^*) = (75, 15)$ denge noktası kararlı olur. Böylece başlangıçta ortamda bulunan $P(0) = 17$ avcı sayısı zamanla 15 noktasına yaklaşır ve bir süre sonra bu noktada dengede kalır.

δ parametresi $0,1 \leq \delta \leq 0,35$ aralığında değişsin. Bu durumda

- $0,1 \leq \delta < \delta_c = 2,099$ iken sistemin tek denge noktası kararlı,

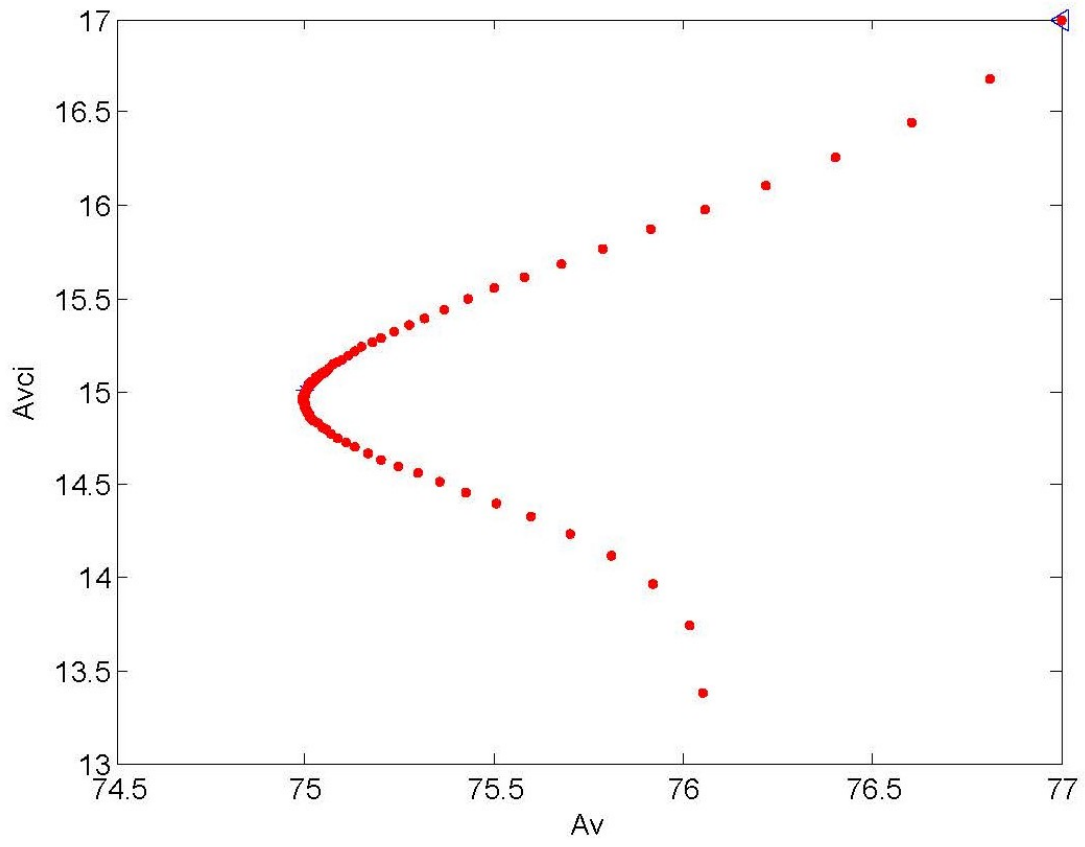


Şekil 4.2: $\delta = 0,2050$ olarak seçilirse $(N^*, P^*) = (75, 15)$ denge noktası kararlı olur. Böylece başlangıçta ortamda bulunan av sayısı $N(0) = 77$ zamanla 75 noktasına yaklaşır ve birsüre sonra bu noktada dengede kalır.

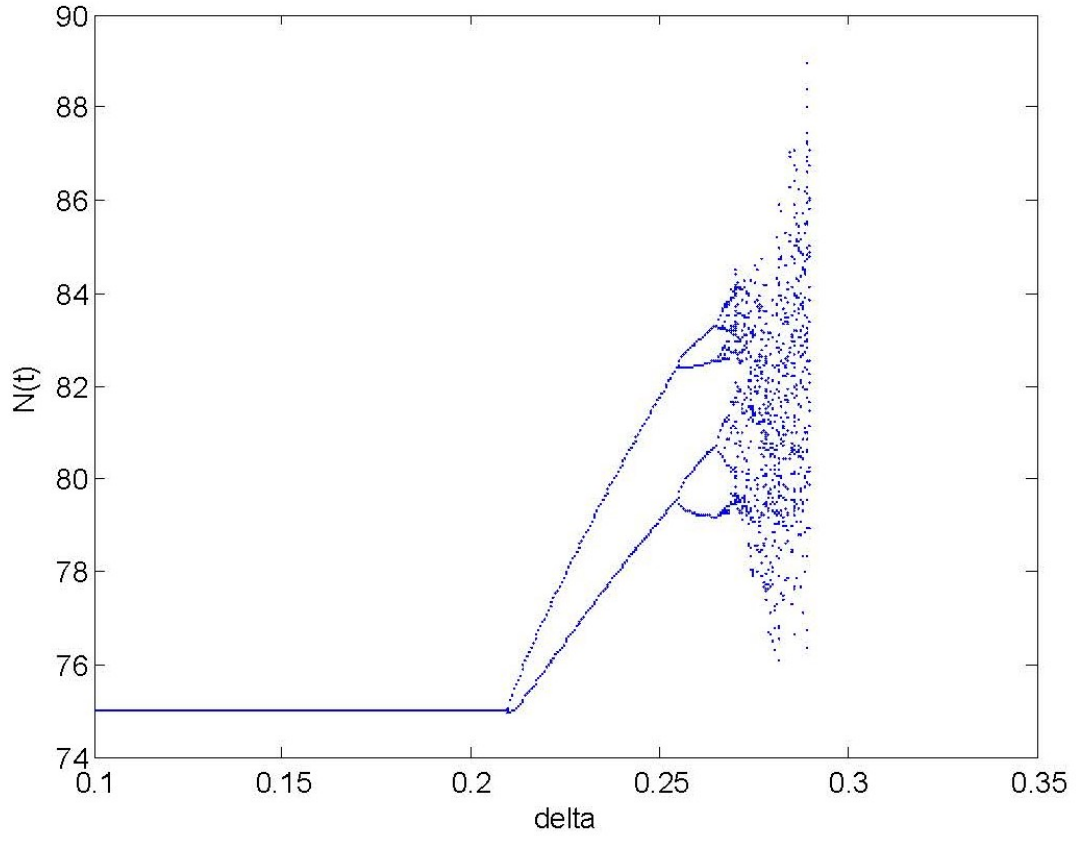
- $0,35 \geq \delta > \delta_c = 2,099$ iken sistemin tek denge noktası kararsızdır ve sistemin kararlı n-döngüsü mevcuttur (Sistemde $\delta_c = 0,2099$ değerinde flip çatallanma ortaya çıkar).

Sonuç olarak δ parametresi $0,1 \leq \delta \leq 0,35$ aralığında değerler alırken;

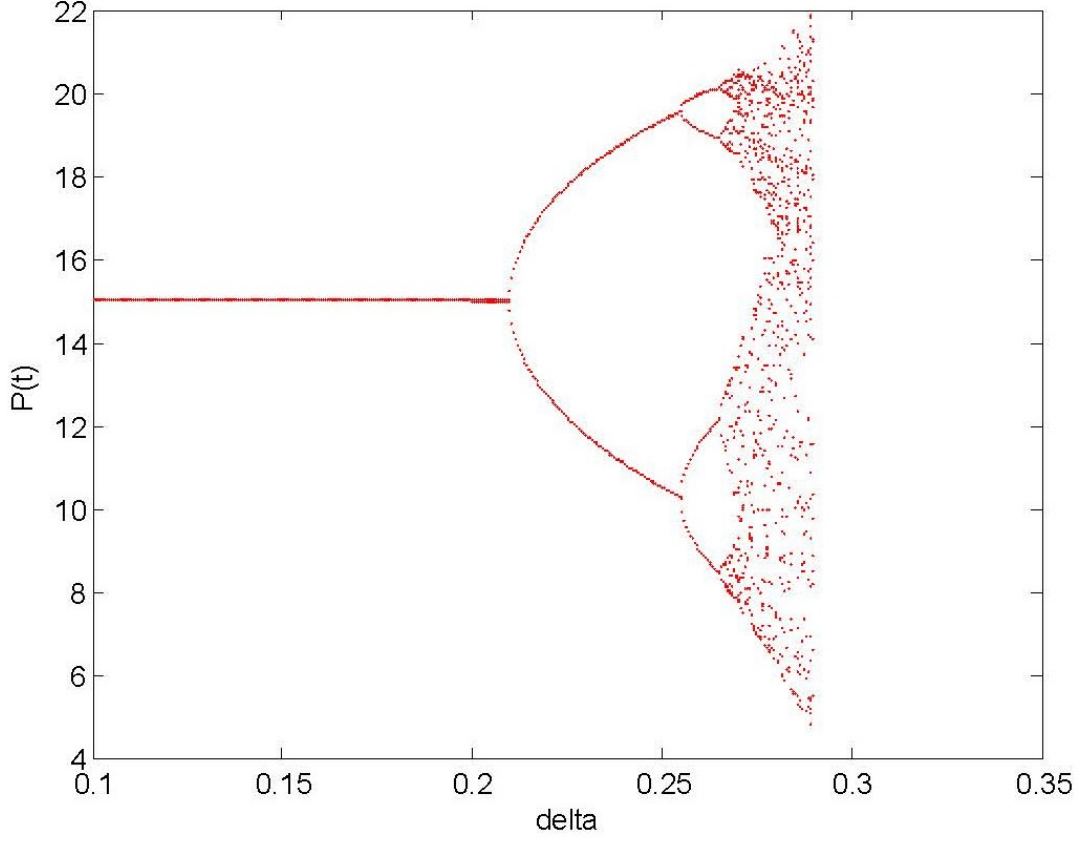
- Av popülasyonunun çatallanma diyagramı Şekil 4.4 ile,
- Avcı popülasyonunun çatallanma diyagramı ise Şekil 4.5 ile verilmiştir.



Şekil 4.3: $\delta = 0, 2050$ iken (4.2) sisteminin faz portresi



Şekil 4.4: δ parametresi $0,1 \leq \delta \leq 0,35$ aralığında değişirken av popülasyonunun çatlama diyagramı



Şekil 4.5: δ parametresi $0,1 \leq \delta \leq 0,35$ aralığında değişirken avcı popülasyonun dinamik yapısı da değişir. $\delta < \delta_c$ iken sistemde tek denge noktası mevcuttur ve bu denge noktası karardır. Bu yüzden başlangıçta ortamda bulunan avcı sayısı ne olursa olsun 15 sayısına yaklaşır ve dengede kalır. $\delta > \delta_c$ iken ise sistemdeki tek denge noktası kararsızdır ve sistemin kararlı n-döngüsü mevcuttur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Lotka-Volterra tipinde olan (3.1) popülasyon modeli ele alınmıştır. Model Euler metodu ile ayrıklaştırılmış, ayrıklaştırma adımı olan δ parametre olarak sisteme eklenmiş ve δ parametresi değişirken sistemin dinamiği analiz edilmiştir.

Yapılan çalışmaların sonucunda, sistemin denge noktasının kararlı olabilmesi ve denge noktasında flip çatallanmanın ortaya çıkabilmesi için gerekli şartlar belirlenmiştir. Böylece av ve avcı popülasyonun birlikte varolma ihtimali matematiksel olarak ifade edilmiştir.

Sistemin denge noktasında flip çatallanmanın ortaya çıkması için gereken koşullar Merkez Çokkatlı Uzay Teoremi yardımıyla belirlenmiştir. Böylece sistemin flip çatallanma değeri δ_c hesaplanmış ve $\delta < \delta_c$ ve $\delta = \delta_c$ iken ki sistemin davranışı bir örnek üzerinde nümerik simülasyonlarla gösterilmiştir. Nümerik simülasyonlar teorik sonuçları desteklemektedir.

Bu tezde flip çatallanmanın varlığını göstermek için takip edilen yöntemler diğer çatallanma çeşitlerinin var olup olmadığını araştırmak için de kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] ALLEN, L. J. S. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson, 2007.
- [2] ALLIGOOD, K., SAUER, T. D., YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical System*. Springer, 1997.
- [3] BOSHAN, C., JIEJIE, C. Bifurcation and chaotic behaviour of a discrete singular biological economic system. *Applied Mathematics and Computation* 219, 5 (2012), 2371–2386.
- [4] CARR, J. *Application of Center Manifold Theorem*. Springer, 1981.
- [5] DUMAN, O., CELIK, C. Alle effect in a discrete-time predator-prey system. *Chaos, Solitons and Fractals* 40 (2009), 1956–1962.
- [6] ELABBASY, E. M., ELSADANY, A. A., AND ZHANG, Y. Bifurcation analysis and chaos in a discrete reduced lorenz system. *Applied Mathematics and Computation* 228 (2014), 184–194.
- [7] ELAYDI, S. *An Introduction to Difference Equation*. Springer, 1996.
- [8] GHAZIANI, R. K., GOVAERTS, K., SONCK, C. Resonance and bifurcation a discrete time predator-prey system with holling functional response. *Nonlinear Analysis Real World Applications* 13 (2012), 1451–1465.
- [9] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Field*. Springer, 1983.
- [10] KUZNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 1998.

- [11] **MERDAN, H., KARAOGLU, E.** Hopf bifurcation and analysis for a ratio-dependent predator-prey system involving two delays. *The ANZIAM Journal* 55 (2014), 214–231.
- [12] **ROBINSON, C.** *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press, 1995.
- [13] **SHU-RONG, Z., YA-FENG, L., GANG, W.** The stability of predator-prey systems subject to the alle effects. *Theoretical Population Biology* 67 (2003), 23–31.
- [14] **STROGATZ, S. H.** *Nonlinear Dynamics And Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, 2000.
- [15] **WIGGINS, S.** *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2000.
- [16] **ZHANG, G., YI, S., AND BOSHAN, C.** Bifurcation analysis in a discrete differential-algebraic predator-prey system. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 38 (2014), 4559–4048.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Gökçe Sucu
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 26.07.1991 Adıyaman
E-posta : gsucu@etu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2014, Ankara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Yüksek Lisans** : 2016, TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2014-2016	TOBB ETÜ Matematik Bölümü	Burslu Y.L. Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Sucu, G.** and Merdan, H. 2016. Bifurcation and Stability Analysis of a Discrete Predator-Prey Model, 3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference, 29 August-01 September, Mersin, Turkey.