

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEK GECİKME İÇEREN REAKSİYON-DİFÜZYON SİSTEMLERİ İÇİN  
HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ ALGORİTMASI VE UYGULAMALARI**

**DOKTORA TEZİ**  
**Şeyma KAYAN**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN**

**Mart 2018**

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.....  
**Prof. Dr. Osman EROĞUL**  
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

.....  
**Prof. Dr. Oktay DUMAN**  
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 122117002 numaralı Doktora öğrencisi **Şeyma KAYAN**'ın ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "**TEK GECİKME İÇEREN REAKSİYON-DİFÜZYON SİSTEMLERİ İÇİN HOPF ÇATALANMA ANALİZİ ALGORİTMASI VE UYGULAMALARI**" başlıklı tezi **23.03.2018** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı:** **Prof. Dr. Hüseyin MERDAN** .....  
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

**Jüri Üyeleri:** **Prof. Dr. Oktay DUMAN (Başkan)** .....  
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

**Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ** .....  
Ankara Üniversitesi

**Doç. Dr. Serdar GÖKTEPE** .....  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. Fahd JARAD** .....  
Çankaya Üniversitesi

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Şeyma KAYAN

## ÖZET

Doktora Tezi

### TEK GECİKME İÇEREN REAKSİYON-DİFÜZYON SİSTEMLERİ İÇİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ ALGORİTMASI VE UYGULAMALARI

Şeyma KAYAN

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Tarih: Mart 2018

Bu tezde, tek gecikme içeren ve Neumann sınır koşullarına sahip reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin bir sınıfında gecikme teriminin değişimine bağlı olarak ortaya çıkan periyodik çözümlerin varlığı ve özellikleri analiz edilmiştir. Bunun için, gecikme terimi çatallanma parametresi olarak alınıp bahsi geçen sistem sınıfında Hopf çatallanmanın ortaya çıktığı koşullar belirlenmiştir. Bu şekilde varlığı garanti edilen periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemek için ise sistem merkez manifolduna indirgenmiştir. Aynı sınıfa ait farklı problemler için bu adımların tekrarını engellemek amacıyla bir algoritma oluşturulmuştur. Bu algoritma, Hopf çatallanma varlık analizini sadece sistemin karakteristik denkleminin katsayılarını kullanarak ve yön analizini ise sadece sistemdeki fonksiyonların Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayıları kullanarak tamamlamayı sağlayacak koşullar ve formüllerden oluşmaktadır. Böylece, bu tez çalışması ile tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin bahsi geçen sınıfı tamamen analiz edilmiştir. Elde edilen algoritma ile bu sınıfa ait dört farklı problemin Hopf çatallanma analizleri yapılmış ve böylece algoritmanın uygulanabilirliği gösterilmiştir. Ayrıca bu problemler ile difüzyon teriminin sistemlerin dinamiği üzerindeki etkisi tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Hopf çatallanma, Reaksiyon-difüzyon, Zaman gecikmesi, Kararlılık, Periyodik çözümler.

## ABSTRACT

Doctor of Philosophy

### AN ALGORITHM FOR HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF REACTION-DIFFUSION SYSTEMS WITH SINGLE DELAY AND ITS APPLICATIONS

Şeyma KAYAN

TOBB University of Economics and Technology  
Institute of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Date: March 2018

In this thesis, we analyze the existence and properties of periodic solutions of a class of systems of reaction-diffusion equations with a single delay and Neumann boundary conditions while the delay parameter changes. For this, the delay term is chosen as the bifurcation parameter and the conditions under which the Hopf bifurcation occurs in the mentioned class of reaction-diffusion systems are determined. To specify the properties of the periodic solutions whose existence guaranteed in as a result of the method described the system is reduced to the center manifold. Moreover, in order to prevent the repetition of the involved steps for different problems belonging to the same class, an algorithm is developed. This algorithm consists of the conditions and formulas that will allow the existence analysis of Hopf bifurcation to be completed only by using the coefficients of the characteristic equation of the system, and will allow the direction analysis of Hopf bifurcation to be completed merely by using the coefficients of the second degree Taylor polynomials of functions in the system. Thus, the considered class of reaction-diffusion equation systems containing a single delay is fully analyzed by this study. Hopf bifurcation analysis of four different problems belonging to this class are performed with the obtained algorithm, and thus the feasibility of the algorithm is presented. Moreover, within the scope of these four problems, effects of diffusion on the dynamics of the systems are also discussed.

**Keywords:** Hopf bifurcation, Reaction-diffusion, Time delay, Stability, Periodic solutions.

## TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Hüseyin MERDAN'a; kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine; desteklerinden ötürü Çankaya Üniversitesi yönetimi ve Matematik Bölümü öğretim üyelerine; tez çalışmamdaki yardımlarından dolayı değerli tez izleme kurulu üyeleri Prof. Dr. Oktay DUMAN'a ve Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ'a; nümerik çalışmalardaki katkılarından dolayı Doç. Dr. Serdar GÖKTEPE'ye ve jüri üyesi Doç. Dr. Fahd JARAD'a teşekkürlerimi sunarım. Destekleri ile her zaman yanımda olan aileme, arkadaşlarıma ve özellikle sevgili eşim Ahmet'e çok teşekkür ederim. Son olarak doktora eğitimimde sağladığı burstan dolayı TÜBİTAK'a ve TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>ÇİZELGE LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>KISALTMALAR</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>RESİM LİSTESİ</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Reaksiyon-Difüzyon Denklemleri . . . . .	5
1.2 Gecikmeli Diferensiyel Denklemler . . . . .	8
1.3 Çatallanma . . . . .	11
1.4 Hopf Çatallanmanın Önemi . . . . .	12
<b>2. MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1 Merkez Manifold Teoremi . . . . .	17
2.2 Parametreye Bağlı Sistemlerde Merkez Manifold . . . . .	31
<b>3. HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ</b> . . . . .	<b>35</b>
3.1 Hopf Çatallanma Teoremi ve İspatı . . . . .	35
3.1.1 Poincaré normal form . . . . .	36
3.1.2 İki boyutlu bir sistemin Poincaré normal forma dönüştürülmesi . . . . .	49
3.1.3 $n$ -boyutlu bir sistemin iki boyutlu bir sisteme indirgenmesi . . . . .	52
3.1.4 Hopf çatallanma teoremi . . . . .	60
3.2 Tez Problemi ve Tezin Amacı . . . . .	64
<b>4. TEK GECİKME İÇEREN BİR REAKSİYON-DİFÜZYON SİSTEMİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ</b> . . . . .	<b>67</b>
4.1 Literatür Taraması . . . . .	72
4.2 Lineer Kararlılık ve Hopf Çatallanmanın Varlık Analizi Algoritması . . . . .	74
4.3 Hopf Çatallanmanın Yön Analizi Algoritması . . . . .	84
4.3.1 Sistemi tek bilinmeyen içeren bir forma dönüştürme . . . . .	85
4.3.2 Özvektörleri hesaplama . . . . .	87
4.3.3 Sistemi merkez manifoldta indirgeme . . . . .	92
4.3.4 Merkez manifoldta kısıtlanmış sistemi hesaplama . . . . .	94
4.3.5 Merkez manifoldu hesaplama . . . . .	102
<b>5. TEK GECİKME İÇEREN REAKSİYON-DİFÜZYON SİSTEMLERİNDE HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ UYGULAMALARI</b> . . . . .	<b>121</b>
5.1 Gecikmeli Tümör-Bağışıklık Sistemi Etkileşimi Modeli . . . . .	121
5.2 Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Av-Avcı Modeli . . . . .	131
5.3 Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Lengyel-Epstein Modeli . . . . .	138

5.4 Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Tümör-Bağışıklık Sistemi Etkileşimi Modeli . . . . .	147
5.4.1 Matematiksel model . . . . .	147
5.4.2 Lineer kararlılık ve Hopf çatallanmanın varlık analizi . . . . .	156
5.4.3 Hopf çatallanmanın yön analizi . . . . .	163
5.4.4 Nümerik sonuçlar . . . . .	166
<b>6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR . . . . .</b>	<b>175</b>
<b>KAYNAKLAR . . . . .</b>	<b>177</b>
<b>EKLER . . . . .</b>	<b>189</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ . . . . .</b>	<b>197</b>





## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Kararlılık türleri (Strogatz, 1994). . . . .	3
Şekil 1.2: Biyolojik saat döngüsü (Url-11; Sezer, 2017). . . . .	13
Şekil 1.3: Periyod geni (Url-11; Sezer, 2017). . . . .	14
Şekil 2.1: $\mu = 0$ iken denge noktasının özdeğerlerinin dağılımı (Kuznetsov, 1998). . . . .	18
Şekil 2.2: Örnek 1'deki sistemlerin faz portreleri (Perko, 2000). . . . .	20
Şekil 2.3: Örnek 2'deki sistemlerin faz portreleri (Perko, 2000). . . . .	22
Şekil 2.4: Hiperbolik denge noktası-topolojik eşlik (Bressan, 2007). . . . .	23
Şekil 2.5: $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u})$ grafiği ile temsil edilen merkez manifold (Kuznetsov, 1998). . . . .	25
Şekil 2.6: İki boyutlu merkez manifold (Kuznetsov, 1998). . . . .	26
Şekil 2.7: Örnek 3'teki sisteme ait merkez manifoldun grafiği (Wiggins, 2003). . . . .	29
Şekil 2.8: Merkez manifold tek değildir (Kuznetsov, 1998). . . . .	30
Şekil 2.9: <i>Genişletilmiş</i> (2.18) sistemine ait merkez manifold (Kuznetsov, 1998). . . . .	33
Şekil 3.1: Çözüm, $y_1$ eksenini pozitif tarafta keser (Hassard ve diğ., 1981). . . . .	38
Şekil 3.2: Periyodik çözümün dışındaki ve içindeki çemberler (Hassard ve diğ., 1981). . . . .	48
Şekil 3.3: Denge noktasının çatallanma değerinden önce kararlı olduğu durum (Wiggins, 2003). . . . .	63
Şekil 3.4: Denge noktasının çatallanma değerinden önce kararsız olduğu durum (Wiggins, 2003). . . . .	64
Şekil 4.1: $\mathbf{V}_1$ - $\mathbf{V}_4$ koşullarını hesaplama diyagramı. . . . .	84
Şekil 4.2: Üstel ifadeleri hesaplama diyagramı. . . . .	99
Şekil 4.3: $\omega_j$ değerini hesaplama diyagramı. . . . .	100
Şekil 4.4: $c$ , $c^*$ ve $\bar{s}$ sabitlerini hesaplama diyagramı. . . . .	101
Şekil 4.5: $i + j = 2$ için $\mathbf{h}_{ij}(0)$ vektörlerini hesaplama diyagramı. . . . .	101
Şekil 4.6: $i + j = 2$ için $g_{ij}(0)$ katsayısını hesaplama diyagramı. . . . .	102
Şekil 4.7: $D_{20}$ sabitini hesaplama diyagramı. . . . .	107
Şekil 4.8: $\mathbf{K}_{20}$ vektörünü hesaplama diyagramı. . . . .	108
Şekil 4.9: $\mathbf{W}_{20}(0;0)$ vektörünü hesaplama diyagramı. . . . .	109
Şekil 4.10: $\mathbf{W}_{20}(-\tau_{j,0};0)$ vektörünü hesaplama diyagramı. . . . .	109
Şekil 4.11: $D_{11}$ sabitini hesaplama diyagramı. . . . .	112
Şekil 4.12: $\mathbf{K}_{11}$ vektörünü hesaplama diyagramı. . . . .	112
Şekil 4.13: $\mathbf{W}_{11}(0;0)$ vektörünü hesaplama diyagramı. . . . .	113
Şekil 4.14: $\mathbf{W}_{11}(-\tau_{j,0};0)$ vektörünü hesaplama diyagramı. . . . .	114
Şekil 4.15: (a) $h_{21_1}(0)$ katsayısını hesaplama diyagramı. (b) $h_{21_2}(0)$ katsayısını hesaplama diyagramı. . . . .	115
Şekil 4.16: $g_{21}(0)$ katsayısını hesaplama diyagramı. . . . .	116
Şekil 4.17: $c_1(0)$ Poincaré normal form katsayısını hesaplama diyagramı. . . . .	117

Şekil 5.1: $\tau = 0.05 < \tau_{2,0}$ iken $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$ başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir. . . . .	130
Şekil 5.2: $\tau = 0.1 < \tau_{2,0}$ iken $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$ başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.	130
Şekil 5.3: $\tau = \tau_{2,0} = 0.2669$ iken $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$ başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.	131
Şekil 5.4: $\tau = 0.3 > \tau_{2,0}$ iken $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$ başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.	131
Şekil 5.5: $d_1 = d_2 = 0$ ve $\tau = 15 < 21.3827$ iken $(u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ başlangıç değerine sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t)$ solda, avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t)$ ortada ve (5.15) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir. . . . .	135
Şekil 5.6: $d_1 = 0.2, d_2 = 3$ ve $\tau = 15 < 21.3827$ iken $u(x, 0) = 0.5333 + 0.02 \cos(x)$ ve $v(x, 0) = 0.4667 + 0.03 \cos(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarına sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t, x)$ solda ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t, x)$ sağda verilmiştir. . . . .	136
Şekil 5.7: $d_1 = d_2 = 0$ ve $\tau = 21.3827$ iken $(u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ başlangıç değerine sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t)$ solda, avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t)$ ortada ve (5.15) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir. . . . .	136
Şekil 5.8: $d_1 = 0.2, d_2 = 3$ ve $\tau = 21.3827$ iken $u(x, 0) = 0.5333 + 0.02 \cos(x)$ ve $v(x, 0) = 0.4667 + 0.03 \cos(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarına sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t, x)$ solda ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t, x)$ sağda verilmiştir.	136
Şekil 5.9: $d_1 = d_2 = 0$ ve $\tau = 25 > 21.3827$ iken $(u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ başlangıç değerine sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t)$ solda, avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t)$ ortada ve (5.15) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir. . . . .	137
Şekil 5.10: $d_1 = 0.2, d_2 = 3$ ve $\tau = 25 > 21.3827$ iken $u(x, 0) = 0.5333 + 0.02 \cos(x)$ ve $v(x, 0) = 0.4667 + 0.03 \cos(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarına sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t, x)$ solda ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t, x)$ sağda verilmiştir. . . . .	137
Şekil 5.11: Hidra rejenerasyonu. . . . .	138
Şekil 5.12: Bağışıklık yanıtı (İmmün yanıt) süreci. . . . .	151
Şekil 5.13: Efektör hücre-tümör hücre etkileşimi (Kuznetsov ve diğ., 1994). . .	152
Şekil 5.14: $c_1 = c_2 = 0$ ve $\tau = 0.1 < 0.2121$ iken $(u_0, v_0) = (2, 8)$ başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t)$ solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t)$ ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.	168

Şekil 5.15: $c_1 = c_2 = 0$ ve $\tau = 0.2121$ iken $(u_0, v_0) = (2, 8)$ başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t)$ solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t)$ ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir. . . . .	169
Şekil 5.16: $c_1 = c_2 = 0$ ve $\tau = 0.213 > 0.2121$ iken $(u_0, v_0) = (2, 8)$ başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t)$ solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t)$ ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir. . . . .	169
Şekil 5.17: $c_1 = c_2 = 0$ ve $\tau = 0.2121$ iken $(u_0, v_0) = (2, 8)$ başlangıç değerine sahip (5.40) sisteminin faz portresi, $t \in [0, 100]$ için solda, $t \in [0, 300]$ için ortada ve $t \in [0, 500]$ için sağda verilmiştir. . . . .	169
Şekil 5.18: $c_1 = c_2 = 0$ ve $\tau = 0.3 > 0.2121$ iken $(u_0, v_0) = (2, 8)$ başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t)$ solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t)$ ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir. . . . .	170
Şekil 5.19: $u(x, 0) = 1.6114 + 0.002 \cos(x)$ ve $v(x, 0) = 7.5252 + 0.002 \cos(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t, x)$ solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t, x)$ sağda verilmiştir. . . . .	170
Şekil 5.20: $u(x, 0) = 1.6114 + 0.002 \cos(x)$ ve $v(x, 0) = 7.5252 + 0.002 \cos(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t, x)$ solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t, x)$ sağda verilmiştir. . . . .	171
Şekil 5.21: $u(x, 0) = 1.6114 + 0.002 \cos(x)$ ve $v(x, 0) = 7.5252 + 0.002 \cos(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t, x)$ solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t, x)$ sağda verilmiştir. . . . .	172
Şekil 5.22: $c_1 = 0.03$ , $c_2 = 0.03$ ve $\tau = 0.3100 < 0.3580$ iken $u(x, 0) = 1.6114 + 0.002 \cos(x)$ ve $v(x, 0) = 7.5252 + 0.002 \cos(x)$ başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $u(t, x)$ solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği $v(t, x)$ sağda verilmiştir. . . . .	173

## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1: Parametre örnekleri (Seydel, 2010). . . . .	12
Çizelge 4.1: Hopf çatallanma varlık koşulları - 1. . . . .	83
Çizelge 4.2: Hopf çatallanma varlık koşulları - 2. . . . .	84
Çizelge 5.1: $k_3 = 1.6902$ iken (5.5) sisteminin varlık analizi. . . . .	126
Çizelge 5.2: $k_3 = 1.6902$ iken (5.5) sisteminin yön analizi. . . . .	127
Çizelge 5.3: Varlık analizi - Sistem (5.5). . . . .	127
Çizelge 5.4: Yön analizi için gerekli değerler 1 - Sistem (5.5). . . . .	128
Çizelge 5.5: Yön analizi için gerekli değerler 2 - Sistem (5.5). . . . .	129
Çizelge 5.6: Yön analizi sonuç - Sistem (5.5). . . . .	129
Çizelge 5.7: Mutlak kararlılık analizi - Sistem (5.15). . . . .	135
Çizelge 5.8: Varlık analizi - Sistem (5.18). . . . .	143
Çizelge 5.9: Yön analizi için gerekli değerler 1 - Sistem (5.18). . . . .	144
Çizelge 5.10: Yön analizi için gerekli değerler 2 - Sistem (5.18). . . . .	144
Çizelge 5.11: Yön analizi sonuç - Sistem (5.18). . . . .	145
Çizelge 5.12: Varlık analizi - Sistem (5.21). . . . .	145
Çizelge 5.13: Yön analizi için gerekli değerler 1 - Sistem (5.21). . . . .	146
Çizelge 5.14: Yön analizi için gerekli değerler 2 - Sistem (5.21). . . . .	146
Çizelge 5.15: Yön analizi sonuç - Sistem (5.21). . . . .	147
Çizelge 5.16: (5.40) sisteminin varlık analizi için gerekli değerler. . . . .	167
Çizelge 5.17: (5.40) sisteminin için yön analizi için gerekli değerler. . . . .	168

## KISALTMALAR

**YMT** : Yüksek mertebeden terimler  
*lok* : yerel (lokal)



## SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$	$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı, $m$ -boyutlu, reel vektör değerli, $k$ -kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı, $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\dot{\mathbf{X}}$	$\mathbf{X}$ in $t$ ye göre türevi
$D_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu))$	Jakobiyen matris: $\left( \frac{\partial F_i(\mathbf{X}; \mu)}{\partial X_j} : i, j = 1, 2, \dots, n \right)$
$T^{-1}$	$T$ matris dönüşümünün tersi
$\mathcal{O}$	Büyük-O notasyonu
$\mathbf{F}\mu(\mathbf{X}; \mu)$	$\mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu)$ fonksiyonunun $\mu$ ye göre türevi
$(X_1, X_2)^T$	$(X_1, X_2)$ vektörünün devriği
$A(\mu)$	Sistemin denge noktasında hesaplanan ve çatallanma parametresine bağlı Jakobiyen matrisi
$\text{Re}(c_j(\mu))$	$c_j(\mu)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\text{Im}(c_j(\mu))$	$c_j(\mu)$ fonksiyonunun sanal kısmı
$\lambda(\mu)$	Özdeğer
$\alpha(\mu)$	Özdeğerin reel kısmı
$\omega(\mu)$	Özdeğerin sanal kısmı
$\alpha'(\mu)$	$\alpha(\mu)$ fonksiyonunun $\mu$ ye göre türevi
$\exp(\alpha(\mu))$	$e^{\alpha(\mu)}$ üstel fonksiyonu
$\approx$	Yaklaşık olarak eşit
$\text{diag}\{d_1, d_2\}$	Köşegen bileşenleri $d_1, d_2$ ve diğer bileşenleri sıfır olan matris
$\text{dom}(\Delta)$	$\Delta$ operatörünün tanım kümesi
$I_n$	$\{1, 2, 3, \dots, n\}$ sayma sayıları kümesi
$\eta^T$	Matris değerli $\eta$ fonksiyonunun devriği
$\text{sign}$	İşaret fonksiyonu

## RESİM LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Resim 1.1: Jules Henri Poincaré . . . . .	2
Resim 1.2: Desen ve şekil oluşumuna doğadan örnekler (Url-5 ve Url-6) . . . . .	8
Resim 3.1: Eberhard F. F. Hopf . . . . .	35
Resim 5.1: Alfred James Lotka . . . . .	132
Resim 5.2: Vito Volterra . . . . .	132
Resim 5.3: Hidra hayvanı . . . . .	138
Resim 5.4: Alan Mathison Turing . . . . .	139
Resim 5.5: Morfogenez üzerine yaptığı çalışmalarıyla bağlantılı olarak Turing tarafından yapılan örnek ve hesaplamaları gösteren renkli diyagramlar (Url-24) . . . . .	140
Resim 5.6: Edwin Smith Papirüsü, dünyanın en eski cerrahi dokümanı olup MÖ 16. yüzyıla aittir (Van Middendorp ve diğ., 2010) . . . . .	148

## 1. GİRİŞ

Dinamikler, birçok bilim alanında her zaman önemli bir araştırma konusu olmuştur. En basit bir cisimden, insan toplumuna kadar bütün sistemler için sistem parçalarının hareketine ve/veya bir bütün olarak evrimine (gelişmesine, değişmesine) neden olan itici güçler ve mekanizmalar nelerdir? Bu hareketin ve/veya evrimin özellikleri nelerdir? Diğer sistemlerle veya diğer bilimlerle etkileşim gibi daha geniş bir bağlamda düşünüldüğünde, bu dinamiklerin anlamı ne olabilir? Bu sorular, yüzyıllar boyunca filozoflar ve bilim adamları için zorlayıcı, heyecan verici problemler olmuştur (Malchow, 2008).

Dinamik, değişimle ve zamanla gelişen sistemlerle ilgilenen bir konudur. Söz konusu sistemin denge halinde olup olmaması, bir döngünün içinde kendini tekrar edip etmemesi veya daha karmaşık şeyler yapıp yapmaması (örneğin, kaotik yapılar sergilemesi gibi), sistemin davranışını belirlemede kullandığımız dinamiklerdir. Dinamik, günümüzde disiplinler arası bir konu olsa da aslında fiziğin bir dalıdır ve 1600'lerin ortalarında, Newton diferensiyel denklemleri keşfettiğinde ortaya çıkmıştır. Bu yıllarda Newton, hareket yasasını ve evrensel kütle çekim yasasını keşfetmiştir. Bu keşifle, Kepler'in gezegensel hareket yasalarını açıklamıştır. Newton, özellikle dünyanın güneş etrafındaki hareketini hesaplama problemi olan aralarındaki yerçekiminin ters kare kanunu ile belirlendiği "iki cisim problemi"ni çözmüştür. Daha sonraki yıllarda, matematikçiler ve fizikçiler Newton'un "iki cisim problemi" için kullandığı analitik yöntemi "üç cisim problemi"ne (örneğin, güneş, dünya ve ay için) genişletmeye çalışmışlardır. On yıllarca çaba harcadıktan sonra üç cismin hareketleri için açık formüllerin elde edilmesi anlamında, "üç cisim problemi"nin çözülmesinin imkansız olduğu anlaşılmıştır (Strogatz, 1994).

1800'lerin sonunda Poincaré, umutsuz görünen bu duruma nicel sorulardan ziyade nitel soruları vurgulayan yeni bir bakış açısı getirmiştir. Örneğin, "Gezegenlerin bütün zamanlardaki tam konumları nedir?" sorusu yerine "Güneş sistemi, sonsuza kadar kararlı mıdır, yoksa güneş sistemindeki bazı gezegenler sonunda güneş sisteminin dışına çıkacak mıdır?" sorusunu sormuştur. Poincaré, bu tür soruları analiz etmek için güçlü bir geometrik yaklaşım geliştirmiştir. Bu yaklaşım sayesinde, dinamiklerin modern konuları gelişmiş ve uygulamalar, göksel mekaniğin çok ötesine ulaşmıştır. Ayrıca Poincaré, başlangıç koşullarına hassas bir biçimde bağlı olan ve böylece uzun vadeli tahmini imkansız hale getiren düzensiz davranışların sergilendiği kaos olasılığını deterministik bir sistem için gören ilk kişidir (Strogatz, 1994).

Poincaré topoloji ile dinamik sistemleri bir madalyonun iki yüzü olarak görmüş ve aralarında bir ilişki kurulmasını sağlamıştır. Bu ilişki sayesinde, bir sistemin bütün davranış biçimlerini içeren tabloyu görselleştirmeyi sağlayabilecek bir şekil kullanmak mümkün hale gelmektedir. Böyle bir şeklin üstündeki tek bir nokta, belirli bir sistemin zaman içinde dondurulmuş bir anda bulunduğu hali göstermektedir. Bir sistem zaman içinde yol alırken bu nokta da hareket etmekte ve söz konusu şekil üzerinde bir yörünge



çizmektedir. Şeklimizi biraz büktüğümüz takdirde sistemin parametrelerini değiştirmiş olacağımızdan, akışkanı daha ağdalı yapmış veya sarkacı daha sert hareketlendirmiş oluruz. Birbirine benzer gibi görünen şekiller, birbirine benzer gibi görünen davranış biçimleri verir. Şekli görselleştirebildiğiniz takdirde sistemi anlamanız da mümkün olur (Gleick, 1987).



Resim 1.1: Jules Henri Poincaré

19. yüzyılın en büyük matematikçilerinden biri olan Jules Henri Poincaré, 29 Nisan 1854'te Nancy'de (Fransa) doğdu. 1873-1875 yılları arasında Paris'te École Polytechnique'de matematik eğitimi aldı. 1879'da Paris Üniversitesi'nden doktorasını almadan önce çalışmalarına Caen Madencilik Okulu'nda devam etti. Öğrenci olduğu sırada pek çok diferensiyel denklemi çözen yeni karmaşık fonksiyonlar keşfetti. Bu büyük çalışma, 1830'lu yıllarda keşfedilen ancak matematikçiler tarafından 1870'li yıllara kadar kabul görmeyen Öklid dışı geometrinin ilk "ana akım" uygulamaları arasında yer aldı. 1880'lerde Poincaré belirli bir diferensiyel denklem türünün tanımladığı çözüm eğrilerinin global davranışı üzerinde çalışmalara başladı. Bu çalışmalarında, "Çözümler bir noktaya sarmal bir şekilde yaklaşır mı o noktadan uzaklaşır mı?", "Bazı çözümler kapalı döngüler oluşturur mu, oluştururlarsa yakındaki eğriler bu kapalı döngülere sarmal bir şekilde yaklaşır mı yoksa onlardan uzaklaşır mı?" gibi soruların cevaplarını araştırdı. Bu çalışmalarıyla güneş sisteminin hareketini tanımlayan ve daha karmaşık olan diferensiyel denklemleri analiz etmeyi amaçladı. Ayrıca bu çalışmalar, Poincaré'yi bir noktanın pozisyonunun çeşitli koordinatlarla belirlendiği matematiksel alanları (şimdi manifold olarak anılmaktadır) düşünmeye yönlendirdi. Poincaré geometri, diferensiyel denklemler teorisi, elektromanyetizma, topoloji ve matematik felsefesi gibi pek çok konuda önemli yeniliklere imza attı. Çalışmalarıyla günümüzde hala oldukça aktif olan yeni matematik dallarının oluşmasına ve çok sayıda teknik sonuca katkıda bulunan Poincaré, 17 Temmuz 1912 tarihinde Paris'te hayata veda etti (Url-1).

Son 50 yıldır, gerçek yaşam problemleri, bir asır önce Poincaré tarafından diferensiyel denklemlerin özelliklerini anlamak için başlatılan topolojik ve geometrik bakış açısı kullanılarak tanımlanmaya devam etmektedir.

Temel olarak iki tür dinamik sistem vardır: Diferensiyel denklemler ve Fark denklemleri. Diferensiyel denklemler sistemin değişimini sürekli zamana göre tanımlarken fark denklemleri ayrık zamana göre tanımlar. Ayrıca diferensiyel denklemler de sadece zamanın bağımsız değişken olduğu adi diferensiyel denklemler ve zaman ile birlikte farklı bağımsız değişkenlerin de olduğu kısmi diferensiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılır.

Şimdi,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{F} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$  olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (1.1)$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

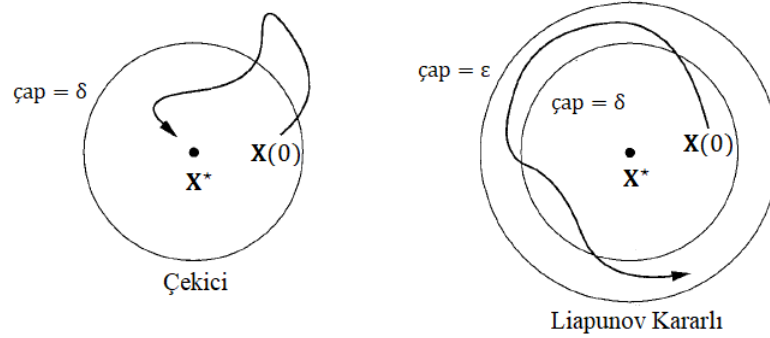
**Teorem 1.1** (Varlık ve Teklik (Strogatz, 1994)). *Eğer,  $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  ise (1.1) başlangıç değer probleminin bir  $\delta > 0$  için  $(-\delta, \delta)$  aralığında tanımlı tek bir çözümü vardır.*

Önemli araştırma konularından biri, (1.1) gibi bir dinamik sistemin uzun vadeli davranışdır. Özellikle, (1.1) sisteminin çözümlerinin kararlı olup olmadığı merak

konusudur. Bunun için genellikle, sistemin çözümleri  $\mathbf{F}(\mathbf{X}^*) = 0$  eşitliğini sağlayan  $\mathbf{X}^*$  denge noktasının yakınında başladığında ne olur sorusuna yanıt aranır. Bu soruya verilebilecek cevapları aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

**Tanım 1.1** (Kararlılık Türleri (Strogatz, 1994)).

- Eğer  $\|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}^*\| < \delta$  iken  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  mevcut ise  $\mathbf{X}^*$  denge noktasına çekicidir denir. Başka bir deyişle, bir denge noktasının çekici olması, denge noktasının yakın bir komşuluğunda başlayan her çözümün  $t \rightarrow \infty$  iken denge noktasına ulaştığı anlamına gelir (Şekil 1.1).
- Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}^*\| < \delta$  iken  $t \geq 0$  için  $\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  var ise  $\mathbf{X}^*$  denge noktasına Liapunov (Lyapunov) anlamda kararlıdır denir. Diğer bir ifadeyle, Liapunov (Lyapunov) anlamda kararlılık, denge noktasının yakın bir komşuluğunda başlayan çözümlerin bütün  $t$  zamanlarında denge noktasına yakın kalmasıdır (Şekil 1.1).
- Bir denge noktası hem çekici hem de Liapunov (Lyapunov) anlamda kararlı ise o denge noktasına yerel (lokal) asimptotik kararlıdır denir.
- Bir denge noktası kararlı değil ise o denge noktasına kararsızdır denir.



Şekil 1.1: Kararlılık türleri (Strogatz, 1994).

Dinamik sistemlerin analizinde önemli olan bir başka ayırım ise sistemlerin lineer olup olmamasıdır. Lineer olmayan çoğu sistemin analitik olarak çözümü mümkün değildir. Peki, lineer olmayan sistemleri analiz etmek, lineer olan sistemlere göre neden daha zordur? Strogatz (1994), bu soruya şu şekilde cevap verir: Lineer sistemler parçalara ayrılabilir ve her bölüm ayrı ayrı çözüldükten sonra bu çözümler bir araya getirilerek sistemin çözümü elde edilir. Bu fikir, karmaşık problemlerin harika bir şekilde sadeleştirilmesine izin verir. Bu anlamda, lineer bir sistem tam olarak parçalarının toplamına eşittir. Diğer taraftan, doğadaki pek çok şey bu şekilde davranmaz. Bir sistemin parçaları, birbirlerine müdahale ettiklerinde, birbirleri ile iş birliği yaptıklarında veya birbirleri ile yarıştuklarında, bu sistemde devam eden ve doğrusal olmayan etkileşimler ortaya çıkar. Bu nedenle, aynı anda çok sevdiğiniz iki şarkıyı dinlediğinizde iki kat keyif alamayacağınız gibi günlük yaşamda süperpozisyon prensibi başarısız olur.

Bu tezde, lineer olmayan iki boyutlu adi diferensiyel denklem sistemleri ve kısmi diferensiyel denklem sistemleri ele alınacaktır.

Gerçek yaşam problemlerini anlamak, tanımlamak, açıklamak ve çözmek için öncelikle onları matematiksel olarak ifade etmek gerekir. Bu sürece, matematiksel modelleme denir.

Biyolojik sistemlerin matematiksel modellemesinde üç temel adım vardır. Bu adımların birincisi, biyolojik süreci veya incelenen sistemi doğru olarak temsil etmek için matematiksel modelin formüle edilmesidir. İkinci adım, modelin davranışını anlamak için matematiksel tekniklerin uygulanması iken üçüncü adım anlamlı biyolojik sonuçların elde edilip edilmediğini belirlemek için model sonuçlarının yorumlanmasıdır (Allen, 2007). Formülasyon, analiz ve yorum olarak özetlenebilecek bu adımlar, aynı zamanda, herhangi bir gerçek yaşam problemini matematiksel olarak modellemek için de izlenmesi gereken adımlardır.

Model tasarımının en önemli yönü, modellerin sistemin bilinen özelliklerini sergileyebildiğinden emin olmaktır. Bu özellikler, açık veya kapalı olabilir. Erken evre modellerin matematiksel analizi, bu gibi modellerin sistemin bilinen özelliklerine uyan veya uymayan bazı gizli niteliklerini ortaya çıkarabilir. Eğer uyumsuz bir özellik varsa bu tutarsızlık modellerin değiştirilmesi için yol gösterir. Bir başka deyişle, modelleme sürekli gelişen bir süreçtir (Kuang, 2002). Modeller, parametre ve/veya bağımsız ve/veya bağımlı değişken sayısını artırmak veya azaltmak; problemin çalışıldığı uzayın boyutunu değiştirmek; gecikme, reaksiyon-difüzyon gibi yeni terimler eklemek; modelde yer alan bazı fonksiyonlarda değişiklik yapmak gibi pek çok farklı yöntemle geliştirilebilir. Örneğin, memelilere ait bir popülasyonda, bireylerin yaş ortalaması popülasyon artışı üzerinde etkilidir. Yaşlı birey sayısının fazla olduğu bir popülasyonda nüfus artış hızı az iken genç birey sayısının fazla olduğu bir popülasyonda nüfus artış hızı fazla olacaktır (Bilazeroğlu, 2012). Bu nedenle, eğer erken evre modeliniz sadece zamana bağlı ise modele yaş faktörü bağımsız değişken olarak eklenip model geliştirilebilir. Başka bir örnek olarak "bir popülasyonun hayatta kalabileceği minimum alan problemi"ni ele alabiliriz. Bu problemin erken evre modelinde, uzaysal/konumsal boyut Kierstead ve Slobodkin (1953) tarafından bir olarak alınmış ve popülasyonun büyümesi üstel<sup>1</sup> kabul edilmiştir. Daha sonra, modeli daha gerçekçi hale getirmek için Cantrell ve Cosner (1989), öncelikle modelin konumsal boyutunu ikiye çıkarmış ve üstel büyümeyi, lojistik büyüme<sup>1</sup> ile değiştirmişlerdir. Ayrıntılar için Allen (2007) kaynağına başvurulabilir.

Bu tezde, parçacıkların konumsal boyutta herhangi bir yön kısıtlaması olmadan hareket edebileceklerini ve gerçek yaşam problemlerinin geçmişe olan bağlılıklarını, modellere sırasıyla reaksiyon-difüzyon mekanizması ve gecikme terimi ekleyerek ilgili matematiksel modelleri daha gerçekçi hale getirmek hedeflenmektedir.

Şimdi, reaksiyon-difüzyon denklemlerine ve gecikmeli diferensiyel denklemlere kısa bir giriş yapalım.

---

<sup>1</sup>Üstel büyümede, kişi başına düşen (kişi başına) büyüme oranı, nüfus büyüklüğüne bakılmaksızın aynı kalır ve böylece nüfus arttıkça daha hızlı ve daha hızlı büyür. Lojistik büyümede ise nüfus büyüklüğü, taşıma kapasitesi olarak bilinen çevre kaynaklarının azami miktarına yaklaştığında, nüfusun kişi başına büyüme oranı gittikçe küçülmektedir (Url-2).

## 1.1 Reaksiyon-Difüzyon Denklemleri

Difüzyon mekanizması, parçacıkların bir çevrede veya medyadaki hareketini modeller. Parçacıklar, fizikteki temel parçacıklar, bakteriler, moleküller veya hücreler gibi çok küçük nesnelere; hayvanlar, bitkiler, insanlar gibi çok büyük nesnelere; salgınlar veya söylentiler gibi belirli olaylar olabilir (Shi, 2004). Parçacıklardan oluşan topluluklarda, her bir parçacık genellikle rastgele bir şekilde hareket eder. Parçacıklar, bu bireysel ve düzensiz hareketin sonucu olarak yayılır. Bu küçük ölçekli düzensiz hareket, grubun büyük ölçekli veya brüt düzenli hareketi ile sonuçlandığında bunu bir difüzyon süreci olarak düşünebiliriz (Murray, 2002).

Murray (2002)'ye göre küçük ölçekli davranış bilgisi üzerinden büyük ölçekli davranışı elde etmek çok zordur. Bu nedenle, küresel davranış hakkında bilgi sahibi olabilmek için parçacık yoğunluğu veya konsantrasyonuna bağlı bir denklem türetmek gerekir. Cantrell ve Cosner (2003), Murray (2002) ve Shi (2004) kaynaklarında izlenen yollar takip edilerek bu denklem aşağıdaki gibi türetilebilir:

Parçacıkların bulunduğu bölgeyi  $\Omega$  olarak adlandıralım.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , bir açık küme ve  $\Omega$  bölgesinin sınırı  $\partial\Omega$  yeterince düzgün olsun. Bu bölgedeki parçacıkların  $t$  zamanındaki ve  $\mathbf{x} \in \Omega$  konumundaki yoğunluklarını veren fonksiyonu  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  ile gösterelim ve  $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 2$ , olsun. Şimdi ilgilendiğimiz soru,  $t$  zamanı ve  $\mathbf{x}$  konumu değiştiğinde  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  fonksiyonunun nasıl değişeceği. Bu değişim iki şekilde olabilir. Birincisi, parçacıkların bireysel olarak etrafta hareket etmesidir. İkincisi ise fiziksel, kimyasal ya da biyolojik nedenlerden ötürü yeni parçacıkların üretilmesi veya mevcut parçacıkların yok olmasıdır. Bu iki etkiyi ayrı ayrı ele alacağız.

Isı transferi veya bir kimyasalın suda seyrelmesi gibi bir maddenin yüksek yoğunluklu bölgelerden düşük yoğunluklu bölgelere geçmesi doğal bir olaydır (Shi, 2004). Bu doğal sürece bağlı olarak  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  in hareketi, popülasyon yoğunluğunun akısı<sup>1</sup> olarak adlandırılır.

Fick yasası, akının, yoğunluğun gradyeni (konumsal türevi) ile orantılı olan bir büyüklükle parçacıkların yoğunluğunun yüksek olduğu bölgeden, düşük olduğu bölgeye doğru olacağını söyler (Url-3). Başka bir deyişle, "yüksek yoğunluktan düşük yoğunluğa" ilkesi, akının,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  in en hızlı azaldığı yön olan negatif gradyeni yönüne doğru olacağı anlamına gelir ve bu durum matematiksel olarak

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = -d(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,  $\mathbf{J} \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ ,  $t$  zamanındaki ve  $\mathbf{x}$  konumundaki akıyı,  $d \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{x}$  konumundaki difüzyon katsayısını ve  $\nabla_{\mathbf{x}}$  ise  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\partial g_1/\partial x_1, \partial g_2/\partial x_2, \dots, \partial g_n/\partial x_n)$  gradyen operatörünü temsil etmektedir.

Öte yandan, herhangi bir noktadaki parçacıkların sayısı doğum, ölüm, avlanma veya kimyasal reaksiyonlar gibi diğer nedenlerden dolayı da değişebilir (Shi, 2004). Bu sebeplere bağlı olarak yoğunluk fonksiyonunda meydana gelen değişimin oranını,

<sup>1</sup>Birim yüzeyden birim zamanda geçen (giren ve çıkan) madde ya da ışınım niceliği (Url-4).

$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  fonksiyonu ile gösterelim. Bu fonksiyon, genellikle reaksiyon oranı olarak adlandırılır.

Bu tanımlar ve kabullere göre, parçacıkların  $\Omega$  bölgesindeki toplam popülasyonu ve toplam popülasyondaki değişim oranı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Ayrıca  $\partial\Omega$  nin dış birim normali  $\mathbf{n}$  olmak üzere popülasyonun  $\Omega$  bölgesinin içindeki net büyüme oranı ve  $\Omega$  bölgesinden difüzyona bağlı dışarı çıkışın oranı sırasıyla

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad \text{ve} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS$$

olarak ifade edilir. Toplam popülasyondaki değişim oranı,  $\Omega$  bölgesinin içindeki net büyüme oranından dışarıya doğru olan akıyı çıkararak elde edileceğinden

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (1.3)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

olmak üzere Divergence Teoreminden (Bakınız EK 1)

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{J}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

olduğu için (1.2) denkleminde

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = - \int_{\Omega} \text{div}(d(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda, (1.3) denklemi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{div}(d(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

eşitliğine dönüşür.  $\partial\Omega$  ve  $\mathbf{u}$  yeterince düzgün oldukları için son eşitlikteki türevi integralin içine alarak

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \text{div}(d(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \right) d\mathbf{x} = 0$$

eşitliği elde edilir.  $\Omega$  keyfi bir bölge olduğu için son denklemden

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \text{div}(d(\mathbf{x})\nabla_x \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \quad (1.4)$$

elde edilir ve bu eşitlik her  $(t, \mathbf{x})$  için sağlanır. (1.4) denklemi, *reaksiyon-difüzyon denklemi* olarak adlandırılır. Burada,  $\text{div}(d(\mathbf{x})\nabla_x \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))$  parçacıkların hareketini tanımlayan difüzyon terimi iken  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))$  yaşam ortamında meydana gelen doğum-ölüm veya reaktördeki reaksiyon gibi etkileri tanımlayan reaksiyon terimidir.

Parçacıkların bulunduğu ortamlar genellikle heterojen olduğu için difüzyon katsayısı  $d(\mathbf{x})$ , genel olarak sabit değildir. Ancak difüzyon bölgesi yaklaşık olarak homojen olduğunda,  $d(\mathbf{x}) = d$  olduğu varsayılabilir. Bu varsayımla,

$$\Delta \mathbf{u} = \text{div}(\nabla_x \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.5a)$$

Laplasyen operatörü olarak tanımlanmak üzere (1.4) reaksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = d\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.5b)$$

şeklinde basitleştirilebilir. Bir reaksiyon oluşmadığında ise son denklem, (homojen) *difüzyon denklemi* olarak adlandırılan

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = d\Delta \mathbf{u}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemde,  $\mathbf{u} = T \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$  sıcaklığı gösteren fonksiyon olarak alınırsa denklem *ısı denklemine* dönüşür.

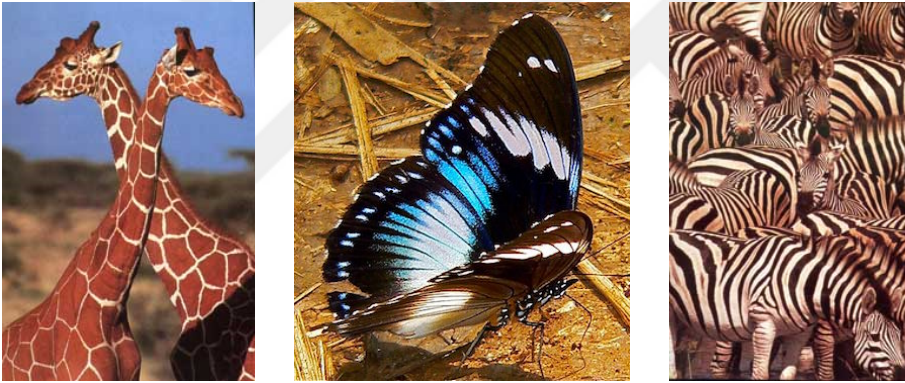
Reaksiyon denklemleri, Fick yasası kullanılarak türetilebildiği gibi rastgele yürüyüş yaklaşımı, stokastik diferensiyel denklemler, etkileşen parçacık sistemleri gibi farklı yöntemler kullanılarak da türetilebilir. Bu yöntemler ve reaksiyon-difüzyon denklemlerinin tarihçesi hakkında daha fazla bilgi için Cantrell ve Cosner (2003) ve Murray (2002) kaynaklarına başvurulabilir.

Literatürde yer alan pek çok çalışma, sistemlerin durumlarının zamana göre değişimini analiz eder, yani sistemlerin zamansal dinamiklerine odaklanır. Buna ek olarak gerçek yaşamdaki problemleri temsil eden pek çok sistemin durumu, konuma göre de değişebilir. Örneğin, matematiksel epidemiyoloji<sup>1</sup>, bulaşıcı bir hastalığın belli bir nüfusta nasıl dolaşımında olduğunu araştırır, özellikle yayılımını kontrol eden faktörleri belirlemeye çalışır. Matematiksel epidemiyolojinin nihai amacı bulaşıcı hastalığın gelişimini tahmin etmek ve hastalığın salgına dönüşmesini önlemektir. Standart yaklaşıma göre, popülasyon, enfeksiyona yakalanma olasılığı açısından ya da hastalık gelişimindeki evre ile ilgili olarak farklı özelliklere sahip birkaç sınıfa ayrılır. Bu nedenle, basit bir model hastalık riskine açık ve enfekte olmuşlar olmak üzere iki sınıftan oluşur. Bu iki farklı sınıftaki herhangi iki kişi karşılaştığında (etkileşim veya reaksiyon gerçekleştiğinde) hastalık riskine açık olan kişi bir ihtimalle

<sup>1</sup>Toplumda görülen hastalıkların nedenlerini, görülme sıklığı veya oranını, yayılışlarını, hastalıklara karşı alınacak önlem ve korunma yöntemlerini konu alan bilim alanı (Url-7).

hastalığa yakalanır ve böylece enfekte hale gelir. Bu süreç hastalığın bulaşması olarak tanımlanır. Konumsal boyut, kişilerin hareketlerinin rastgele yürüyüş esasına göre olduğu varsayılarak hesaba katılınca bu modeller reaksiyon-difüzyon denklemleri ile temsil edilir (Volpert ve Petrovskii, 2009).

Başka bir örnek olarak hayvanların postlarında beneklerin veya çizgilerin oluşması, morfojenlerin<sup>2</sup> çeşitlenmeleri ile açıklanabilir. Morfojenler düzgün dağılmıyorsa, yani dağılım heterojen ise, lekeler veya çizgiler oluşurken (Resim 1.2) morfojenlerin homojen olarak dağılması, herhangi bir model geliştirmez (Seydel, 2010). Bir diğer örnekte Kareiva (1983), birçok böcek ve hayvan türünün, sabit difüzyon katsayısına sahip bir reaksiyon difüzyon modeline göre dağılmakta olduğunu göstermiştir. Aynı çalışmada, difüzyon katsayıları için çeşitli böcek türleri üzerinde yapmış olduğu deneylerden elde ettiği gerçek değerleri vermiştir (Murray, 2002). Son örnek olarak "bir popülasyonun yaşamını devam ettirebilmesi için gerekli olan minimum alan problemi"ni düşünebiliriz. Çok geniş bir bölgede eşlerin birbirini bulma olasılığının azalacağı ve çok dar bir alanda ise yetersiz besin gibi sıkıntılar yaşanabileceği için popülasyonun artış hızında bir düşüş meydana gelecektir (Bilazeroğlu, 2012). Minimum alan problemini çözmek için farklı reaksiyon fonksiyonları ile ortaya çıkan farklı reaksiyon-difüzyon denklemleri kullanılmaktadır. Bu problem ile ilgili çalışmalar, Allen (2007) kaynağında bulunabilir.



Resim 1.2: Desen ve şekil oluşumuna doğadan örnekler (Url-5 ve Url-6)

Tam genellik içeren pek çok problem, hem zamansal hem de konumsal dinamikler gösterir. Bu nedenle, elbette ki problemin doğasına bağlı olarak, bir problemin dinamiğini temsil eden matematiksel modelin daha gerçekçi olması için reaksiyon-difüzyon mekanizmasının ihmal edilmemesi gerekir.

## 1.2 Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

Adi ve kısmi diferensiyel denklemler, teorik popülasyon dinamikleri çalışmalarının gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır ve şüphesiz gelecek araştırmalarda vazgeçilmez araçlar olmaya devam edecektir. Bu gibi pek çok uygulamada, dikkate alınan sistemin nedensellik ilkesine (gelecekteki durumun geçmişten bağımsız olması

<sup>2</sup>Embriyonik dokularda bir konsantrasyon gradyeni oluşturarak gelişme sürecini başlatan bir protein (Url-8).

ve yalnızca o an tarafından belirlenmesi) dayalı olduğu varsayılmıştır. Bu varsayımın gerçek duruma sadece bir ilk yaklaşım olduğu unutulmamalıdır. Bir problem, sistemin geçmiş durumlarından bazılarını içerebileceğinden gerçek bir problem ideal olarak gecikmeli diferensiyel denklemlerle modellenmelidir (Kuang, 1993).

Sistemlerin belirli bir girdiye veya uyarıya verdiği tepki genellikle anlık değil gecikmelidir (Allen, 2007). Ayrıca doğal ve yapay süreçlerin çoğu "zaman gecikmeleri" içerir (Kuang, 1993). Bu nedenle, gecikmeli diferensiyel denklemler; ekonomi, ekoloji, fizik, kimya, matematiksel biyoloji, mühendislik, sinirbilimi, tıp ve diğer alanlardaki aktif titreşim, gürültü kontrolü, uzaktan kumanda, şehir içi trafik, elektrik iletim hattı, nükleer reaktörler, yapay sinir ağları, üretim sistemleri ve kapasite yönetimi (Bakınız: Asl ve Ulsoy, 2003 ve burada atıfta bulunulan kaynaklar); popülasyon dinamikleri (çoğunlukla olgunlaşma/gebelik dönemlerini kapsar), immünoloji (kuluçka/latent dönemler), fizyolojik ve ilaç kullanımı ile ilgili kinetikler (glikoz-insülin, kan basıncı/tansiyon düzenleme) (Bakınız: Kayan ve Merdan, 2017 ve burada atıfta bulunulan kaynaklar) gibi konulara ait gerçek yaşam problemlerini modellemek için kullanılır.

Gecikmenin doğal olarak gerçekleştiği sistemlere güzel bir örnek, kemik iliğindeki kırmızı kan hücrelerinin üretilmesidir. Yeni bir kan hücresinin olgunlaşması yaklaşık dört gün alır (Seydel, 2010). Başka bir örnek olarak ise bir işe para yatırma kararı sonrasında, yeni iş kurulup yatırım malları teslim edilene kadar belirli bir gecikme olur. Böyle bir gecikmeli model ile Kalecki (1935), iş döngülerinin<sup>1</sup> oluşumunu açıklamıştır (Seydel, 2010). Son bir örnek olarak tümör-bağışıklık sistemi etkileşimini düşünelim. Hücre döngüsü, hücrenin iki yavru hücre üretmek üzere bölünmesine yol açan olaylar serisidir (Url-10) ve dört farklı fazdan oluşur. Hücre döngüsünün belirli bir fazı üzerinde etki yapan ilaçlar, kanserle mücadelede kullanılmaktadır. Birçok durumda bu ilaçlar, hücrenin hücre döngüsüne devam etmesini engeller. Böylece çoğalmayı durdurur ve hücrelerin doğal ölümüne veya bağışıklık sisteminin bu hücreleri öldürmesine izin verir. Villasana ve Radunskaya (2003), ilacın tümör hücrelerini mitozda tuttuğunu ve ilacın konsantrasyonunun zamanla üstel olarak azaldığını varsayıp tümör-bağışıklık sistemi etkileşimini gecikmeli diferensiyel denklemler kullanarak modellemişlerdir.

Lineer olmayan tek gecikme içeren bir diferensiyel denklem sistemi  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  ve  $\tau \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t - \tau)) \quad (1.6)$$

ile ifade edilir.  $n$ -boyutlu bir diferensiyel denklem sistemi ile temsil edilen bir başlangıç değer probleminin başlangıç verisi,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir noktadır. Diğer taraftan, tek gecikme içeren bir diferensiyel denklem sistemi ile temsil edilen bir başlangıç değer probleminin anlamlı olabilmesi için başlangıç verileri sonlu bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon ile ifade edilmelidir. Forde (2005) ve Karaoğlu (2016), bu durumu şu şekilde açıklamışlardır: Belirli bir  $t_0$  anındaki zamana göre değişim, yani  $\dot{\mathbf{X}}(t_0)$  bulunmak istenirse  $\mathbf{X}(t_0)$  ve  $\mathbf{X}(t_0 - \tau)$  bilgilerine ihtiyaç varken  $\varepsilon \in [0, \tau]$  olmak üzere pertürbe edilmiş  $t_0 + \varepsilon$  anı için ise  $\mathbf{X}(t_0 + \varepsilon)$  ve  $\mathbf{X}(t_0 + \varepsilon - \tau)$  bilgilerine

<sup>1</sup>İş döngüsü, iktisadi döngü veya konjonktür devresi, iktisadi etkinlik veya üretimde birkaç ay veya yılı aşan iktisadi dalgalanmaları belirtmek için kullanılan terim (Url-9).



ihtiyaç vardır. Bu durumda, (1.6) sistemi için başlangıç koşulu

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \quad (1.7)$$

olarak tanımlanmalıdır. Böylece,  $\mathbf{X}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$  iken (1.6) sistemini ve  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  iken (1.7) başlangıç koşulunu sağlıyor ise  $\mathbf{X}(t)$ , (1.6) sistemi için bir çözüm olur. Şimdi, bu çözümün varlığı ve tekliği ile ilgili teoremi verebiliriz.

**Teorem 1.2** (Varlık ve Teklik (El'sgol'ts ve Norkin, 1973)). *Eğer,  $\mathbf{F}$  fonksiyonu  $(t_0, \mathbf{X}_0(t_0), \mathbf{X}_0(t_0 - \tau))$  noktasının bir komşuluğunda sürekli ve bağımlı değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlıyor ve  $\mathbf{X}_0(t)$  başlangıç fonksiyonu  $[t_0 - \tau, t_0]$  aralığında sürekli ise (1.6) başlangıç değer probleminin yeterince küçük bir  $\delta > 0$  için  $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$  aralığında tanımlı tek bir çözümü vardır.*

Tek gecikme içeren

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t - \tau)), \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \quad (1.8)$$

otonom diferensiyel denklem sistemine karşılık gelen lineer sistemin karakteristik denklemi

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (1.9)$$

quasi-polinomu şeklindedir. Burada,  $P$  ve  $Q$ ,  $\lambda$  nın polinomlarıdır. Bu denklem  $e^{-\lambda\tau}$  terimini içerdiği için bir transandantal denklemdir. Ayrıca kompleks düzlemde sonsuz çoklukta köke sahiptir (Bakınız: Balachandran ve diğ., 2009; El'sgol'ts ve Norkin, 1973; Seydel, 2010). Eğer (1.9) denkleminin bir kökü  $\lambda_i$  ise (1.8) sistemine karşılık gelen lineer sistemin bir çözümü  $e^{-\lambda_i t}$  olur. Bu nedenle, (1.8) sistemine karşılık gelen lineer sistemin sonsuz çoklukta lineer bağımsız çözümü vardır ve bu gecikmeli diferensiyel denklem sistemlerini sonsuz boyutlu yapar (Bölüm 4, El'sgol'ts ve Norkin, 1973).

Sistemlerde, belirli bir girdiye veya uyarıya verilen gecikmeli tepki farklı şekillerde olabilir.  $t$  zamanındaki bir girdi veya uyarıdan sonra reaksiyon tam olarak  $t + \tau$  zamanında meydana geliyorsa bu gecikmeye kesikli gecikme denir.  $t$  zamanındaki uyarıya verilen tepki, Smith (2001)'e göre  $[t, t + \tau]$  aralığındaki gecikmelerin ağırlıklı ortalaması, MacDonald (1989)'a göre ayrık zamanlardaki geçmişin birikimli etkisi olarak meydana geliyor ise bu gecikmeye dağılımlı gecikme denir. Bu tezde, kesikli gecikme ele alınacak ve gecikme terimi kesikli gecikme anlamında kullanılacaktır. Dağılımlı gecikme için Karaoğlu (2016), Kuang (1993), MacDonald (1989) ve Smith (2011) kaynaklarına başvurulabilir.

Sonuç olarak zaman gecikmelerini ihmal etmek, gerçeği görmezden gelmek anlamına gelir. Bu nedenle, adi diferensiyel denklem sistemleri hakkında pek çok şey bilmemize ve gecikmeli diferensiyel denklem sistemlerini incelemek çok daha zor olmasına rağmen gerçek yaşam problemleri modellenirken gecikme ihmal edilmemelidir.

Kuang (1993), sezgilerin aksine, küçük gecikmelerin büyük etkiler oluşturabileceğini belirtmiştir. MacDonald (1989)'a göre, bir modeldeki anlık etkileşimi gecikmeli olanla değiştirmek sistemin davranışında niteliksel değişikliklere yol açabilir. Bu

değişikliklerin en yaygın olanı, sistemin denge noktasının kararlılık yapısındaki değişimdir ve bu değişime genellikle kararlı bir periyodik çözümün başlaması eşlik eder. Bu tezde, gecikme teriminin değişimine bağlı olarak sistemlerde meydana gelen niteliksel davranış farklılıkları, Bölüm 1.3'te tanımlayacağımız Hopf çatallanma kullanılarak analiz edilecektir.

### 1.3 Çatallanma

Uygulamadaki her problem, belirli kümelerde değişiklik gösterebilen birkaç fiziksel parametre içermektedir. Bu nedenle, sistemin nitel davranışını, parametreler değişirken anlamak önemlidir. Bir sistem için iyi bir tasarım, parametreler orijinal tasarımın yapıldığı değerlere göre küçük bir miktarda değiştiğinde nitel davranışın değişmeyeceği şekilde olacaktır. Bununla birlikte, nitel davranış, sistem parametre değerlerinde büyük bir değişikliğe maruz kaldığında değişebilir (Chow ve Hale, 1982). Örneğin, birinci mertebeden tek boyutlu bir diferensiyel denklem sisteminde, uzun zamanlı dinamiği denge noktası belirler. Sistemin sahip olduğu tüm yörüngeler ya denge noktasına yaklaşır ya da ondan uzaklaşıp sonsuza gider. Çünkü, doğru üzerindeki bir vektör alanına ait yörüngeler ya monoton olarak artar ya monoton olarak azalır ya da sabit kalır. Bu kadar sınırlı bir dinamiğe sahip, birinci mertebeden ve tek boyutlu bir diferensiyel denklem sistemi parametreye bağlı olduğunda, sistemin dinamiği nitel olarak parametre değıştikçe değişebilir. Örneğin, yeni denge noktaları ortaya çıkabilir, varolan denge noktaları yok olabilir veya kararlılık yapısı değişebilir. Dinamiklerdeki bu nitel değişikliklere *çatallanma* denir ve değişikliklerin oluştuğu parametre değerine *çatallanma değeri* adı verilir (Strogatz, 1994).

Daha matematiksel bir ifade ile  $\mathbf{F} \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ , olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu) \quad (1.10)$$

gibi bir sistemde parametre  $\mu$  değişirken topolojik olarak denk<sup>1</sup> olmayan faz portrelerinin<sup>2</sup> ortaya çıkmasına *çatallanma* denir (Kuznetsov, 1998). Çizelge 1.1'de, bazı parametre örnekleri ve bu parametrelerin değişimine bağlı olarak ortaya çıkabilecek bazı olaylar listelenmiştir.

Tek boyutlu birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemlerinde,  $n = 1$  iken (1.10) sisteminde, 3 tip çatallanma meydana gelebilir. Bunlardan ilki, sabit noktaların ortaya çıktığı ve yok olduğu temel bir mekanizma olan katlı ("fold", "saddle-node") çatallanmadır. Bu çatallanmada, parametre değeri değıştikçe iki sabit nokta birbirine doğru hareket eder, çarpışır ve her ikisi de yok olur (Strogatz, 1994). İkinci çatallanma tipi ise biri kararlı biri kararsız iki denge noktasının, belirli bir parametre değerinden sonra kararlılık yapılarının değışerek varlıklarını korudukları transkritik ("transcritical") çatallanmadır (Allen, 2007). Sonuncu çatallanma tipi olan tırmık ("pitchfork") çatallanmada, daima varolan bir denge noktasının belirli bir parametre değerinden sonra kararlılık yapısı değışir ve kararlı iki yeni denge noktası ortaya çıkar ya da kararsız iki denge noktası kaybolur (Kuznetsov, 1998).

<sup>1</sup>Tanım 2.1'e bakınız.

<sup>2</sup>Sistemin nitel olarak farklı olan bütün yörüngelerini gösteren şekil, faz portresi olarak adlandırılır (Strogatz, 1994).

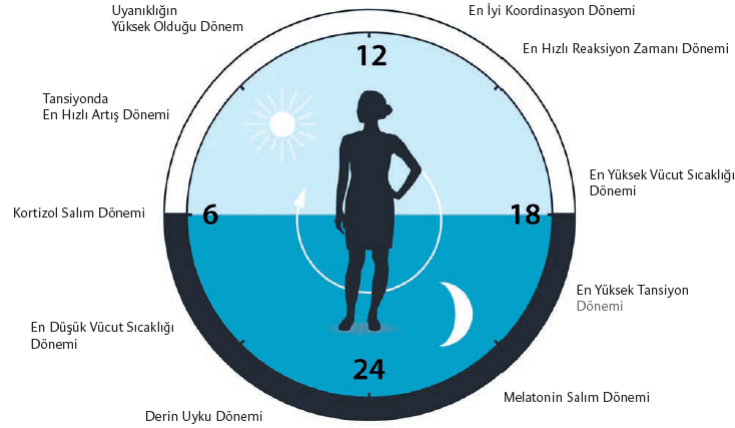
Çizelge 1.1: Parametre örnekleri (Seydel, 2010).

Olay	Kontrol eden parametre
Bir çubuğun bükülmesi	Yük
Bir motorun titreşimi	Frekans veya dengesizlik
Yanma	Sıcaklık
Uçak kanadının salınımı	Uçağa göre havanın hızı
İklim değişikliği	Güneş radyasyonu

Gördüğümüz gibi tek boyutlu faz uzaylarında akış bütünüyle sınırlıdır, tüm yörüngeler monoton olarak hareket etmeye veya sabit kalmaya zorlanır. Yüksek boyutlu faz uzaylarında yörüngelerin manevra için daha fazla alanı vardır ve bu nedenle daha geniş bir dinamik davranış yelpazesi mümkün hale gelir (Strogatz, 1994). Ne gibi davranış farklılıklarının olabileceğini görmek için iki boyutlu bir sistem,  $n = 2$  iken (1.10) sistemini, ele alalım. Böyle bir sistemde, denge noktasının belirli bir parametre değerinde kararlılığını kaybetmesi demek sistemin negatif reel kısma sahip iki özdeğerinin reel kısımlarının, o parametre değerinde sıfır ve o parametre değerinden sonra en az birinin pozitif olması anlamına gelir. Bu ise ancak sistemin çatallanma değeri dediğimiz parametre değerinde sıfır ya da bir çift sıfır sanal özdeğere sahip olması ile mümkündür. Bir özdeğerin negatif, bir özdeğerin sıfır olduğu durumda, yukarıda bahsettiğimiz üç tip çatallanma, aynı dinamik yapı ile meydana gelir. Bir çift sıfır sanal özdeğerin ortaya çıktığı durumda, tek boyutlu sistemlerde ortaya çıkmayan Hopf çatallanma meydana gelir. İki özdeğerin sıfır olduğu durumda ise ortaya Bogdanov-Takens çatallanma çıkar ve bu çatallanma sistemdeki parametrenin değerine bağlı olarak katlı ("fold", "saddle-node") çatallanma veya Hopf çatallanma özelliği gösterebilir. Bu çatallanma ile ilgili ayrıntılı bilgi için Kuznetsov (1998) ve Wiggins (2003) kaynaklarına başvurulabilir.

#### 1.4 Hopf Çatallanmanın Önemi

Doğal ve yapay pek çok süreç periyodik bir yapı gösterir ve bu periyodik yapılar farklı sistemlerde farklı anlamlar ifade eder. Puralı (2017), çevremizdeki en büyük değişikliğin, aydınlık ve karanlık periyotlar şeklinde gerçekleşen ve çoğu zaman kanıksadığımız gece-gündüz döngüsü olduğunu ve insanda uyku-uyanıklık hali, bilişsel işlevler, metabolizma ve hormon düzeyleri gibi yaşamsal unsurların hepsinin gece-gündüz döngüsünün etkisiyle değiştiğini ifade eder (Şekil 1.2). Aynı çalışmada, üzerinde yaşadığımız gezegenin kendi çevresinde dönüşü ile ortaya çıkan "dünya saati" ile vücudumuzun kendi döngüsünü oluşturan biyolojik "iç saat"in uyumlu olmasının sağlığımız için önemli olduğu ve bu uyumdaki aksamaların hastalıklara neden olduğu belirtilir.



Şekil 1.2: Biyolojik saatimiz uykuyu düzenlediği, beslenme davranışını, hormon salınımını, kan basıncını ve vücut sıcaklığını düzenlemeye yardımcı olur (Nobel Fizyoloji veya Tıp Komitesi, Url-11; Sezer, 2017).

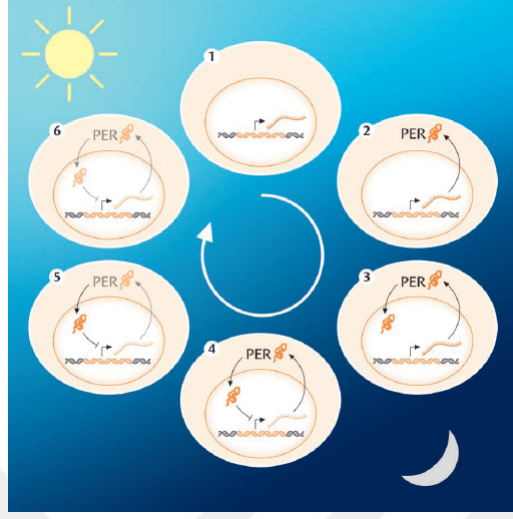
Varlığı uzun zamandır bilinen ve insanlar da dahil olmak üzere tüm canlı organizmaların, günün düzenli ritmini öngörmesine ve ona ayak uydurmasına yardımcı olan içsel biyolojik saatin işleyişini aydınlatmayı başaran Jeffrey C. Hall, Michael Rosbash ve Michail W. Young, 2017 Nobel Fizyoloji veya Tıp ödülüne layık görüldüler (Sezer, 2017).

Nobel ödülünü getiren çalışmada, Jeffrey Hall, Michael Rosbash ve Michael Young period adlı genin kodladığı "PER" proteinini bulmuşlar ve bu proteinin düzeyinin gece-gündüz döngüsüyle ilişkili olduğunu, gece artıp gündüz azaldığını göstermişlerdir. Bu bulgulara dayanarak PER proteininin, period adlı genin etkinliğini baskıladığını düşünmüşlerdir. Şekil 1.3'te basitleştirilmiş olarak gösterildiği gibi hücre sitoplazmasında üretilen PER proteini çekirdekte birikiyor ve period adlı geni baskılıyor. Baskı azalınca gen tekrar etkinleşiyor ve PER proteini üretiliyor. Artma azalma döngüsü sürekli tekrarlanıyor (Puralı, 2017). Günlük ritimden sorumlu olan ve periyod adı verilen gen hakkında daha fazla bilgi için Nobel Fizyoloji veya Tıp Komitesi, Url-11 ve bu yayının bir çevirisi olan Sezer (2017) kaynaklarına başvurulabilir. Nobel Ödüllü bilim insanımız Aziz Sancar ise insanlarda biyolojik saati gün ışığına bağlı olarak düzenleyen cryptochrome genini ve kodladığı proteini keşfedip bu proteinin biyolojik saati düzenleme mekanizmasını ortaya koymuştur (Puralı, 2017).

Periyodik davranış farklı sistemlerde farklı anlamlara gelir. Örneğin, Townley ve diğ. (2000), yapay sinir ağlarının (ANN) bir sınıfı olan tekrarlayan sinir ağlarının (RNN) periyodik bir yörüngeye sahip olup olamayacağını belirlemekle ilgilenmiş ve bu türden periyodik yörüngelerin, belirli etkinliklerin veya hareketlerin tekrarla öğrenilmesi anlamına geldiğini ifade etmişlerdir. Başka bir örnek olarak Yafia (2007), Kirschner ve Panetta (1998) tarafından elde edilen deneysel ve Galach (2003) tarafından elde edilen nümerik sonuçları kullanarak salınımların hastalığın terminal olmayan dönemini<sup>1</sup> uzattığını, bu nedenle, tıbbi açıdan monoton olarak büyüyen

<sup>1</sup>Terminal dönem, kanser ve artan fiziksel kısıtlanmalara karşı hastanın yaşam kalitesini korumak ve iyileştirmek amacıyla bütüncü bakımın süre geldiği ölüm öncesi dönemdir (Çavdar, 2011).

durumdan daha fazla arzu edildiğini ifade etmiştir. Ayrıca, popülasyon dinamiğinde, av-avcı ilişkisini ele alan bir modelde periyodik bir davranışın olması iki türün de hayatta kalmaya devam edeceği anlamına gelmektedir.



Şekil 1.3: Periyod geninin geri bildirimle düzenlenişinin basitleştirilmiş bir şeması (Nobel Fizyoloji veya Tıp Komitesi, Url-11; Sezer, 2017).

Yukarıda verdiğimiz örneklerde görüldüğü gibi, periyodik davranışların varlığı sağlıklı olmak, öğrenmek, yaşamaya devam etmek gibi olumlu şeyleri temsil eder. Bununla birlikte, periyodik davranışlar, bazı sistemlerde sorunların habercisidir. Das ve Kundu (2014), fizyolojik bazı deneylere dayanarak beyin yapısının kaotik olduğunu ifade eder (Karaoğlu, 2016). Karaoğlu (2016)'ya göre bu kaotik yapıda meydana gelecek bir bozulma bilgi işleme sürecinde aksaklıklara neden olur ve Alzaymır hastalığı ortaya çıkar. Dolayısıyla, periyodik davranışın olduğu bir durumda, kaotik yapı olmayacağı için Alzaymır hastalığını modelleyen bir çalışmada periyodik çözüm hastalığı ifade edecektir. Başka bir örnek olarak epilepsi hastalığı ele alınabilir. Karaoğlu (2016), epilepsi hastalarının EEG kayıtlarında, epilepsi ataklarından önce, kaotik beyin yapısının bozulduğunu ve bir takım periyodik davranışların görüldüğünü belirtir. Bu nedenle, epilepsi hastalığını temsil eden bir matematiksel modelin periyodik çözüme sahip olması her ne kadar atak olacağı anlamına gelse de, bu periyodik çözümlerin ortaya çıkacağı zamanların tespit edilmesi tedaviye katkı sağlayabilir.

Görüldüğü gibi, periyodik davranışların varlığı ve yokluğu, gerçek yaşam problemlerini temsil eden modellerin analizinde önemli bir yere sahiptir. Diğer taraftan, iki ve daha yüksek boyutlu diferensiyel denklem sistemlerinde ortaya çıkan Hopf çatallanmayı diğer çatallamalardan ayıran ana özellik, denge noktası kararlılığını kaybederken sistemde yerel (lokal) olarak periyodik çözümlerin ortaya çıkması veya varolan periyodik çözümlerin yok olmasıdır. Böylece, Hopf çatallanmanın en önemli yönü ifade edilmiş olur.

İkinci olarak ise bir sistem iki farklı parametre değerinde iki farklı sıfır sanal özdeğere sahip iken ortaya çıkan Hopf çatallanma, sistemde kararlılık geçişine neden olur.

**Tanım 1.2** (Kararlılık Geçişi (Cooke ve Grossman, 1982)). *Çatallanma parametresi değişirken denge noktasının kararlılık yapısı sonlu kez tekrar edecek şekilde değişiyorsa buna denge noktasının kararlılık geçisi denir.*

Bu tezde, lineer olmayan iki boyutlu adi diferensiyel denklem sistemleri ve iki boyutlu reaksiyon-difüzyon sistemlerinde gecikme terimi çatallanma parametresi olarak alınıp Hopf çatallanma analizi yapılacaktır.





## 2. MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ

Bir dinamik sistemi basitleştirmek düşünüldüğünde akla iki yaklaşım gelir. Bunlardan ilki sistemin boyutunu azaltmak için kullanılan Merkez Manifold Teorisi, ikincisi ise lineer olmayan terimlerin dinamik üzerindeki etkisini ortadan kaldırmaya yarayan Normal Form Metodudur (Wiggins, 2003). Bu teknikler, dinamik sistemlerin yerel (lokal) teorisinde mevcut, genel olarak uygulanabilen en önemli yöntemlerdir (Wiggins, 2003).

Bu bölümde,  $n$ -boyutlu sürekli bir diferensiyel denklem sistemi için Hopf Çatallanma Teorisinin temeli oluşturulan Merkez Manifold Teorisine yer verilecektir. Bu bölüm hazırlanırken Bressan (2007), Carr (1981), Hassard ve diğ. (1981), Kuznetsov (1998), Perko (2001) ve Wiggins (2003) kaynaklarından yararlanılmıştır.

### 2.1 Merkez Manifold Teoremi

Bu bölümde, sürekli bir diferensiyel denklem sisteminin boyutunu azaltmayı sağlayan temel teoremler ifade edilecektir.

Terminoloji ile ilgili, Wiggins (2003) kaynağında verilen küçük bir açıklama ile başlayalım. Çok sıklıkla tek başına kullanılan "merkez manifold" terimi, dinamik durumu tanımlamak için tek başına yeterli değildir. Terimin mantıklı olabilmesi için "bir şey" in merkez manifoldu olarak ifade edilmesi gerekir. Buradaki "bir şey" denge noktası, değişmez bir küme vb. olabilir. Bu tezde,  $n$ -boyutlu sürekli bir diferensiyel denklem sisteminin denge noktasının merkez manifoldu ele alınacaktır.

**Not** (İfade Sadeleştirme). Bu noktadan itibaren hem yazımı kolaylaştırmak hem de okumayı daha akıcı hale getirmek için "sistemin denge noktasının merkez manifoldu" ifadesi yerine "sistemin merkez manifoldu" ifadesi kullanılacaktır.

$\mathbf{F} \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 2$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  bağımsız değişken ve  $\mu \in \mathbb{R}$  bir parametre olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu) \quad (2.1)$$

adi diferensiyel denklem sistemini ele alalım ve

$$D_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu)) = \left( \frac{\partial F_i(\mathbf{X}; \mu)}{\partial X_j} : i, j = 1, 2, \dots, n \right)$$

olmak üzere (2.1) sisteminin orijinde hesaplanan Jakobiyen matrisini aşağıdaki gibi gösterelim:

$$A(\mu) = D_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu)). \quad (2.2)$$



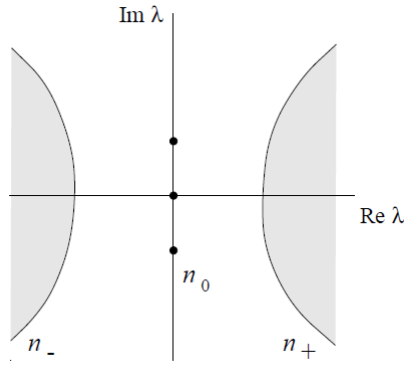
Öncelikle, parametrenin çatallanma değerine sabitlendiği, yani  $\mu = 0$  olduğu, kritik durumu inceleyeceğiz. Bu durumda,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  olmak üzere (2.1) sistemi

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (2.3)$$

adi diferensiyel denklem sistemi şeklinde ifade edilebilir. (2.2) ile verilen Jakobiyen matrisi kullanılarak  $A = A(0)$  tanımlanırsa (2.3) sistemine karşılık gelen lineer sistem

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.4)$$

olur.  $A$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olsun. Özdeğerlerden reel kısmı sıfır olanların sayısını  $n_0$ , negatif olanların sayısını  $n_-$ , ve pozitif olanların sayısını  $n_+$  ile gösterelim (Şekil 2.1). Eğer  $n_0 = 0$ , yani bütün özdeğerlerin reel kısmı sıfırdan farklı ise denge noktası hiperbolik denge noktası olarak adlandırılır. (2.3) sisteminin denge noktası hiperbolik ise lineer olmayan (2.3) sistemi ile lineer (2.4) sisteminin yörüngeleri arasında bir ilişki kurmak mümkündür.



Şekil 2.1:  $\mu = 0$  iken denge noktasının özdeğerlerinin dağılımı (Kuznetsov, 1998).

**Tanım 2.1** (Topolojik Denklik ve Topolojik Eşlik (Perko, 2000)).  $\zeta$  ve  $\vartheta$  sırasıyla (2.3) sisteminin denge noktası olan orijini içeren ve (2.4) sisteminin denge noktası olan orijini içeren açık kümeler olsun. Eğer (2.3) sistemine ait  $\zeta$  daki yörüngeleri, (2.4) sistemine ait  $\vartheta$  daki yörüngelere eşleyen ve bu yörüngelerin zamana göre yönünü koruyan bir  $H : \zeta \rightarrow \vartheta$  homeomorfizmi<sup>1</sup> var ise (2.3) ve (2.4) otonom diferensiyel denklem sistemlerine orijinin bir komşuluğunda topolojik olarak denktir denir.

Eğer  $H$  homeomorfizmi parametrizasyonu zamana göre de koruyor ise (2.3) ve (2.4) otonom diferensiyel denklem sistemlerine orijinin bir komşuluğunda topolojik olarak eştir<sup>2</sup> denir.

Tanımda geçen zamana göre yönün korunması ifadesi,  $\zeta$  daki bir yörüngeyi  $X_1$  den  $X_2$  ye doğru iken onun  $H$  homeomorfizmi altındaki görüntüsünün yönünün  $H(X_1)$

<sup>1</sup> $\zeta$  ve  $\vartheta$  topolojik uzaylar ve  $H : \zeta \rightarrow \vartheta$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $H$  fonksiyonu sürekli,  $H$  fonksiyonunun tersi  $H^{-1}$  mevcut ve sürekli ise  $H$  fonksiyonuna homeomorfizm denir (Yıldız, 2005).

<sup>2</sup> $x \rightarrow \phi(x)$  ve  $y \rightarrow \varphi(y)$  olmak üzere  $\phi, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  iki fonksiyon olsun. Eğer  $H \circ \phi = \varphi \circ H$  olacak şekilde bir  $y = H(x)$  homeomorfizmi var ise  $\phi$  ve  $\varphi$  fonksiyonlarına topolojik olarak eştir denir. Topolojik olarak eş olan fonksiyonlar, aynı sayıda denge noktasına ve aynı kararlılık tipinde periyodik yörüngelere sahip olmak gibi aynı topolojik özelliklere sahiptir (Kuznetsov, 1998).

den  $H(X_2)$  ye doğru olduğu anlamındadır. Ayrıca  $H$  homeomorfizm,  $\phi^t : M \rightarrow M$  ve  $\varphi^t : N \rightarrow N$  iki akış<sup>1</sup> olmak üzere  $\varphi^t(H(x)) = H(\phi^{\tau(t,x)}(x))$  ise parametrizasyon zamana göre korunmuyor,  $\varphi^t(H(x)) = H(\phi^t(x))$  ise parametrizasyon zamana göre korunuyor demektir. Bu açıdan, topolojik eşlik, topolojik denkleğe göre daha kuvvetlidir. Sonuç olarak, iki sistemin topolojik olarak denk olması sistemlerin aynı nitel yapıya sahip olması anlamına gelir. Topolojik olarak eş olması ise iki sistemin dinamiklerinin tamamen aynı olduğu anlamına gelir.

**Örnek 1** (Perko, 2000).

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \text{ve} \quad \dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$$

otonom diferensiyel denklem sistemlerini ele alalım. Bu sistemlerin

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 \quad \text{ve} \quad \mathbf{y}(t) = e^{Bt} \mathbf{y}_0$$

çözümlerine sahip olduğunu biliyoruz. Şimdi,  $H$  operatörünü

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $H(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$  şeklinde tanımlayalım. Açıkça  $H(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$  ve  $H^{-1}(\mathbf{x}) = R^{-1}\mathbf{x}$  sürekli olduğu için  $H$  bir homeomorfizmdir. Ayrıca gerekli hesaplamalar yapılırsa  $BR = RA$  olduğu görülür.  $\mathbf{y} = H(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$  olarak alınırsa

$$\dot{\mathbf{y}} = R\dot{\mathbf{x}} = RA\mathbf{x} = BR\mathbf{x} = B\mathbf{y}$$

olur. Sonuç olarak,  $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$  dönüşümü altında eğer  $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  sisteminin  $\mathbf{x}_0$  başlangıç değerine sahip çözümünü ise  $\mathbf{y}(t) = H(\mathbf{x}(t))$ ,  $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$  sisteminin  $\mathbf{y}_0$  başlangıç değerine sahip çözümünü olur:

$$\begin{aligned} H(e^{At} \mathbf{x}_0) &= R e^{At} \mathbf{x}_0 \\ &= R \left( I_2 + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots \right) \mathbf{x}_0 \\ &= R \left( I_2 + R^{-1} B R t + \frac{1}{2!} R^{-1} B R R^{-1} B R t^2 + \frac{1}{3!} R^{-1} B R R^{-1} B R R^{-1} B R t^3 + \dots \right) \mathbf{x}_0 \\ &= \left( R + B R t + \frac{1}{2!} B^2 R t^2 + \frac{1}{3!} B^3 R t^3 + \dots \right) \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Bir dinamik sistemin  $t$  anındaki durumu  $X_t$  ve başlangıç durumu  $X_0$  ile gösterilmek üzere başlangıç durumunu kullanarak sistemin  $t$  anındaki durumunu,  $X_t = \varphi^t(X_0)$  ilişkisi ile veren  $\varphi^t$  fonksiyonuna evölüsyon operatörü denir. Sürekli dinamik sistemlerde  $\{\varphi^t\}$  evölüsyon operatörleri ailesi akış olarak adlandırılır (Kuznetsov, 1998).

$$\begin{aligned}
&= \left( I_2 + Bt + \frac{1}{2!}B^2t^2 + \frac{1}{3!}B^3t^3 + \dots \right) R\mathbf{x}_0 \\
&= e^{Bt}R\mathbf{x}_0 \\
&= e^{Bt}\mathbf{y}_0.
\end{aligned}$$

Başka bir deyişle,  $H$  homeomorfizmi  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  sisteminin çözüm eğrilerini,  $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$  sisteminin çözüm eğrilerine eşler, yani bu diferensiyel denklem sistemleri orijinin bir komşuluğunda topolojik olarak denktir. Ayrıca  $\phi^t(\mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}$  ve  $\varphi^t(\mathbf{x}) = e^{Bt}\mathbf{x}$  olmak üzere

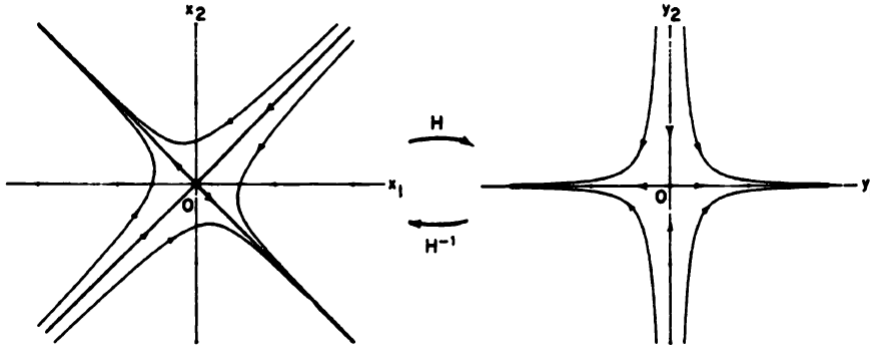
$$\varphi^t(H(\mathbf{x})) = H(\phi^t(\mathbf{x}))$$

olduğu için  $H$  homeomorfizmi parametrizasyonu zamana göre korur. Bu ise bu diferensiyel denklem sistemlerinin orijinin bir komşuluğunda topolojik olarak eş olduğu anlamına gelir.

Dikkat edilirse

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

olduğu için  $H(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$ , basitçe orijine göre saat yönünün tersine  $45^\circ$  derecelik bir dönüşür. Bu iki sistemin faz portreleri Şekil 2.2'de gösterilmektedir.



Şekil 2.2: Örnek 1'deki sistemlerin faz portreleri (Perko, 2000).

**Teorem 2.1** (Hartman-Grobman Teoremi (Perko, 2000)).

Lineer olmayan (2.3) sisteminin denge noktası olan orijin bir hiperbolik denge noktası,  $\zeta, \vartheta \subset \mathbb{R}^n$  orijini içeren açık kümeler ve (2.3) sisteme karşılık gelen akış  $\phi^t$  olsun. Bu takdirde, her  $\mathbf{X}_0 \in \zeta$  için sıfırı içeren açık bir  $I_0 \in \mathbb{R}$  aralığı mevcuttur ve her  $\mathbf{X}_0 \in \zeta$  ve  $t_0 \in I_0$  için

$$H \circ \phi^t(\mathbf{X}_0) = e^{At}H(\mathbf{X}_0)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir  $H : \zeta \rightarrow \vartheta$  homeomorfizmi vardır. Başka bir deyişle,  $H$  homeomorfizmi, lineer olmayan (2.3) sisteminin orijin komşuluğundaki yörüngelerini, lineer (2.4) sisteminin orijin komşuluğundaki yörüngelerine eşler ve parametrizasyonu zamana göre korur.

**İspat.** Bakınız Perko (2000). □

Şimdi, bu teoremin ne anlama geldiğini daha iyi kavrayabilmek için teoremi iki boyutlu bir sisteme uygulayalım:

**Örnek 2** (Perko, 2000).

$$\begin{cases} \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z + y^2 \\ y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Öncelikle, (2.5) sisteminin denge noktası orijindir, yani  $(0,0)$  dır. Ayrıca bu sisteme karşılık gelen lineer sistem ise

$$\begin{cases} \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z \\ y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

olup bu lineer sistemin Jakobiyen matrisi  $\lambda_1 = -1$  ve  $\lambda_2 = 1$  özdeğerlerine sahiptir. Bu nedenle, denge noktası orijin bir hiperbolik denge noktasıdır. Diğer taraftan, adi diferensiyel denklemler teorisinden, (2.5) ve (2.6) sistemleri, sırasıyla

$$\begin{cases} y(t) = y_0 e^{-t} \\ z(t) = z_0 e^t + \frac{y_0^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} y(t) = y_0 e^{-t} \\ z(t) = z_0 e^t \end{cases}$$

çözümlerine sahiptir. Bu durumda, (2.5) sistemine karşılık gelen akış

$$\varphi^t(y, z) = \begin{pmatrix} ye^{-t} \\ ze^t + \frac{y^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

olur.

$$H(y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad H^{-1}(y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z - \frac{y^2}{3} \end{pmatrix}$$

olmak üzere  $H$  ve  $H^{-1}$  sürekli olduğu için  $H$  bir homeomorfizmdir. Ayrıca

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

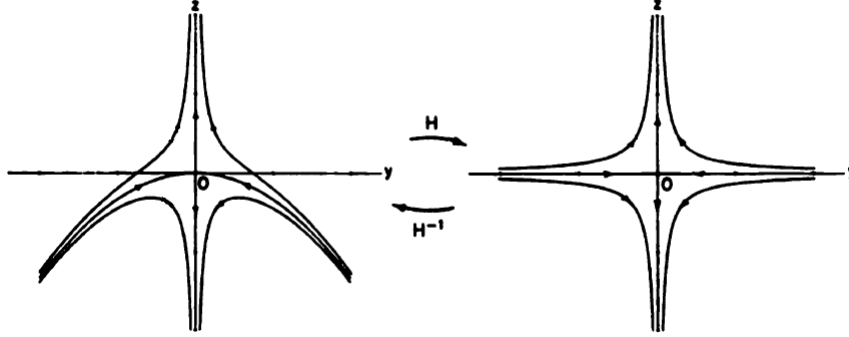
olmak üzere

$$H(\varphi^t(y, z)) = \begin{pmatrix} ye^{-t} \\ ze^t + \frac{y^2}{3} e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} H(y, z) = e^{At} H(y, z)$$

olduğu için

$$H \circ \varphi^t(y, z) = e^{At} H(y, z)$$

sağlanır. Sonuç olarak Hartman-Grobman teoreminden, parametrizasyon zamana göre korunarak  $H$  homeomorfizmi ile (2.5) sisteminin yörüngeleri, (2.6) sisteminin yörüngelerine eşlenir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3: Örnek 2'deki lineer olmayan (2.5) sisteminin faz portresi solda, lineer olan (2.6) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir (Perko, 2000).

Ayrıca (2.6) lineer sisteminin

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{z}{y} \implies z = \frac{1}{y}$$

yörüngeleri  $H^{-1}$  ile

$$H^{-1}\left(y, \frac{1}{y}\right) = \left( \begin{array}{c} y \\ \frac{1}{y} - \frac{y^2}{3} \end{array} \right)$$

olduğu için (2.5) sisteminin

$$z = \frac{1}{y} - \frac{y^2}{3}$$

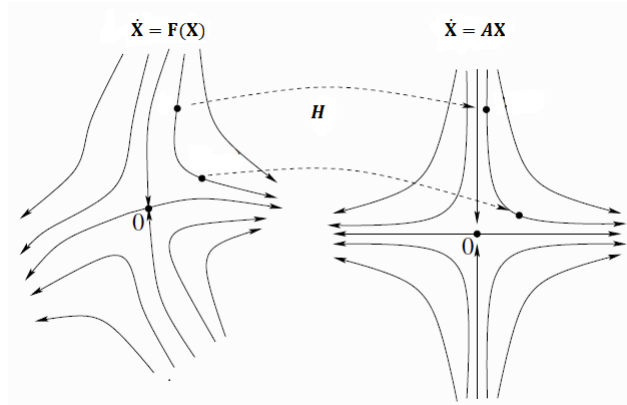
yörüngelerine eşlenir.

Bu teorem, (2.3) sisteminin denge noktası hiperbolik ise lineer olmayan (2.3) sistemi ile kendisine karşılık gelen (2.4) lineer sisteminin dinamik yapılarının, denge noktasının bir komşuluğunda tamamen aynı nitel yapıya sahip olduğunu söyler (Şekil 2.4). Dolayısıyla, Hartman-Grobman Teoremi, lineer olmayan bir sistemin hiperbolik denge noktasının kararlılık yapısını ve çözüm eğrilerinin bir komşuluktaki nitel davranışını belirleme problemini tamamen çözmektedir.

Şayet denge noktası olan orijin hiperbolik değil ise lineer olmayan (2.3) sisteminin orijinin bir komşuluğundaki nitel davranışı, aynı sistemin merkez özuzayına<sup>1</sup> teğet olan merkez manifoldu üzerindeki davranışı tarafından belirlenir. Bir sistemin merkez manifoldunun boyutu merkez özuzayının boyutu ile aynıdır, yani genellikle sistemin

<sup>1</sup>Reel kısmı sıfır, reel kısmı negatif ve reel kısmı pozitif olan özdeğerlere karşılık gelen genelleştirilmiş özvektörlerin gerdiği altuzaylara sırasıyla merkez, kararlı ve kararsız özuzay denir.

boyutundan küçüktür. Bu durum, hiperbolik olmayan denge noktası komşuluğundaki akışın kararlılık yapısını ve nitel davranışını belirleme sorununu basitleştirir.



Şekil 2.4: Hiperbolik denge noktası-topolojik eşlik (Bressan, 2007).

$n_0$  boyutlu merkez,  $n_-$  boyutlu kararlı ve  $n_+$  boyutlu kararsız özuzayları sırasıyla  $E^c$ ,  $E^s$  ve  $E^u$  ile ifade edelim. Hirsch ve Smale (1974),

$$\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^s \oplus E^u, \quad n_0 + n_- + n_+ = n \quad (2.7)$$

ve  $T^{-1}\mathbf{X} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$  olmak üzere (2.4) sistemini kendi özuzayındaki

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & A_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

sistemine dönüştüren bir  $T$  matris dönüşümünün var olduğunu göstermiştir. Burada,  $A_c$ ,  $A_s$  ve  $A_u$  sırasıyla  $n_0 \times n_0$  boyutlu ve reel kısmı sıfır olan özdeğerlere sahip matris;  $n_- \times n_-$  boyutlu ve reel kısmı negatif olan özdeğerlere sahip matris;  $n_+ \times n_+$  boyutlu ve reel kısmı pozitif olan özdeğerlere sahip matristir. Aynı dönüşüm kullanılarak (2.3) sistemi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{v}} = A_s \mathbf{v} + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} = A_u \mathbf{y} + \mathbf{f}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (2.9)$$

sistemine dönüşür. Yukarıdaki ifadede,  $\mathbf{f}_c$ ,  $\mathbf{f}_s$  ve  $\mathbf{f}_u$  fonksiyonları sırasıyla,  $T^{-1}F(T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y})^T)$  fonksiyonunun lineer olmayan terimlerini içeren ilk  $n_0$ ,  $n_-$  ve  $n_+$  bileşenleridir.

$t \rightarrow \infty$  iken (2.8) sistemine ait  $E^c$  merkez özuzayında başlayan yörüngeler, denge noktası olan orijine üstel olarak ne yaklaşıyor ne de orijinden uzaklaşıyor;  $E^s$  kararlı özuzayında başlayan yörüngeler orijine yaklaşıyor ve  $E^u$  kararsız özuzayında başlayan yörüngeler, sınırsız hale gelerek orijinden uzaklaşıyor. Eğer  $E^u = \emptyset$  olduğunu varsayarsak (2.8) sistemine ait herhangi bir yörüngenin hızla  $E^c$  merkez özuzayına gideceğini görürüz. Dolayısıyla, lineer (2.8) sisteminin denge noktasının kararlılığı gibi uzun süreli davranışlarla ilgileniyorsak  $E^c$  merkez özuzayına sıkıştırılmış sistemi araştırmamız yeterli olacaktır. Merkez Manifold Teoremi lineer olmayan (2.9)

sisteminin hiperbolik olmayan denge noktasının yerel (lokal) kararlılığı gibi analizler için benzer bir indirgenimin var olduğunu söyler. Şimdi, bu teoremin ifadesini verelim.

$n_+ = 0$  ve  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-}$  olmak üzere (2.3) sistemi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{v}} = A_s \mathbf{v} + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$D\mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{c_i}}{\partial u_j} & \frac{\partial f_{c_i}}{\partial v_k} \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2, \dots, n_0; \quad k = 1, 2, \dots, n_-,$$

$$D\mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{s_k}}{\partial u_i} & \frac{\partial f_{s_k}}{\partial v_j} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n_0; \quad j, k = 1, 2, \dots, n_-$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, & D\mathbf{f}_c(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}_s(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, & D\mathbf{f}_s(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dır.

**Teorem 2.2** (Merkez Manifold Teoremi-Varlık).

*Eğer (2.10) sisteminin denge noktası olan orijin hiperbolik bir denge noktası değil, yani  $n_0 \neq 0$ , ise (2.10) sisteminin yerel olarak tanımlı ve  $n_0$ -boyutlu bir  $\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  merkez manifoldu vardır ve bu manifold aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

- (i)  $\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  manifoldu,  $E^c$  özuzayına denge noktası olan orijinde teğettir.
- (ii)  $\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  manifoldu yerel olarak değişmezdir, yani  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  ise yeterince küçük  $t$  değerleri için  $\phi^t(\mathbf{u}_0) \in \mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  olur.
- (iii) Denge noktasının bir komşuluğu  $N_\delta(\mathbf{0})$ ,  $\delta > 0$  ve  $\mathbf{V} \in C^k(N_\delta(\mathbf{0}), \mathbb{R}^{n_-})$  olmak üzere  $\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  merkez manifoldu yeterince küçük  $\delta$  değerleri için

$$\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0}) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \mid \mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u}), \quad |\mathbf{u}| < \delta, \quad \mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D\mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\}$$

olarak ifade edilebilir. Yani, merkez manifold  $\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  yerel olarak düzgün bir  $\mathbf{V}$  fonksiyonunun grafiği olarak temsil edilebilir (Şekil 2.5).

- (iv) (2.10) vektör alanı  $C^k$ ,  $k \geq 2$  olduğu için merkez manifold  $\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0})$  düzgündür ( $\mathbf{W}^c(\mathbf{0})_{lok} \in C^k$ ). Fakat (2.10) vektör alanın analitik ( $C^\infty$ ) olması merkez manifoldun analitik olmasını gerektirmez.

Ayrıca (2.10) sistemi, yeterince küçük  $\tilde{\mathbf{u}}$  değerleri için

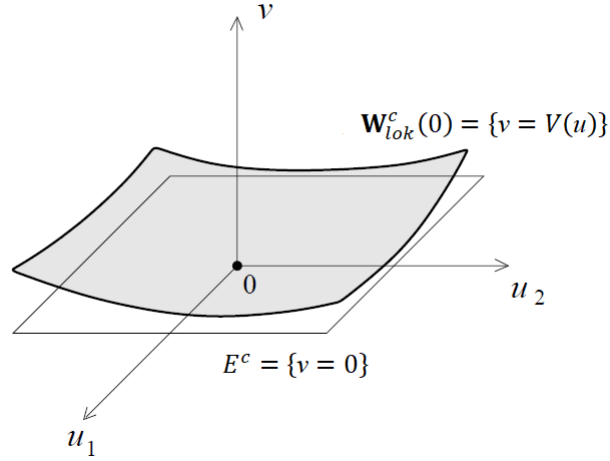
$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = A_c \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_c(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{u}})) \\ \dot{\mathbf{v}} = A_s \mathbf{v} \end{cases}$$

sistemine topolojik olarak denktir, yani (2.10) sisteminin dinamiği, yeterince küçük  $\tilde{\mathbf{u}}$  değerleri için kendisinin merkez manifolduna kısıtlaması olan

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = A_c \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_c(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{u}})) \quad (2.11)$$

$n_0$  boyutlu sistemi ile belirlenir.

**İspat.** Bakınız Carr (1981). □



Şekil 2.5:  $v = \mathbf{V}(\mathbf{u})$  grafiği ile temsil edilen merkez manifold (Kuznetsov, 1998).

**Açıklama 2.1** ( $\tilde{\mathbf{u}}$  Notasyonu). (2.10) sisteminin merkez manifoldu yerel olarak  $v = \mathbf{V}(\mathbf{u})$  grafiği ile temsil edilmesine rağmen, teoremden (2.10) sisteminin merkez manifolduna kısıtlamasında  $\mathbf{u}$  yerine  $\tilde{\mathbf{u}}$  kullanılmıştır. Bununla, (2.10) sisteminin merkez manifolduna kısıtlamasının genellikle doğrusal olmayan bir yüzey üzerindeki bir vektör alanı olduğu vurgulanmak istenmiştir. Eğer  $\tilde{\mathbf{u}}$  yerine  $\mathbf{u}$  kullanılmış olsaydı, (2.10) sisteminin asıl koordinatları  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-}$  olduğu için bu nokta gözden kaçabilirdi. Bu önemli nokta anlaşıldıktan sonra,  $\mathbf{u}$  veya başka bir sembolün kullanılmasında bir sorun yoktur ve bu genellikle literatürde yapılır (Wiggins, 2003).

**Not** (İfade Sadeleştirme). Buradan sonra notasyonu basitleştirmek için  $\mathbf{W}_{lok}^c(0)$  merkez manifoldu,  $\mathbf{W}^c(0)$  ile gösterilecektir.

Yukarıda verilen Merkez Manifold Teoremi,  $n_0 = 2, n_- = 1$  için  $\mathbb{R}^3$ 'te Şekil 2.6 ile örneklenmiştir. Burada,  $q_1$  ve  $q_3$  sırasıyla  $\lambda_1 = i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ , ve  $\lambda_3 < 0$  özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerdir. Ayrıca  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifoldu kompleks özvektör  $q_1$  in reel ve sanal kısımları tarafından gerilen uzaya denge noktası olan orijinde teğettir.

**Teorem 2.3** (Merkez Manifold Teoremi-Kararlılık).

- (i) Eğer (2.11) sisteminin denge noktası olan orijin kararlı (asimptotik kararlı) ise (2.10) sisteminin denge noktası olan orijin de kararlıdır (asimptotik kararlıdır).
- (ii) (2.11) sisteminin denge noktası olan orijin kararlı ve  $N_\delta(\mathbf{0})$ ,  $\delta > 0$  denge noktasının bir komşuluğu olsun. Bu takdirde,  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in N_\delta(\mathbf{0})$  olmak üzere

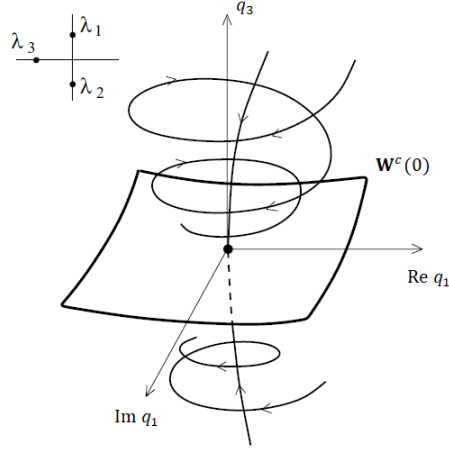


(2.10) sisteminin her  $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$  çözümü için (2.11) sisteminin bir  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  çözümü vardır ve bu çözüm bir  $\gamma > 0$  sabiti için  $t \rightarrow +\infty$  iken

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \end{cases}$$

dir.

**İspat.** Bakınız Carr (1981). □



Şekil 2.6: İki boyutlu merkez manifold (Kuznetsov, 1998).

**Açıklama 2.2.** Bu teorem, (2.10) sisteminin başlangıç noktası orijine yeterince yakın olan bir yörüngesinin, merkez manifold üzerindeki bir yörüngeye asimptotik olarak yaklaştığını ifade etmektedir (Wiggins, 2003).

Bu sonuç, lineer olmayan bir sistemin dinamiği ile merkez manifoldunun dinamiği arasında kurmuş olduğu ilişkiden dolayı önemlidir ve farklı kaynaklarda farklı ifadelerle verilmiştir. Bu sonucun iyi anlaşılmasını istediğimiz ve farklı bakış açılarının buna katkısı olacağını düşündüğümüz için Teorem 2.3'ü iki farklı şekilde daha ifade edeceğiz:

**1. Kuznetsov (1998):**

(2.10) sisteminin denge noktası olan orijinin bir  $\zeta$  komşuluğu mevcuttur öyle ki eğer her  $t \geq 0$  için  $\varphi^t(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in \zeta$  ise

$$t \rightarrow +\infty \text{ iken } \varphi^t(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \rightarrow \mathbf{W}^c(0)$$

dir.

**Açıklama 2.3** (Çekici Merkez Manifold). Bu ifade, eğer denge noktasının bir  $\zeta$  komşuluğunda başlayan tüm yörüngeler her  $t \geq 0$  için  $\zeta$  komşuluğunda kalıyorsa (bunun için gerekli bir koşul  $n_+ = 0$  olmasıdır), bu yörüngelerin  $t \rightarrow +\infty$  iken  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifolduna yaklaşıcağını işaret eder. Bu durumda,  $\mathbf{W}^c(0)$  çekici merkez manifold olarak adlandırılır (Kuznetsov, 1998).

## 2. Bressan (2007):

(2.10) sisteminin  $t \rightarrow +\infty$  iken  $\phi^t(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \rightarrow 0$  olacak şekilde herhangi bir yörüngesi için merkez manifold üzerinde bir  $\phi^t(\tilde{\mathbf{u}}_0) \in \mathbf{W}^c(0)$  yörüngesi ve de  $\eta > 0$  vardır öyle ki

$$t \rightarrow +\infty \text{ iken } e^{\eta t} |\phi^t(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) - \phi^t(\tilde{\mathbf{u}}_0)| \rightarrow 0$$

**Açıklama 2.4.** Bu ifade bize  $t \rightarrow +\infty$  iken denge noktası olan orijine ulaşan her çözümün, merkez manifold üzerindeki bir yörüngenin üstel olarak küçük bir sapması ile tanımlanabileceğini söyler (Bressan, 2007).

Bu noktada akla gelen soru Teorem 2.2 ve Teorem 2.3'ün sonuçlarını kullanabilmemiz için merkez manifoldu nasıl hesaplayacağımızdır. Bu soruya bir cevap olarak  $\mathbf{V}(\mathbf{u})$  fonksiyonunun grafiğinin merkez manifold olabilmesi için  $\mathbf{V}(\mathbf{u})$  fonksiyonunun sağlaması gereken bir denklem türeteceğiz.

Kabul edelim ki (2.10) sisteminin denge noktasının merkez manifoldu yeterince küçük  $\delta$  değerleri için

$$\mathbf{W}^c(0) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} \mid \mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u}), \|\mathbf{u}\| < \delta, \mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, D\mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\}$$

olsun.

$\mathbf{W}^c(0)$  üzerindeki her  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  noktası için  $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u})$  sağlanır. Bu eşitliğin  $t$  ye göre türevini almak  $\mathbf{W}^c(0)$  üzerindeki herhangi bir noktanın  $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}})$  koordinatlarının

$$\dot{\mathbf{v}} = D\mathbf{V}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \quad (2.12)$$

eşitliğini sağladığını ifade eder.  $\mathbf{W}^c(0)$  üzerindeki herhangi bir nokta, (2.10) sistemi tarafından üretilen dinamiğe uyduğu için

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u})) \\ \dot{\mathbf{v}} = A_s \mathbf{V}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u})) \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikler kullanılarak  $\dot{\mathbf{u}}$  ve  $\dot{\mathbf{v}}$ , (2.12) denkleminde yerine konursa

$$M(\mathbf{V}(\mathbf{u})) = D\mathbf{V}(\mathbf{u}) [A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}))] - A_s \mathbf{V}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u})) = 0 \quad (2.13)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik  $\mathbf{V}(\mathbf{u})$  fonksiyonunun grafiğinin bir merkez manifold olması için  $\mathbf{V}(\mathbf{u})$  fonksiyonunun sağlaması gereken bir quasilineer kısmi diferensiyel denklemdir.

Bu noktada, merkez manifoldu bulmak için, tek yapmamız gereken (2.13) denklemini çözmektir. Fakat (2.13) denklemini çözmek çoğu zaman (2.10) sistemini çözmekten daha zordur. Bununla birlikte, aşağıda vereceğimiz yaklaşım teoremi bize bu denklemin istenilen herhangi bir hassaslık derecesinde yaklaşık çözümünü hesaplamak için bir yöntem sunar.

**Teorem 2.4** (Merkez Manifold Teoremi-Yaklaşım).

$\mathbf{Z} \in C^1(\mathbb{R}^{n_0}, \mathbb{R}^{n_-})$ ,  $\mathbf{Z}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ve  $D\mathbf{Z}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  olsun. Bir  $d > 1$  için  $u \rightarrow 0$  iken  $M(\mathbf{Z}(\mathbf{u})) = \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^d)$  sağlansın. Bu durumda,

$$\mathbf{u} \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad |\mathbf{V}(\mathbf{u}) - \mathbf{Z}(\mathbf{u})| = \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^d)$$

olur.

**İspat.** Bakınız Carr (1981). □

**Açıklama 2.5.** Bu teorem, istenen hassaslık derecesindeki merkez manifoldu, (2.13) denklemini aynı hassaslık derecesinde çözerek hesaplayabileceğimizi söyler. Bunun için kuvvet serisi açılımları işe yarar. Bu şekilde merkez manifoldu nasıl hesaplayacağımız sorunu çözülmüş olur (Wiggins, 2003).

**Örnek 3** (Wiggins, 2003). Denge noktası orijin olan

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2v - u^5 \\ \dot{v} = -v + u^2 \end{cases} \quad (2.14)$$

diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sisteme karşılık gelen lineer sistem

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = -v \end{cases}$$

olur. Açıkça  $\lambda_1 = 0$  ve  $\lambda_2 = -1$  bu sistemin özdeğerleridir. Bu nedenle, denge noktası olan orijin hiperbolik bir denge noktası değildir. Bu nedenle, lineer sistemi kullanarak denge noktası orijinin kararlılığı hakkında bilgi sahibi olamayız. Teorem 2.2'den, yeterince küçük  $\delta$  değerleri için bu sistemin

$$\mathbf{W}^c(0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = V(u), \quad |u| < \delta, \quad V(0) = 0, \quad DV(0) = 0\}$$

ile temsil edilen bir merkez manifoldu olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki  $V(u)$  fonksiyonu

$$V(u) = au^2 + bu^3 + \mathcal{O}(u^4)$$

formunda olsun.  $V(u)$ ,  $A_c = 0$ ,  $A_s = -1$ ,  $f_c = u^2v - u^5$  ve  $f_s = u^2$  ifadeleri, (2.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$(2au + 3bu^2 + \mathcal{O}(u^3))(au^4 + bu^5 + \mathcal{O}(u^4) - u^5) + au^2 + bu^3 + \mathcal{O}(u^4) - u^2 = 0$$

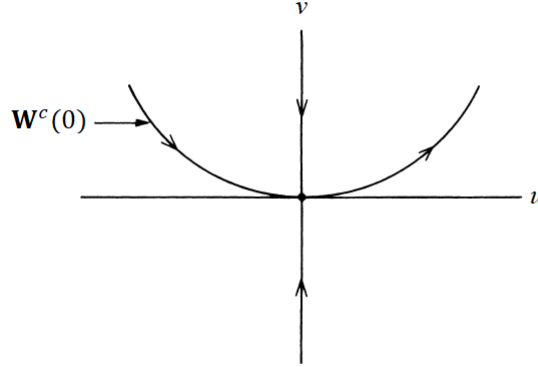
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte,  $u^2$  ve  $u^3$  terimlerinin katsayıları bize  $a = 1$  ve  $b = 0$  olduğunu gösterir. Böylece

$$V(u) = u^2 + \mathcal{O}(u^4)$$

olur (Şekil 2.7). Elde edilen bu fonksiyon, (2.14) sistemindeki ilk denklemde yerine konursa (2.14) sisteminin merkez manifolduna kısıtlaması

$$\dot{u} = u^4 + \mathcal{O}(u^5) \quad (2.15)$$

olarak elde edilir. Bu denkleme dikkat edilirse sıfırdan farklı her başlangıç değeri için  $\dot{u} > 0$  dır. Dolayısıyla, (2.15) diferensiyel denkleminin denge noktası olan orijin kararsızdır. Bu sonucu kullanarak Teorem 2.3'ten, (2.14) sisteminin denge noktası olan orijinin de kararsız olduğu sonucuna ulaşılır (Şekil 2.7).



Şekil 2.7: Örnek 3'teki sisteme ait merkez manifoldun grafiği (Wiggins, 2003).

Şimdi, merkez manifoldun tekliğini araştıralım.

**Örnek 4** (Kuznetsov, 1998).  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere aşağıdaki diferensiyel denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2, \\ \dot{v} = -v. \end{cases} \quad (2.16)$$

Sistemin denge noktası olan orijin  $\lambda_1 = 0$  ve  $\lambda_2 = -1$  özdeğerlerine sahiptir.  $\lambda_1 = 0$  ve  $\lambda_2 = -1$  özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla  $q_1 = (1, 0)^T$  ve  $q_2 = (0, 1)^T$  olduğu için  $u = 0$  sistemin kararlı özuzayı ve  $v = 0$  ise sistemin merkez özuzayıdır. Diğer taraftan, (2.16) sisteminde bağımsız değişken olan  $t$  elimine edilirse

$$\frac{dv}{du} = -\frac{v}{u^2}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü  $u \neq 0$  için

$$v(u) = \rho e^{1/u}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\mathbf{W}_\rho^c(0) = \begin{cases} (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v(u) = \rho e^{1/u}, & u < 0 \text{ ise,} \\ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v(u) = 0, & u \geq 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

ile verilen eğriler sistemin bir parametreye bağlı merkez manifoldlar ailesidir (Şekil 2.8 (a)).

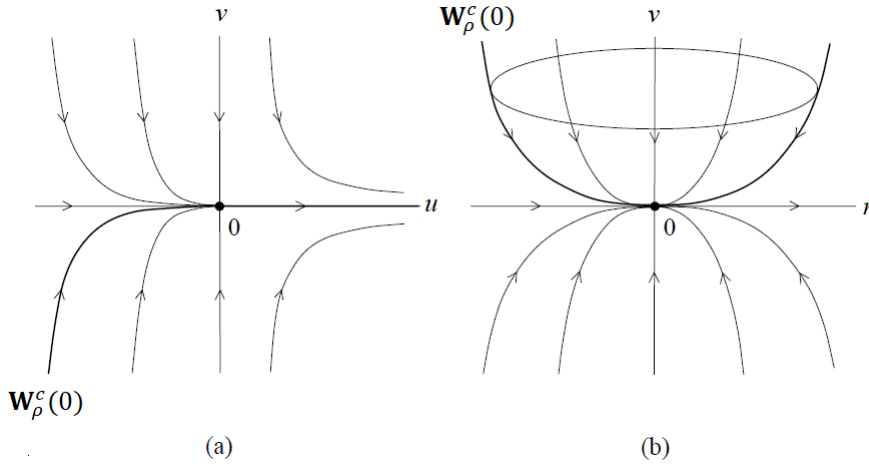
**Örnek 5** (Kuznetsov, 1998).  $(u_1, u_2, v) \in \mathbb{R}^3$  olmak üzere  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ,  $\lambda_3 = -1$  özdeğerlerine sahip

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 - u_1(u_1^2 + u_2^2), \\ \dot{u}_2 = u_1 - u_2(u_1^2 + u_2^2), \\ \dot{v} = -v \end{cases} \quad (2.17)$$

diferensiyel denklem sistemi iki boyutlu

$$\mathbf{W}_\rho^c(0) = \begin{cases} (u_1, u_2, v) \in \mathbb{R}^3 \mid v(u_1, u_2) = \rho e^{-1/2(u_1^2 + u_2^2)}, & u_1^2 + u_2^2 > 0 \text{ ise,} \\ (u_1, u_2, v) \in \mathbb{R}^3 \mid v(u_1, u_2) = 0, & u_1 = u_2 = 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

merkez manifoldlar ailesine sahiptir (Şekil 2.8 (b)).



Şekil 2.8: Merkez manifold tek değildir (Kuznetsov, 1998).

Örnek 4 ve Örnek 5'te görüldüğü gibi merkez manifoldun tek olması gerekmez.

Merkez manifoldun tek olmadığını ve merkez manifoldda kuvvet serisi açılımı kullanarak yaklaşım yapabileceğimizi biliyoruz. Bu noktada, akla

**Soru 1:** Denklem (2.13) kullanılarak elde edilen kuvvet serisi açılımı aslında hangi merkez manifolda yakınsar?

**Soru 2:** Denge noktasının bütün merkez manifoldları üzerinde sistemin dinamiği aynı mıdır?

soruları gelir. Bu sorulara şu şekilde cevap verebiliriz:

**Açıklama 2.6.** Teorem 2.4, bir sabit noktanın iki merkez manifoldunun her  $d > 1$  için en fazla transandantal olarak küçük olan  $|\mathbf{u}|^d$  terimleri ile farklılık gösterdiğini söyler. Böylece, herhangi iki merkez manifoldun Taylor seri açılımları bütün derecelerde örtüşür (Wiggins, 2003).

**Açıklama 2.7.** Denge noktası, periyodik yörünge gibi her  $t \geq 0$  için denge noktasına yeterince yakın kalan yörüngeler, merkez manifoldun çekici bir yapıya sahip olması nedeniyle denge noktasının bütün merkez manifoldlarında yer alır. Dolayısıyla, denge

noktasının bütün merkez manifoldları üzerinde sistemin dinamiği aynı olur (Wiggins, 2003).

**Not.**  $n_+ = 0$  ve  $\mu = 0$  iken (2.1) sisteminin, (2.10) sistemine topolojik olarak denk olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, bu bölümde elde edilen bütün sonuçlar  $n_+ = 0$  ve  $\mu = 0$  iken (2.1) sistemi için de geçerlidir.

**Açıklama 2.8** ( $n_+ \neq 0$  Durumu). *Denge noktası kararlı olduğunda, yani  $n_+ \neq 0$  iken, elde edilen sonuçlar hala geçerlidir fakat teoremlerdeki bazı sonuçların aşağıdaki gibi yeniden ifade edilmesi gerekir.*

**Varlık:** Teorem 2.2'nin (i), (ii) ve (iv) maddeleri (2.9) sistemi için aynen geçerlidir. Fakat madde (iii) şu şekilde yeniden ifade edilmelidir:

Merkez manifoldun grafik gösterimi  $\mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{Y}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ve  $D\mathbf{V}(\mathbf{0}) = D\mathbf{Y}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  olmak üzere

$$\mathbf{W}_{lok}^c(\mathbf{0}) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+} \mid \mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u}), \mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{u}), |\mathbf{u}| < \delta\}$$

olur.

Ayrıca (2.9) sisteminin dinamiği, yeterince küçük  $\tilde{\mathbf{u}}$  değerleri için kendisinin merkez manifolduna kısıtlaması olan

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = A_c \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_c(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{u}}))$$

$n_0$  boyutlu sistemi ile belirlenir.

**Kararlılık:** (2.9) sistemi için Teorem 2.3 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

(2.9) sisteminin denge noktası olan orijinin bir  $\zeta$  komşuluğu vardır öyle ki eğer her  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ) için  $\varphi^t(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{y}_0) \in \zeta$  ise

$$t \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow -\infty) \quad \text{iken} \quad \varphi^t(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{y}_0) \rightarrow \mathbf{W}^c(\mathbf{0})$$

dır. Fakat bu durumda manifold çekici olmaz.

**Yaklaşım:** Sistem (2.9) için Teorem 2.4 geçerlidir. Fakat merkez manifoldu verecek fonksiyonunun sağlaması gereken quasilineer kısmi diferensiyel denklem (2.13) aşağıdaki gibi yeniden ifade edilmelidir:

$$D\mathbf{V}(\mathbf{u}) [A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}), \mathbf{Y}(\mathbf{u}))] - A_s \mathbf{V}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}), \mathbf{Y}(\mathbf{u})) = 0,$$

$$D\mathbf{Y}(\mathbf{u}) [A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}), \mathbf{Y}(\mathbf{u}))] - A_u \mathbf{Y}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_u(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}), \mathbf{Y}(\mathbf{u})) = 0.$$

## 2.2 Parametreye Bağlı Sistemlerde Merkez Manifold

Parametre  $\mu$  sıfır olarak sabitlendiğinde ve  $n_+ = 0$  alındığında (2.1) sisteminin denge noktasının  $\mathbf{W}^c(\mathbf{0})$  merkez manifolduna sahip olduğunu gösterdik. Şimdi,  $\mu = 0$  iken

reel kısmı sıfır olan  $n_0$  ve reel kısmı negatif olan  $n_- = n - n_0$  tane özdeğerinin olduğu ( $n_+ = 0$ ) kabulü altında (2.1) sistemini,  $\mu \in \mathbb{R}$  için ele alacağız. Öncelikle,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

*genişletilmiş* denklem sistemini düşünelim. Dikkat edilirse (2.1) sistemi lineer olsa dahi (2.18) sistemi lineer olmayabilir.  $A(\mu)$ , (2.2) denklemi ile tanımlanmak ve  $A = A(0)$  olmak üzere (2.18) sisteminin  $(\mathbf{X}, \mu) = (\mathbf{0}, 0)$  noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi

$$J = \begin{pmatrix} A & \mathbf{F}_\mu(\mathbf{0}, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.  $I$ , birim matrisi göstermek üzere

$$\det(J - \lambda I) = -\lambda \det(A - \lambda I)$$

olduğu için  $J$  matrisinin reel kısmı sıfır olan  $n_0 + 1$  ve reel kısmı negatif olan  $n_-$  tane özdeğeri vardır. Teorem 2.2'nin sonucu olarak (2.18) sisteminin denge noktasının  $n_0 + 1$  boyutlu bir  $\mathbf{W}^c \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  merkez manifoldu vardır. Bu manifold,  $J$  matrisinin reel kısmı sıfır olan  $n_0 + 1$  özdeğerine karşılık gelen merkez özuzayına orijinde teğettir.  $T^{-1}\mathbf{X} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-}$  olmak üzere (2.10) sistemini elde etmek için kullandığımız  $T$  dönüşümü ile (2.18) sistemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mu) \\ \dot{\mathbf{v}} = A_s \mathbf{v} + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mu) \\ \dot{\mu} = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Yukarıdaki ifadede,  $\mathbf{f}_c$  ve  $\mathbf{f}_s$  fonksiyonları sırasıyla,  $T^{-1}\mathbf{F}(T(\mathbf{u}, \mathbf{v})^T)$  fonksiyonunun lineer olmayan terimlerini içeren ilk  $n_0$  ve  $n_-$  bileşenleridir. Bu durumda varlık teoreminden yerel olarak  $\mathbf{V}(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$  ve  $D\mathbf{V}(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$  olmak üzere yeterince küçük  $\delta$  ve  $\gamma$  için merkez manifold

$$\mathbf{W}^c = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mu) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R} \mid \mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu), \|\mathbf{u}\| < \delta, |\mu| < \gamma\} \quad (2.20)$$

ile temsil edilir. Ayrıca (2.19) sisteminin dinamiği, yeterince küçük  $\tilde{\mathbf{u}}$  değerleri için kendisinin merkez manifolduna kısıtlaması olan

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = A_c \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_c(\tilde{\mathbf{u}}, \mu, \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{u}}, \mu)) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

$n_0 + 1$  boyutlu sistemi ile belirlenir.

Kararlılık ve yaklaşım teoremleri (Teorem 2.3 ve Teorem 2.4), sistem (2.19) için aynen geçerlidir. Dolayısıyla,  $\mu$  nün sisteme yeni bir bağımlı değişken olarak eklenmesi,  $A_c$  matrisine dinamiği olmayan yeni bir merkez yönü ekleyerek sadece matrisin ilaveli bir matris haline gelmesini sağlar ve teori aynen geçerli kalır. Bununla

birlikte,  $\mu = 0$  durumundan farklı olarak merkez manifold  $\mu = 0$  ın yeterince küçük bir komşuluğundaki her  $\mu$  için mevcut olur ve bu Hopf Çatallanma Teorisi için önemli bir sonuçtur. Böylece, değişmez merkez manifold, denge noktası  $(\mathbf{u}, \mu) = (\mathbf{0}, 0)$  ın hem  $\mathbf{u}$  hem de  $\mu$  ye göre yeterince küçük bir komşuluğunda var olduğu için çatallanmaya bağlı olarak ortaya çıkan veya kaybolan bütün çözümler merkez manifold tarafından içerilir (Wiggins, 2003).

Şimdi,  $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu)$  eşitliği ve (2.19) kullanılarak

$$\dot{\mathbf{v}} = D_u \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu) \dot{\mathbf{u}} + D_\mu \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu) \dot{\mu} = A_s \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu) + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu), \mu)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (2.21) yerine konursa  $\mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu)$  fonksiyonunun sağlaması gereken ve (2.13) denkleminde çok benzeyen yarı lineer kısmi diferensiyel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

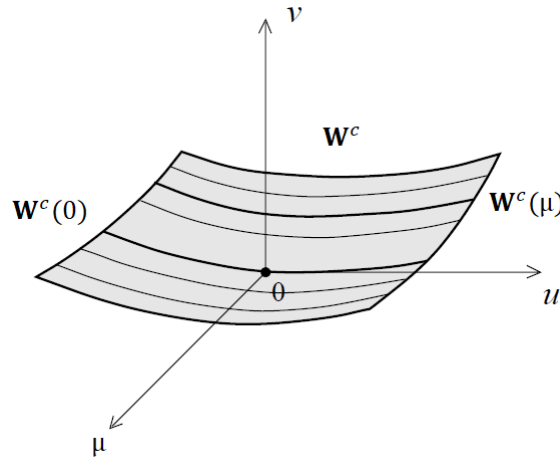
$$M(\mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu)) = D_u \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu) [A_c \mathbf{u} + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu), \mu)] - A_s \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu) - \mathbf{f}_s(\mathbf{u}, \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mu), \mu) = 0. \quad (2.22)$$

Merkez manifoldu bulmak ve (2.19) sisteminin (2.21) ile verilen merkez manifolduna kısıtlamasını hesaplamak için, yapılması gereken (2.22) denklemini çözmektir.

Diğer taraftan,  $\dot{\mu} = 0$  olduğu için  $\Pi_{\mu^*} = \{(\mathbf{X}, \mu^*) \mid \mu^* \in \mathbb{R} \text{ bir sabit}\}$  hiperdüzlemleri de (2.18) sistemine göre değişmezdir. Bu nedenle,  $\mathbf{W}^c$  merkez manifoldu,  $n_0$  boyutlu

$$\mathbf{W}^c(\mu) = \mathbf{W}^c \cap \Pi_\mu$$

katmanlarına ayrılır (Şekil 2.9).



Şekil 2.9: Genişletilmiş (2.18) sistemine ait merkez manifold (Kuznetsov, 1998).

**Lemma 2.1.** (2.1) sistemi parametreye bağlı, yerel değişmez ve çekici  $\mathbf{W}^c(\mu)$  merkez manifolduna sahiptir. Yeterince küçük her  $\mu$  için (2.1) sistemi merkez manifoldu  $\mathbf{W}^c(\mu)$  ye kısıtlanabilir.

Dikkat edilirse  $\mu = 0$  durumundaki (2.18) sisteminin merkez manifoldu  $\mathbf{W}^c(0)$ , bir önceki bölümde (2.10) sistemi için tanımlanan merkez manifolddur.





### 3. HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

Giriş bölümünde tanımlanan Hopf çatallanma, kaynağını Poincaré (1892) çalışmasından alır. Daha sonra Andronov ve Witt (1930) tarafından ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. 1942 yılında ise bugünkü teoremin temeli olan Hopf'ın çalışması yayımlanmıştır. Bu çatallanma için "Poincaré-Andronov-Hopf" ismi daha uygun olsa da literatürde yaygın olarak "Hopf" ifadesi kullanılmaktadır (Marsden ve McCracken, 1976).



Resim 3.1: Eberhard F. F. Hopf

Ergodik teoremin kurucularından ve çatallanma teorisinin öncülerinden biri olan Avusturyalı matematikçi Eberhard Frederich Ferdinand Hopf, Nisan 1902'de Salzburg'da doğdu. Doktora eğitimini 1926 yılında matematik alanında ve yüksek doktora eğitimini 1929 yılında matematiksel uzay bilimi alanında Berlin Üniversitesinde tamamladı. Hopf'ın başlıca başarıları kısmi ve adi diferensiyel denklemler, varyasyon hesabı, ergodik teori, topolojik dinamikler, integral denklemler, diferensiyel geometri, karmaşık fonksiyon teorisi ve fonksiyonel analiz alanlarındadır. Çalışmaları hidrodinamik, türbülans teorisi ve radyasyon transfer teorisi için de büyük önem taşıyan Hopf, Temmuz 1983'te Bloomington, Indiana'da hayata veda etti (Url-12).

#### 3.1 Hopf Çatallanma Teoremi ve İspatı

Hopf Çatallanma Teoremi tez çalışmasının teorik temelini oluşturmaktadır. Bu nedenle, teoremin sunduğu sonuçların iyi anlaşılması önemlidir. Bu ise ispatının iyi bir şekilde kavranması ile mümkündür. Bu nedenle, bu bölümde öncelikle, teoremin ispatı için Hassard ve diğ. (1981) kaynağında izlenen adımlar dikkatlice ele alınacaktır. İspatın bu kaynakta ayrıntılarının verilmediği bölümler, açıkça analiz edilecektir. Bölüm sonunda ise Hopf Çatallanma Teoreminin ifadesi verilecektir.

Hopf Çatallanma Teoreminin ispatını aşağıda verilen üç adımda ele alacağız:

**Adım I:** Poincaré normal forma sahip iki boyutlu bir sistemin analizi,

**Adım II:** İki boyutlu bir sistemin Poincaré normal forma dönüştürülmesi,

**Adım III:**  $n$ -boyutlu bir sistemin iki boyutlu bir sisteme indirgenmesi.

İspatın ilk iki adımı bir sistemin Hopf çatallanma analizinin temelini oluşturur. Çünkü, iki boyutlu bir sistemde periyodik çözümlerin varlığının garanti edilebilmesi için gereken koşullar ve periyodik çözümlerin özellikleri hakkında bilgi veren formüller bu adımlarda belirlenir. İspatın üçüncü adımı, ilk iki adım ile elde edilen sonuçları yüksek boyutlu sistemlere uygulama olanağı sağlar. Yani,  $n \in \mathbb{N}$  veya

sonsuz boyutlu bir sistem, ikinci adımdaki iki boyutlu bir sisteme indirgenemediği takdirde, çatallanma parametresi değişirken sistemde periyodik çözümler ortaya çıkar ve bu periyodik çözümlerin ortaya çıktığı çatallanma değeri, kararlılık yapısı, periyodu gibi özellikleri belirlenebilir.

Şimdi, ispatın bu üç adımını sırayla analiz edelim.

### 3.1.1 Poincaré normal form

Bir diferensiyel denklem sisteminin normal formu, sistemin temel özelliklerini koruyacak bir dönüşüm ile elde edilen ve analizi daha basit olan bir sistemdir. Diferensiyel denklemler için normal form teorisi, Poincaré (1879) çalışmasına dayanır (Yu ve Leung, 2002). Poincaré, bu çalışmasında normal form teorisini, lineer olmayan bir sistemin denge noktası civarındaki seri açılımında bulunan, yüksek mertebedeki terimleri göz önüne alacak şekilde değişkenlerin değiştirilmesi olarak ifade etmiştir (Singla, 2003). Başka bir deyişle, bu teorinin ana fikri, lineer olmayan dinamik sistemleri, lineer olmayan koordinat değişiklikleri ile mümkün olduğunca basitleştirmektir (Touzé, 2012). Normal form yöntemi, çatallanma ve kararsızlık gibi karmaşık davranış kalıplarıyla ilgili lineer olmayan sistemlerin çalışılmasında önemli bir rol oynamaktadır (Yu ve Leung, 2002).

#### Periyodik çözümün varlığı

Öncelikle, Poincaré normal formundaki iki boyutlu bir sistemin periyodik çözümler ailesine sahip olduğunu göstereceğiz.

$\mathbf{P} = (P_1, P_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}; \mu) \in C^{L+2}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ,  $L \geq 2$ , ve  $\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu) = \mathbf{0}$  olmak üzere

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}(\mathbf{P}; \mu), \quad \mathbf{P}(0) = (\epsilon, 0)^T, \quad \epsilon > 0 \quad (3.1)$$

Poincaré normal formundaki başlangıç değer problemini ele alalım. Burada

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix},$$

ve  $c_j(\mu) \in C^{L+2}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,

$$B_j(\mu) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(c_j(\mu)) & -\operatorname{Im}(c_j(\mu)) \\ \operatorname{Im}(c_j(\mu)) & \operatorname{Re}(c_j(\mu)) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq \frac{L}{2}$$

olmak üzere

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}; \mu) = A(\mu)\mathbf{P} + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} B_j(\mu)\mathbf{P}|\mathbf{P}|^{2j} + \mathcal{O}(|\mathbf{P}||(\mathbf{P}; \mu)|^{L+1}) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, (3.1) sistemi aşağıda verilen  $\mathbf{K}_3$  koşulunu sağlar.

**K<sub>3</sub>**:  $A(\mu)$  matrisinin  $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$  ve  $\bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) - i\omega(\mu)$  kompleks eşlenik özdeğer çifti

$$\alpha(0) = 0, \quad \omega(0) > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha'(0) \neq 0 \quad (3.3)$$

özelliğine sahiptir.

$\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere  $\mathbf{P} = \epsilon \mathbf{y}$  lineer dönüşümü kullanılarak (3.1) sistemine topolojik olarak denk aşağıdaki başlangıç değer problemi elde edilir:

$$\dot{\mathbf{y}} = A(\mu)\mathbf{y} + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} \epsilon^{2j} B_j(\mu) \mathbf{y} |\mathbf{y}|^{2j} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}| |(\epsilon \mathbf{y}; \mu)|^{L+1}), \quad \mathbf{y}(0) = (1, 0)^T. \quad (3.4)$$

(3.4) başlangıç değer probleminin çözümünün  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \epsilon; \mu)$  olduğunu kabul edelim. Şimdi, (3.4) sistemini ve  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \epsilon; \mu)$  çözümünü  $\epsilon = 0$  iken ele alalım. Öncelikle,  $\epsilon = 0$  ve yeterince küçük  $\mu$  değerleri için (3.4) sistemi aşağıdaki diferensiyel denklem sistemine dönüşür:

$$\dot{\mathbf{y}} = A(\mu)\mathbf{y} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}| \mu^{L+1}), \quad \mathbf{y}(0) = (1, 0)^T. \quad (3.5)$$

Dikkat edilirse  $\mathbf{F}(\mathbf{P}; \mu) \in C^{L+2}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  olduğu için  $\omega(\mu) \in C^{L+2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  olur. Ayrıca **K<sub>3</sub>** koşulundan  $\omega(0) > 0$  dır. Böylece, orijinin bir komşuluğundaki  $\mu$  değerleri için  $\omega(\mu) > 0$  olur. Böylece, adi diferensiyel denklemler teorisinden (3.5) sistemi

$$T_0(\mu) = \frac{2\pi}{\omega(\mu)} + \mathcal{O}(\mu^{L+1}) \quad (3.6)$$

periyotlu

$$\mathbf{y}(t, 0; \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left( e^{(\alpha(\mu) + i\omega(\mu))t} + \mathcal{O}(\mu^{L+1}) \right) t$$

çözümüne sahiptir. Dolayısıyla,

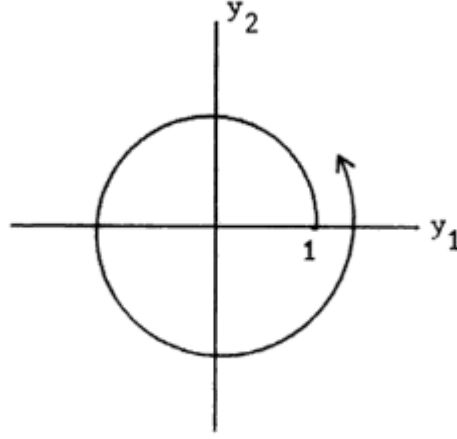
$$\mathbf{y}(0, 0; \mu) = \begin{pmatrix} y_1(0, 0; \mu) \\ y_2(0, 0; \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve  $e^{2\pi i} = 1$  olduğu için

$$\mathbf{y}(T_0(\mu), 0; \mu) = \begin{pmatrix} y_1(T_0(\mu), 0; \mu) \\ y_2(T_0(\mu), 0; \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2\pi\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}\right) + \mathcal{O}(\mu^{L+1}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. Böylece,  $t = T_0(\mu)$  iken  $y_1 > 0$  ve  $y_2 = 0$  olduğu görülür.

Yani, Şekil 3.1'de örneklendiği gibi  $t = T_0(\mu)$  iken  $\mathbf{y}(t, 0; \mu)$  çözümü  $y_1$  eksenini pozitif tarafta keser. Çözümün  $y_1$  eksenini keseceği yön, orijinin bir komşuluğundaki  $\mu$  değerleri için  $\omega(\mu) > 0$  olduğundan  $\alpha(\mu)$  nün işaretine bağlıdır.



Şekil 3.1: Başlangıç değerinden başlayan çözüm,  $t = T_0(\mu)$  iken  $y_1$  eksenini pozitif tarafta keser (Hassard ve diğ., 1981).

$\mathbf{y}(t, 0; \mu)$  çözümünün  $y_1$  eksenini pozitif yönde kestiğini garanti ettik. Sıradaki adım, bir  $\epsilon_p > 0$  için  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  iken  $\mathbf{y}(T_0(\mu), \epsilon; \mu) = (1, 0)^T$  olduğunu, yani çözümün  $y_1$  eksenini  $(1, 0)^T$  noktasından kestiğini göstererek periyodik çözümler ailesinin varlığını ispatlamaktır. Öncelikle, (3.7) fonksiyonu  $t = T_0(\mu)$  iken (3.5) sisteminin bir çözümü olduğu için  $t = T_0(\mu)$  iken (3.5) sistemini sağlamalıdır. Böylece,

$$\dot{y}_1(T_0(\mu), 0; \mu) = \alpha(\mu) \exp\left(\frac{2\pi\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}\right) + \mathcal{O}(\mu^{L+1}), \quad (3.8a)$$

$$\dot{y}_2(T_0(\mu), 0; \mu) = \omega(\mu) \exp\left(\frac{2\pi\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}\right) + \mathcal{O}(\mu^{L+1}) \quad (3.8b)$$

eşitlikleri elde edilir. Yeterince küçük  $\mu$  değerleri için  $\omega(\mu) > 0$  olduğunu biliyoruz (Denklemler (3.3)). Bu nedenle, (3.8b) ile verilen  $\dot{y}_2(T_0(\mu), 0; \mu) > 0$  ( $\neq 0$ ) dir. Böylece, Kapalı Fonksiyon Teoreminin (EK 1) bir sonucu olarak orijinin bir komşuluğunda  $y_2(T(\epsilon; \mu), \epsilon; \mu) = 0$  olacak şekilde bir tek

$$t = T(\epsilon; \mu)$$

düzgün fonksiyonu mevcuttur ve  $T \in C^{L+1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  dir. Diğer taraftan,  $T_0(\mu)$  periyodunun tanımı (3.6) ile verilmek üzere  $T(\epsilon; \mu)$  tek olduğu ve (3.7) eşitliğinden  $y_2(T_0(\mu), 0; \mu) = 0$  sağlandığı için

$$T(0; \mu) = T_0(\mu)$$

olur. Şimdi,

$$S(\epsilon; \mu) \equiv y_1(T(\epsilon; \mu), \epsilon; \mu)$$

olduğunu kabul edelim. Yeterince küçük  $\epsilon$  ve  $\mu$  değerleri için  $S \in C^{L+1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  olur. Ayrıca denklem (3.7)'den

$$S(0; \mu) = \exp\left(\frac{2\pi\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}\right) + \mathcal{O}(\mu^{L+1})$$

olarak elde edilir. Öncelikle,  $\mathbf{K}_3$  koşulu nedeniyle

$$S(0, 0) = 1$$

olur. Diğer taraftan,

$$S_\mu(0; \mu) = 2\pi \left( \frac{\alpha'(\mu)\omega(\mu) - \alpha(\mu)\omega'(\mu)}{\omega^2(\mu)} \right) \exp\left(\frac{2\pi\alpha(\mu)}{\omega(\mu)}\right) + \mathcal{O}(\mu^L)$$

ve  $\mathbf{K}_3$  koşulundan

$$S_\mu(0, 0) = 2\pi \frac{\alpha'(0)}{\omega(0)} \neq 0$$

olarak elde edilir. Böylece, Kapalı Fonksiyon Teoremi (EK 1) kullanılarak takip eden sonuca ulaşılır. Bir  $\epsilon_p > 0$  için  $[0, \epsilon_p)$  aralığında tanımlı,  $S(\epsilon; \mu(\epsilon)) = 1$  olacak şekilde bir tek  $\mu = \mu(\epsilon)$  fonksiyonu vardır ve  $\mu \in C^{L+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dir. Başka bir ifadeyle, bir  $\epsilon_p > 0$  için

$$\epsilon \in [0, \epsilon_p) \quad \text{iken} \quad y_1(T(\epsilon; \mu(\epsilon)), \epsilon; \mu(\epsilon)) = 1$$

olur. Böylece, Şekil 3.1'de örneklenen çözüm her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  için  $y_1$  eksenini  $y_1 = 1$  noktasında keser.

**Sonuç 3.1.** *Poincaré normal formundaki iki boyutlu (3.1) sistemi her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$ ,  $\epsilon_p > 0$ , için  $\mu = \mu(\epsilon)$  iken  $T(\epsilon) = T(\epsilon; \mu(\epsilon))$  periyotlu periyodik bir çözüme, dolayısıyla  $(0, \epsilon_p)$  aralığında periyodik çözümler ailesine sahiptir.  $\epsilon = 0$  iken (3.1) sisteminin denge noktası elde edilir.*

**Açıklama 3.1.** *Periyodik çözümlerin  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  için ortaya çıktığı parametre değerleri  $\mu = \mu(\epsilon)$  ve periyodu  $T(\epsilon) = T(\epsilon; \mu(\epsilon))$  kapalı fonksiyonları ile ifade edilmektedir. Fakat bu aşamada, varlığı bilinen kapalı fonksiyonlar  $\mu = \mu(\epsilon)$  ve  $T(\epsilon) = T(\epsilon; \mu(\epsilon))$  açık bir şekilde ifade edilemediği için periyodik çözümlerin ortaya çıktığı parametre değeri ve periyodu hesaplanamamaktadır.*

### Hopf çatallanma formülleri

Bir sistemin dinamiği hakkında bilgi sahibi olmak için periyodik çözümlerin varlığını araştırmak ve periyodik çözüm mevcut ise varlığını garanti etmek büyük bir adım olsa da yeterli değildir. Gerekli bilgiye ulaşmak için varlığı garanti edilen periyodik çözümlerin kararlılık yapısı, periyodu gibi özelliklerini belirlemek gerekir. Bu nedenle şimdi, Poincaré normal formundaki iki boyutlu (3.1) sisteminin sahip olduğu periyodik çözümlerin özelliklerini belirlememizi sağlayacak Hopf çatallanma formüllerini elde edeceğiz.

Öncelikle,  $z$  kompleks değişken,  $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$  (3.3) ile verilen özelliklere sahip özdeğer,  $1 \leq M \leq L$  keyfi,  $c_j(\mu)$  kompleks değerli fonksiyon ve  $\mu = \mu(\epsilon)$  olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + z \sum_{j=1}^M c_j(\mu) (z\bar{z})^j, \quad z(0; \mu) = \epsilon > 0 \quad (3.9)$$

Poincaré normal formundaki başlangıç değer problemini ele alalım. Burada,  $\dot{z}$  ile  $\frac{dz}{dt}$  ifade edilmektedir. Dikkat edilirse eğer (3.9) denkleminin bir çözümü  $z$  ise keyfi bir  $\theta \in$

$\mathbb{R}$  için  $ze^{i\theta}$  da bir çözümdür. Dolayısıyla, (3.9) denkleminin çözüm eğrileri merkezleri  $z = 0$  olan çemberlerdir. Diğer taraftan, denklem (3.9) kullanılarak elde edilen  $\dot{z}$  ve  $\dot{\bar{z}}$

$$\frac{d(z\bar{z})}{dt} = \dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}$$

ifadesinde yerine konursa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{d(z\bar{z})}{dt} = 2z\bar{z} \left( \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) + \sum_{j=1}^M \operatorname{Re}(c_j(\mu)) (z\bar{z})^j \right). \quad (3.10)$$

Şimdi, (3.9) denkleminin bir çözümü  $z(t)$  olsun. Böylece, (3.9) denkleminin çözüm eğrileri orijin merkezli çemberler olduğu ve  $z(0; \mu) = \epsilon > 0$  olduğu için bir  $\epsilon > 0$  için  $z(t)\bar{z}(t) = z(0)\bar{z}(0) = \epsilon^2$  olur. Sonuç olarak, (3.10) eşitliğinin sol tarafı sıfırdır. Diğer taraftan, (3.10) eşitliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart  $z = 0$  veya

$$\operatorname{Re}(\lambda(\mu)) + \sum_{j=1}^M \operatorname{Re}(c_j(\mu)) (z\bar{z})^j = 0 \quad (3.11)$$

olmasıdır. Sıfırdan farklı çözümlerin analizini yapmak istediğimiz için  $z \neq 0$  dır, yani (3.11) eşitliği sağlanır.  $z\bar{z} = \epsilon^2$  ve  $\mu = \mu(\epsilon)$  eşitlikleri (3.11) denkleminde yerine konursa

$$\alpha(\mu(\epsilon)) + \sum_{j=1}^M \operatorname{Re} c_j(\mu(\epsilon)) \epsilon^{2j} = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir.  $\alpha(\mu)$  ve  $\operatorname{Re}(c_j(\mu))$  fonksiyonlarının  $\mu = 0$  noktasındaki Taylor serileri, (3.12) eşitliğinde yerine konursa

$$\begin{aligned} & \alpha(0) + \alpha'(0)\mu(\epsilon) + \frac{\alpha''(0)}{2}\mu^2(\epsilon) + \dots \\ & + \left( \operatorname{Re}(c_1(0)) + \operatorname{Re}(c_1'(0))\mu(\epsilon) + \frac{\operatorname{Re}(c_1''(0))}{2}\mu^2(\epsilon) + \dots \right) \epsilon^2 \\ & + \left( \operatorname{Re}(c_2(0)) + \operatorname{Re}(c_2'(0))\mu(\epsilon) + \frac{\operatorname{Re}(c_2''(0))}{2}\mu^2(\epsilon) + \dots \right) \epsilon^4 + \dots \\ & = 0 \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır ve bu eşitlikte  $\mu(\epsilon)$  fonksiyonunun  $\epsilon = 0$  noktasındaki

$$\mu(\epsilon) = \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i + \mathcal{O}(\epsilon^{M+1}), \quad \mu_i = \frac{\mu^{(i)}(0)}{i!}$$

Taylor serisi yerine konur ise aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \alpha(0) + \alpha'(0) \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right) + \frac{\alpha''(0)}{2} \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right)^2 \\
& + \left( \operatorname{Re}(c_1(0)) + \operatorname{Re}(c'_1(0)) \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right) \right) \epsilon^2 \\
& + \left( \operatorname{Re}(c_2(0)) + \operatorname{Re}(c'_2(0)) \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right) \right) \epsilon^4 + \text{YMT} \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Burada, YMT kısaltması  $\epsilon$  a göre yüksek mertebeden terimleri ifade etmektedir.  $\mathbf{K}_3$  koşulu ve eşitlik (3.13) kullanılarak  $\mu(\epsilon)$  fonksiyonunun Taylor serisindeki ilk birkaç terimin katsayıları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 0, \\
\mu_2 &= -\frac{\operatorname{Re}(c_1(0))}{\alpha'(0)}, \\
\mu_3 &= 0, \\
\mu_4 &= -\frac{1}{\alpha'(0)} \left( \operatorname{Re}(c_2(0)) + \operatorname{Re}(c'_1(0))\mu_2 + \frac{\alpha''(0)}{2}\mu_2^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Sonuç olarak,

$$\mu(\epsilon) = \mu_2 \epsilon^2 + \mu_4 \epsilon^4 + \text{YMT} \tag{3.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan, (3.12) eşitliğinden dolayı (3.9) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\dot{z} = i \left( \omega(\mu(\epsilon)) + \sum_{j=1}^M \operatorname{Im}(c_j(\mu(\epsilon))) \epsilon^{2j} \right) z. \tag{3.16}$$

Adi diferensiyel denklemler teorisinden,  $z(0; \mu) = \epsilon$  olduğu için, (3.16) denklemi

$$\frac{2\pi}{T(\epsilon)} = \omega(\mu(\epsilon)) + \sum_{j=1}^M \operatorname{Im}(c_j(\mu(\epsilon))) \epsilon^{2j} \tag{3.17}$$

olmak üzere  $T(\epsilon)$  periyotlu

$$z = \epsilon \exp \left( \frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t \right)$$

çözümüne sahiptir.  $\omega(\mu)$  ve  $\operatorname{Im}(c_j(\mu))$  fonksiyonlarının  $\mu = 0$  noktasındaki Taylor serileri, (3.17) eşitliğinde yerine konursa



$$\begin{aligned}
2\pi &= T(\epsilon) \left( \omega(0) + \omega'(0)\mu(\epsilon) + \frac{\omega''(0)}{2}\mu^2(\epsilon) + \dots \right) \\
&+ T(\epsilon) \left( \text{Im}(c_1(0)) + \text{Im}(c_1'(0))\mu(\epsilon) + \frac{\text{Im}(c_1''(0))}{2}\mu^2(\epsilon) + \dots \right) \epsilon^2 \\
&+ T(\epsilon) \left( \text{Im}(c_2(0)) + \text{Im}(c_2'(0))\mu(\epsilon) + \frac{\text{Im}(c_2''(0))}{2}\mu^2(\epsilon) + \dots \right) \epsilon^4 + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitlikte  $T(\epsilon)$  periyodunun ve  $\mu(\epsilon)$  fonksiyonunun  $\epsilon = 0$  noktasındaki

$$\begin{aligned}
T(\epsilon) &= \frac{2\pi}{\omega(0)} \sum_{i=0}^M T_i \epsilon^i + \mathcal{O}(\epsilon^{M+1}), \quad \frac{2\pi}{\omega(0)} T_i = \frac{T^{(i)}(0)}{i!} \\
\mu(\epsilon) &= \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i + \mathcal{O}(\epsilon^{M+1}), \quad \mu_i = \frac{\mu^{(i)}(0)}{i!}
\end{aligned}$$

Taylor serileri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\omega(0) &= (T_0 + T_1\epsilon + T_2\epsilon^2 + T_3\epsilon^3 + T_4\epsilon^4) \\
&\times \left( \omega(0) + \omega'(0) \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right) + \frac{\omega''(0)}{2} \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right)^2 \right) \\
&+ (T_0 + T_1\epsilon + T_2\epsilon^2 + T_3\epsilon^3 + T_4\epsilon^4) \left( \text{Im}(c_1(0)) + \text{Im}(c_1'(0)) \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right) \right) \epsilon^2 \quad (3.18) \\
&+ (T_0 + T_1\epsilon + T_2\epsilon^2 + T_3\epsilon^3 + T_4\epsilon^4) \left( \text{Im}(c_2(0)) + \text{Im}(c_2'(0)) \left( \sum_{i=1}^M \mu_i \epsilon^i \right) \right) \epsilon^4 \\
&+ \text{YMT}
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.  $\mathbf{K}_3$  koşulu altında, (3.18) eşitliği kullanılarak  $T(\epsilon)$  periyodunun Taylor serisinin ilk birkaç teriminin katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
T_0 &= 1, \\
T_1 &= 0, \\
T_2 &= - \left( \frac{\omega'(0)\mu_2 + \text{Im}(c_1(0))}{\omega(0)} \right), \\
T_3 &= 0, \\
T_4 &= - \left( \frac{\omega'(0)\mu_4 + \frac{\omega''(0)}{2}\mu_2^2 + \text{Im}(c_1'(0))\mu_2 + \text{Im}(c_2(0)) - \omega(0)T_2^2}{\omega(0)} \right). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, periyot aşağıdaki seri açılımı ile ifade edilebilir:

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega(0)} (1 + T_2\epsilon^2 + T_4\epsilon^4 + \text{YMT}). \quad (3.20)$$

**Sonuç 3.2.** *Sonlu sayıda terime sahip*

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + z \sum_{j=1}^M c_j(\mu) (z\bar{z})^j, \quad z(0; \mu) = \epsilon$$

(3.9) başlangıç değer probleminin çözümleri

$$z = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right)$$

periyodik çözümleridir. Bu periyodik çözümler Taylor serisi katsayıları (3.15) ile verilen

$$\mu(\epsilon) = \mu_2\epsilon^2 + \mu_4\epsilon^4 + \text{YMT}$$

parametre değerinde ortaya çıkar ve Taylor serisi katsayıları (3.19) ile verilen

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega(0)} (1 + T_2\epsilon^2 + T_4\epsilon^4 + \text{YMT})$$

periyoduna sahiptir.

Şimdi elde ettiğimiz bu formüllerin (3.1) sistemi için de geçerli olduğunu gösterelim. Öncelikle,  $G(\epsilon, \bar{\epsilon}; \mu) \in C^{L+2}(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$  ve

$$G(\epsilon, \bar{\epsilon}; \mu) = \lambda(\mu)\epsilon + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} c_j(\mu)\epsilon|\epsilon|^{2j} + \mathcal{O}(|\epsilon||(\epsilon; \mu)|^{L+1}) \quad (3.21)$$

olmak üzere,  $\epsilon = P_1 + iP_2$  dönüşümü kullanılarak elde edilen Poincaré normal formundaki

$$\dot{\epsilon} = G(\epsilon, \bar{\epsilon}; \mu), \quad \epsilon(0; \mu) = \epsilon \quad (3.22)$$

başlangıç değer problemi (3.1) sistemine topolojik olarak denktir.

**Lemma 3.1.** (3.22) denklemi

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega(0)} \left(1 + \sum_{i=1}^L T_i\epsilon^i\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{L+1})$$

periyotlu

$$\epsilon = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{L+2}) \quad (3.23)$$

periyodik çözümüne sahiptir ve bu periyodik çözümler

$$\mu(\epsilon) = \sum_{i=1}^L \mu_i \epsilon^i + \mathcal{O}(\epsilon^{L+1})$$

parametre değerinde ortaya çıkar. Ayrıca (3.14) ve (3.19) denklemleri ile verilen katsayılar sırasıyla  $\mu(\epsilon)$  ve  $T(\epsilon)$  fonksiyonları için aynen geçerlidir.

**İspat.** Bir önceki bölümden, (3.22) denkleminin topolojik olarak denk olduğu (3.1) sisteminin her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$ ,  $\epsilon_p > 0$ , için  $T(\epsilon)$  periyotlu bir periyodik bir çözüme sahip olduğunu biliyoruz. Böylece, (3.22) denklemi de  $T(\epsilon)$  periyotlu aynı periyodik çözüme sahiptir.

Şimdi, (3.22) denkleminin çözümünü 1-periyotlu hale getirmek için zamanı yeniden ölçeklendirip yeni bir değişken tanımlayalım:

$$s = \frac{t}{T(\epsilon)} \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \epsilon e^{2\pi i s} \eta.$$

Bu değişken değiştirmesi ile (3.22) denklemi kendisine topolojik olarak denk olan

$$2\pi i \eta + \dot{\eta} = T(\epsilon) \left( \lambda(\mu) \eta + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} c_j(\mu) \eta (\eta \bar{\eta})^j \epsilon^{2j} + \mathcal{O}(\epsilon^{L+1}) \right) \quad (3.24)$$

denkleme dönüşür.  $\eta(0) = 1$  olmak üzere  $\eta(s)$  nin (3.24) denkleminin bir periyodik çözümü olduğunu kabul edelim ve bu çözümü aşağıdaki formda yazalım:

$$\eta(s) = \sum_{i=0}^L \eta_i(s) \epsilon^i + \mathcal{O}(\epsilon^{L+1}) \quad (3.25)$$

öyle ki

$$\eta_0(0) = 1 \quad \text{ve} \quad \eta_i(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq L.$$

Şimdi, bu form yardımı ile (3.22) denkleminde ait periyodik çözümün (3.23) şeklinde ifade edilebileceği sonucuna ulaşmak için

$$\eta_0(s) = 1 \quad \text{ve} \quad \eta_i(s) = 0, \quad 1 \leq i \leq L$$

olduğunu gösterelim.

Öncelikle,  $\lambda(\mu)$  ve  $\text{Im}(c_j(\mu))$  fonksiyonlarının  $\mu = 0$  noktasındaki Taylor serileri (3.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2\pi i \eta + \dot{\eta} = & T(\epsilon) \eta (\lambda(0) + \lambda'(0) \mu(\epsilon) + \dots) \\ & + T(\epsilon) \eta \left( \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} (c_j(0) + c'_j(0) \mu(\epsilon) + \dots) (\eta \bar{\eta})^j \epsilon^{2j} + \mathcal{O}(\epsilon^{L+1}) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

eşitliği elde edilir.  $\lambda(0) = i\omega(0)$ , (3.25) formu ve de  $T(\epsilon)$  ve  $\mu(\epsilon)$  fonksiyonlarının

Taylor serileri (3.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& 2\pi i \left( \sum_{i=0}^L \eta_i(s) \epsilon^i \right) + \left( \sum_{i=0}^L \dot{\eta}_i(s) \epsilon^i \right) \\
&= \frac{2\pi}{\omega(0)} \left( 1 + \sum_{i=1}^L T_i \epsilon^i \right) \left( \sum_{i=0}^L \eta_i(s) \epsilon^i \right) \\
&\times \left( i\omega(0) + \lambda'(0) \left( \sum_{i=1}^L \mu_i \epsilon^i \right) + c_1(0) \left( \sum_{i=0}^L \eta_i(s) \epsilon^i \right) \left( \sum_{i=0}^L \bar{\eta}_i(s) \epsilon^i \right) \epsilon^2 + \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.27) denkleminde  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$  ile

$$2\pi i \eta_0(s) + \dot{\eta}_0(s) = 2\pi i \eta_0(s)$$

elde edilir. Böylece,

$$\dot{\eta}_0(s) = 0 \quad \text{ve} \quad \eta_0(0) = 1 \implies \eta_0(s) = 1$$

olur.  $\eta_0(s) = 1$  kullanılarak  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$  ile (3.27) denkleminde

$$\dot{\eta}_1(s) = 2\pi i T_1 + \frac{2\pi}{\omega(0)} \lambda'(0) \mu_1 = c_1$$

elde edilir. Buradan

$$\dot{\eta}_1(s) = c_1 \quad \text{ve} \quad \eta_1(0) = 0 \implies \eta_1(s) = c_1 s$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan,  $\eta$  1-periyotlu bir fonksiyon olduğu için  $\eta_1$  de 1-periyotludur. Fakat  $c_1 \neq 0$  için  $\eta_1(s) = c_1 s$  periyodik değildir. Dolayısıyla,

$$\eta_1(s) = 0$$

olur.  $\eta_0(s) = 1$  ve  $\eta_1(s) = 0$  olduğu için  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  ile (3.27) denklemi

$$\dot{\eta}_2(s) = 2\pi i T_2 + \frac{2\pi}{\omega(0)} (T_1 \lambda'(0) \mu_1 + \lambda'(0) \mu_2) = c_2$$

eşitliğini verir. Böylece,

$$\dot{\eta}_2(s) = c_2 \quad \text{ve} \quad \eta_2(0) = 0 \implies \eta_2(s) = c_2 s$$

sonucuna ulaşılır. Aynı gerekçeyle  $\eta_2$  1-periyotlu olduğundan ve  $c_2 \neq 0$  için  $\eta_2(s) = c_2 s$  periyodik olmadığından

$$\eta_2(s) = 0$$

olur. Bu şekilde devam edilirse  $\eta_0(s) = 1$  ve  $1 \leq i \leq L$  için  $\eta_i(s) = 0$  olarak elde edilir.

Sonuç olarak periyodik çözümü veren eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varepsilon = \epsilon e^{2\pi i s} \eta = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right) (1 + \mathcal{O}(\epsilon^{L+1})) = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{L+2}).$$

Dikkat edilirse  $M = \frac{L}{2}$  olmak üzere (3.9) denklemi ile (3.22) denklemi  $1 \leq i \leq L+1$  için  $\mathcal{O}(\epsilon^i)$ 'de aynı yapı ve katsayıya sahiptir. Bu ilişki (3.9) denkleminin periyodik çözümü

$$z = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right)$$

ve (3.22) denkleminin periyodik çözümü

$$\varepsilon = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{L+2})$$

arasında da mevcuttur. Böylece, (3.23) periyodik çözümü (3.22) denkleminde yerine konursa  $\mu(\epsilon)$  fonksiyonunun Taylor serisi (3.15)'in ve  $T(\epsilon)$  fonksiyonunun Taylor serisi (3.20)'nin katsayıları sırasıyla (3.14) ve (3.19) denklemlerinde verildiği gibi elde edilecektir.  $\square$

**Sonuç 3.3.** Her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$ ,  $\epsilon_p > 0$ , için  $\mu = \mu(\epsilon)$  iken (3.22) denklemi  $T(\epsilon)$  periyotlu

$$p(t; \mu(\epsilon)) = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{L+2})$$

periyodik çözümüne, dolayısıyla  $(0, \epsilon_p)$  aralığında bir periyodik çözümler ailesine sahiptir. Periyodik çözümün ortaya çıktığı parametre değerini veren  $\mu(\epsilon)$  ve periyodu veren  $T(\epsilon)$  fonksiyonları, sırasıyla (3.15) ve (3.20) denklemleri ile hesaplanabilir.

Dikkat edilirse (3.22) sisteminin denge noktası  $\varepsilon = 0$  ve başlangıç noktası  $\epsilon$  dur. Denge noktası komşuluğunda ortaya çıkan periyodik çözümlerin periyodunu ve çatallanma değeri  $\mu = 0$  dan önce mi, sonra mı ortaya çıktığı gibi özelliklerini belirlemek için  $\epsilon = 0$  civarını analiz etmemiz gerekir.

$\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$  ise  $\epsilon = 0$  in bir komşuluğunda

$$\begin{aligned} \mu(\epsilon) &\approx \mu_2 \epsilon^2 \\ T(\epsilon) &\approx \frac{2\pi}{\omega(0)} \\ T'(\epsilon) &\approx \frac{4\pi}{\omega(0)} T_2 \epsilon \end{aligned} \tag{3.28}$$

olur.  $\mu_2$  ve  $T_2$  sırasıyla (3.14) ve (3.19) ile verilmiştir.

**Sonuç 3.4.** Her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$ ,  $\epsilon_p > 0$ , için (3.22) sistemi  $\mu = \mu(\epsilon)$  iken bir periyodik çözüme sahip olduğundan, yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için bu periyodik çözüm  $\mu = \mu_2 \epsilon^2$  değerinde ortaya çıkacaktır. Yani, periyodik çözümler

- $\mu_2 > 0$  ise çatallanma değeri  $\mu = 0$  dan sonra,
- $\mu_2 < 0$  ise çatallanma değeri  $\mu = 0$  dan önce

ortaya çıkar. Ayrıca ortaya çıkan bu periyodik çözümler yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için

$$T = \frac{2\pi}{\omega(0)}$$

periyoduna sahiptir. Periyodik çözümlerin periyodu  $\epsilon$  artarken

- $T_2 > 0$  ise artar,
- $T_2 < 0$  ise azalır.

### Periyodik çözümün kararlılığı

Varlığı ispatlanan periyodik çözümlerin kararlı olup olmadıklarını belirlemek, sistemlerin kalitatif analizini yapmak açısından önemlidir. Bu nedenle şimdi, Poincaré-Bendixson Teoremini (EK 1) kullanarak periyodik çözümlerin kararlı olması için gereken koşulu belirleyeceğiz.

$$\tilde{G}(r, \theta; \mu) = \lambda(\mu) + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} c_j(\mu) r^{2j} + \mathcal{O}(|(r; \mu)|^{L+1})$$

olmak üzere,  $\varepsilon = re^{i\theta}$  dönüşümü ile (3.22) denkleminin topolojik olarak denk

$$\begin{cases} \dot{r} = r \operatorname{Re}(\tilde{G}(r, \theta; \mu)) \\ \dot{\theta} = \operatorname{Im}(\tilde{G}(r, \theta; \mu)) \end{cases} \quad (3.29)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Aynı dönüşüm ile, (3.22) denkleminin (3.23) ile tanımlanan ve  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  ile endekslenmiş periyodik çözümü  $p(t; \mu(\epsilon))$

$$r = \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^{L+2}), \quad \theta = \frac{2\pi}{T(\epsilon)} t + \mathcal{O}(\epsilon^{L+1}) \quad (3.30)$$

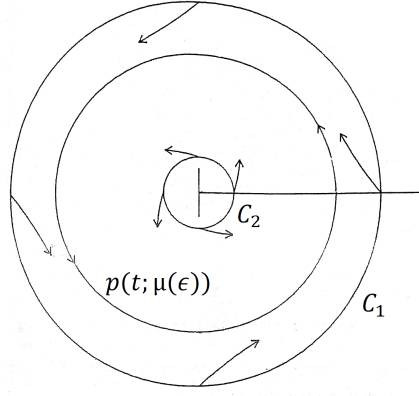
şeklinde ifade edilir.

Şimdi,  $\delta_1 \in (0, 1)$  ve  $\delta_2 \in (0, \frac{1}{2})$  olsun. Bu seçimlerle,  $\delta_2^2 \in (0, \frac{1}{2})$  olduğu için  $\epsilon^2 \delta_2^2 < \epsilon^2 < \epsilon^2(1 + \delta_1)$  ilişkisi elde edilir. Böylece,

$$C_1 = \{(r, \theta) | r^2 = \epsilon^2(1 + \delta_1)\}$$

$$C_2 = \{(r, \theta) | r^2 = \epsilon^2 \delta_2^2\}$$

olmak üzere  $C_1$  çemberi, (3.30) ile verilen  $p(t; \mu(\epsilon))$  periyodik çözümünün dışında kalırken  $C_2$  çemberi içinde kalır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2:  $p(t; \mu(\epsilon))$  periyodik çözümünün dışında ve içinde kalan çemberler (Hassard ve diğ., 1981).

Şimdi, (3.29) sisteminin  $C_1$  çemberi üzerindeki herhangi bir  $Q_1$  noktasından ve  $C_2$  çemberi üzerindeki herhangi bir  $Q_2$  noktasından geçen yörüngelerini ele alalım. (3.29) denklemlerinden

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{\text{Re}(\tilde{G}(r, \theta; \mu))}{\text{Im}(\tilde{G}(r, \theta; \mu))}$$

olduğu için  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$  ise bu yörüngeler üzerindeki  $Q_1$  ve  $Q_2$  noktalarında

$$\left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{r=\epsilon(1+\delta_1)^{1/2}} = r \frac{\text{Re}(c_1(0))\epsilon^2\delta_1 + \mathcal{O}(\epsilon^4)}{\omega(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2)}$$

ve

$$\left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{r=\epsilon\delta_2} = -r \frac{\text{Re}(c_1(0))\epsilon^2(1-\delta_2^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4)}{\omega(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2)}$$

olur. (3.3) özelliğinden dolayı  $\omega(0) > 0$  dir. Bu durumda, yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için yukarıdaki türev denklemleri kullanılarak  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  ise  $Q_1 \in C_1$  noktasında  $\frac{dr}{d\theta} < 0$  ve  $Q_2 \in C_2$  noktasında  $\frac{dr}{d\theta} > 0$  elde edilir (Şekil 3.2).

Sonuç olarak, yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  ise  $C_1$  ve  $C_2$  çemberleri tarafından oluşturulan halka, (3.29) denklemi için değişmez bir bölge olacağı için Poincaré-Bendixson Teoreminden (EK 1) periyodik çözüm  $p(t; \mu(\epsilon))$  yerel (lokal) asimptotik karardır.  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  ise Poincaré-Bendixson Teoremi  $t \rightarrow -\infty$  iken uygulandığında periyodik çözüm  $p(t; \mu(\epsilon))$  yerel (lokal) asimptotik karardır, yani  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  ise periyodik çözüm  $p(t; \mu(\epsilon))$  kararsızdır.

**Sonuç 3.5.**  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$  olsun. Bu takdirde, yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için (3.22) denkleminin periyodik çözümü  $p(t; \mu(\epsilon))$ ,  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  ise kararsızdır ve  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  ise yerel (lokal) asimptotik karardır.

**Not.** (3.1) sistemi (3.22) denkleminin topolojik olarak denk olduğu için, bu bölümde elde edilen Sonuçlar 3.3-3.5, sistem (3.1) için de aynen geçerlidir.

### 3.1.2 İki boyutlu bir sistemin Poincaré normal forma dönüştürülmesi

Poincaré normal formundaki (3.1) sisteminin  $\varepsilon = P_1 + iP_2$  olmak üzere (3.22) sistemine topolojik olarak denk olduğunu ve (3.22) sisteminin (3.23) ile tanımlanan periyodik çözümlere sahip olduğunu; bu periyodik çözümlerin, hangi şartlar altında çatalanma değerinden önce veya sonra ortaya çıktığını; kararlı veya kararsız olduğunu belirledik. Şimdi, (3.3) özelliğini taşıyan kompleks eşlenik özdeğerlere sahip iki boyutlu genel bir sistemin, Poincaré normal formundaki (3.22) sistemine nasıl dönüştürüldüğünü göstereceğiz.

$z \in \mathbb{C}$ ,  $g(z, \bar{z}; \mu) \in C^{L+2}(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $g(0, 0; \mu) = 0$  ve

$$g(z, \bar{z}; \mu) = \sum_{2 \leq i+j \leq L} g_{ij}(\mu) \frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} + \mathcal{O}(|z|^{L+1}) \quad (3.31)$$

olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}; \mu) \quad (3.32)$$

kompleks diferensiyel denklemini ele alalım. Burada,  $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$  özdeğeri (3.3) özelliğine sahiptir.

#### Açıklama 3.2.

Dikkat edilirse  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}; \mu) = (f_1(\mathbf{u}; \mu), f_2(\mathbf{u}; \mu))^T \in C^{L+1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  ve  $\mathbf{f}(\mathbf{0}; \mu) = D_{\mathbf{u}}(\mathbf{f}(\mathbf{0}; \mu)) = \mathbf{0}$  olmak üzere  $z = u_1 + iu_2$  dönüşümü ile (3.32) denklemi

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2; \mu) \\ f_2(u_1, u_2; \mu) \end{pmatrix}$$

reel sistemine topolojik olarak denktir, öyle ki sistemin denge noktası olan orijinde hesaplanan Jakobiyen matrisi  $\mathbf{K}_3$  koşulunu sağlar, yani (3.3) özelliğini taşıyan  $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$  ve  $\bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) - i\omega(\mu)$  kompleks eşlenik özdeğerlere sahiptir.

Şimdi,  $\kappa(\varepsilon, \bar{\varepsilon}; \mu) \in C^{L+2}(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,

$$\kappa(\varepsilon, \bar{\varepsilon}; \mu) = \sum_{2 \leq i+j \leq L} \kappa_{ij}(\mu) \frac{\varepsilon^i \bar{\varepsilon}^j}{i!j!} \quad (3.33)$$

ve  $i = 1 + j$  için  $\kappa_{ij} \equiv 0$  olmak üzere

$$z = \varepsilon + \kappa(\varepsilon, \bar{\varepsilon}; \mu) \quad (3.34)$$

değişken değiştirmesi ile (3.32) denklemini Poincaré normal forma dönüştüreceğiz. Öncelikle,

$$\dot{\varepsilon} = \lambda(\mu)\varepsilon + \phi$$

olarak alınırsa  $\kappa_{\varepsilon}\dot{\varepsilon} + \kappa_{\bar{\varepsilon}}\dot{\bar{\varepsilon}}$  ifadesinde lineer bir terim olmadığı için  $\phi$  lineer olmayan



terimleri içerir. (3.34) denkleminde zincir kuralı uygulanarak

$$\dot{z} = \dot{\varepsilon} + \kappa_{\varepsilon} \dot{\varepsilon} + \kappa_{\bar{\varepsilon}} \dot{\bar{\varepsilon}},$$

ve denk olarak

$$\lambda \varepsilon \kappa_{\varepsilon} + \bar{\lambda} \bar{\varepsilon} \kappa_{\bar{\varepsilon}} - \lambda \kappa = g(\varepsilon + \kappa, \bar{\varepsilon} + \bar{\kappa}) - (\phi + \kappa_{\varepsilon} \phi + \kappa_{\bar{\varepsilon}} \bar{\phi}) \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.31) ve (3.33) tanımları kullanılarak (3.35) denklemini

$$\mathbf{N}(\operatorname{Re}(\phi), \operatorname{Im}(\phi), \operatorname{Re}(\varepsilon), \operatorname{Im}(\varepsilon); \mu) = 0$$

kapalı fonksiyonu olarak yeniden yazılabilir, öyle ki

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = & \left( \frac{3}{2} \lambda \kappa_{20}(\mu) - \frac{1}{2} g_{20}(\mu) \right) \varepsilon^2 + \left( (2\lambda + \bar{\lambda}) \kappa_{11}(\mu) - g_{11}(\mu) \right) \varepsilon \bar{\varepsilon} \\ & + \left( \left( \frac{1}{2} \lambda + \bar{\lambda} \right) \kappa_{02}(\mu) - \frac{1}{2} g_{02}(\mu) \right) \bar{\varepsilon}^2 \\ & + \phi + \kappa_{20}(\mu) \varepsilon \phi + \kappa_{11}(\mu) \bar{\varepsilon} \phi + \kappa_{11}(\mu) \varepsilon \bar{\phi} + \kappa_{02}(\mu) \bar{\varepsilon} \bar{\phi} \\ & + \mathcal{O}(|\varepsilon| |(\varepsilon, \phi)|^2). \end{aligned}$$

Burada,  $\mathbf{N}$  fonksiyonu en az  $C^1$  sınıfına aittir ve  $\mathbf{N}(0, 0, 0, 0; 0) = 0$  dir. Ayrıca

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(\mathbf{N})}{\partial \operatorname{Re}(\phi)} & \frac{\partial \operatorname{Re}(\mathbf{N})}{\partial \operatorname{Im}(\phi)} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(\mathbf{N})}{\partial \operatorname{Re}(\phi)} & \frac{\partial \operatorname{Im}(\mathbf{N})}{\partial \operatorname{Im}(\phi)} \end{vmatrix}_{(0,0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla, Kapalı Fonksiyon Teoreminden  $\phi(0, 0; 0) = 0$  ve  $\phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  olacak şekilde tek bir  $\phi = \phi(\varepsilon, \bar{\varepsilon}; \mu)$  fonksiyonu mevcuttur. Sabit bir  $\mu$  için  $g, \kappa \in C^{L+2}$  olduğu için  $(0, 0; 0)$  ın bir civarında  $\phi \in C^{L+2}$  dir.

Hassard ve diğ. (1981),  $\phi$  nin Taylor serisini

$$\phi_{ij}(\mu) = \mathcal{O}(|\mu|^{L-i-j+2}), \quad i \neq 1+j, \quad 2 \leq i+j \leq L+1$$

$$\phi_{ij}(\mu) = (1+j)! j! c_j(\mu) + \mathcal{O}(|\mu|^{L-2j+1}), \quad i = 1+j, \quad 1 \leq j \leq \frac{L}{2}$$

olmak üzere

$$\phi(\varepsilon, \bar{\varepsilon}; \mu) = \sum_{2 \leq i+j \leq L+1} \phi_{ij}(\mu) \frac{\varepsilon^i \bar{\varepsilon}^j}{i! j!} + \mathcal{O}(|\varepsilon|^{L+2})$$

şeklinde hesaplamışlardır. Böylece,

$$\phi(\varepsilon, \bar{\varepsilon}; \mu) = \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} c_j(\mu) \varepsilon |\varepsilon|^{2j} + \mathcal{O}(|\varepsilon| |(\varepsilon; \mu)|^{L+1}) \quad (3.36)$$

olur. Sonuç olarak (3.32) denklemini (3.34) dönüşümü ile Poincaré normal formundaki (3.22) ile verilen

$$\dot{\varepsilon} = \lambda(\mu)\varepsilon + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} c_j(\mu)\varepsilon|\varepsilon|^{2j} + \mathcal{O}(|\varepsilon|(|\varepsilon;\mu|)^{L+1})$$

denklemine dönüşür ve (3.23) ile tanımlanan periyodik çözümler ailesine sahiptir. Bu periyodik çözümlerin özelliklerini, sırasıyla (3.14) ve (3.19) ile tanımlanan,  $\mu_2$  ve  $T_2$  katsayılarını kullanarak belirleyebileceğimizi biliyoruz.  $\mu_2$  ve  $T_2$  katsayılarını hesaplamak için ise Poincaré normal formun  $c_1(0)$  katsayısına ihtiyacımız vardır. Bu nedenle, (3.32) denklemini kullanarak  $c_1(0)$  katsayısını verecek bir formül bulmamız gerekmektedir.

$\varepsilon$  ve  $\bar{\varepsilon}$  değişkenlerinin kuvvetlerine göre (3.35) eşitliğinin sol tarafı

$$\sum_{2 \leq i+j \leq L} \kappa_{ij}(\mu) \left( i\lambda(\mu) + j\bar{\lambda}(\mu) - \lambda(\mu) \right) \frac{\varepsilon^i \bar{\varepsilon}^j}{i!j!} \quad (3.37)$$

olarak elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı için (3.31), (3.33) ve (3.36) Taylor serileri kullanılır ve  $|\varepsilon|^2$  in katsayıları (3.37) ile eşitlenirse

$$\begin{aligned} \lambda(\mu)\kappa_{20}(\mu)\frac{\varepsilon^2}{2} + \bar{\lambda}(\mu)\kappa_{11}(\mu)\varepsilon\bar{\varepsilon} + \left(2\bar{\lambda}(\mu) - \lambda(\mu)\right)\kappa_{02}(\mu)\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} = \\ g_{20}(\mu)\frac{\varepsilon^2}{2} + g_{11}(\mu)\varepsilon\bar{\varepsilon} + g_{02}(\mu)\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\kappa_{20}(\mu) = \frac{g_{20}(\mu)}{\lambda(\mu)}, \quad \kappa_{11}(\mu) = \frac{g_{11}(\mu)}{\bar{\lambda}(\mu)}, \quad \kappa_{02}(\mu) = \frac{g_{02}(\mu)}{(2\bar{\lambda}(\mu) - \lambda(\mu))} \quad (3.38)$$

olur.  $\varepsilon^2\bar{\varepsilon}$  teriminin katsayılarından

$$\begin{aligned} \kappa_{21}(\mu) \left( \lambda(\mu) + \bar{\lambda}(\mu) \right) = g_{20}(\mu)\kappa_{11}(\mu) + g_{11}(\mu) \left( \bar{\kappa}_{11}(\mu) + \frac{1}{2}\kappa_{20}(\mu) \right) \\ + \frac{1}{2}g_{02}(\mu)\bar{\kappa}_{02}(\mu) + \frac{1}{2}g_{21}(\mu) - c_1(\mu) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.  $\kappa_{21}(\mu) = 0$  olduğu için yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned} c_1(\mu) = g_{20}(\mu)\kappa_{11}(\mu) + g_{11}(\mu) \left( \bar{\kappa}_{11}(\mu) + \frac{1}{2}\kappa_{20}(\mu) \right) \\ + \frac{1}{2}g_{02}(\mu)\bar{\kappa}_{02}(\mu) + \frac{1}{2}g_{21}(\mu) \end{aligned}$$

olur. (3.38) eşitlikleri kullanılırsa Poincaré normal form katsayısı için aranan formül

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega(0)} \left( g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}(0) \quad (3.39)$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 3.6.** *Kabul edelim ki iki boyutlu genel (3.32) sistemi, (3.3) özelliğini taşıyan kompleks eşlenik özdeğerlere sahip olsun. Bu durumda, iki boyutlu (3.32) sistemi, bir  $\epsilon_p > 0$  için  $(0, \epsilon_p)$  aralığında periyodik çözümler ailesine sahiptir. Bu periyodik çözümler (3.23) çözümünü ve (3.34) değişken değiştirmesi kullanılarak*

$$z = \epsilon \exp\left(\frac{2\pi i}{T(\epsilon)} t\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

ile ifade edilebilir. Ayrıca  $g_{20}(0)$ ,  $g_{11}(0)$ ,  $g_{02}(0)$  ve  $g_{21}(0)$ , (3.32) denklemindeki  $g(z, \bar{z}; \mu)$  fonksiyonunun (3.31) ile verilen Taylor serisinin katsayıları ve

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega(0)} \left( g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}(0)$$

olmak üzere yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için bu periyodik çözümler:

- $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$  ise

$$\mu = -\frac{\text{Re}(c_1(0))}{\alpha'(0)} \epsilon^2$$

değerinde ortaya çıkar,

- $T = \frac{2\pi}{\omega(0)}$  periyoduna sahiptir ve bu periyot  $\epsilon$  artarken

$$T_2 = -\left(\frac{\omega'(0)\mu_2 + \text{Im}(c_1(0))}{\omega(0)}\right)$$

olmak üzere  $T_2 > 0$  ise artar,  $T_2 < 0$  ise azalır,

- $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  ise kararsızdır ve  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  ise yerel (lokal) asimptotik kararlıdır.

**Açıklama 3.3.** *Eğer  $\mu_2$  veya  $T_2$  katsayıları sıfır olursa bu durumda sırasıyla (3.14) ve (3.19) ile verilen  $\mu_4$  ve  $T_4$  katsayılarının hesaplanması gerekir. Bunun için ise  $c_2(0)$  katsayısına ihtiyaç duyulur.  $c_2(0)$  katsayısı (3.41) denklemini yardımı ile (3.39) eşitliğinden  $i + j \leq 4$  için  $\kappa_{ij}(\mu)$  katsayıları hesaplanarak elde edilebilir ( $c_2(0)$  katsayısının formülü için Hassard ve diğ. (1981) kaynağı sayfa 49'a bakınız).*

### 3.1.3 $n$ -boyutlu bir sistemin iki boyutlu bir sisteme indirgenmesi

Şu ana kadarki adımlar ile elimizde (3.3) özelliğini taşıyan kompleks eşlenik özdeğerlere sahip iki boyutlu bir sistem varsa o sistemin periyodik çözümler ailesine sahip olduğunu ve bu periyodik çözümlerin özelliklerinin hangi koşullar kontrol

edilerek belirlenebileceğini biliyoruz. Elde ettiğimiz bu sonuçları,  $n$ -boyutlu bir sistemde kullanabilmemiz için bu  $n$ -boyutlu sistemi, (3.32) denkleminde indirgeyebilmemiz gerekir.  $n$ -boyutlu bir sisteminin (3.32) denkleminde indirgenemesi için sistemin (3.3) özelliğini taşıyan basit (tek katlı) kompleks eşlenik özdeğer çiftine sahip ve geriye kalan özdeğerlerinin reel kısmının negatif olması gerekir. Bu özellikleri sağlayan  $n$ -boyutlu bir sistem, ayrıntıları Bölüm 2'de verilen Merkez Manifold (Center Manifold) teorisi kullanılarak (3.32) denkleminde indirgenir.

Şimdi bu indirgeme için izleyeceğimiz yöntemden bahsedelim. Bölüm 2.1'de belirtildiği üzere (2.1) sisteminde  $\mu = 0$  alınarak elde edilen (2.3) gibi çok boyutlu bir sistemin analizi,  $n_+ = 0$  iken  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifoldu ile kısıtlanan daha düşük boyutlu (2.11) sisteminin analizine indirgenir. Bu nedenle, (2.3) sisteminin dinamiği hakkında bilgi sahibi olabilmek için  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifoldunun ve (2.11) sisteminin hesaplanması gerekir.  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifoldunu temsil eden  $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u})$  fonksiyonunun Taylor seri açılımına ait katsayılar, (2.13) denkleminin çözülmesi ile hesaplanabilir. Bunun için ise her aşamasında cebirsel denklemlerin lineer bir sistemini çözmeyi gerektiren ardışık bir prosedür uygulamak gerekir. Açıklama 2.6'da ifade edildiği gibi bu katsayılar sistemin denge noktasına ait tek olmayan bütün merkez manifoldlar için aynıdır. ( $n_+ \neq 0$  Durumu: Bakınız Açıklama 2.8)

Bölüm 2.2'de yukarıda ifade edilen sonuç ve yöntemlerin,  $\mu \in \mathbb{R}$  iken (2.1) sisteminin merkez manifoldunu bulmayı sağlayan (2.18) sistemi için de geçerli olduğu belirtilmiştir.  $\mu \in \mathbb{R}$  iken  $\mathbf{W}^c$  merkez manifoldunu temsil eden  $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u}; \mu)$  fonksiyonunun Taylor seri açılımına ait katsayılar, (2.22) denklemini çözülerek istenen dereceye kadar bulunabilir. Fakat (2.22) denklemini kullanabilmek için (2.18) sisteminin, kendi özuzayındaki (2.19) sistemine (kanonik forma) dönüştürülmesi gerekir. Bunun için ise denge noktası olan orijine karşılık gelen Jakobiyen matrisi  $A(\mu)$  ye ait  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  özdeğerlerine karşılık gelen genelleştirilmiş özvektörlerin hesaplanması gerekir. Bu yaklaşım, teorik olarak doğru olsa da uygulamada büyük bir zaman kaybına neden olur. Bu nedenle bu bölümde, Hassard ve diğ. (1981) ve Kuznetsov (1998) kaynakları kullanılarak  $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{u}; \mu)$  fonksiyonunun Taylor seri açılımına ait katsayılarının, bu dönüşüme gerek kalmadan nasıl hesaplanacağını göstereceğiz. Bu hesaplamada kullanılacak yöntem, Kuznetsov (1998) tarafından izdüşüm yöntemi olarak adlandırılmıştır. Bu yöntemde, bütün özvektörler yerine sadece  $A(\mu)$  ve  $A(\mu)$  nün devriği olan  $A^T(\mu)$  matrislerinin (3.3) özelliğini sağlayan özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri, (2.18) sistemini  $E^c$  özuzayına ve onun tümleyenine yansıtmak için kullanılır.

$\mathbf{F} \in C^{L+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ,  $L \geq 2$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  bağımsız değişken ve  $\mu \in \mathbb{R}$  bir parametre olsun. Öncelikle, (2.2) ile tanımlanan Jakobiyen matris  $A(\mu)$  ve  $\mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu)$  fonksiyonunun  $\mathbf{X}$ 'e göre lineer olmayan terimlerini içeren fonksiyon  $\mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu)$ , yani  $\mathbf{f}(\mathbf{0}; \mu) = D_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu)) = \mathbf{0}$ , olmak üzere (2.1) ile verilen

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu)$$

sistemini

$$\dot{\mathbf{X}} = A(\mu)\mathbf{X} + \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) \quad (3.40)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sistem (3.40) için sağlansın:

(K<sub>3</sub>)  $A(\mu)$  matrisinin

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \quad \text{ve} \quad \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) - i\omega(\mu)$$

basit (tek katlı) kompleks eşlenik kritik özdeğer çifti

$$\alpha(0) = 0, \quad \omega(0) > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha'(0) \neq 0$$

özelliğine sahiptir.

(K<sub>4</sub>)  $A(0)$  matrisinin  $\lambda(0) = i\omega(0)$  ve  $\bar{\lambda}(0) = -i\omega(0)$  sıfır sanal özdeğerlerinden geriye kalan  $n - 2$  tane özdeğerinin reel kısmı negatiftir.

Teorem 2.2'nin bir sonucu olarak (3.40) sistemi,  $\mathbf{W}^c$  merkez manifolduna sahiptir. Hassard ve diğ. (1981), tanımı (2.20) ile verilen  $\mathbf{W}^c$  merkez manifoldunu sabit  $\mu$  değerleri için

$$\mathbf{W}^c(\mu) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{W}^c\}$$

kesitleri şeklinde tanımlamayı daha elverişli bulmuşlardır. Burada,  $\mathbf{F} \in C^{L+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  olduğu için merkez manifold  $\mathbf{W}^c \in C^{L+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  ve kesiti  $\mathbf{W}^c(\mu) \in C^{L+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  olur. Teorem 2.2'nin başka bir sonucu ise (3.40) sisteminin dinamiğinin, bu sistemin  $\mathbf{W}^c(\mu)$  merkez manifold kesitine kısıtlaması tarafından belirlenmesidir. Şimdi, bu merkez manifold kesitine kısıtlanmış sistemi belirleyelim.

Öncelikle,  $A^T(\mu)$  matrisi,  $A(\mu)$  matrisinin devriği olmak üzere  $A^T(\mu)$  matrisinin bir özdeğeri  $\bar{\lambda}(\mu)$  olur.  $A(\mu)$  matrisinin  $\lambda(\mu)$  kritik özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $\mathbf{q}(\mu) \in \mathbb{C}^n$  ve  $A^T(\mu)$  matrisinin  $\bar{\lambda}(\mu)$  kritik özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $\mathbf{q}^*(\mu) \in \mathbb{C}^n$  olsun. Bu durumda,

$$A(\mu)\mathbf{q}(\mu) = \lambda(\mu)\mathbf{q}(\mu), \quad (3.41a)$$

$$A^T(\mu)\mathbf{q}^*(\mu) = \bar{\lambda}(\mu)\mathbf{q}^*(\mu) \quad (3.41b)$$

eşitlikleri sağlanır.  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$  olmak üzere iç çarpımı

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i \quad (3.42)$$

olarak tanımlayalım. Bu tanımı kullanarak  $\mathbf{q}(\mu)$  ve  $\mathbf{q}^*(\mu)$

$$\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçelim. Diğer taraftan,

$$\langle \rho \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \bar{\rho} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad \text{ve} \quad \langle \mathbf{a}, \rho \mathbf{b} \rangle = \rho \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

olduğu için (3.41) kullanılarak

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}^*, A\bar{\mathbf{q}} \rangle &= \langle \mathbf{q}^*, \bar{\lambda}\bar{\mathbf{q}} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle \\ \langle \mathbf{q}^*, A\bar{\mathbf{q}} \rangle &= A \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = \langle A^T \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = \langle \bar{\lambda} \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = \lambda \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\bar{\lambda} \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = \lambda \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle \implies 2i\omega(\mu) \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ise  $\omega(0) > 0$  ve  $\omega(\mu) \in C^{L+2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  olduğundan yeterince küçük  $\mu$  değerleri için

$$\langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0$$

sonucunu verir.

Şimdi, yeterince küçük  $\mu$  değerleri için  $\mathbf{W}^c(\mu)$  merkez manifold kesitlerini  $\mathbf{q}(\mu)$  ve  $\mathbf{q}^*(\mu)$  özvektörlerini kullanarak kompleks değerli koordinatlarda tanımlayacağız. Hassard ve diğ. (1981) ve Kuznetsov (1998) kaynaklarını dikkate alan bir okuyucu bu koordinatların neye dayanarak tanımlandığını ilk bakışta anlamayabilir, çünkü bu kaynaklarda bu koordinatlar gerekçeleri izah edilmeden doğrudan tanımlanmışlardır. Bu nedenle, koordinatları tanımlamadan önce bu tanımları neye dayanarak yaptığımızı anlatan iki lemma ve ispatlarını vereceğiz.

**Lemma 3.2.**  $\{\text{Re}(\mathbf{q}), \text{Im}(\mathbf{q})\}$  tarafından gerilen iki boyutlu merkez özuzay  $E^c$ ,

$$E^c = \{z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

**İspat.** Öncelikle,

$$Z = \{z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}\}$$

kümesini tanımlayalım. Dikkat edilirse,  $z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} = 2\text{Re}(z\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  olduğu için  $Z \subseteq \mathbb{R}^n$  dir. Şimdi, keyfi bir  $\mathbf{y} \in E^c \subseteq \mathbb{R}^n$  ele alalım.  $E^c = \text{span}\{\text{Re}(\mathbf{q}), \text{Im}(\mathbf{q})\}$  olduğu için  $\mathbf{y} \in E^c$  yi

$$\mathbf{y} = (2a_1)\text{Re}(\mathbf{q}) + (-2a_2)\text{Im}(\mathbf{q})$$

lineer kombinasyonu olarak yazılabilecek şekilde  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  vardır.  $z = a_1 + ia_2$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned}z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} &= (a_1 + ia_2)(\text{Re}(\mathbf{q}) + i\text{Im}(\mathbf{q})) + (a_1 - ia_2)(\text{Re}(\mathbf{q}) - i\text{Im}(\mathbf{q})) \\ &= 2a_1\text{Re}(\mathbf{q}) - 2a_2\text{Im}(\mathbf{q}) \\ &= \mathbf{y}\end{aligned}$$

olur. Yani, her  $\mathbf{y} \in E^c$  için  $\mathbf{y} = z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}$  olacak şekilde bir  $z \in \mathbb{C}$  vardır. Ayrıca  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1$  ve  $\langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0$  olduğu için

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{q}^*, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \rangle \\
&= z\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle + \bar{z}\langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle \\
&= z
\end{aligned}$$

olur. Böylece,  $z \in \mathbb{C}$  değeri  $a_1$  ve  $a_2$  reel sayılarını bulmaya gerek kalmadan  $z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{y} \rangle$  ile hesaplanabilir. Bu işlemler bize açıkça  $\mathbf{y} \in Z$  olduğu için  $E^c \subseteq Z$  olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, keyfi bir  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ile hesaplanan  $z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle = z_1 + iz_2$  için  $z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \in Z$  dir. Ayrıca

$$z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} = 2z_1 \operatorname{Re}(\mathbf{q}) - 2z_2 \operatorname{Im}(\mathbf{q})$$

olur. Dolayısıyla  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  olduğu için  $(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) \in Z$  ise  $(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) \in E^c$ , yani  $Z \subseteq E^c$  olur. Bu ise

$$E^c = \{z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}\}$$

demektir. □

**Lemma 3.3.** *Reel kısmı negatif olan  $n - 2$  tane özdeğere karşılık gelen özvektörler tarafından gerilen  $n - 2$  boyutlu kararlı özuzay  $E^s$  olmak üzere  $\mathbf{w} \in E^s$  olması için gerek ve yeter şart  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w} \rangle = 0$  olmasıdır.*

**İspat.**

$$E^s = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w} \rangle = 0\}$$

olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle,

$$W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w} \rangle = 0\}$$

kümesini tanımlayalım.

Keyfi bir  $\mathbf{w} \in E^s$  ele alalım.  $\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^s$  (Denklem (2.7)) olduğundan her bir  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  için  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{w}$  olacak şekilde tek bir  $\mathbf{y} \in E^c$  vardır.<sup>1</sup> Diğer taraftan, Lemma 3.2'den  $z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle$  olmak üzere  $z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \in E^c$  olur. Bu durumda,  $\mathbf{y} \in E^c$  tek olduğu için  $\mathbf{y} = z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}$  elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{q}^*, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \rangle \\
&= z - z\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle - \bar{z}\langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0,
\end{aligned}$$

yani  $E^c \subseteq W$  olur.

Diğer taraftan, kabul edelim ki  $W \not\subseteq E^s$  olsun. Bu durumda bir  $\mathbf{v} \in W$  vardır öyle ki  $\mathbf{v} \notin E^s$  dir. Böylece,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  ve  $\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^s$  olduğu için  $\mathbf{v} \in E^c$  olur. Dolayısıyla,  $z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $\mathbf{v} = z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}$  şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan,  $\mathbf{v} \in W$  olduğu için  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{q}^*, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \rangle = z = 0$  olur. Bu ise  $\mathbf{v} = \mathbf{0} \in E^s$  çelişmesini verir.

<sup>1</sup> $V$  bir vektör uzayı olmak üzere eğer  $V = W_1 + W_2$  ve  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  ise  $V = W_1 \oplus W_2$  direk toplamı ile ifade edilir. Bu ise  $\mathbf{w}_1 \in W_1$  ve  $\mathbf{w}_2 \in W_2$  olmak üzere her bir  $\mathbf{v} \in V$  vektörünün  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$  şeklinde tek türlü yazılabileceği anlamına gelir (Kolman ve Hill, 2008).

Yani,  $W \subseteq E^s$  olur. Sonuç olarak

$$E^s = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w} \rangle = 0\}$$

elde edilir. □

**Sonuç 3.7.** Sistem (3.40)'ın çözüm uzayını kapsayan  $\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^s$  direk toplamını oluşturan  $E^c$  ve  $E^s$  kümeleri kompleks değişkenlerle aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$E^c = \{z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}\} \quad \text{ve} \quad E^s = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w} \rangle = 0\}.$$

Böylece, (3.40) sisteminin herhangi bir  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  çözümü,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} \in E^c$  ve  $\mathbf{w} \in E^s$  olmak üzere

$$\mathbf{X}(t) = z(t)\mathbf{q}(\mu) + \bar{z}(t)\bar{\mathbf{q}}(\mu) + \mathbf{w}(t)$$

şeklinde parçalanabilir. Burada, kompleks değişken  $z$ ,  $E^c$  üzerinde bir koordinattır.

Şimdi, (3.40) sistemini bu yeni koordinatlarda ifade edelim. Öncelikle,  $\mathbf{q}^*(\mu)$  vektörünün kompleks eşleniği  $\bar{\mathbf{q}}^*(\mu)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} z &= \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{X} \rangle \\ \mathbf{w} &= \mathbf{X} - \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{X} \rangle \mathbf{q} - \langle \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{X} \rangle \bar{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{3.43}$$

olur. (3.43) ile tanımlanan yeni değişkenlerin türevleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{X}} \rangle = \langle \mathbf{q}^*, A(\mu)\mathbf{X} + \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) \rangle \\ &= \langle \mathbf{q}^*, A(\mu)\mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) \rangle \\ &= \langle A^T(\mu)\mathbf{q}^*, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) \rangle \\ &= \langle \bar{\lambda}(\mu)\mathbf{q}^*, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) \rangle \\ &= \lambda(\mu) \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) \rangle \\ &= \lambda(\mu)z + \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{f}(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{w}; \mu) \rangle \\ &= \lambda(\mu)z + \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \dot{\mathbf{X}} - \langle \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{X}} \rangle \mathbf{q} - \langle \bar{\mathbf{q}}^*, \dot{\mathbf{X}} \rangle \bar{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{X}} - \dot{z}\mathbf{q} - \dot{\bar{z}}\bar{\mathbf{q}} \\ &= A(\mu)\mathbf{X} + \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) - (\lambda(\mu)z + \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)) \mathbf{q} - (\bar{\lambda}(\mu)\bar{z} + \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)) \bar{\mathbf{q}} \\ &= A(\mu)\mathbf{X} - \lambda(\mu)z\mathbf{q} - \bar{\lambda}(\mu)\bar{z}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) - \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\mathbf{q} - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\bar{\mathbf{q}} \\ &= A(\mu)\mathbf{X} - A(\mu)z\mathbf{q} - A(\mu)\bar{z}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) - 2\text{Re}[\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\mathbf{q}] \\ &= A(\mu)(\mathbf{X} - z\mathbf{q} - \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}(\mathbf{X}; \mu) - 2\text{Re}[\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\mathbf{q}] \\ &= A(\mu)\mathbf{X} + \mathbf{f}(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{w}; \mu) - 2\text{Re}[\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\mathbf{q}]. \end{aligned}$$



Böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu) &= \langle \mathbf{q}^*, f(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{w}; \mu) \rangle, \\ \tilde{\mathbf{H}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu) &= f(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{w}; \mu) - 2\text{Re}[\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\mathbf{q}]\end{aligned}\quad (3.44)$$

olmak üzere (3.40) sistemi, (3.43) ile tanımlanan koordinatlarla aşağıdaki sisteme dönüşür:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \lambda(\mu)z + \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu), \\ \dot{\mathbf{w}} &= A(\mu)\mathbf{w} + \tilde{\mathbf{H}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu).\end{aligned}\quad (3.45)$$

**Açıklama 3.4.**  $z \in \mathbb{C}$  ve  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  olduğundan (3.45) sisteminin reel olarak  $n+2$  boyutlu olduğu düşünülebilir. Fakat  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w} \rangle = 0$  diklik özelliğinden

$$\langle \text{Re}(\mathbf{q}^*), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \langle \text{Im}(\mathbf{q}^*), \mathbf{w} \rangle = 0$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\text{Re}(\bar{q}_1^*)w_1 + \text{Re}(\bar{q}_2^*)w_2 + \cdots + \text{Re}(\bar{q}_n^*)w_n &= 0, \\ \text{Im}(\bar{q}_1^*)w_1 + \text{Im}(\bar{q}_2^*)w_2 + \cdots + \text{Im}(\bar{q}_n^*)w_n &= 0,\end{aligned}$$

ve  $\mathbf{q}^* \neq 0$  olduğu için  $\mathbf{w}$  nun iki bileşeni diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak (3.45) sistemi  $n$ -boyutludur.

Teorem 2.2'ye göre (3.40) sistemine topolojik olarak denk olan (3.45) sistemi  $\mathbf{W}^c(\mu)$  merkez manifold kesitlerine sahiptir. Bu kesitler,  $\delta$  ve  $\gamma$  değerleri yeterince küçük iken  $|z| < \delta$  ve  $|\mu| < \gamma$  için

$$\mathbf{W}^c(\mu) = \{(z, \bar{z}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu), \mathbf{W}(0, 0; \mu) = 0, \mathbf{W}_z(0, 0; \mu) = 0, \mathbf{W}_{\bar{z}}(0, 0; \mu) = 0\}$$

ile temsil edilir ve  $\mathbf{F} \in C^{L+2}$  olduğu için  $\mathbf{W}^c(\mu) \in C^{L+2}$  olur. Ayrıca  $\tilde{g}$  fonksiyonu (3.44) ile tanımlanmak ve

$$g(z, \bar{z}; \mu) = \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu); \mu) = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{f}(z, \bar{z}; \mu) \rangle$$

olmak üzere (3.40) sistemine topolojik olarak denk olan (3.45) sisteminin denge noktasının yakın komşuluğundaki dinamiği, kendisinin merkez manifolduna kısıtlaması olan

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}; \mu) \quad (3.46)$$

diferensiyel denklemi ile belirlenir. Diğer taraftan,  $\mathbf{f} \in C^{L+1}$  olduğu için  $g(z, \bar{z}; \mu) \in C^{L+1}$  olur ve  $\mathbf{f}$  lineer olmayan terimleri içerdiği için

$$g_z(0, 0; \mu) = 0 \quad \text{ve} \quad g_{\bar{z}}(0, 0; \mu) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla, (3.46) denklemi,  $n$ -boyutlu bir sistemi indirgemek istediğimiz iki boyutlu (3.32) sistemi formundadır.

**Sonuç 3.8.** *Kabul edelim ki  $n$ -boyutlu (3.40) sistemi  $\mathbf{K}_3$  ve  $\mathbf{K}_4$  koşullarını sağlasın. Bu takdirde, (3.40) sisteminin merkez manifolduna kısıtlaması (3.46) sistemidir. Böylece, Teorem 2.2 ve Açıklama 2.7'den (3.40) sisteminin dinamiği (3.46) sistemi tarafından belirlenir. Ayrıca (3.46) sistemi, Poincaré normal forma dönüştürülebilen (3.32) sistemi ile aynı forma sahip olduğu için Sonuç 3.6, sistem (3.46) için aynen geçerlidir.*

Denklem (3.46)'yı analiz edebilmek için  $g(z, \bar{z}; \mu)$  fonksiyonuna,  $g(z, \bar{z}; \mu)$  fonksiyonunu elde etmek için ise  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu)$  fonksiyonuna ihtiyacımız vardır. Açıklama 2.5'te belirtildiği gibi,  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu)$  fonksiyonunun Taylor serisini kullanarak  $\mathbf{W}^c(\mu)$  merkez manifold kesitini istenen hassaslık derecesinde hesaplayabiliriz.  $\mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu) \in C^{L+1}$  olmak üzere  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu)$  fonksiyonunun Taylor serisi

$$\mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu) = \sum_{i+j=2}^{L+1} \mathbf{w}_{ij}(\mu) \frac{z^i \bar{z}^j}{i! j!} + \mathcal{O}(|z|^{L+2}), \quad \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{w}_{ij}(\mu) \rangle = 0$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{W}_z \dot{z} + \mathbf{W}_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \\ &= \mathbf{W}_z (\lambda(\mu)z + g) + \mathbf{W}_{\bar{z}} (\bar{\lambda}(\mu)\bar{z} + \bar{g}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan,  $\tilde{\mathbf{H}}$  fonksiyonu (3.44) ile tanımlanmak ve

$$\mathbf{H}(z, \bar{z}; \mu) = \tilde{\mathbf{H}}(z, \bar{z}, \mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu); \mu)$$

olmak üzere (3.45) sisteminin ikinci denkleminde

$$\dot{\mathbf{w}} = A(\mu)\mathbf{W} + \mathbf{H}(z, \bar{z}; \mu),$$

olur. Sonuç olarak

$$\mathbf{W}_z (\lambda(\mu)z + g) + \mathbf{W}_{\bar{z}} (\bar{\lambda}(\mu)\bar{z} + \bar{g}) = A(\mu)\mathbf{W} + \mathbf{H}(z, \bar{z}; \mu) \quad (3.47)$$

eşitliği elde edilir. Merkez manifold kesitlerini temsil eden  $\mathbf{W}(z, \bar{z}; \mu)$  fonksiyonunun  $\mathbf{w}_{ij}(\mu)$  Taylor serisi katsayıları, (3.47) eşitliği kullanılarak istenen dereceye kadar hesaplanabilir (Bu katsayıların belirli bir dereceye kadar hesaplanması için Hassard ve diğ. (1981) sayfa 64'e bakınız).

### 3.1.4 Hopf çatallanma teoremi

Temelinde yatan mantığı ifade ettiğimize göre artık Hopf Çatallanma Teoreminin ifadesine geçebiliriz. Hassard ve diğ. (1981) kaynağında Hopf Çatallanma Teoreminin üç farklı ifadesi verilmiştir. Biz buraya kadar bu teoremlerden ikincisine ait ispatın adımlarını analiz ettik. Şimdi ise ikinci teoremin özünden ayrılmadan fakat daha anlaşılır bir şekilde ifade ederek Hopf Çatallanma Teoremini vereceğiz.

$\tilde{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  bağımsız değişken ve  $v \in \mathbb{R}$  bir parametre olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, v) \quad (3.48)$$

adi diferensiyel denklem sistemini ele alalım. (3.48) sisteminin ayırık denge noktası  $\mathbf{x}^*(v)$  ve

$$D_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, v)) = \left( \frac{\partial \tilde{F}_i(\mathbf{x}, v)}{\partial x_j} : i, j = 1, 2, \dots, n \right)$$

olmak üzere sistemin  $\mathbf{x}^*(v)$  denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi

$$A(v) = D_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}^*(v), v))$$

olsun. Ayrıca bu Jakobiyen matris parametre değeri  $v = v_c$  iken

$$\alpha(v_c) = 0, \quad \omega(v_c) > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha'(v_c) \neq 0$$

koşullarını sağlayan  $\lambda(v) = \alpha(v) + i\omega(v)$  ve  $\bar{\lambda}(v) = \alpha(v) - i\omega(v)$  basit (tek katlı) kompleks eşlenik özdeğer çiftine sahip olsun. Yukarıda elde edilen sonuçları kullanabilmek için

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(v) \quad \text{ve} \quad \mu = v - v_c$$

değişken ve parametre değiştirmesi yapalım.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu) = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X} + \mathbf{x}^*(\mu + v_c); \mu + v_c)$$

olmak üzere, yeni değişken ve yeni parametre ile elde edilen

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu) \quad (3.49)$$

sistemi (3.48) sistemine topolojik olarak denktir. (3.49) sistemi için Hopf çatallanma teoreminin ifadesi şu şekildedir:

**Teorem 3.1** (Hopf Çatallanma Teoremi (Hassard ve diğ., 1981, Teorem II)).

*Kabul edelim ki (3.49) sistemi için aşağıdaki koşullar sağlansın.*

(K<sub>1</sub>)  $I \subset \mathbb{R}$  sıfırın açık bir komşuluğu olmak üzere her  $\mu \in I$  için  $\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu) = \mathbf{0}$  ve  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  noktası  $\mathbf{F}$  fonksiyonunun ayrık bir denge noktasıdır.

(K<sub>2</sub>)  $(\mathbf{0}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  nin bir komşuluğunda,  $L \geq 2$  için  $\mathbf{F}(\mathbf{X}; \mu) \in C^{L+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  dir, yani  $\mathbf{F}$  nin  $\mathbf{X}$  e ve  $\mu$  ye göre  $(L+2)$  inci mertebeye kadar bütün kısmi türevleri mevcuttur ve bu türevler süreklidir.

(K<sub>3</sub>)  $A(\mu) = D_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu)$  Jakobiyen matrisi

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu),$$

ve

$$\alpha(0) = 0, \quad \omega(0) > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha'(0) \neq 0$$

olacak şekilde  $\lambda$  ve  $\bar{\lambda}$  basit (tek katlı) kompleks eşlenik özdeğer çiftine sahiptir.

(K<sub>4</sub>)  $A(\mu)$  Jakobiyen matrisinin geriye kalan  $n-2$  tane özdeğerinin reel kısmı,  $\mu = 0$  çatallanma değerinde negatiftir.

*Bu takdirde,*

a) Bir  $\epsilon_p > 0$  vardır öyle ki her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  için çatallanma parametresi  $\mu$

$$\mu(\epsilon) = \mu_2\epsilon^2 + \mu_4\epsilon^4 + \text{YMT}$$

değerine eşit olduğunda (3.49) sistemi,  $p_\epsilon(t)$  periyodik çözümüne sahiptir. Dolayısıyla, (3.49) sistemi  $(0, \epsilon_p)$  aralığında periyodik çözümler ailesine sahiptir. Ayrıca  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  denge noktasının bir  $\zeta$  komşuluğu ve  $\mu = 0$  çatallanma değerini içeren bir  $\vartheta$  açık aralığı vardır öyle ki her  $\mu \in \vartheta$  için (3.49) sisteminin  $\zeta$  komşuluğunda yatan periyodik çözümleri  $\mu = \mu(\epsilon)$ ,  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  eşitliğini sağlayan  $\epsilon$  değerleri için  $p_\epsilon(t)$  ailesine aittir.

Üstelik yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için,  $c_1(0)$  Poincaré normal form katsayısı (3.39) ile tanımlanmak ve  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$  olmak üzere, periyodik çözümler

$$\mathbf{a}_1) \quad \mu_2 = -\frac{\text{Re}(c_1(0))}{\alpha'(0)} > 0 \text{ ise } \mu = 0 \text{ çatallanma değerinden sonra,}$$

$$\mathbf{a}_2) \quad \mu_2 = -\frac{\text{Re}(c_1(0))}{\alpha'(0)} < 0 \text{ ise } \mu = 0 \text{ çatallanma değerinden önce}$$

ortaya çıkar.

b)  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$  olmak üzere,  $p_\epsilon(t)$  periyodik çözümü

b<sub>1</sub>)  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  ise kararsız,

b<sub>2</sub>)  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  ise yerel (lokal) asimptotik kararlıdır.

c)  $p_\epsilon(t)$  periyodik çözümünün periyodu

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega(0)} (1 + T_2\epsilon^2 + T_4\epsilon^4 + \text{YMT})$$

dir. Dolayısıyla, yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için periyot

$$T(\epsilon) \approx \frac{2\pi}{\omega(0)}$$

olur. Ayrıca periyot  $T(\epsilon)$ ,

$$\text{c}_1) T_2 = -\frac{\omega'(0)\mu_2 + \text{Im}(c_1(0))}{\omega(0)} > 0 \text{ ise artan,}$$

$$\text{c}_2) T_2 = -\frac{\omega'(0)\mu_2 + \text{Im}(c_1(0))}{\omega(0)} < 0 \text{ ise azalır.}$$

**Açıklama 3.5** (Hassard ve diğ. (1981)).

$\mu = 0$  çatallanma değerinde  $A(0)$  Jakobiyen matrisinin kompleks eşlenik çiftten geriye kalan  $n - 2$  tane özdeğerinin bazılarının veya tamamının reel kısımlarının pozitif olduğu durumda  $\mu \in \mathfrak{D}$  için ortaya çıkan periyodik çözümler kararsızdır.

Teoremin ifadesinde geçen  $\alpha'(0) \neq 0$  koşulu, transversalite (kesme) koşulu olarak adlandırılır. Bu koşul ile kompleks eşlenik özdeğer çiftinin reel kısmı  $\alpha(\mu)$  nün işaretinin,  $\mu = 0$  çatallanma değerinde değişmesi garanti edilir. Geriye kalan  $n - 2$  tane özdeğerin reel kısmı negatif olduğu için  $\alpha(\mu)$  nün işaret değişimi, denge noktasının kararlılık yapısının değişmesi anlamına gelir. Denge noktası,  $\alpha'(0) > 0$  ise çatallanma değeri  $\mu = 0$  dan önce kararlı, sonra kararsız;  $\alpha'(0) < 0$  ise çatallanma değeri  $\mu = 0$  dan önce kararsız, sonra kararlıdır.

Diğer taraftan, Teorem 3.1'de ifade edildiği üzere (3.49) sisteminin sahip olduğu periyodik çözümler kararlı veya kararsız olabilir. Periyodik çözümlerin kararlılık yapısına göre Hopf çatallanma farklı şekilde isimlendirilir.

**Tanım 3.1.** Hopf çatallanma, periyodik çözümler kararlı ise Süperkritik Hopf Çatallanma; kararsız ise Subkritik Hopf Çatallanma olarak adlandırılır (Wiggins, 2003).

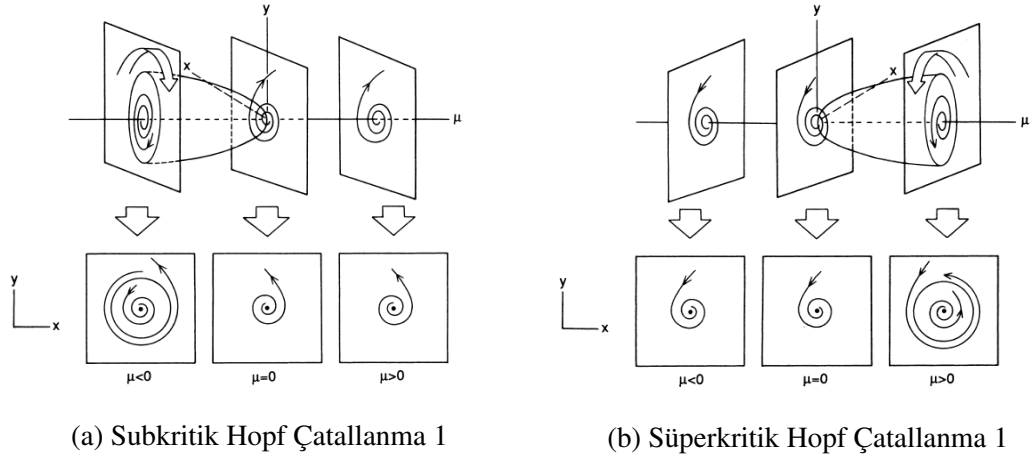
Bu tanım denge noktasının çatallanma değerindeki kararlılık yapısına göre şu şekilde ifade edilebilir:

**Tanım 3.2.** Hopf çatalanma, çatalanma değerinde denge noktası zayıf bir şekilde çekici ise Süperkritik Hopf Çatallanma; zayıf bir şekilde itici ise Subkritik Hopf Çatallanma olarak adlandırılır (Robinson, 2004).

Denge noktasının çatalanma değerinden önce veya sonra kararlı olmasına ve periyodik çözümlerin çatalanma değerinden önce veya sonra ortaya çıkmasına bağlı olarak Hopf çatalanma dört farklı faz portresine sahip olabilir. Bu durumlar aşağıda ifade edilmiş ve iki boyutlu bir sisteme ait faz portreleri ile örneklendirilmiştir.

**Durum I -  $\alpha'(0) > 0$  ve  $\mu_2 < 0$ :** Denge noktası çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan önce kararlı, sonra kararsızdır. Periyodik çözümler çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan önce ortaya çıkar.  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  olduğu için bu periyodik çözümler kararsızdır. Dolayısıyla, Subkritik Hopf Çatallanma meydana gelir (Şekil 3.3a).

**Durum II -  $\alpha'(0) > 0$  ve  $\mu_2 > 0$ :** Denge noktası çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan önce kararlı, sonra kararsızdır. Periyodik çözümler çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan sonra ortaya çıkar.  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  olduğu için bu periyodik çözümler kararlıdır. Dolayısıyla, Süperkritik Hopf Çatallanma meydana gelir (Şekil 3.3b).



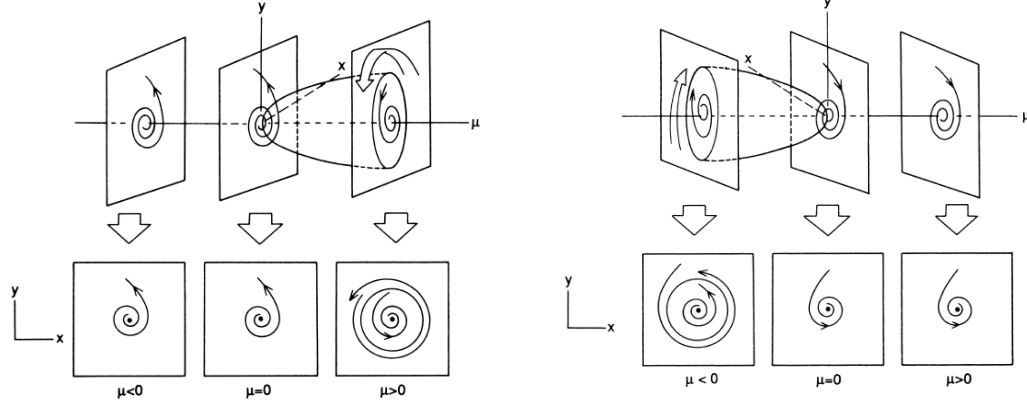
Şekil 3.3: Denge noktası çatalanma değerinden önce kararlıdır (Wiggins, 2003).

(a) Kararsız periyodik çözümler çatalanma değerinden önce ortaya çıkar.

(b) Kararlı periyodik çözümler çatalanma değerinden sonra ortaya çıkar.

**Durum III -  $\alpha'(0) < 0$  ve  $\mu_2 > 0$ :** Denge noktası çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan önce kararsız, sonra kararlıdır. Periyodik çözümler çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan sonra ortaya çıkar.  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  olduğu için bu periyodik çözümler kararsızdır. Dolayısıyla, Subkritik Hopf Çatallanma meydana gelir (Şekil 3.4a).

**Durum IV -  $\alpha'(0) < 0$  ve  $\mu_2 < 0$ :** Denge noktası çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan önce kararsız, sonra kararlıdır. Periyodik çözümler çatalanma değeri  $\mu = 0$  dan önce ortaya çıkar.  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  olduğu için bu periyodik çözümler kararlıdır. Dolayısıyla, Süperkritik Hopf Çatallanma meydana gelir (Şekil 3.4b).



(a) Subkritik Hopf Çatallanma 2

(b) Süperkritik Hopf Çatallanma 2

Şekil 3.4: Denge noktası çatallanma değerinden *sonra* kararlıdır (Wiggins, 2003).

(a) *Kararsız* periyodik çözümler çatallanma değerinden *sonra* ortaya çıkar.

(b) *Kararlı* periyodik çözümler çatallanma değerinden *önce* ortaya çıkar.

### 3.2 Tez Problemi ve Tezin Amacı

Gerçek yaşam problemlerini modellerken pek çok problemin doğasında bulunan reaksiyon-difüzyon mekanizmasını ve girdilere/uyaranlara verilen cevapta meydana gelecek gecikmeyi ihmal etmemek gerektiğini ifade etmiştik. Ayrıca çalışılan problemin doğasına bağlı olarak reaksiyon-difüzyon mekanizması ve gecikme terimi içeren modellerin, problemleri daha gerçekçi bir şekilde temsil edeceği sonucuna varmıştık (Bölüm 1.2 ve Bölüm 1.1). Bu nedenle, gecikme içeren reaksiyon-difüzyon denklem sistemleri, problemleri modellemek amacıyla literatürde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu tezde, iki bağımsız değişken içeren tek gecikmeli reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin bir sınıfını temsil eden ve (3.50) ile verilen genel bir formu ele alınacaktır.

$f, g \in C^k(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 2$ ;  $f(E^*) = g(E^*) = 0$ ,  $E^* = (u^*, v^*)$ ;  $\Omega \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  açık ve düzgün bir  $\partial\Omega$  sınırına sahip sınırlı bir küme;  $\partial\Omega$  nın birim normal vektörü  $\vec{n}$  olsun.

$t > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;  $u_0(t, \mathbf{x}), v_0(t, \mathbf{x}) \in C^2([-\tau, 0] \times \Omega, \mathbb{R}) \cap C([-\tau, 0] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R})$  başlangıç fonksiyonları ve  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$  Laplace operatörü olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

Neumann sınır koşulları ve

$$u(t, \mathbf{x}) = u_0(t, \mathbf{x}) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$v(t, \mathbf{x}) = v_0(t, \mathbf{x}) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$$

başlangıç değerlerine sahip

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} = d_1 \Delta u(t, \mathbf{x}) + f(u(t, \mathbf{x}), u(t - \tau, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x}), v(t - \tau, \mathbf{x})) \\ \frac{\partial v(t, \mathbf{x})}{\partial t} = d_2 \Delta v(t, \mathbf{x}) + g(u(t, \mathbf{x}), u(t - \tau, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x}), v(t - \tau, \mathbf{x})) \end{cases} \quad (3.50)$$

tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon sisteminde,  $d_1$  ve  $d_2$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  nin (pozitif) difüzyon katsayıları;  $\tau$  (pozitif) gecikme parametresidir.

Bu tezde gecikme parametresi değişirken (3.50) ile verilen tek gecikmeli reaksiyon-difüzyon sisteminin dinamik yapısında ne gibi değişiklikler olacağı analiz edilecektir. Bölüm 1.3'te tanımladığımız Hopf çatallanma, Bölüm 3.1'de ispatladığımız gibi bir sistemde çatallanma parametresi değişirken periyodik çözümlerin yerel (lokal) olarak varlığını göstermenin bir yoludur. Periyodik çözümlerin öneminden dolayı (Bölüm 1.4), bu tezde,  $\tau$  gecikme terimi çatallanma parametresi olarak alınıp (3.50) sisteminin Hopf çatallanma analizi yapılacaktır.

Bu tez çalışmasının dört amacı vardır. Bu amaçlardan ilki, gecikme terimi  $\tau$  değişirken (3.50) sisteminde Hopf çatallanmanın ortaya çıkacağı koşulları belirlemektir. Böylece, bu forma sahip bir sistemin periyodik çözümlerinin varlığını garanti eden şartlar elde edilmiş olacaktır.

Tez problemi (3.50), ilk bakışta iki boyutlu bir sistemdir. Bu durum, sistemin doğrudan (3.32) denkleminde dönüştürülmesi gerektiğini düşündürülebilir. Fakat bu sistem gecikme terimi içerdiği için karakteristik denklemi üstel polinom (üstel ifade içeren bir transandantal denklem) formundadır. Yani bu sistemin denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi sonsuz çoklukta özdeğere sahiptir (Bölüm 1.2). Dolayısıyla, (3.50) sistemi, sonsuz boyutludur ve merkez manifolduna indirgenmelidir. Bu nedenle, ikinci amaç, varlığı garanti edilen periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemek için (3.50) sistemini merkez manifolduna indirgemektir. İndirgeme için kullanılacak yöntem,  $n$ -boyutlu diferensiyel denklem sistemleri için Bölüm 3.1.3'te izlenen yol baz alınarak Hassard ve diğ. (1981) kaynağında  $n$ -boyutlu gecikmeli diferensiyel ve  $n$ -boyutlu reaksiyon-difüzyon denklem sistemleri için ayrı ayrı verilen merkez manifolda indirgeme yöntemlerinin birleştirilmesi ile elde edilecektir.

Tezin üçüncü amacı ise (3.50) sistemi ile aynı forma sahip her farklı problem için bu yöntemdeki adımların tekrarını engellemek amacıyla, Hopf çatallanmanın varlık analizini sadece karakteristik denklemin katsayılarını kullanarak ve yön analizini ise sadece (3.50) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayıları kullanarak tamamlamayı



sağlayacak koşullar ve formüller içeren bir algoritma oluşturmaktır. Çünkü bir sistemde Hopf çatallanma analizi yapmanın ilk adımı, sistemin denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisinin (3.3) özelliğini taşıyan basit (tek katlı) kompleks eşlenik özdeğer çiftine sahip olduğunu göstermektir. Bu nedenle, her koşulda sisteme ait karakteristik denklemi, dolayısıyla (3.50) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerini bulmak gerekir. Karakteristik denklem bulunduktan sonra indirgeme prosedürünü takip etmek yerine, karakteristik denklemin katsayılarına bağlı koşullar ile  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılara bağlı formüllerin hesaplanması daha kolay olacaktır. Burada algoritma, iyi tanımlanmış kuralların ve işlemlerin adım adım uygulanmasıyla bir sonuca en hızlı biçimde ulaşılması işlemi anlamında kullanılmaktadır (Türk Dil Kurumu, Url-13).

Bu tez çalışması ile iki boyutlu, tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin yukarıda verilen sınıfı tamamen analiz edilmiş olacaktır. Sonuç olarak (3.50) sistemi ile aynı forma sahip keyfi bir sistemin Hopf çatallanma analizi, sistemin karakteristik denklemi ve sistemdeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının ikinci dereceden Taylor polinomları bulunduktan sonra elde edilen algoritma kullanılarak yapılabilecektir. Tez çalışmasının son amacı ise algoritmayı 4 farklı probleme uygulayarak algoritmanın uygulanabilirliğini göstermek ve difüzyon teriminin sistemler üzerindeki etkisini araştırmaktır.

#### 4. TEK GECİKME İÇEREN BİR REAKSİYON-DİFÜZYON SİSTEMİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

Bu bölümde, gecikme terimi olan  $\tau$  nun çatallanma parametresi olarak alındığı (3.50) tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon sisteminin Hopf çatallanma analizi için bir algoritma oluşturulacaktır. Bu algoritma Hopf çatallanmanın varlık analizi ve yön analizi olarak adlandıracağımız iki aşama ile elde edilecektir. Varlık analizinde, sistemin periyodik çözümler ailesine sahip olması için karakteristik denklemin katsayıları üzerine konması gereken koşullar belirlenecektir. Yön analizinde ise sistem merkez manifolduna indirgenecek ve periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemek için  $c_1(0)$  Poincaré normal form katsayısının hesaplanmasını sağlayan formüller elde edilecektir. Bu formüller, algoritmanın uygulanabilirliğini kolaylaştırmak açısından (3.50) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılarla bağlı olarak belirlenecektir.

Hesaplamaların kolaylığı açısından  $\Omega = (0, \ell\pi) \subset \mathbb{R}$  olarak alınacaktır, fakat bütün hesaplamalar yüksek boyutlara da genişletilebilir. Bu durumda,  $u_0(t, x), v_0(t, x) \in C^2([-\tau, 0] \times (0, \ell\pi), \mathbb{R}) \cap C([-\tau, 0] \times [0, \ell\pi], \mathbb{R})$ ;  $f, g \in C^k(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 2$ ;  $f(E^*) = g(E^*) = 0$ ,  $E^* = (u^*, v^*)$  olmak üzere (3.50) sistemi

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \{0, \ell\pi\}$$

Neumann sınır koşulları ve

$$u(t, x) = u_0(t, x) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad x \in [0, \ell\pi],$$

$$v(t, x) = v_0(t, x) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad x \in [0, \ell\pi]$$

başlangıç değerlerine sahip

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + f(u(t, x), u(t - \tau, x), v(t, x), v(t - \tau, x)) \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + g(u(t, x), u(t - \tau, x), v(t, x), v(t - \tau, x)) \end{cases} \quad (4.1)$$

sistemine dönüşür. Burada  $t \geq 0$  ve  $x \in (0, \ell\pi)$ ;  $d_1$  ve  $d_2$  sırasıyla  $u$  ve  $v$  nin pozitif difüzyon katsayıları;  $\tau$  pozitif gecikme parametresidir.

Hopf çatallanmanın varlığını, yani sistemin periyodik çözümler ailesine sahip olduğunu, garanti etmek için (4.1) sisteminin Teorem 3.1'in dört koşulunu sağlaması gerekir. Bu koşulları test etmek için öncelikle,  $U(t, x) = u(t, x) - u^*$  ve  $V(t, x) = v(t, x) - v^*$  lineer dönüşümleri ile  $E^*$  denge noktasını orijine taşıyalım:

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u(t,x)}, \quad f_{u_\tau} = \frac{\partial f}{\partial u(t-\tau,x)}, \quad f_v = \frac{\partial f}{\partial v(t,x)}, \quad f_{v_\tau} = \frac{\partial f}{\partial v(t-\tau,x)},$$

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u(t,x)}, \quad g_{u_\tau} = \frac{\partial g}{\partial u(t-\tau,x)}, \quad g_v = \frac{\partial g}{\partial v(t,x)}, \quad g_{v_\tau} = \frac{\partial g}{\partial v(t-\tau,x)},$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} k_1 &= f_u(E^*), & k_2 &= f_{u_\tau}(E^*), \\ k_3 &= f_v(E^*), & k_4 &= f_{v_\tau}(E^*), \\ l_1 &= g_u(E^*), & l_2 &= g_{u_\tau}(E^*), \\ l_3 &= g_v(E^*), & l_4 &= g_{v_\tau}(E^*), \end{aligned} \tag{4.2}$$

olsun. Öyleyse  $U_0(t,x) = u_0(t,x) - u^*$  ve  $V_0(t,x) = v_0(t,x) - v^*$  olmak üzere

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 0, \quad x \in \{0, \ell\pi\}, \quad t \geq 0$$

Neumann sınır koşulları ve

$$U(t,x) = U_0(t,x), \quad x \in [0, \ell\pi], \quad t \in [-\tau, 0],$$

$$V(t,x) = V_0(t,x), \quad x \in [0, \ell\pi], \quad t \in [-\tau, 0]$$

başlangıç değerlerine sahip, denge noktası orijin olan ve lineerleştirilmiş

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} &= d_1 \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} + k_1 U(t,x) + k_2 U(t-\tau,x) \\ &\quad + k_3 V(t,x) + k_4 V(t-\tau,x) + \text{YMT} \\ \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} &= d_2 \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} + l_1 U(t,x) + l_2 U(t-\tau,x) \\ &\quad + l_3 V(t,x) + l_4 V(t-\tau,x) + \text{YMT} \end{aligned} \right. \tag{4.3}$$

sistemi, (4.1) sistemine topolojik olarak denktir. Ayrıca Teorem 3.1'in  $\mathbf{K}_1$  ve  $\mathbf{K}_2$  koşulları sistem (4.3) tarafından sağlanır. Hatırlayalım ki Teorem 3.1'in  $\mathbf{K}_3$  ve  $\mathbf{K}_4$  koşulları aşağıdaki gibidir:

( $\mathbf{K}_3$ ) (4.3) sisteminin denge noktası olan orijinde hesaplanan Jakobiyen matrisinin, (3.3) ile verilen

$$\alpha(\tau_{j,0}) = 0, \quad \omega(\tau_{j,0}) > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha'(\tau_{j,0}) \neq 0$$

özelliğine sahip

$$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau) \quad \text{ve} \quad \bar{\lambda}(\tau) = \alpha(\tau) - i\omega(\tau)$$

basit (tek katlı) kompleks eşlenik özdeğer çifti vardır.

(K<sub>4</sub>) (4.3) sisteminin denge noktası olan orijinde hesaplanan Jakobiyen matrisinin çatallanma değerinde  $\lambda(\tau_{j,0}) = i\omega(\tau_{j,0})$  ve  $\bar{\lambda}(\tau_{j,0}) = -i\omega(\tau_{j,0})$  sırf sanal özdeğerlerinden geriye kalan özdeğerlerinin reel kısmı negatiftir.

Bu koşulları test etmek için öncelikle (4.3) sisteminin orijinde hesaplanan Jakobiyen matrisinin karakteristik denklemini elde etmemiz gerekir.

**Not** (İfade Sadeleştirme) Buradan itibaren, daha sade bir ifade elde etmek için "sistemin denge noktası olan orijinde hesaplanan Jakobiyen matrisi" ve "sistemin denge noktası olan orijinde hesaplanan Jakobiyen matrisinin karakteristik denklemi" ifadeleri yerine sırasıyla "sistemin Jakobiyen matrisi" ve "sisteminin karakteristik denklemi" ifadeleri kullanılacaktır.

### Adi diferensiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi

$S_1, S_2 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $U(t) = S_1 e^{\lambda t}$  ve  $V(t) = S_2 e^{\lambda t}$  çözüm adayları, iki boyutlu tek gecikme içeren

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = k_1 U(t) + k_2 U(t - \tau) + k_3 V(t) + k_4 V(t - \tau) + YMT, \\ \frac{dV(t)}{dt} = l_1 U(t) + l_2 U(t - \tau) + l_3 V(t) + l_4 V(t - \tau) + YMT, \end{cases} \quad (4.4)$$

adi diferensiyel denklem sisteminde yerine konursa sistemin Jakobiyen matrisi

$$J(0) = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 e^{-\lambda \tau} & k_3 + k_4 e^{-\lambda \tau} \\ l_1 + l_2 e^{-\lambda \tau} & l_3 + l_4 e^{-\lambda \tau} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir.  $J(0)$  matrisinin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\lambda^2 + a\lambda + be^{-\lambda \tau} + c\lambda e^{-\lambda \tau} + d + he^{-2\lambda \tau} = 0 \quad (4.6)$$

ve yukarıdaki ifadede

$$\begin{aligned} a &= -(k_1 + l_3), & b &= k_1 l_4 - k_4 l_1 + k_2 l_3 - k_3 l_2, \\ c &= -(k_2 + l_4), & d &= k_1 l_3 - k_3 l_1, & h &= k_2 l_4 - k_4 l_2 \end{aligned}$$

dir.

### Reaksiyon-difüzyon sisteminin karakteristik denklemi

$$\mathcal{X} = \left\{ (u, v) \mid u, v \in C^2([0, \ell\pi], \mathbb{R}) \text{ ve } x = 0, \ell\pi \text{ iken } \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = 0 \right\}$$

olmak üzere  $\mathcal{C} = C([-\tau, 0], \mathcal{X})$  bir Banach uzayı;  $\text{dom}(\Delta) = \mathcal{X}$  olmak üzere  $\Delta$  tanımı (1.5a) ile verilen Laplasyen operatörü ve  $d = \text{diag}\{d_1, d_2\}$  olsun.  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  olmak üzere  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in \mathcal{C}$  için

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ l_1 & l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 & k_4 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(-\tau) \\ \varphi_2(-\tau) \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathbf{U}(t) = (U(t), V(t))^T = (U(\cdot, t), V(\cdot, t))^T,$$

$$\mathbf{U}_t(\theta) = \mathbf{U}(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, (4.3) sistemi aşağıdaki soyut adi diferensiyel denklem olarak ifade edilebilir:

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = d\Delta\mathbf{U}(t) + L(\mathbf{U}_t) + \mathbf{YMT}. \quad (4.7)$$

$\mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \mathcal{C} \oplus i\mathcal{C}$  ve  $e^{\lambda \cdot} \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$

$$(e^{\lambda \cdot} \mathbf{y})(\theta) = e^{\lambda \theta} \mathbf{y}, \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

şeklinde tanımlanmak üzere  $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$  ve  $\mathbf{y} \neq 0$  için (4.7) diferensiyel denkleminin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir (Wu, 1996):

$$\lambda \mathbf{y} - d\Delta\mathbf{y} - L(e^{\lambda \cdot} \mathbf{y}) = 0. \quad (4.8)$$

Sınırlı bir bölgede tanımlı Laplasyen operatörünün özelliklerinden,  $\Delta$  operatörü  $\left(-\frac{n^2}{\ell^2}\right)$  özdeğerlerine ve  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  için bu özdeğerlere karşılık gelen

$$\beta_n^1 = \begin{pmatrix} \gamma_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \gamma_n = \cos\left(\frac{n}{\ell}x\right)$$

özvektörlerine sahiptir.  $\{\beta_n^1, \beta_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\mathcal{X}$  kümesi için bir baz teşkil eder. Bu nedenle, keyfi bir  $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$  için bu baza göre Fourier açılımı aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n^T \begin{pmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{y}, \beta_n^1 \rangle \\ \langle \mathbf{y}, \beta_n^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Diğer taraftan,

$$L\left(\varphi^T \begin{pmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \end{pmatrix}\right) = L(\varphi)^T \begin{pmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ve  $J(0)$  ın tanımı (4.5) ile verilmek üzere

$$L(e^{\lambda \cdot} \mathbf{Y}_n)^T = \mathbf{Y}_n^T J(0)^T$$

olduğu için (4.9) ile verilen  $\mathbf{y}$ , (4.8) karakteristik denkleminde yerine konursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n^T \overbrace{\left[ \lambda I_2 + d \frac{n^2}{\ell^2} - \begin{pmatrix} k_1 + k_2 e^{-\lambda \tau} & l_1 + l_2 e^{-\lambda \tau} \\ k_3 + k_4 e^{-\lambda \tau} & l_3 + l_4 e^{-\lambda \tau} \end{pmatrix} \right]}^A \begin{pmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \end{pmatrix} = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada  $I_2$ ,  $2 \times 2$  birim matristir.  $\mathbf{Y}_n$ ,  $\beta_n^1$  ve  $\beta_n^2$  sıfırdan farklı ve  $\det(A) = \det(A^T)$  olduğu için yukarıdaki eşitlik ancak

$$\left| \lambda I_2 + d \frac{n^2}{\ell^2} - \begin{pmatrix} k_1 + k_2 e^{-\lambda \tau} & k_3 + k_4 e^{-\lambda \tau} \\ l_1 + l_2 e^{-\lambda \tau} & l_3 + l_4 e^{-\lambda \tau} \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (4.10)$$

ise geçerli olur. Dikkat edilirse  $\tilde{J}(0) = -d \frac{n^2}{\ell^2} + J(0)$  olmak üzere, (4.10) eşitliği  $\tilde{J}(0)$  Jakobiyen matrisinin karakteristik denklemdir. Sonuç olarak (4.3) sisteminin karakteristik denklemi

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= (d_1 + d_2) \frac{n^2}{\ell^2} - (k_1 + l_3), \\ \tilde{b} &= -(d_1 l_4 + d_2 k_2) \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 l_4 - k_4 l_1 + k_2 l_3 - k_3 l_2, \\ \tilde{c} &= -(k_2 + l_4), \\ \tilde{d} &= d_1 d_2 \frac{n^4}{\ell^4} - (d_1 l_3 + d_2 k_1) \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 l_3 - k_3 l_1, \\ \tilde{h} &= k_2 l_4 - k_4 l_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\lambda^2 + \tilde{a}\lambda + \tilde{b}e^{-\lambda \tau} + \tilde{c}\lambda e^{-\lambda \tau} + \tilde{d} + \tilde{h}e^{-2\lambda \tau} = 0 \quad (4.11)$$

olur.

**Lemma 4.1.** (4.3) reaksiyon-difüzyon sisteminin ve (4.4) adi diferensiyel denklem sisteminin karakteristik denklemleri, aşağıda verilen aynı üstel polinom forma sahiptir:

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda \tau} + C\lambda e^{-\lambda \tau} + D + He^{-2\lambda \tau} = 0.$$

**Açıklama 4.1.**  $d_1 = d_2 = 0$  iken (4.3) reaksiyon-difüzyon sisteminin (4.11) karakteristik denklemi, (4.4) adi diferensiyel denklem sisteminin (4.6) karakteristik denklemine dönüşür. Sonuç olarak (4.3) reaksiyon-difüzyon sistemi için karakteristik denklemin katsayılarına ve (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılarla bağlı olarak elde edilecek sonuçlar,  $d_1 = d_2 = 0$  alındığında (4.4) adi diferensiyel denklem sistemi için de geçerli olacaktır.

**Açıklama 4.2.**  $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^k(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 2$ ;  $\tilde{f}(E^*) = \tilde{g}(E^*) = 0$ ,  $E^* = (u^*, v^*)$  ve

$$\tilde{f}_u(E^*) = k_1 - d_1 \frac{n^2}{\ell^2} \quad \text{ve} \quad \tilde{g}_v(E^*) = l_3 - d_2 \frac{n^2}{\ell^2}$$

olmak üzere  $\tilde{f}$  ve  $\tilde{g}$  fonksiyonlarının geriye kalan Taylor serisi katsayıları sırasıyla  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarınınki ile aynı olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \tilde{f}(u(t), u(t-\tau), v(t), v(t-\tau)), \\ \frac{dv(t)}{dt} = \tilde{g}(u(t), u(t-\tau), v(t), v(t-\tau)), \end{cases}$$

adi diferensiyel denklem sistemi  $U(t) = u(t) - u^*$  ve  $V(t) = v(t) - v^*$  olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = \left(k_1 - d_1 \frac{n^2}{\ell^2}\right) U(t) + k_2 U(t-\tau) + k_3 V(t) + k_4 V(t-\tau) + YMT, \\ \frac{dV(t)}{dt} = l_1 U(t) + l_2 U(t-\tau) + \left(l_3 - d_2 \frac{n^2}{\ell^2}\right) V(t) + l_4 V(t-\tau) + YMT, \end{cases} \quad (4.12)$$

sistemine dönüşür. Dikkat edilirse  $J(0)$  matrisi (4.5) ile tanımlanmak üzere (4.12) sisteminin Jakobiyen matrisi  $\tilde{J}(0) = -d \frac{n^2}{\ell^2} + J(0)$  olur. Ayrıca (4.3) reaksiyon-difüzyon sisteminin (4.11) karakteristik denklemi,  $\tilde{J}(0)$  matrisinin karakteristik denklemi ile aynıdır. Diğer taraftan, Hopf çatallanmanın varlığı sistemlerin karakteristik denklemlerinin sahip olduğu özelliklerle ve yönü ise sistemi oluşturan fonksiyonların Taylor serilerinin katsayıları kullanılarak belirlenir. Böylece, (4.3) reaksiyon-difüzyon sisteminin Hopf çatallanma analizi, (4.12) adi diferensiyel denklem sisteminin Hopf çatallanma analizine denk olur.

#### 4.1 Literatür Taraması

Yukarıda ifade edildiği üzere Hopf çatallanmanın varlığını, yani sistemin periyodik çözümler ailesine sahip olduğunu, garanti etmek için (4.3) sisteminin  $\mathbf{K}_3$  ve  $\mathbf{K}_4$  koşullarını sağlaması gerekir. Yani,

$$\begin{aligned} A &= (d_1 + d_2) \frac{n^2}{\ell^2} - (k_1 + l_3), \\ B &= -(d_1 l_4 + d_2 k_2) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_4 - k_4 l_1) + (k_2 l_3 - k_3 l_2), \\ C &= -(k_2 + l_4), \\ D &= d_1 d_2 \frac{n^4}{\ell^4} - (d_1 l_3 + d_2 k_1) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_3 - k_3 l_1), \\ H &= (k_2 l_4 - k_4 l_2) \end{aligned} \quad (4.13a)$$

olmak üzere (4.3) sisteminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D + He^{-2\lambda\tau} = 0, \quad (4.13b)$$

(3.3) özelliğini taşıyan basit (tek katlı) kompleks eşlenik kök çiftine ve geriye kalan kökler çatallanma değerinde negatif reel kısma sahip olmalıdır. Dolayısıyla, (4.3) tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon sisteminin Hopf çatallanma varlık analizi, sistemin (4.13b) karakteristik denkleminin analizi ile mümkündür. Bu analiz, denge noktasının kararlılık yapısı ve Hopf çatallanmanın varlığı hakkında bilgi sahibi olabilmek için son yarım asırda pek çok araştırmacı tarafından kullanılmıştır.

Tek gecikme içeren iki boyutlu bir reaksiyon-difüzyon sisteminin karakteristik denkleminin alabileceği en genel form (4.13b) denklemdir. Çalışılan probleme bağlı olarak bu denklemdeki bazı katsayılar sıfır olabilir. Şimdi, (4.13b) karakteristik denklem formu baz alınarak literatürde yer alan bu konu ile ilgili çalışmalardan bahsedelim.

Denklem (4.13b) için  $B = H = 0$  ve  $C = H = 0$  alındığında sırasıyla

$$\lambda^2 + A\lambda + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D = 0 \quad (4.14a)$$

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + D = 0 \quad (4.14b)$$

denklemleri elde edilir. Belmann ve Cooke (1963), Cooke ve Grossman (1982) (4.14a) denkleminin; Baptistini ve Táboas (1997), Belmann ve Cooke (1963), Bodnar ve diğ. (2011), Cooke ve Grossman (1982) ise (4.14b) denkleminin köklerinin reel kısımlarının işaretleri üzerine çalışmışlardır. Böylece, (4.14b) karakteristik denklemine sahip bir sistemin denge noktasının kararlılık yapısını analizi etmişlerdir. Ayrıca Hadelers ve Ruan (2007), karakteristik denklemi (4.14b) formunda olan bir sistemde Hopf çatallanmanın var olduğunu göstermiştir.

$H = 0$  iken ise (4.13b) karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D = 0 \quad (4.15)$$

denklemine dönüşür. (4.15) karakteristik denklemlerine sahip bir denklem sisteminin denge noktasının kararlılık durumu Bi ve Ruan (2013), Cooke ve Driessche (1986), Cooke ve Grossman (1982) ve Ruan (2001) tarafından çalışılmıştır. Bi ve Ruan (2013) elde ettiği sonuçları gecikmeli tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modelinde; Ruan (2001) ise elde ettiği sonuçları gecikmeli Kolmogorov tipi av-avcı sisteminde Hopf çatallanmanın varlığını göstermek için kullanmıştır. Brauer (1987) ise (4.15) karakteristik denklemine sahip denklem sisteminin denge noktasının mutlak kararlılığını araştırmıştır, mutlak kararlılığın tanımı şu şekildedir:

**Tanım 4.1.** *Bir denge noktası her  $\tau \geq 0$  için yerel (lokal) asimptotik kararlı ise o denge noktasına mutlak kararlı denir.*

Mahaffy (1982), (4.14b) ve (4.15) karakteristik denklemlerine sahip denklem sistemlerinin denge noktasını  $\tau = 0$  iken kararlı kabul etmiş ve  $\tau$  değerleri artarken denge noktasının kararsız hale gelmesini sağlayan şartları belirlemiştir.

Bu konuda bizim planladığımız çalışma kapsamına en yakın çalışma Chen ve diğ. (2013) tarafından yapılmıştır.  $C$  ve  $D$  den en az biri sıfırdan farklı ve  $H \neq 0$  şartları altında Chen ve diğ. (2013), (4.13b) karakteristik denklemine sahip bir denklem



sisteminde hangi koşullar altında Hopf çatallanmanın meydana geleceğini araştırmışlardır. Fakat bu çalışmada varlık analizi ile ilgili elde edilen sonuçlar sadece  $H \neq 0$  durumunda geçerlidir. Ayrıca yukarıda verilen çalışmalarda yön analizi ile ilgili bir sonuç yoktur.

Ekoloji, ekonomi, fizik, kimya, matematiksel biyoloji, tıp, vb. alanlardaki gerçek yaşam problemlerini modelleyen pek çok gecikmeli diferensiyel denklem sistemi (Bakınız: Bi ve Ruan, 2013; Merdan ve Kayan, 2016; Pal ve diğ., 2015; Ruan, 2001; Yafia, 2007) veya reaksiyon-difüzyon sistemi (Bakınız: Merdan ve Kayan, 2015; Kayan ve diğ., 2017; Zuo ve Wei, 2011), (4.15) tipinde karakteristik denkleme sahiptir, yani  $H = 0$  dır. Bu yaygın kullanımla birlikte, literatürde (4.15) karakteristik denkleminin sahip genel bir gecikmeli adi diferensiyel sistemi veya genel bir gecikmeli reaksiyon-difüzyon sistemi için Hopf çatallanmanın *varlık* ve *yön* analizini tam ve sistematik bir şekilde ele alan bir çalışma yoktur.

#### 4.2 Lineer Kararlılık ve Hopf Çatallanmanın Varlık Analizi Algoritması

Bu bölümde, (4.3) sisteminin denge noktası olan orijinin  $\tau = 0$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı olmasını, mutlak kararlı olmasını ve (4.3) sisteminde Hopf çatallanmanın meydana gelmesini garanti edecek ve (4.15) karakteristik denkleminin katsayılarına bağlı koşullar belirlenecektir. Böylece, Teorem 3.1'in  $\mathbf{K}_3$  ve  $\mathbf{K}_4$  koşullarına denk fakat (4.3) sisteminin (4.15) karakteristik denkleminin katsayılarına bağlı yeni koşullar belirleme hedefine ulaşılabacaktır.

Şimdi, bu koşulları elde edelim.

**Lemma 4.2.** *Eğer*

$$(\mathbf{H}_1) \quad A + C > 0,$$

$$(\mathbf{H}_2) \quad B + D > 0$$

*koşulları aynı anda sağlanıyorsa  $\tau = 0$  iken (4.15) karakteristik denkleminin kökleri negatif reel kısma sahiptir. Yani  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları altında  $\tau = 0$  iken (4.3) sisteminin denge noktası olan orijin yerel (lokal) asimptotik karardır.*

**İspat.** Gecikme terimi  $\tau = 0$  iken (4.15) karakteristik denklemi ikinci dereceden

$$\lambda^2 + (A + C)\lambda + B + D = 0$$

polinomuna dönüşür. Bu polinomun kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(A + C) \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4(B + D)}}{2}$$

olduğu için  $(A + C) > 0$  ve  $(B + D) > 0$  sağlanırsa  $\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) < 0$  olur. Bu ise denge noktasının yerel (lokal) asimptotik kararlı olması anlamına gelir.  $\square$

**Lemma 4.3.** *Kabul edelim ki Lemma 4.2'de tanımlanan  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları sağlansın ve*

$$F(\tau, \lambda) = \lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D$$

*olarak tanımlansın. Ayrıca  $(\tau_0, \lambda_0) \in [0, \infty] \times \mathbb{C}$  olmak üzere  $\tau_0$  yeterince küçük ve  $F(\tau_0, \lambda_0) = 0$  olsun. Bu takdirde,  $\tau_0$  in bir civarında tanımlı bir tek  $\lambda = \lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$  fonksiyonu vardır öyle ki  $\lambda(\tau_0) = \lambda_0$  ve  $\tau_0$  in bu civarında  $F(\tau, \lambda(\tau)) \equiv 0$  olur. Ayrıca  $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dir.*

**İspat.** Kabul edelim ki

$$F(\tau, \lambda) = \lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D$$

ve  $F(\tau_0, \lambda_0) = 0$  olsun. Dikkat edilirse  $\mathbf{H}_2$  koşulundan  $B + D > 0$  olduğu için  $\lambda_0 \neq 0$  dir. Ayrıca

$$F_\lambda(\tau, \lambda) = 2\lambda + A - B\tau e^{-\lambda\tau} + Ce^{-\lambda\tau} - C\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$$

olduğu için

$$F_\lambda(0, \lambda_0) = 2\lambda_0 + A + C$$

şeklinde elde edilir.  $\mathbf{H}_1$  koşulundan  $A + C > 0$  olduğu için " $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ " veya " $\lambda_0 > 0$ " iken  $F_\lambda(0, \lambda_0) \neq 0$  olur. Şimdi, " $\lambda_0 < 0$  ve  $(B + C\lambda_0) \neq 0$ " olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $\tau_0 > 0$  ve  $\lambda_0 < 0$  olduğu için  $F(\tau_0, \lambda_0) = 0$  eşitliğinden

$$\frac{\lambda_0^2 + A\lambda_0 + D}{-(B + C\lambda_0)} = e^{-\lambda_0\tau_0} > 1$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$-(B + C\lambda_0) > 0 \quad \text{ise} \quad \lambda_0^2 + (A + C)\lambda_0 + B + D > 0,$$

$$-(B + C\lambda_0) < 0 \quad \text{ise} \quad \lambda_0^2 + (A + C)\lambda_0 + B + D < 0$$

olur. Başka bir deyişle, " $\lambda_0 < 0$  ve  $(B + C\lambda_0) \neq 0$ " ise

$$F(0, \lambda) = \lambda^2 + (A + C)\lambda + B + D$$

olmak üzere  $\lambda_0 < 0$ ,  $F(0, \lambda)$  fonksiyonunun bir kökü değildir. Diğer taraftan, Lemma 4.2'de tanımlanan  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları altında  $F(0, \lambda)$  fonksiyonunun bir kökü  $-(A + C)/2$  dir. Böylece,  $\lambda_0 \neq -(A + C)/2$  dir. Yani, " $\lambda_0 < 0$  ve  $(B + C\lambda_0) \neq 0$ " ise de  $F_\lambda(0, \lambda_0) \neq 0$  dir.

Sonuç olarak  $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$  olduğundan " $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ " veya " $\lambda_0 > 0$ " veya " $\lambda_0 < 0$  ve  $(B + C\lambda_0) \neq 0$ " ise yeterince küçük  $\tau_0$  değerleri için

$$F_\lambda(\tau_0, \lambda_0) \neq 0$$

olur. Böylece, söz konusu durumlar için Kapalı Fonksiyon Teoreminden (EK 1)  $\tau_0$  yeterince küçük iken  $\tau_0$  in bir civarında tanımlı ve tek bir  $\lambda = \lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$  fonksiyonu vardır öyle ki  $\lambda(\tau_0) = \lambda_0$  ve  $\tau_0$  in bu civarında  $F(\tau, \lambda(\tau)) \equiv 0$  olur. Ayrıca  $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dir.

Son olarak " $\lambda_0 < 0$  ve  $(B + C\lambda_0) = 0$ " olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her  $\tau \geq 0$  için  $F(\tau, \lambda_0) = \lambda_0^2 + A\lambda_0 + D = 0$  olacağından  $\lambda(\tau) = \lambda_0$  sabit fonksiyonu olur.  $\square$

**Lemma 4.4.** *Kabul edelim ki Lemma 4.2'de tanımlanan  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları sağlansın ve*

$$R = A^2 - C^2 - 2D \quad \text{ve} \quad S = D^2 - B^2 \quad (4.16)$$

*olsun. Eğer*

$$(\mathbf{H}_{3_1}) \quad R^2 - 4S < 0,$$

$$(\mathbf{H}_{3_2}) \quad R^2 - 4S = 0 \text{ ve } R > 0,$$

$$(\mathbf{H}_{3_3}) \quad R = S = 0,$$

$$(\mathbf{H}_{3_4}) \quad R > 0 \text{ ve } S = 0,$$

$$(\mathbf{H}_{3_5}) \quad R^2 - 4S > 0, R > 0 \text{ ve } S > 0,$$

*koşullarından biri sağlanıyorsa her  $\tau \geq 0$  için (4.15) karakteristik denkleminin bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir. Sonuç olarak (4.3) sisteminin denge noktası olan orijin mutlak karardır.*

**İspat.**  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları sağlandığı için Lemma 4.2'den (4.3) sisteminin denge noktası  $\tau = 0$  iken karardır. Denge noktası, kararlılığını  $\tau$  sıfırdan sonsuza doğru artarken ancak (4.15) karakteristik denklemi bir  $\tau > 0$  için sıfır köke veya sıfır sanal kök çiftine sahip olduğunda kaybedebilir. Aksi takdirde,  $\tau = 0$  iken köklerin reel kısmının negatif ve  $\lambda(\tau)$  fonksiyonunun sürekli olması nedeni ile denge noktası  $\tau \geq 0$  için kararlılığını koruyacaktır. (4.15) karakteristik denkleminin sıfır kökünün olması  $B + D = 0$  olduğu anlamına gelir. Bu ise  $\mathbf{H}_2$  koşulu ile çelişir. Bu nedenle, (4.15) karakteristik denkleminin sıfır sanal bir köke sahip olup olmadığını araştırmamız gerekir. Denklem (4.15) bir üstel polinom olduğun için köklerini açıkça elde edebileceğimiz bir formül yoktur. Bu nedenle, bir  $\tau_0 > 0$  için  $\tau = \tau_0$  iken (4.15) denkleminin  $\lambda_0 = i\omega_0$  kökünün olduğunu kabul edip hangi koşullar altında  $\omega_0 > 0$  elde edebileceğini belirleyeceğiz. Öncelikle, Lemma 4.3'ten  $\tau_0$  ın bir civarında tanımlı bir tek  $\lambda = \lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$  fonksiyonu vardır öyle ki  $i\omega_0 = i\omega(\tau_0)$  olur. Bu durumda,  $\tau = \tau_0$  iken (4.15) denklemi

$$-\omega^2(\tau_0) + iA\omega(\tau_0) + Be^{-i\omega(\tau_0)\tau_0} + iC\omega(\tau_0)e^{-i\omega(\tau_0)\tau_0} + D = 0$$

denkleminde dönüşür. Bu eşitlikte  $e^{-i\omega(\tau_0)\tau_0} = \cos(\omega(\tau_0)\tau_0) - i\sin(\omega(\tau_0)\tau_0)$  yerine konur, reel ve sanal kısımlar ayrı ayrı yazılırsa

$$\omega^2(\tau_0) - D = B\cos(\omega(\tau_0)\tau_0) + C\omega(\tau_0)\sin(\omega(\tau_0)\tau_0), \quad (4.17)$$

$$A\omega(\tau_0) = B\sin(\omega(\tau_0)\tau_0) - C\omega(\tau_0)\cos(\omega(\tau_0)\tau_0)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.17)'deki denklemlerin her iki tarafının kareleri alınır ve taraf tarafa toplanırsa

$$\omega^4(\tau_0) + (A^2 - C^2 - 2D)\omega^2(\tau_0) + D^2 - B^2 = 0$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri

$$\omega^2(\tau_0) = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4S}}{2}$$

eşitliği kullanılarak bulunabilir, öyle ki

$$R = A^2 - C^2 - 2D \quad \text{ve} \quad S = D^2 - B^2.$$

Bu kökler,  $R$  ve  $S$  nin değerleri  $\tau_0$  a bağlı olmadığı için  $\omega(\tau_0) = \omega$  olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\omega^2 = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4S}}{2}. \quad (4.18)$$

Dikkat edilirse  $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  olmak üzere  $i \in I_5$  için  $\mathbf{H}_{3_i}$  koşullarından biri sağlanırsa (4.18) formülünden  $\omega > 0$  elde edilemez. Bu ise (4.15) karakteristik denkleminin herhangi bir  $\tau > 0$  değerinde sırf sanal kök çiftine sahip olmadığı anlamına gelir.  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları sağlandığı için  $\tau = 0$  iken özdeğerlerin reel kısmı negatiftir.  $i \in I_5$  için  $\mathbf{H}_{3_i}$  koşullarından biri sağlanırsa (4.15) karakteristik denkleminin sıfır kökü ve sırf sanal kök çifti olmadığından, süreklilikten dolayı  $\tau \geq 0$  için özdeğerlerin tamamı negatif reel kısma sahip olur. Sonuç olarak  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarına ek olarak  $i \in I_5$  için  $\mathbf{H}_{3_i}$  koşullarından biri sağlanırsa (4.3) sisteminin denge noktası,  $\tau \geq 0$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlıdır, yani (4.3) sisteminin denge noktası mutlak kararlıdır.  $\square$

Lemma 4.2, Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 bize şu sonucu verir:

**Sonuç 4.1.**  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarına ek olarak  $\mathbf{H}_{3_i}$ ,  $i \in I_5$  koşullarından biri sağlanırsa denge noktası daima ( $\tau \geq 0$  için) kararlı olduğundan (4.3) sisteminde Hopf çatallanma meydana gelmez.

**Lemma 4.5.** Kabul edelim ki Lemma 4.2'de tanımlanan  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları sağlansın. Tanımları (4.16) ile verilen  $R$  ve  $S$  ye bağlı aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa (4.15) karakteristik denkleminin bir  $\tau_0 > 0$  için tek bir  $\lambda(\tau_0) = i\omega$  ve  $\bar{\lambda}(\tau_0) = -i\omega$ ,  $\omega > 0$  sırf sanal kök çifti vardır:

$$(\mathbf{H}_{4_1}) \quad R^2 - 4S = 0 \text{ ve } R < 0,$$

$$(\mathbf{H}_{4_2}) \quad S < 0,$$

$$(\mathbf{H}_{4_3}) \quad R < 0 \text{ ve } S = 0,$$

$$(\mathbf{H}_{4_4}) \quad R^2 - 4S > 0, R < 0 \text{ ve } S > 0.$$

**İspat.** (4.15) karakteristik denkleminin bir  $\tau_0 > 0$  için  $\tau_0$  nın bir civarında tanımlı ve  $\lambda(\tau_0) = i\omega(\tau_0)$ ,  $\omega(\tau_0) > 0$  olacak şekilde bir kökü var ise bu kökün sanal kısmını verecek  $\omega$  nın (4.18) formülü ile elde edilebileceğini bir önceki ispatta göstermiştik. Bu formül ile

$$\mathbf{H}_{4_1} \quad R^2 - 4S = 0 \text{ ve } R < 0 \text{ sağlanırsa}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-R}{2}} > 0,$$

$\mathbf{H}_{4_2}$   $S < 0$  sağlanırsa

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2}} > 0,$$

$\mathbf{H}_{4_3}$   $R < 0$  ve  $S = 0$  sağlanırsa

$$\omega_3 = \sqrt{-R} > 0,$$

$\mathbf{H}_{4_4}$   $R^2 - 4S > 0$ ,  $R < 0$  ve  $S > 0$  sağlanırsa

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2}} > 0 \quad \text{ve} \quad \omega_5 = \sqrt{\frac{-R - \sqrt{R^2 - 4S}}{2}} > 0$$

pozitif değerleri elde edilir. Dolayısıyla, (4.15) karakteristik denklemi  $j \in I_3$  için  $\mathbf{H}_{4_1}$  koşullarından biri sağlanırsa  $\lambda_j(\tau_0) = i\omega_j$  ve  $\bar{\lambda}_j(\tau_0) = -i\omega_j$ ,  $\omega_j > 0$  sırf sanal kök çiftine;  $\mathbf{H}_{4_4}$  sağlanırsa  $\lambda_4(\tau_0) = i\omega_4$  ve  $\bar{\lambda}_4(\tau_0) = -i\omega_4$ ;  $\lambda_5(\tau_0) = i\omega_5$  ve  $\bar{\lambda}_5(\tau_0) = -i\omega_5$  sırf sanal kök çiftlerine sahip olur.

Şimdi, bu özdeğer çiftlerinin ortaya çıktığı  $\tau_0$  değerlerini bulalım.  $j \in I_5$  için  $\lambda_j = i\omega_j$  karakteristik denklem (4.15)'te yerine konur ise (4.17) kullanılarak  $\cos(\omega_j\tau_0)$  ve  $\sin(\omega_j\tau_0)$

$$\cos(\omega_j\tau_0) = \frac{(B - AC)\omega_j^2 - BD}{B^2 + C^2\omega_j^2}, \quad (4.19a)$$

$$\sin(\omega_j\tau_0) = \frac{C\omega_j^3 + (AB - CD)\omega_j}{B^2 + C^2\omega_j^2} \quad (4.19b)$$

olarak bulunur. Buradan,  $j \in I_5$  ve  $k \in \mathbb{N}_0$  olmak üzere sırf sanal kök çiftlerinin ortaya çıktığı değerler

$$\tau_0 = \tau_{j,k} = \frac{1}{\omega_j} \arctan \left( \frac{C\omega_j^3 + (AB - CD)\omega_j}{(B - AC)\omega_j^2 - BD} \right) + \frac{k\pi}{\omega_j} \quad (4.20a)$$

eşitliği ile elde edilir. Diğer taraftan, bu değerler aşağıdaki eşitlikler ile de hesaplanabilir:

$$\tau_{j,k} = \frac{1}{\omega_j} \arcsin \left( \frac{C\omega_j^3 + (AB - CD)\omega_j}{C^2\omega_j^2 + B^2} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_j}, \quad (4.20b)$$

$$\tau_{j,k} = \frac{1}{\omega_j} \arccos \left( \frac{(B - AC)\omega_j^2 - BD}{C^2\omega_j^2 + B^2} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_j}. \quad (4.20c)$$

$j \in I_4$  için sırf sanal kök çiftlerinin ortaya çıktığı ilk gecikme değeri ise

$$\tau_{j,0} = \frac{1}{\omega_j} \arctan \left( \frac{C\omega_j^3 + (AB - CD)\omega_j}{(B - AC)\omega_j^2 - BD} \right) \quad (4.21)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\lambda_j(\tau) = \alpha_j(\tau) + i\omega_j(\tau) \quad \text{ve} \quad \overline{\lambda_j(\tau)} = \alpha_j(\tau) - i\omega_j(\tau) \quad (4.22)$$

olmak üzere (4.15) karakteristik denklemi,  $j \in \{1, 2, 3\}$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlandığında  $\tau_{j,0}$  in bir komşuluğunda tanımlı  $\lambda_j(\tau)$  ve  $\overline{\lambda_j(\tau)}$  kompleks eşlenik kök çiftine ve  $\mathbf{H}_{4_4}$  koşulu sağlandığında  $\tau_{4,0}$  in bir komşuluğunda tanımlı  $\lambda_4(\tau)$  ve  $\overline{\lambda_4(\tau)}$ ;  $\tau_{5,0}$  in bir komşuluğunda tanımlı  $\lambda_5(\tau)$  ve  $\overline{\lambda_5(\tau)}$  kompleks eşlenik kök çiftlerine sahiptir. Bu kökler,  $j \in I_5$  için

$$\alpha_j(\tau_{j,0}) = 0 \quad \text{ve} \quad \omega_j(\tau_{j,0}) = \omega_j > 0$$

özelliğini sahiptir. □

Lemma 4.2, Lemma 4.3 ve Lemma 4.5 ile aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

**Sonuç 4.2.**  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarına ek olarak  $j \in I_4$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlanırsa  $\tau \in [0, \tau_{j,0})$  iken (4.3) sisteminin denge noktası olan orijin yerel (lokal) asimptotik karardır.

**İspat.** Kabul edelim ki  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları sağlansın ve  $\lambda^*(\tau) = \alpha^*(\tau) + i\omega^*(\tau)$ , (4.15) karakteristik denkleminin bir kökü olsun. Lemma 4.2'den  $\tau = 0$  iken (4.15) karakteristik denkleminin köklerinin reel kısımları negatif olduğunu ve Lemma 4.3'ten  $\lambda^*$  fonksiyonunun sürekli olduğunu biliyoruz. Bu durumda, bir  $\tau^\dagger$  değerinde  $\alpha^*(\tau^\dagger) > 0$  olması için, öncelikle bir  $\tau^* < \tau^\dagger$  değerinde  $\alpha^*(\tau^*) = 0$  olmalıdır. Fakat  $j \in I_4$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlandığı için sırf sanal kök çifti ilk kez  $\tau_{j,0}$  değerinde ortaya çıkar, yani  $\tau^\dagger > \tau^* \geq \tau_{j,0}$  olur. Sonuç olarak  $\tau \in [0, \tau_{j,0})$  iken  $\alpha^*(\tau_{j,0}) < 0$  olur. □

**Sonuç 4.3.**  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarına ek olarak  $j \in I_4$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlanırsa  $\tau = \tau_{j,0}$  değerinde (4.15) karakteristik denkleminin  $\lambda_j(\tau_{j,0}) = i\omega_j$  ve  $\overline{\lambda_j(\tau_{j,0})} = -i\omega_j$  kompleks eşlenik kök çiftinden geriye kalan köklerin reel kısmı negatiftir.

**İspat.** Kabul edelim ki  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarına ilaveten  $j \in I_4$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlansın. Bu durumda, (4.15) karakteristik denkleminin (4.21) ile tanımlanan  $\tau_{j,0}$  in bir civarında tanımlı ve  $\lambda_0(\tau_{j,0}) = i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ , olacak şekilde tek bir tane  $\lambda_j(\tau) = \alpha_j(\tau) + i\omega_j(\tau)$  kökü olduğunu biliyoruz (Lemma 4.5).

Şimdi kabul edelim ki  $\lambda^*(\tau) = \alpha^*(\tau) + i\omega^*(\tau)$ , (4.15) karakteristik denkleminin  $\tau_{j,0}$  in bir civarında tanımlı başka bir kökü daha olsun. Öncelikle,  $\tau = \tau_{j,0}$  iken (4.15) karakteristik denklemi tek bir  $\pm i\omega_j(\tau_{j,0})$  sırf sanal kök çiftine sahip olduğu için  $\alpha^*(\tau_{j,0}) \neq 0$  olur.

Diğer taraftan, Lemma 4.2'den  $\tau = 0$  iken (4.15) karakteristik denkleminin kökleri negatif reel kısma sahiptir ve Lemma 4.3'ten  $\lambda^*$  fonksiyonu sürekli dir. Bunun bir sonucu olarak  $\alpha^*(\tau_{j,0}) > 0$  olması için, öncelikle bir  $\tau^* < \tau_{j,0}$  değerinde  $\alpha^*(\tau^*) = 0$  olmalıdır. Fakat  $j \in I_4$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlandığı için sırf sanal kök çifti ilk kez  $\tau_{j,0}$  değerinde ortaya çıkar. Böylece,  $\alpha^*(\tau_{j,0}) < 0$  olur. □

**Lemma 4.6.** *Kabul edelim ki  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşulları sağlansın.  $\tau_{j,0}$  in tanımı (4.21) ile verilmek üzere  $j \in \{2,3\}$  için  $\mathbf{H}_4$  koşullarından biri sağlanırsa*

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_{j,0}} \right) > 0$$

ve  $\mathbf{H}_{4_4}$  koşulu sağlanırsa

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_{4,0}} \right) > 0 \quad \text{ve} \quad \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_{5,0}} \right) < 0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Sonuç olarak  $\operatorname{Re}(\lambda_j(\tau)) = \alpha_j(\tau)$  olmak üzere  $j \in \{2,3,4,5\}$  için

$$\alpha'_j(\tau_{j,0}) \neq 0$$

olur.

**İspat.** Lemma 4.2'nin ispatında varlığını Kapalı Fonksiyon Teoreminden (EK 1) garanti ettiğimiz  $\lambda = \lambda(\tau)$  fonksiyonu için

$$F(\tau, \lambda) = \lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D$$

olmak üzere

$$\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = -\frac{F_\tau(\tau, \lambda(\tau))}{F_\lambda(\tau, \lambda(\tau))}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,  $\lambda(\tau)$  fonksiyonunun  $\tau$  ya göre türevi

$$\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = \frac{B\lambda(\tau) + C\lambda^2(\tau)}{(A + 2\lambda(\tau))e^{\lambda(\tau)\tau} + C - B\tau - C\lambda(\tau)\tau}$$

olarak elde edilir.  $\lambda_j(\tau_{j,0}) = \omega_j(\tau_{j,0}) = \omega_j$  ve  $e^{i\omega_j\tau_{j,0}} = \cos(\omega_j\tau_{j,0}) + i\sin(\omega_j\tau_{j,0})$  olduğu için, bu türevde  $\tau = \tau_{j,0}$  yerine konursa

$$P_j^* = -C\omega_j^2 + iB\omega_j$$

$$Q_j^* = (A\cos(\omega_j\tau_{j,0}) - 2\omega_j\sin(\omega_j\tau_{j,0}) + C - B\tau_{j,0}) \\ + i(2\omega_j\cos(\omega_j\tau_{j,0}) + A\sin(\omega_j\tau_{j,0}) - C\omega_j\tau_{j,0})$$

olmak üzere

$$\frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_{j,0}} = \frac{P_j^*}{Q_j^*}$$

elde edilir. Bu türevin reel ve sanal kısımlarını ayırmak için payı ve paydası  $\overline{Q_j^*}$  ile çarpılır ve son denklemin payı, daha basit bir ifade elde etmek için, (4.19) ile verilen  $\cos(\omega_j\tau_{j,0})$  ve  $\sin(\omega_j\tau_{j,0})$  yerine konursa

$$\operatorname{Re}(P_j) = (2\omega_j^2 + A^2 - C^2 - 2D)\omega_j^2 \quad (4.23a)$$

$$\operatorname{Im}(P_j) = -((A + C^2\tau_{j,0})\omega_j^2 + B^2\tau_{j,0} + AD - BC)\omega_j \quad (4.23b)$$

$$Q_j = (A\cos(\omega_j\tau_{j,0}) - 2\omega_j\sin(\omega_j\tau_{j,0}) + C - B\tau_{j,0})^2 + (2\omega_j\cos(\omega_j\tau_{j,0}) + A\sin(\omega_j\tau_{j,0}) - C\omega_j\tau_{j,0})^2 \quad (4.23c)$$

olmak üzere

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{j,0}} = \frac{P_j}{Q_j}$$

olur. Sonuç olarak  $R = A^2 - C^2 - 2D$  olmak üzere  $\tau = \tau_{j,0}$  iken kompleks eşlenik kök çiftinin reel ve sanal kısımlarının türevleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha'_j(\tau_{j,0}) = \frac{(2\omega_j^2 + R)\omega_j^2}{Q_j}, \quad (4.24a)$$

$$\omega'_j(\tau_{j,0}) = \frac{-((A + C^2\tau_{j,0})\omega_j^2 + B^2\tau_{j,0} + AD - BC)\omega_j}{Q_j}. \quad (4.24b)$$

Dikkat edilirse (4.23c) ile tanımlanan  $Q_j$  pozitifdir. Dolayısıyla, (4.24a) ile verilen reel kısmın türevinin işaretini  $(2\omega_j^2 + R)$  terimi belirler. Bu durumda,

**H<sub>41</sub>**  $R^2 - 4S = 0$  ve  $R < 0$  sağlanırsa

$$2\omega_1^2 + R = 2\left(\sqrt{\frac{-R}{2}}\right)^2 + R = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(P_1) = 0,$$

**H<sub>42</sub>**  $S < 0$  sağlanırsa

$$2\omega_2^2 + R = 2\left(\sqrt{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2}}\right)^2 + R = \sqrt{R^2 - 4S} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(P_2) > 0,$$

**H<sub>43</sub>**  $R < 0$  ve  $S = 0$  sağlanırsa

$$2\omega_3^2 + R = 2(\sqrt{-R})^2 + R = -R > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(P_3) > 0,$$

**H<sub>44</sub>**  $R^2 - 4S > 0$ ,  $R < 0$  ve  $S > 0$  sağlanırsa

$$2\omega_4^2 + R = 2\left(\sqrt{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2}}\right)^2 + R = \sqrt{R^2 - 4S} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(P_4) > 0,$$



$$2\omega_5^2 + R = 2 \left( \sqrt{\frac{-R - \sqrt{R^2 - 4S}}{2}} \right)^2 + R = -\sqrt{R^2 - 4S} < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(P_5) < 0$$

olur. Sonuç olarak

$$j \in \{2, 3, 4\} \text{ için } \alpha'_j(\tau_{j,0}) > 0 \text{ ve } \alpha'_5(\tau_{5,0}) < 0$$

elde edilir.  $\square$

Lemma 4.2, Lemma 4.3 ve Lemma 4.6 ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

**Sonuç 4.4.** Öncelikle,  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarına ek olarak  $j \in \{2, 3, 4\}$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlanırsa

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{j,0}} \neq 0$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan  $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dir. Sonuç olarak aynı koşullar altında, süreklilikten dolayı (4.22) ile verilen kompleks eşlenik kök çifti  $\tau_{j,0}$  in bir komşuluğunda basittir.

**Sonuç 4.5.** Sonuç 4.2'den  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarına ek olarak  $j \in I_4$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarından biri sağlanırsa  $\tau \in [0, \tau_{j,0})$  iken (4.3) sisteminin denge noktasının yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan,  $\mathbf{H}_{4_1}$  koşulu altında  $\alpha'_1(\tau_{1,0}) = 0$  ve  $j \in \{2, 3, 4\}$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşulları altında  $\alpha'_j(\tau_{j,0}) > 0$  olarak hesaplanmıştır. Bu ise  $j \in \{2, 3, 4\}$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşullarının denge noktasının kararlılık yapısının değişimini garanti ettiği anlamına gelir.

Sonuç olarak Teorem 3.1'in  $\mathbf{K}_3$  ve  $\mathbf{K}_4$  koşullarına denk ve (4.15) karakteristik denkleminin katsayılarına bağlı  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  ve  $j \in \{2, 3, 4\}$  için  $\mathbf{H}_{4_j}$  koşulları elde edilmiştir. Yeni koşullar ile varlık teoreminin ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

**Teorem 4.1** (Hopf Çatallanmanın Varlığı-1).

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(V<sub>1</sub>) (4.1) sisteminin ayrık denge noktası  $E^* = (u^*, v^*)$ 'da hesaplanan karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D = 0$$

formundadır. Başka bir deyişle,  $A, B, C, D$  ve  $H$  karakteristik denklem katsayıları (4.13a) ile tanımlanmak üzere  $H = 0$  dır.

(V<sub>2</sub>) Bu karakteristik denklemin katsayıları ( $\mathbf{H}_1$ )  $A + C > 0$  ve ( $\mathbf{H}_2$ )  $B + D > 0$  koşullarını sağlar.

(V<sub>3</sub>)  $R = A^2 - C^2 - 2D$  ve  $S = D^2 - B^2$  olmak üzere ( $\mathbf{H}_{4_2}$ )  $S < 0$  ve ( $\mathbf{H}_{4_3}$ )  $R < 0, S = 0$  koşullarından biri sağlanır.

Bu takdirde,

1.  $E^*$  denge noktası  $j \in \{2, 3\}$  için  $\tau \in [0, \tau_{j,0})$  iken yerel (lokal) asimptotik karardır ve  $\tau > \tau_{j,0}$  iken kararsızdır. Burada,  $j \in \{2, 3\}$  için  $\omega_j$  Çizelge 4.1'in ikinci sütununda verilmek üzere

$$\tau_{j,0} = \frac{1}{\omega_j} \arctan \left( \frac{C\omega_j^3 + (AB - CD)\omega_j}{(B - AC)\omega_j^2 - BD} \right)$$

dir.

2.  $\tau = \tau_{j,0}$ ,  $j \in \{2, 3\}$  iken (4.1) sisteminde Hopf çatallanma meydana gelir, yani (4.1) sistemi  $j \in \{2, 3\}$  için  $\tau_{j,0}$  in bir komşuluğunda periyodik çözümler ailesine sahiptir.

Çizelge 4.1: Hopf çatallanma varlık koşulları - 1.

$R, S$	$\omega_j$	Transversalite Koşulu
$(\mathbf{H}_{4_2}) S < 0$	$\omega_2 = \sqrt{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2}}$	$\alpha'_2(\tau_{2,0}) > 0$
$(\mathbf{H}_{4_3}) R < 0$ ve $S = 0$	$\omega_3 = \sqrt{-R}$	$\alpha'_3(\tau_{3,0}) > 0$

**Teorem 4.2** (Hopf Çatallanmanın Varlığı-2).

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

- (V<sub>1</sub>) (4.1) sisteminin ayrık denge noktası  $E^* = (u^*, v^*)$ 'da hesaplanan karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D = 0$$

formundadır. Başka bir deyişle,  $A, B, C, D$  ve  $H$  karakteristik denklem katsayıları (4.13a) ile tanımlanmak üzere  $H = 0$  dır.

- (V<sub>2</sub>) Bu karakteristik denklemin katsayıları  $(\mathbf{H}_1) A + C > 0$  ve  $(\mathbf{H}_2) B + D > 0$  koşullarını sağlar.
- (V<sub>4</sub>)  $R = A^2 - C^2 - 2D$  ve  $S = D^2 - B^2$  olmak üzere  $(\mathbf{H}_{4_4}) R^2 - 4S > 0$ ,  $R < 0$  ve  $S > 0$  koşulu sağlanır.

Bu takdirde,

1.  $E^*$  denge noktası  $\tau \in [0, \tau_{4,0}) \cup (\tau_{5,0}, \tau_{4,1}) \cup \dots \cup (\tau_{5,r-1}, \tau_{4,r})$  iken yerel (lokal) asimptotik karardır ve  $\tau \in (\tau_{4,0}, \tau_{5,0}) \cup (\tau_{4,1}, \tau_{5,1}) \cup \dots \cup (\tau_{4,r-1}, \tau_{5,r-1}) \cup (\tau_{4,r}, \infty)$  iken kararsız olacak şekilde pozitif bir  $r$  tamsayısı vardır. Burada,  $j \in \{4, 5\}$  için  $\omega_j$  Çizelge 4.2'nin ikinci sütununda verilmek ve  $k \in \mathbb{N}_0$  olmak üzere

$$\tau_{j,k} = \frac{1}{\omega_j} \arctan \left( \frac{C\omega_j^3 + (AB - CD)\omega_j}{(B - AC)\omega_j^2 - BD} \right) + \frac{k\pi}{\omega_j}$$

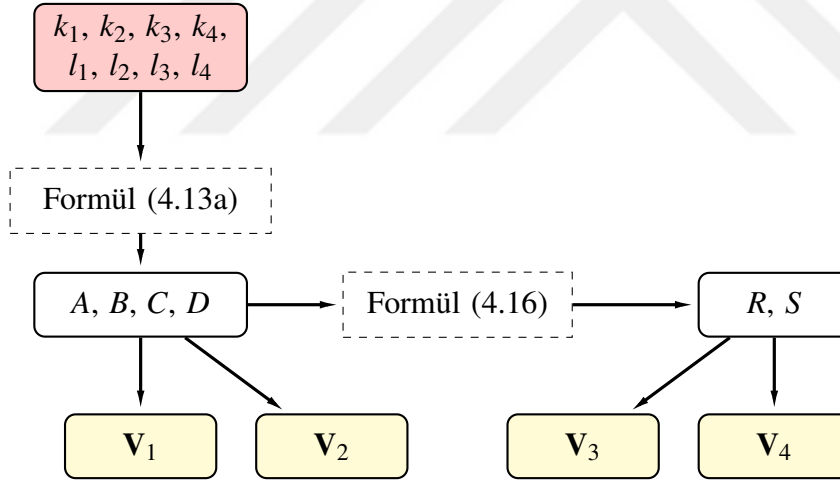
dir. Bu durum,  $\tau$  değerleri arttıkça  $E^*$  denge noktasının kararlılık yapısının değiştiği ve sonunda kararsız hale geldiğini ifade eder. Başka bir deyişle, sistemde kararlılık geçişi meydana gelir.

2.  $\tau = \tau_{4,0}$  iken (4.1) sisteminde Hopf çatallanma meydana gelir, yani (4.1) sistemi  $\tau_{4,0}$  in bir komşuluğunda periyodik çözümler ailesine sahiptir.

Çizelge 4.2: Hopf çatallanma varlık koşulları - 2.

$R, S$	$\omega_j$	Transversalite Koşulu
$(H_{4_4}) R^2 - 4S > 0, R < 0, S > 0$	$\omega_4 = \sqrt{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2}}$	$\alpha'_4(\tau_{4,0}) > 0$
	$\omega_5 = \sqrt{\frac{-R - \sqrt{R^2 - 4S}}{2}}$	$\alpha'_5(\tau_{5,0}) < 0$

**Sonuç 4.6.** Şekil 4.1'de görüldüğü gibi Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin  $V_1$ - $V_4$  hipotezlerini kontrol etmek için (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci mertebeden türevlere karşılık gelen ve (4.2) ile tanımlanan  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , katsayılarının hesaplanması yeterlidir.



Şekil 4.1:  $V_1$ - $V_4$  koşullarını hesaplama diyagramı.

### 4.3 Hopf Çatallanmanın Yön Analizi Algoritması

Bu bölümde, (4.1) sistemi merkez manifolduna indirgenecektir. Bu indirgeme için Hassard ve diğ. (1981) kaynağında  $n$ -boyutlu tek gecikme içeren diferensiyel ve  $n$ -boyutlu reaksiyon-difüzyon denklem sistemleri için ayrı ayrı verilen yöntemler birleştirilerek bir algoritma elde edilecektir. Ayrıca bu algoritma ile indirgemedeki adımların tekrarını engellemek amacıyla, periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemeyi sağlayacak ve (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılarla bağlı formüller elde edilecektir.

Hopf çatallanmanın özelliklerini araştırmak için öncelikle var olduğunu kabul edeceğiz. Başka bir deyişle, bu bölümde, (4.1) sisteminin Teorem 4.1'de ve Teorem 4.2'de verilen  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  koşullarına ek olarak  $\mathbf{V}_3$  veya  $\mathbf{V}_4$  koşullarından birini sağladığı kabul edilecektir.

Daha önce, (4.1) sisteminin, denge noktası orijin olan ve lineerleştirilmiş (4.3) sistemine topolojik olarak denk olduğunu; (4.3) sisteminin de (4.12) sistemi ile aynı karakteristik denkleme sahip olduğunu ifade etmiştik (Açıklama 4.2). Bu nedenle, bu bölümde, (4.12) ile verilen

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = \left(-d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1\right) U(t) + k_2 U(t - \tau) + k_3 V(t) + k_4 V(t - \tau) + YMT, \\ \frac{dV(t)}{dt} = l_1 U(t) + l_2 U(t - \tau) + \left(-d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3\right) V(t) + l_4 V(t - \tau) + YMT, \end{cases}$$

sistemini ele alacağız. Algoritmayı, aşağıda verilen beş adımdan oluşan bir yolu takip ederek oluşturacağız:

**Adım I:** Sistemi tek bilinmeyen içeren bir forma dönüştürme

**Adım II:** zvektrleri hesaplama

**Adım III:** Sistemi merkez manifolduna indirgeme

**Adım IV:** Merkez manifolda kısıtlanmış sistemi hesaplama

**Adım V:** Merkez manifoldu hesaplama

Bu adımlarla, (4.12) sistemini merkez manifolduna indirgeyecek ve periyodik czmlerinin özelliklerini belirlemeye yarayacak formülleri elde edeceğiz.

### 4.3.1 Sistemi tek bilinmeyen içeren bir forma dönüştürme

Öncelikle,  $\mathbf{U}(t) = (U(t), V(t))^T$  ve

$$B = \begin{pmatrix} -d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 & k_3 \\ l_1 & -d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k_2 & k_4 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix}, \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{F}(U(t), U(t - \tau), V(t), V(t - \tau)) = \begin{pmatrix} F_1(U(t), U(t - \tau), V(t), V(t - \tau)) \\ F_2(U(t), U(t - \tau), V(t), V(t - \tau)) \end{pmatrix} \quad (4.25b)$$

olmak üzere (4.12) sistemini

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = B\mathbf{U}(t) + C\mathbf{U}(t - \tau) + \mathbf{F}(\mathbf{U}(t), \mathbf{U}(t - \tau)) \quad (4.26)$$

şeklinde yeniden yazalım. Ayrıca  $\mathbf{V}_3$  veya  $\mathbf{V}_4$  koşullarından hangisinin sağlandığına bağlı olarak bir  $j \in \{2, 3, 4\}$  için  $\mu = \tau - \tau_{j,0}$  lineer dnşm ile  $\tau_{j,0}$  çatallanma değerini sifira taşıyalım. Böylece,  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in \mathcal{D} = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^2)$  için  $L_\mu : \mathcal{D} \rightarrow$

$\mathbb{R}^2$  operatörü

$$L_\mu(\phi(\theta)) = B\phi(0) + C\phi(-\mu - \tau_{j,0}) \quad (4.27)$$

olarak tanımlanırsa (4.26) denklemini  $\mathcal{D}$ 'de

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = L_\mu(\mathbf{U}_t(\theta)) + \mathbf{h}(\mathbf{U}_t(\theta); \mu) \quad (4.28)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemi olarak yazılabilir. Burada,  $\theta \in [-\tau, 0]$  için  $\mathbf{U}_t(\theta) = \mathbf{U}(t + \theta)$  ve

$$\begin{aligned} h_1(\phi(\theta); \mu) &= m_{11}\phi_1^2(0) + m_{12}\phi_1(0)\phi_1(-\mu - \tau_{j,0}) \\ &\quad + m_{13}\phi_1(0)\phi_2(0) + m_{14}\phi_1(0)\phi_2(-\mu - \tau_{j,0}) \\ &\quad + m_{22}\phi_1^2(-\mu - \tau_{j,0}) + m_{23}\phi_1(-\mu - \tau_{j,0})\phi_2(0) \\ &\quad + m_{24}\phi_1(-\mu - \tau_{j,0})\phi_2(-\mu - \tau_{j,0}) + m_{33}\phi_2^2(0) \\ &\quad + m_{34}\phi_2(0)\phi_2(-\mu - \tau_{j,0}) + m_{44}\phi_2^2(-\mu - \tau_{j,0}) + \text{YMT}, \\ h_2(\phi(\theta); \mu) &= r_{11}\phi_1^2(0) + r_{12}\phi_1(0)\phi_1(-\mu - \tau_{j,0}) \\ &\quad + r_{13}\phi_1(0)\phi_2(0) + r_{14}\phi_1(0)\phi_2(-\mu - \tau_{j,0}) \\ &\quad + r_{22}\phi_1^2(-\mu - \tau_{j,0}) + r_{23}\phi_1(-\mu - \tau_{j,0})\phi_2(0) \\ &\quad + r_{24}\phi_1(-\mu - \tau_{j,0})\phi_2(-\mu - \tau_{j,0}) + r_{33}\phi_2^2(0) \\ &\quad + r_{34}\phi_2(0)\phi_2(-\mu - \tau_{j,0}) + r_{44}\phi_2^2(-\mu - \tau_{j,0}) + \text{YMT}, \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{h}(\phi(\theta); \mu) = \begin{pmatrix} h_1(\phi(\theta); \mu) \\ h_2(\phi(\theta); \mu) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\phi(0), \phi(-\mu - \tau_{j,0})) \quad (4.29)$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca  $1 \leq i \leq 4$  ve  $i \leq j \leq 4$  için  $m_{ij}$  ve  $r_{ij}$  katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{1}{2}f_{uu}(E^*), & m_{12} &= f_{uu\tau}(E^*), & m_{13} &= f_{uv}(E^*), \\ m_{14} &= f_{uv\tau}(E^*), & m_{22} &= \frac{1}{2}f_{u\tau u\tau}(E^*), & m_{23} &= f_{u\tau v}(E^*), \\ m_{24} &= f_{u\tau v\tau}(E^*), & m_{33} &= \frac{1}{2}f_{vv}(E^*), & m_{34} &= f_{vv\tau}(E^*), \\ m_{44} &= \frac{1}{2}f_{v\tau v\tau}(E^*), \\ r_{11} &= \frac{1}{2}g_{uu}(E^*), & r_{12} &= g_{uu\tau}(E^*), & r_{13} &= g_{uv}(E^*), \\ r_{14} &= g_{uv\tau}(E^*), & r_{22} &= \frac{1}{2}g_{u\tau u\tau}(E^*), & r_{23} &= g_{u\tau v}(E^*), \\ r_{24} &= g_{u\tau v\tau}(E^*), & r_{33} &= \frac{1}{2}g_{vv}(E^*), & r_{34} &= g_{vv\tau}(E^*), \\ r_{44} &= \frac{1}{2}g_{v\tau v\tau}(E^*). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dikkat edilirse (4.26) denklemini  $\mathbf{U}(t)$  ve  $\mathbf{U}_t(\theta)$  olmak üzere iki farklı bilinmeyen içermektedir. Bir sonraki amacımız, bu denklemini sadece  $\mathbf{U}_t(\theta)$  değişkenini içeren tek bilinmeyenli bir denkleme dönüştürmektir. Riesz Temsil Teoreminden (EK 1)  $\phi \in \mathcal{D}$  için

$$L_\mu(\phi(\theta)) = \int_{-\tau}^0 d\eta(\mu, \theta)\phi(\theta)$$

olacak şekilde her bir bileşeni sınırlı değişime sahip olan  $2 \times 2$  matris değerli bir  $\eta(\mu, \theta) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  fonksiyonu vardır.  $\delta$  Dirac delta fonksiyonunu göstermek üzere tanım (4.27)'den

$$L_\mu(\mathbf{U}_t(\theta)) = B\mathbf{U}(t) + C\mathbf{U}(t - \mu - \tau_{j,0})$$

olduğu için

$$d\eta(\mu, \theta) = (B\delta(\theta) + C\delta(\theta + \mu + \tau_{j,0}))d\theta \quad (4.31)$$

olur.  $\phi \in \mathcal{D}^1$  için  $\eta(\mu, \theta)$  fonksiyonu kullanılarak  $A(\mu)$  ve  $R(\mu)$  operatörleri

$$A(\mu)\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ \int_{-\tau}^0 d\eta(\mu, \nu)\phi(\nu), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.32a)$$

ve

$$R(\mu)\phi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ h(\phi(0); \mu), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.32b)$$

şeklinde tanımlanır ise (4.28) denklemini

$$\dot{\mathbf{U}}_t = A(\mu)\mathbf{U}_t + R(\mu)\mathbf{U}_t \quad (4.33)$$

tek bilinmeyen içeren soyut diferensiyel denklemine denk olur. Dikkat edilirse (4.33) denklemini  $\theta \in [-\tau_{j,0}, 0)$  için aşıkarak  $d\mathbf{U}_t/dt = d\mathbf{U}_t/d\theta$  denklemine;  $\theta = 0$  iken (4.28) denklemine dönüşür.

**Açıklama 4.3.**  $\eta(\mu, \theta)$  fonksiyonu reel değerli olduğu için  $A(\mu)$  operatörünün tanımından dolayı aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\overline{A(\mu)\phi(\theta)} = A(\mu)\overline{\phi(\theta)}.$$

### 4.3.2 Özvektörleri hesaplama

Sistemin  $\mu = 0$  çatallanma değerindeki dinamiğini analiz etmek istediğimiz için sıradaki amacımız,  $A(0)$  ve  $A^*(0)$  operatörlerinin reel kısmı sıfır olan özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri hesaplamaktır. Burada,  $A^*(\mu)$  operatörü,  $A(\mu)$  operatörünün adjoint operatörüdür ve  $\mathcal{E} = C([0, \tau], \mathbb{R}^2)$  olmak üzere  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T \in \mathcal{E}^1$  için

$$A^*(\mu)\psi(\sigma) = \begin{cases} -\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma}, & \sigma \in (0, \tau] \text{ ise} \\ \int_{-\tau}^0 d\eta^T(\mu, \nu)\psi(-\nu), & \sigma = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.34)$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilirse  $A^*(\mu)$  operatörü,  $A(\mu)$  operatörünün kompleks devriği olduğu için  $\bar{\lambda}_j(\tau_{j,0}) = -i\omega_j$ ,  $A^*(0)$  operatörünün bir özdeğeri olur. Özdeğerler mevcut olduğu için, özdeğer tanımından, aşağıdaki eşitlikleri sağlayan sıfırdan farklı  $\mathbf{q}(\theta)$  ve  $\mathbf{q}^*(\sigma)$  vektörleri vardır:

$$A(0)\mathbf{q}(\theta) = i\omega_j\mathbf{q}(\theta), \quad (4.35a)$$

$$A^*(0)\mathbf{q}^*(\sigma) = -i\omega_j\mathbf{q}^*(\sigma). \quad (4.35b)$$

Başka bir deyişle,  $A(0)$  operatörünün  $\lambda_j(\tau_{j,0}) = i\omega_j$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $\mathbf{q}(\theta)$  ve  $A^*(0)$  operatörünün  $\bar{\lambda}_j(\tau_{j,0}) = -i\omega_j$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $\mathbf{q}^*(\sigma)$  mevcuttur. Diğer taraftan,  $\phi \in \mathcal{D}$  ve  $\psi \in \mathcal{E}$  için iç çarpım

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0) \cdot \phi(0) - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\mu, \theta) \phi(\xi) d\xi \quad (4.36)$$

şeklinde tanımlanmak üzere Bölüm 3.1.3'ten  $\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{q}^*$  özvektörlerinin

$$\langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0 \quad (4.37a)$$

$$\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1 \quad (4.37b)$$

özelliklerine sahip olması gerektiğini biliyoruz.

Şimdi, (4.37a) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Öncelikle,  $\lambda_j(\tau_{j,0}) = i\omega_j$  basit (simple) bir özdeğer olduğu için  $A(0)\mathbf{q}_* = \mathbf{q} + i\omega_j\mathbf{q}_*$  olacak şekilde genelleştirilmiş bir  $\mathbf{q}_*$  özvektörü bulma ihtimali yoktur. Dolayısıyla,  $\bar{\mathbf{q}}$  vektörü,  $\mathbf{q}$  nun sabit bir katı olmadığı için,  $A(0)$  operatörünün  $i\omega_0$  özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü veya bir genelleştirilmiş özvektörü<sup>1</sup> olamaz. Diğer taraftan, Açıklama 4.3'ten  $A(0)\mathbf{q}(\theta) = A(0)\bar{\mathbf{q}}(\theta)$  sağlanır. Bu durumda, (4.35a) denkleminin her iki tarafının eşleniği alınırsa  $A(0)\bar{\mathbf{q}} = -i\omega_j\bar{\mathbf{q}}$  olur. Bu durumda, iç çarpım tanımından  $\langle \rho\psi, \phi \rangle = \bar{\rho} \langle \psi, \phi \rangle$  ve  $\langle \psi, \rho\phi \rangle = \rho \langle \psi, \phi \rangle$  sağlandığı için

$$\langle \mathbf{q}^*, A(0)\bar{\mathbf{q}} \rangle = \langle \mathbf{q}^*, -i\omega_j\bar{\mathbf{q}} \rangle = -i\omega_j \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle$$

$$\langle \mathbf{q}^*, A(0)\bar{\mathbf{q}} \rangle = \langle A^*(0)\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = \langle -i\omega_j\mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = i\omega_j \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle$$

eşitlikleri ve dolayısıyla

$$-i\omega_j \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = i\omega_j \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle \implies 2i\omega_j \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0$$

<sup>1</sup> $A$ ,  $n \times n$  boyutlu bir matris ve  $\lambda$  bu matrisin bir özdeğeri olsun.  $(A - \lambda I)^k v = 0$  eşitliğini bir  $k \in \mathbb{Z}$  için sağlayan  $v$  vektörüne  $A$  matrisinin genelleştirilmiş özvektörü denir.

eşitliği elde edilir. Bu ise  $\omega_j > 0$  olduğu için (4.37a) eşitliğinin sağlandığı anlamına gelir. Eşitlik (4.37b)'yi analiz etmek için öncelikle  $\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{q}^*$  özvektörleri hesaplayalım.

### Özvektör $\mathbf{q}$ nun hesaplanması

Tanım (4.32a) kullanılarak (4.35a) eşitliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A(0)\mathbf{q}(\theta) = \begin{cases} \frac{d\mathbf{q}(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ 0 \\ \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu)\mathbf{q}(\nu), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.38)$$

Bu nedenle,  $\theta \in [-\tau, 0)$  iken (4.35a) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{q}(\theta)}{d\theta} = i\omega_j\mathbf{q}(\theta)$$

diferensiyel denklemine dönüşür ve bu denklem  $c \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$\mathbf{q}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_j\theta}$$

çözümüne sahiptir. Şimdi  $c$  sabitini bulalım.  $d\eta(\mu, \theta)$  fonksiyonunun (4.31) ile verilen tanımı ve (4.38) kullanılarak  $\theta = 0$  iken

$$\begin{aligned} A(0)\mathbf{q}(0) &= B \int_{-\tau}^0 \delta(\nu)\mathbf{q}(\nu)d\nu + C \int_{-\tau}^0 \delta(\nu + \tau_{j,0})\mathbf{q}(\nu)d\nu \\ &= B\mathbf{q}(0) + C\mathbf{q}(-\tau_{j,0}) \\ &= \begin{pmatrix} -d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 + k_3c + (k_2 + k_4c)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \\ l_1 + \left(-d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3\right)c + (l_2 + l_4c)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir ( $B$  ve  $C$  için denklem (4.25a)'ya bakınız). Diğer taraftan,

$$A(0)\mathbf{q}(0) = i\omega_j\mathbf{q}(0) = i\omega_j \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz (Denklem (4.35a)). Böylece,  $A(0)\mathbf{q}(0)$  için yukarıda elde edilen iki sonuç kullanılarak

$$\begin{pmatrix} -d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 + k_3c + (k_2 + k_4c)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \\ l_1 + \left(-d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3\right)c + (l_2 + l_4c)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_j \\ i\omega_j c \end{pmatrix}$$



matris eşitliğine ulaşılır. Bu matrislerin ilk satır eşitliğinden  $c$  aşağıdaki gibi bulunur:

$$c = \frac{i\omega_j + d_1 \frac{n^2}{\ell^2} - k_1 - k_2 e^{-i\omega_j \tau_{j,0}}}{k_3 + k_4 e^{-i\omega_j \tau_{j,0}}}. \quad (4.39)$$

### Özvektör $\mathbf{q}^*$ in hesaplanması

Aynı yöntemle (4.35b) eşitliğinin sol tarafı (4.34) tanımı ile

$$A^*(0)\mathbf{q}^*(\sigma) = \begin{cases} -\frac{d\mathbf{q}^*(\sigma)}{d\sigma}, & \sigma \in (0, \tau] \text{ ise} \\ \int_{-\tau}^0 d\eta^T(0, \nu)\mathbf{q}^*(-\nu), & \sigma = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.40)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,  $\sigma \in (0, \tau]$  iken (4.35b) eşitliği aşağıdaki diferensiyel denklemi verir:

$$\frac{d\mathbf{q}^*(\sigma)}{d\sigma} = i\omega_j \mathbf{q}^*(\sigma).$$

Bu denklem,  $s, c^* \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$\mathbf{q}^*(\sigma) = s \begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_j \sigma}$$

çözümüne sahiptir. Öncelikle,  $c^*$  sabitini bulalım. (4.31) ile tanımlanan  $d\eta(\mu, \sigma)$  fonksiyonu, (4.40)'ta yerine konursa  $\sigma = 0$  iken

$$\begin{aligned} A^*(0)\mathbf{q}^*(0) &= B^T \int_{-\tau}^0 \delta(\sigma)\mathbf{q}^*(-\sigma)d\sigma + C^T \int_{-\tau}^0 \delta(\sigma + \tau_{j,0})\mathbf{q}^*(-\sigma)d\sigma \\ &= B^T \mathbf{q}^*(0) + C^T \mathbf{q}^*(\tau_{j,0}) \\ &= s \begin{pmatrix} l_1 + \left(-d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1\right) c^* + (k_2 c^* + l_2) e^{i\omega_j \tau_{j,0}} \\ -d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 + k_3 c^* + (k_4 c^* + l_4) e^{i\omega_j \tau_{j,0}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.35b) eşitliğinden

$$A^*(0)\mathbf{q}^*(0) = -i\omega_j \mathbf{q}^*(0) = -i\omega_j s \begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda,  $A^*(0)\mathbf{q}^*(0)$  için yukarıda elde edilen iki sonuç bize

$$\begin{pmatrix} l_1 + \left(-d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1\right) c^* + (k_2 c^* + l_2) e^{i\omega_j \tau_{j,0}} \\ -d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 + k_3 c^* + (k_4 c^* + l_4) e^{i\omega_j \tau_{j,0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega_j c^* \\ -i\omega_j \end{pmatrix}$$

matris eşitliğini verir. Bu matrislerin ikinci satır eşitliği kullanılarak

$$c^* = - \left( \frac{i\omega_j - d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 + l_4 e^{i\omega_j \tau_{j,0}}}{k_3 + k_4 e^{i\omega_j \tau_{j,0}}} \right) \quad (4.41)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi,  $\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{q}^*$  özvektörlerinin (4.37b) özelliğine sahip olduklarını garanti edelim. İç çarpım tanımı (4.36) ile

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle &= \overline{\mathbf{q}^*}(0) \cdot \mathbf{q}(0) - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \overline{\mathbf{q}^*}^T(\xi - \theta) d\eta(0, \theta) \mathbf{q}(\xi) d\xi \\ &= \bar{s} \begin{pmatrix} \overline{c^*} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{s} \begin{pmatrix} \overline{c^*} & 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_j(\xi-\theta)} d\eta(0, \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_j \xi} d\xi \\ &= \bar{s}(\overline{c^*} + c) - \bar{s} \begin{pmatrix} \overline{c^*} & 1 \end{pmatrix} \left( \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \theta) e^{i\omega_j \theta} \theta \right) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \theta) e^{i\omega_j \theta} \theta &= B \int_{-\tau}^0 \delta(\theta) e^{i\omega_j \theta} \theta d\theta + C \int_{-\tau}^0 \delta(\theta + \tau_{j,0}) e^{i\omega_j \theta} \theta d\theta \\ &= -\tau_{j,0} e^{-i\omega_j \tau_{j,0}} C \\ &= -\tau_{j,0} e^{-i\omega_j \tau_{j,0}} \begin{pmatrix} k_2 & k_4 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde elde edilen sonuç, (4.42) iç çarpımında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle &= \bar{s}(\overline{c^*} + c) + \bar{s} \tau_{j,0} e^{-i\omega_j \tau_{j,0}} \begin{pmatrix} \overline{c^*} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & k_4 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \\ &= \bar{s} [c + \overline{c^*} + \tau_{j,0} e^{-i\omega_j \tau_{j,0}} (l_2 + k_2 \overline{c^*} + l_4 c + k_4 \overline{c^*} c)] \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.37b) özelliğinin sağlanması, yani  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1$  olması için  $s$  sabiti aşağıdaki gibi seçilmelidir:

$$\bar{s} = [c + \overline{c^*} + \tau_{j,0} e^{-i\omega_j \tau_{j,0}} (l_2 + k_2 \overline{c^*} + l_4 c + k_4 \overline{c^*} c)]^{-1}. \quad (4.43)$$

**Sonuç 4.7.**  $A(0)$  operatörünün  $\lambda_j(\tau_{j,0}) = i\omega_j$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $\mathbf{q}(\theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$  için ve  $A^*(0)$  operatörünün  $\overline{\lambda}_j(\tau_{j,0}) = -i\omega_j$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $\mathbf{q}^*(\sigma)$ ,  $\sigma \in [0, \tau]$  için sırasıyla aşağıdaki formüller ile hesaplanabilir:

$$\mathbf{q}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_j \theta} \quad \text{ve} \quad \mathbf{q}^*(\sigma) = s \begin{pmatrix} \overline{c^*} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_j \sigma}. \quad (4.44)$$

Bu hesaplamada ihtiyaç duyulan  $c$ ,  $c^*$  ve  $s$  sabitlerinin formülleri sırasıyla (4.39), (4.41) ve (4.43) ile verilmiştir.

### 4.3.3 Sistemi merkez manifolda indirgeme

$A(0)$  ve  $A^*(0)$  operatörlerinin  $\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{q}^*$  özvektörlerini hesapladık. Şimdi, bu özvektörleri kullanarak (4.33) sisteminin  $\mu = 0$  daki  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifoldunu hesaplayabiliriz. (4.33) sisteminin bir çözümü  $\mathbf{U}_t$  olsun. Bu çözüm,

$$z(t) = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{U}_t \rangle \in \mathbb{C} \quad \text{ve} \quad \langle \mathbf{q}^*, w \rangle = 0$$

olmak üzere Sonuç 3.7'den

$$\mathbf{U}_t = z(t)\mathbf{q} + \bar{z}(t)\bar{\mathbf{q}} + w \quad (4.45)$$

şeklinde parçalanabilir. Böylece, (4.33) sistemini aşağıdaki değişkenler cinsinden yazabiliriz:

$$\begin{aligned} z(t) &= \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{U}_t \rangle, \\ \mathbf{w}(t) &= \mathbf{U}_t - \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{U}_t \rangle \mathbf{q} - \langle \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{U}_t \rangle \bar{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Öncelikle, (4.35) eşitliklerinden

$$\langle \mathbf{q}^*, A(0)\mathbf{U}_t \rangle = \langle A^*(0)\mathbf{q}^*, \mathbf{U}_t \rangle = \langle -i\omega_j \mathbf{q}^*, \mathbf{U}_t \rangle = i\omega_j \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{U}_t \rangle = i\omega_j z \quad (4.46a)$$

olur. Diğer taraftan,  $R(0)\mathbf{U}_t(\theta)$  operatörü  $\theta \in [-\tau, 0)$  iken  $R(0)\mathbf{U}_t(\theta) = 0$  ve  $\theta = 0$  iken  $R(0)\mathbf{U}_t(0) = \mathbf{h}(\mathbf{U}_t(0); 0)$  olacak şekilde parçalı tanımlıdır (Denklem (4.32b)). Bu durumda, (4.36) iç çarpımında integralin bölgesi  $\xi \in [0, \theta]$  ve  $\theta \in [-\tau, 0]$  olduğu için  $\theta \in [-\tau, 0)$  iken  $R(0)\mathbf{U}_t(\xi) = 0$  olur. Böylece

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}^*, R(0)\mathbf{U}_t \rangle &= \bar{\mathbf{q}}^*(0) \cdot (R(0)\mathbf{U}_t(0)) - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\mathbf{q}}^{*T}(\xi - \theta) d\eta(0, \theta) (R(0)\mathbf{U}_t(\xi)) d\xi \\ &= \bar{\mathbf{q}}^*(0) \cdot (R(0)\mathbf{U}_t(0)) - \lim_{r \rightarrow 0^-} \int_{-\tau}^r \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\mathbf{q}}^{*T}(\xi - \theta) d\eta(0, \theta) \underbrace{(R(0)\mathbf{U}_t(\xi))}_{0} d\xi \end{aligned} \quad (4.46b)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\mathbf{q}}^{*T}(\xi - \theta) d\eta(0, \theta) \underbrace{(R(0)\mathbf{U}_t(\xi))}_{h(\mathbf{U}_t(\xi); 0)} d\xi \\ &= \bar{\mathbf{q}}^*(0) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{U}_t(0); 0) \end{aligned}$$

Sınırlar aynı

sonucuna ulaşılır. Bu durumda,

$$\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0) = \bar{\mathbf{q}}^*(0) \cdot \mathbf{h}(z\mathbf{q}(0) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{w}; 0) \quad (4.46c)$$

olmak üzere (4.33), (4.46a)-(4.46c) denklemleri ile

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \langle \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{U}}_t \rangle \\
&= \langle \mathbf{q}^*, A(0)\mathbf{U}_t \rangle + \langle \mathbf{q}^*, R(0)\mathbf{U}_t \rangle \\
&= i\omega_j z + \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, (4.35a) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
A(0)\mathbf{U}_t - i\omega_j z \mathbf{q} + i\omega_j \bar{z} \bar{\mathbf{q}} &= A(0)(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{w}) - i\omega_j z \mathbf{q} + i\omega_j \bar{z} \bar{\mathbf{q}} \\
&= A(0)\mathbf{w} + zA(0)\mathbf{q} + \bar{z}A(0)\bar{\mathbf{q}} - i\omega_j z \mathbf{q} + i\omega_j \bar{z} \bar{\mathbf{q}} \\
&= A(0)\mathbf{w} + i\omega_j z \mathbf{q} - i\omega_j \bar{z} \bar{\mathbf{q}} - i\omega_j z \mathbf{q} + i\omega_j \bar{z} \bar{\mathbf{q}} \\
&= A(0)\mathbf{w}
\end{aligned} \tag{4.48a}$$

ve (4.32b) tanımından

$$\begin{aligned}
R(0)\mathbf{U}_t - \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\mathbf{q} - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\bar{\mathbf{q}} &= \\
\begin{cases} -\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\mathbf{q}(\theta) - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\bar{\mathbf{q}}(\theta), & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ \mathbf{h}(z\mathbf{q}(0) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{w}, 0) - \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\mathbf{q}(0) - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\bar{\mathbf{q}}(0), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} & \tag{4.48b}
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{H}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0) &= \\
\begin{cases} -\tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\mathbf{q}(\theta) - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\bar{\mathbf{q}}(\theta), & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ \mathbf{h}(z\mathbf{q}(0) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{w}, 0) - \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\mathbf{q}(0) - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)\bar{\mathbf{q}}(0), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} & \tag{4.48c}
\end{aligned}$$

olmak üzere (4.33), (4.35), (4.47), (4.48a)-(4.48c) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{w}} &= \dot{\mathbf{U}}_t - \langle \mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{U}}_t \rangle \mathbf{q} - \langle \bar{\mathbf{q}}^*, \dot{\mathbf{U}}_t \rangle \bar{\mathbf{q}} \\
&= \dot{\mathbf{U}}_t - \dot{z}\mathbf{q} - \dot{\bar{z}}\bar{\mathbf{q}} \\
&= A(0)\mathbf{U}_t + R(0)\mathbf{U}_t - [i\omega_j z + \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)] \mathbf{q} - [-i\omega_j \bar{z} + \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0)] \bar{\mathbf{q}} \\
&= [A(0)\mathbf{U}_t - i\omega_j z \mathbf{q} + i\omega_j \bar{z} \bar{\mathbf{q}}] + [R(0)\mathbf{U}_t - \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\mathbf{q} - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\bar{\mathbf{q}}] \\
&= A(0)(\mathbf{U}_t - z\mathbf{q} - \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) + [R(0)\mathbf{U}_t - \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\mathbf{q} - \bar{\tilde{g}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)\bar{\mathbf{q}}] \\
&= A(0)\mathbf{w} + \tilde{\mathbf{H}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0).
\end{aligned}$$

türevine ulaşılır. Sonuç olarak yeni değişkenler ile (4.33) sistemi kendisine topolojik olarak denk olan aşağıdaki sisteme dönüşür:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= i\omega_j z + \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0) \\
\dot{\mathbf{w}} &= A(0)\mathbf{w} + \tilde{\mathbf{H}}(z, \bar{z}, \mathbf{w}; 0).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Teorem 2.2'den şu sonuç elde edilir:

**Sonuç 4.8.** Sistem (4.49),  $\delta$  yeterince küçük iken  $|z| < \delta$  için

$$\mathbf{W}^c(0) = \{(z, \bar{z}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0), \mathbf{W}(0, 0; 0) = 0, \mathbf{W}_z(0, 0; 0) = 0, \mathbf{W}_{\bar{z}}(0, 0; 0) = 0\}$$

ile temsil edilen  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifolduna sahiptir. Ayrıca (4.49) sisteminin denge noktasının yakın komşuluğundaki dinamiği, kendisinin merkez manifolduna kısıtlaması olan

$$\dot{z} = i\omega_j z + g(z, \bar{z}; 0) \quad (4.50)$$

denklemini ile belirlenir. Burada,  $\mathbf{h}(\phi(\theta); \mu)$  fonksiyonu (4.29) ile tanımlanmak ve

$$\mathbf{h}(z, \bar{z}; 0) = \mathbf{h}(z\mathbf{q}(\theta) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\theta) + \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0); 0) = \mathbf{h}(\mathbf{U}_t(\theta); 0) \quad (4.51)$$

olmak üzere (4.46c) ile tanımlanan  $\tilde{g}$  fonksiyonunda  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  yerine yazılırsa  $g(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}; 0) &= \tilde{g}(z, \bar{z}, \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0); 0) \\ &= \bar{\mathbf{q}}^*(0) \cdot \mathbf{h}(z, \bar{z}; 0). \end{aligned} \quad (4.52)$$

#### 4.3.4 Merkez manifoldda kısıtlanmış sistemi hesaplama

Sonuç 4.8'de ifade edildiği gibi (4.12) sistemine, dolayısıyla (4.1) sistemine, topolojik olarak denk olan (4.49) sisteminin denge noktasının yakın komşuluğundaki dinamiği kendisinin  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifolduna kısıtlaması olan (4.50) denklemi ile belirlenir. Bu denklemdeki (4.52) ile tanımlanan  $g(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonu  $h \in C^k, k \geq 3$ , olduğu için  $g \in C^k, k \geq 3$ , özelliğine sahiptir ve lineer olmayan terimleri içerdiği için

$$g_z(0, 0; 0) = 0 \quad \text{ve} \quad g_{\bar{z}}(0, 0; 0) = 0$$

sağlanır. Böylece, (4.50) denklemi, dinamik yapısı hakkında yeterince bilgiye sahip olduğumuz (3.32) denklemi formundadır.

**Sonuç 4.9.** Kabul edelim ki (4.1) sistemi Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'de verilen  $V_1$  ve  $V_2$  koşullarına ek olarak  $V_3$  veya  $V_4$  koşullarından birini sağlasın. Bu takdirde, (4.1) sisteminin merkez manifolduna kısıtlaması (4.50) sistemidir. Yani (4.1) sisteminin dinamiği, (4.50) sistemi tarafından belirlenir. Ayrıca (4.50) sistemi, Poincaré normal forma dönüştürülebilen (3.32) sistemi ile aynı forma sahip olduğu için Sonuç 3.6, sistem (4.50) için aynen geçerlidir.

Sonuç 3.6, (4.50) sisteminin periyodik çözümler ailesine sahip olduğunu söyler. Ayrıca  $g(z, \bar{z}, 0)$  fonksiyonunun Taylor serisi

$$g(z, \bar{z}; 0) = \sum_{i+j=2}^k g_{ij}(0) \frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} + \mathcal{O}(|z|^{k+1}), \quad (4.53)$$

olmak üzere (3.39) ile verilen

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_j} \left( g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}(0)$$

Poincaré normal form katsayısının hesaplanması durumunda, bu periyodik çözümlerin ortaya çıktığı çatallanma değerlerini, kararlılık yapılarını ve periyotlarını belirleme imkanı sunar. Bu bölümde, Sonuç 3.6'yı kullanabilmek için gerekli olan  $g_{20}(0)$ ,  $g_{11}(0)$ ,  $g_{02}(0)$  ve  $g_{21}(0)$  katsayılarını verecek formüller üretilecektir. Bu formüller, Teorem 4.1'de ve Teorem 4.2'de verilen  $\mathbf{V}_1$  ve  $\mathbf{V}_2$  koşullarına ek olarak  $\mathbf{V}_3$  veya  $\mathbf{V}_4$  koşullarından birini sağlayan ve (4.1) formunda olan gecikme içeren tüm reaksiyon-difüzyon sistemleri için geçerli olacaktır.

(4.52) denkleminde bildiğimiz gibi  $g(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonu  $\bar{\mathbf{q}}^*(0)$  vektörü ile  $\mathbf{h}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun skaler çarpımına eşittir. Bu nedenle, öncelikle  $\mathbf{h}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunu  $z$  ve  $\bar{z}$  cinsinden açıkça ifade edelim.  $1 \leq i \leq 4$  ve  $i \leq j \leq 4$  için  $m_{ij}$  ve  $r_{ij}$  (4.30) ile tanımlanmak ve

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}); 0) = & m_{11}U_t^2(0) + m_{12}U_t(0)U_t(-\tau_{j,0}) + m_{13}U_t(0)V_t(0) + m_{14}U_t(0)V_t(-\tau_{j,0}) \\ & + m_{22}U_t^2(-\tau_{j,0}) + m_{23}U_t(-\tau_{j,0})V_t(0) + m_{24}U_t(-\tau_{j,0})V_t(-\tau_{j,0}) \\ & + m_{33}V_t^2(0) + m_{34}V_t(0)V_t(-\tau_{j,0}) + m_{44}V_t^2(-\tau_{j,0}) + \text{YMT}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}); 0) = & r_{11}U_t^2(0) + r_{12}U_t(0)U_t(-\tau_{j,0}) + r_{13}U_t(0)V_t(0) + r_{14}U_t(0)V_t(-\tau_{j,0}) \\ & + r_{22}U_t^2(-\tau_{j,0}) + r_{23}U_t(-\tau_{j,0})V_t(0) + r_{24}U_t(-\tau_{j,0})V_t(-\tau_{j,0}) \\ & + r_{33}V_t^2(0) + r_{34}V_t(0)V_t(-\tau_{j,0}) + r_{44}V_t^2(-\tau_{j,0}) + \text{YMT}, \end{aligned}$$

olmak üzere (4.29) denkleminde

$$h(\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}); 0) = \begin{pmatrix} h_1(\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}); 0) \\ h_2(\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}); 0) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

formunda yazılabilir. Diğer taraftan,  $\mathbf{W}^c(0) \in C^k$ ,  $k \geq 2$ , olduğu için  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonu Taylor serisine açılabilir. Böylece,  $\boldsymbol{\theta} \in [-\tau, 0]$  için  $\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun Taylor serisi

$$\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0) = \sum_{i+j=2}^k \mathbf{W}_{ij}(\boldsymbol{\theta}; 0) \frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} + \mathcal{O}(|z|^{k+1}), \quad \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{W}_{ij}(\boldsymbol{\theta}; 0) \rangle = 0 \quad (4.55)$$

olmak üzere  $\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta})$  nın parçalanışı (4.45) kullanılarak  $\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta})$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}) = & z(t)\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}) + \bar{z}(t)\bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0) \\ = & z(t)\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}) + \bar{z}(t)\bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{W}_{20}(\boldsymbol{\theta}; 0) \frac{z^2(t)}{2} + \mathbf{W}_{11}(\boldsymbol{\theta}; 0)z(t)\bar{z}(t) + \mathbf{W}_{02}(\boldsymbol{\theta}; 0) \frac{\bar{z}^2(t)}{2} + \dots \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\mathbf{W}_{ij}(\boldsymbol{\theta}; 0) = \left( W_{ij_1}(\boldsymbol{\theta}; 0), W_{ij_2}(\boldsymbol{\theta}; 0) \right)^T$  olmak üzere (4.44) ile verilen  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta})$ , bir önceki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}) &= z(t) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_j \boldsymbol{\theta}} + \bar{z}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} e^{-i\omega_j \boldsymbol{\theta}} + \begin{pmatrix} W_{20_1}(\boldsymbol{\theta}; 0) \\ W_{20_2}(\boldsymbol{\theta}; 0) \end{pmatrix} \frac{z^2(t)}{2} \\ &+ \begin{pmatrix} W_{11_1}(\boldsymbol{\theta}; 0) \\ W_{11_2}(\boldsymbol{\theta}; 0) \end{pmatrix} z(t)\bar{z}(t) + \begin{pmatrix} W_{02_1}(\boldsymbol{\theta}; 0) \\ W_{02_2}(\boldsymbol{\theta}; 0) \end{pmatrix} \frac{\bar{z}^2(t)}{2} + \dots \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak  $\mathbf{U}_t(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} U_t(\boldsymbol{\theta}) & V_t(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}^T$  olmak üzere

$$\begin{aligned} U_t(\boldsymbol{\theta}) &= z(t)e^{i\omega_j \boldsymbol{\theta}} + \bar{z}(t)e^{-i\omega_j \boldsymbol{\theta}} \\ &+ W_{20_1}(\boldsymbol{\theta}; 0) \frac{z^2(t)}{2} + W_{11_1}(\boldsymbol{\theta}; 0) z(t)\bar{z}(t) + W_{02_1}(\boldsymbol{\theta}; 0) \frac{\bar{z}^2(t)}{2} + \dots \\ V_t(\boldsymbol{\theta}) &= z(t)c e^{i\omega_j \boldsymbol{\theta}} + \bar{z}(t)\bar{c} e^{-i\omega_j \boldsymbol{\theta}} \\ &+ W_{20_2}(\boldsymbol{\theta}; 0) \frac{z^2(t)}{2} + W_{11_2}(\boldsymbol{\theta}; 0) z(t)\bar{z}(t) + W_{02_2}(\boldsymbol{\theta}; 0) \frac{\bar{z}^2(t)}{2} + \dots \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu eşitliklerde  $\boldsymbol{\theta} = 0$  ve  $\boldsymbol{\theta} = -\boldsymbol{\tau}_{j,0}$  yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} U_t(0) &= z + \bar{z} + W_{20_1}(0; 0) \frac{z^2}{2} + W_{11_1}(0; 0) z\bar{z} + W_{02_1}(0; 0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\ V_t(0) &= zc + \bar{z}\bar{c} + W_{20_2}(0; 0) \frac{z^2}{2} + W_{11_2}(0; 0) z\bar{z} + W_{02_2}(0; 0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\ U_t(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}) &= z e^{-i\omega_j \boldsymbol{\tau}_{j,0}} + \bar{z} e^{i\omega_j \boldsymbol{\tau}_{j,0}} \\ &+ W_{20_1}(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}; 0) \frac{z^2}{2} + W_{11_1}(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}; 0) z\bar{z} + W_{02_1}(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}; 0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \\ V_t(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}) &= z c e^{-i\omega_j \boldsymbol{\tau}_{j,0}} + \bar{z} \bar{c} e^{i\omega_j \boldsymbol{\tau}_{j,0}} \\ &+ W_{20_2}(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}; 0) \frac{z^2}{2} + W_{11_2}(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}; 0) z\bar{z} + W_{02_2}(-\boldsymbol{\tau}_{j,0}; 0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Elde edilen son ifadeler (4.54)'te yerine yazıldığında  $\mathbf{h}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun  $z$  ve  $\bar{z}$  değişkenlerine göre açık ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(z, \bar{z}; 0) &= \begin{pmatrix} h_1(z, \bar{z}; 0) \\ h_2(z, \bar{z}; 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{20_1}(0) z^2 + h_{11_1}(0) z\bar{z} + h_{02_1}(0) \bar{z}^2 + h_{21_1}(0) z^2 \bar{z} + \dots \\ h_{20_2}(0) z^2 + h_{11_2}(0) z\bar{z} + h_{02_2}(0) \bar{z}^2 + h_{21_2}(0) z^2 \bar{z} + \dots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

olur.  $1 \leq i \leq 4$  ve  $i \leq j \leq 4$  için  $m_{ij}$  ve  $r_{ij}$  (4.30) ile tanımlanmak üzere (4.56) denklemindeki katsayılar aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
h_{20_1}(0) &= m_{11} + m_{12}e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{13}c + m_{14}ce^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + m_{22}e^{-2i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{23}ce^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{24}ce^{-2i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + m_{33}c^2 + m_{34}c^2e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{44}c^2e^{-2i\omega_j\tau_{j,0}},
\end{aligned} \tag{4.57a}$$

$$\begin{aligned}
h_{20_2}(0) &= r_{11} + r_{12}e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{13}c + r_{14}ce^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + r_{22}e^{-2i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{23}ce^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{24}ce^{-2i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + r_{33}c^2 + r_{34}c^2e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{44}c^2e^{-2i\omega_j\tau_{j,0}},
\end{aligned} \tag{4.57b}$$

$$\begin{aligned}
h_{11_1}(0) &= 2m_{11} + m_{12}(e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + e^{i\omega_j\tau_{j,0}}) + m_{13}(c + \bar{c}) \\
&\quad + m_{14}(ce^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + \bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}}) \\
&\quad + 2m_{22} + m_{23}(ce^{i\omega_j\tau_{j,0}} + \bar{c}e^{-i\omega_j\tau_{j,0}}) + m_{24}(c + \bar{c}) \\
&\quad + 2m_{33}c\bar{c} + m_{34}c\bar{c}(e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + e^{i\omega_j\tau_{j,0}}) + 2m_{44}c\bar{c},
\end{aligned} \tag{4.57c}$$

$$\begin{aligned}
h_{11_2}(0) &= 2r_{11} + r_{12}(e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + e^{i\omega_j\tau_{j,0}}) + r_{13}(c + \bar{c}) \\
&\quad + r_{14}(ce^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + \bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}}) \\
&\quad + 2r_{22} + r_{23}(ce^{i\omega_j\tau_{j,0}} + \bar{c}e^{-i\omega_j\tau_{j,0}}) + r_{24}(c + \bar{c}) \\
&\quad + 2r_{33}c\bar{c} + r_{34}c\bar{c}(e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + e^{i\omega_j\tau_{j,0}}) + 2r_{44}c\bar{c},
\end{aligned} \tag{4.57d}$$

$$\begin{aligned}
h_{02_1}(0) &= m_{11} + m_{12}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{13}\bar{c} + m_{14}\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + m_{22}e^{2i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{23}\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{24}\bar{c}e^{2i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + m_{33}\bar{c}^2 + m_{34}\bar{c}^2e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + m_{44}\bar{c}^2e^{2i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&= \bar{h}_{20_1},
\end{aligned} \tag{4.57e}$$

$$\begin{aligned}
h_{02_2}(0) &= r_{11} + r_{12}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{13}\bar{c} + r_{14}\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + r_{22}e^{2i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{23}\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{24}\bar{c}e^{2i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&\quad + r_{33}\bar{c}^2 + r_{34}\bar{c}^2e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + r_{44}\bar{c}^2e^{2i\omega_j\tau_{j,0}} \\
&= \bar{h}_{20_2},
\end{aligned} \tag{4.57f}$$



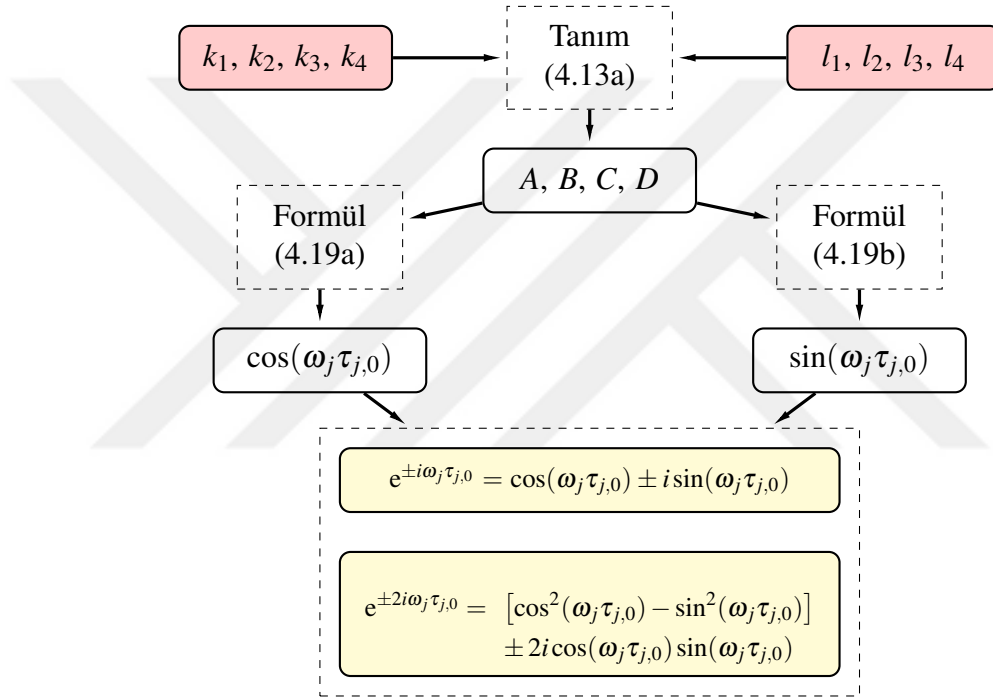
$$\begin{aligned}
h_{21_1}(0) = & m_{11} [W_{20_1}(0) + 2W_{11_1}(0)] \\
& + m_{12} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(-\tau_{j,0}) + W_{11_1}(-\tau_{j,0}) + \frac{1}{2}W_{20_1}(0)e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_1}(0)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right] \\
& + m_{13} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(0)\bar{c} + W_{11_1}(0)c + \frac{1}{2}W_{20_2}(0) + W_{11_2}(0) \right] \\
& + m_{14} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(0)\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_1}(0)c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + \frac{1}{2}W_{20_2}(-\tau_{j,0}) + W_{11_2}(-\tau_{j,0}) \right] \\
& + m_{22} [W_{20_1}(-\tau_{j,0}) e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + 2W_{11_1}(-\tau_{j,0}) e^{-i\omega_j\tau_{j,0}}] \\
& + m_{23} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(-\tau_{j,0})\bar{c} + W_{11_1}(-\tau_{j,0})c + \frac{1}{2}W_{20_2}(0)e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_2}(0)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right] \\
& + m_{24} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(-\tau_{j,0})\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_1}(-\tau_{j,0})c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}W_{20_2}(-\tau_{j,0})e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_2}(-\tau_{j,0})e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right] \\
& + m_{33} [W_{20_2}(0)\bar{c} + 2W_{11_2}(0)c] \\
& + m_{34} \left[ \frac{1}{2}W_{20_2}(0)\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_2}(0)c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + \frac{1}{2}W_{20_2}(-\tau_{j,0})\bar{c} + W_{11_2}(-\tau_{j,0})c \right] \\
& + m_{44} [W_{20_2}(-\tau_{j,0})\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + 2W_{11_2}(-\tau_{j,0})c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}}],
\end{aligned} \tag{4.57g}$$

$$\begin{aligned}
h_{21_2}(0) = & r_{11} [W_{20_1}(0) + 2W_{11_1}(0)] \\
& + r_{12} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(-\tau_{j,0}) + W_{11_1}(-\tau_{j,0}) + \frac{1}{2}W_{20_1}(0)e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_1}(0)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right] \\
& + r_{13} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(0)\bar{c} + W_{11_1}(0)c + \frac{1}{2}W_{20_2}(0) + W_{11_2}(0) \right] \\
& + r_{14} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(0)\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_1}(0)c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + \frac{1}{2}W_{20_2}(-\tau_{j,0}) + W_{11_2}(-\tau_{j,0}) \right] \\
& + r_{22} [W_{20_1}(-\tau_{j,0}) e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + 2W_{11_1}(-\tau_{j,0}) e^{-i\omega_j\tau_{j,0}}] \\
& + r_{23} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(-\tau_{j,0})\bar{c} + W_{11_1}(-\tau_{j,0})c + \frac{1}{2}W_{20_2}(0)e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_2}(0)e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right] \\
& + r_{24} \left[ \frac{1}{2}W_{20_1}(-\tau_{j,0})\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_1}(-\tau_{j,0})c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}W_{20_2}(-\tau_{j,0})e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_2}(-\tau_{j,0})e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} \right] \\
& + r_{33} [W_{20_2}(0)\bar{c} + 2W_{11_2}(0)c] \\
& + r_{34} \left[ \frac{1}{2}W_{20_2}(0)\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + W_{11_2}(0)c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} + \frac{1}{2}W_{20_2}(-\tau_{j,0})\bar{c} + W_{11_2}(-\tau_{j,0})c \right] \\
& + r_{44} [W_{20_2}(-\tau_{j,0})\bar{c}e^{i\omega_j\tau_{j,0}} + 2W_{11_2}(-\tau_{j,0})c e^{-i\omega_j\tau_{j,0}}].
\end{aligned} \tag{4.57h}$$

Şimdi,  $\mathbf{h}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun (4.56) ile verilen ifadesini kullanarak  $g(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunu hesaplayabiliriz. (4.44) ile tanımlanan  $\mathbf{q}^*$  özvektörü ve denklem (4.56),  $g(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunu ifade eden (4.52) denklemine yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}; 0) &= \overline{\mathbf{q}^*}(0) \cdot \mathbf{h}(z, \bar{z}; 0) \\ &= \bar{s} \begin{pmatrix} \bar{c}^* \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{20_1}(0)z^2 + h_{11_1}(0)z\bar{z} + h_{02_1}(0)\bar{z}^2 + h_{21_1}(0)z^2\bar{z} + \dots \\ h_{20_2}(0)z^2 + h_{11_2}(0)z\bar{z} + h_{02_2}(0)\bar{z}^2 + h_{21_2}(0)z^2\bar{z} + \dots \end{pmatrix} \\ &= \bar{s} [h_{20_1}(0)\bar{c}^* + h_{20_2}(0)] z^2 + \bar{s} [h_{11_1}(0)\bar{c}^* + h_{11_2}(0)] z\bar{z} \\ &\quad + \bar{s} [h_{02_1}(0)\bar{c}^* + h_{02_2}(0)] \bar{z}^2 + \bar{s} [h_{21_1}(0)\bar{c}^* + h_{21_2}(0)] z^2\bar{z} + \dots \end{aligned}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.2: Üstel ifadeleri hesaplama diyagramı.

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı,  $g(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun Taylor serisi (4.53) ile eşitlenirse

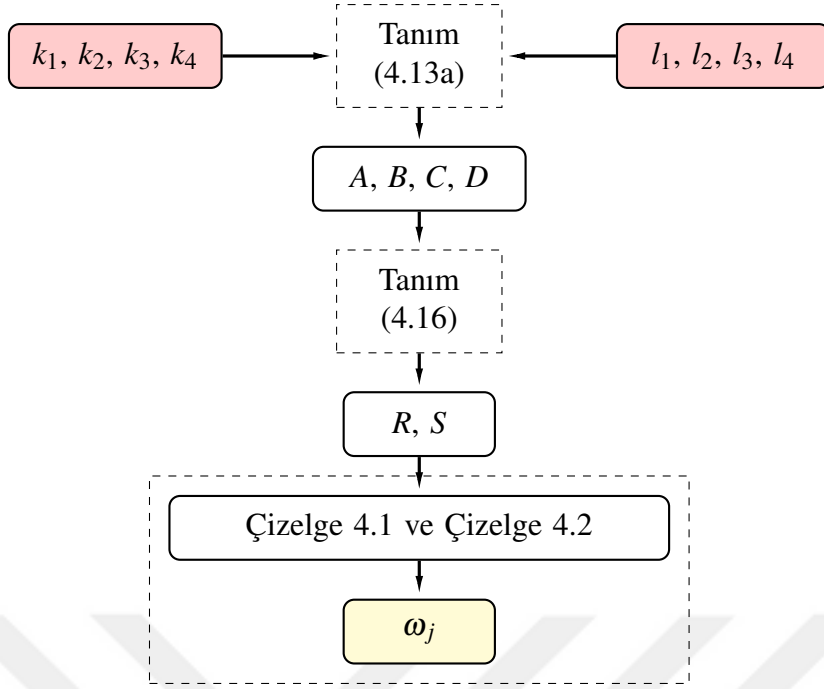
$$g_{20}(0) = 2\bar{s} [h_{20_1}(0)\bar{c}^* + h_{20_2}(0)], \quad (4.58a)$$

$$g_{11}(0) = \bar{s} [h_{11_1}(0)\bar{c}^* + h_{11_2}(0)], \quad (4.58b)$$

$$g_{02}(0) = 2\bar{s} [h_{02_1}(0)\bar{c}^* + h_{02_2}(0)], \quad (4.58c)$$

$$g_{21}(0) = 2\bar{s} [h_{21_1}(0)\bar{c}^* + h_{21_2}(0)] \quad (4.58d)$$

olarak bulunur.  $g_{20}(0)$ ,  $g_{11}(0)$ ,  $g_{02}(0)$  ve  $g_{21}(0)$  katsayılarını hesaplamak için  $c^*$ ,  $\bar{s}$  sabitleri ve  $\mathbf{h}_{ij}(0)$  vektörlerine ihtiyacımız vardır.



Şekil 4.3:  $\omega_j$  değerini hesaplama diyagramı.

Denklem (4.2) ile tanımlanan ve (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılar  $k_i$  ve  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , olmak üzere  $c^*$ ,  $\bar{s}$  sabitleri ve  $\mathbf{h}_{ij}(0)$  vektörlerinin formüllerinde yer alan üstel ifadelerin ve  $\omega_j$  değerinin nasıl hesaplanacağını, sırasıyla Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 özetlemektedir.

Ayrıca tanımı (4.30) ile verilen ve (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılar  $m_{ij}$  ve  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $i \leq j \leq 4$ , olmak üzere Şekil 4.4,  $c$ ,  $c^*$  ve  $\bar{s}$  sabitlerinin; Şekil 4.5 ise  $\mathbf{h}_{ij}(0)$ ,  $i + j = 2$  vektörlerinin nasıl hesaplanacağını göstermektedir.

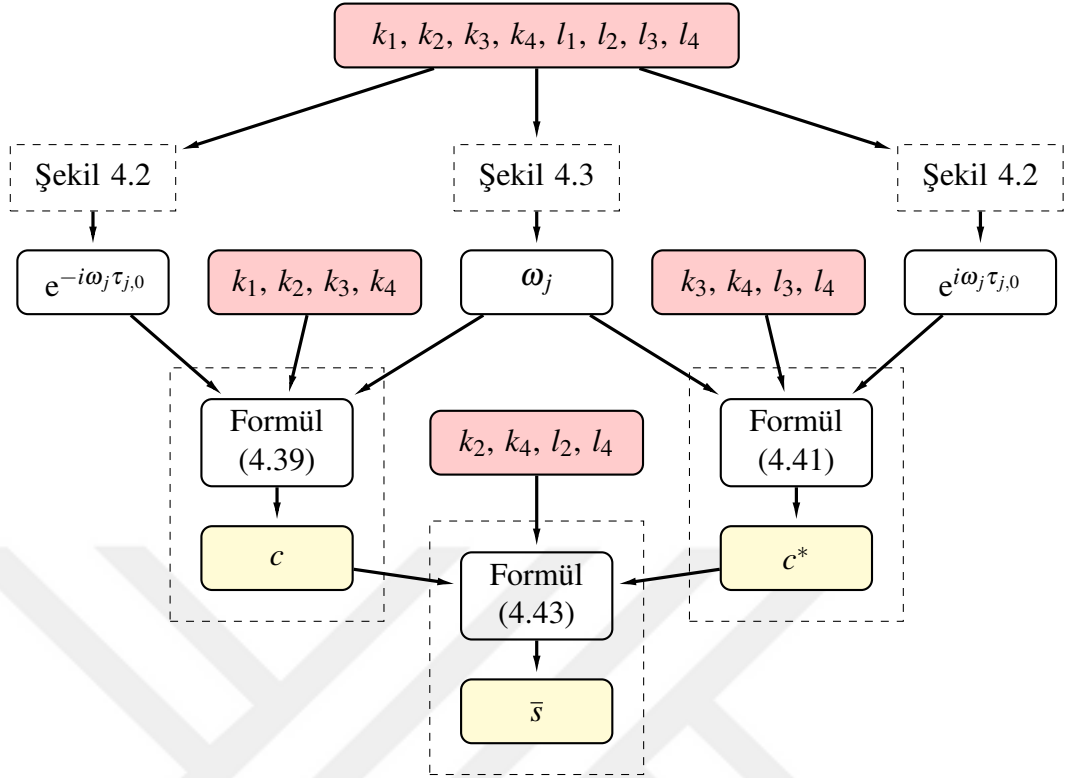
**Sonuç 4.10.** Şekil 4.6'da görüldüğü üzere  $g_{20}(0)$ ,  $g_{11}(0)$  ve  $g_{02}(0)$  katsayılarını hesaplamak için (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci mertebeden türevlere karşılık gelen  $k_i$ ,  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , katsayılarını ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen  $m_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $i \leq j \leq 4$ , katsayılarını bilmek yeterlidir. Böylece, bütün bu adımların tekrarına gerek kalmadan sadece (4.2) ile tanımlanan

$$k_i, \quad l_i, \quad 1 \leq i \leq 4$$

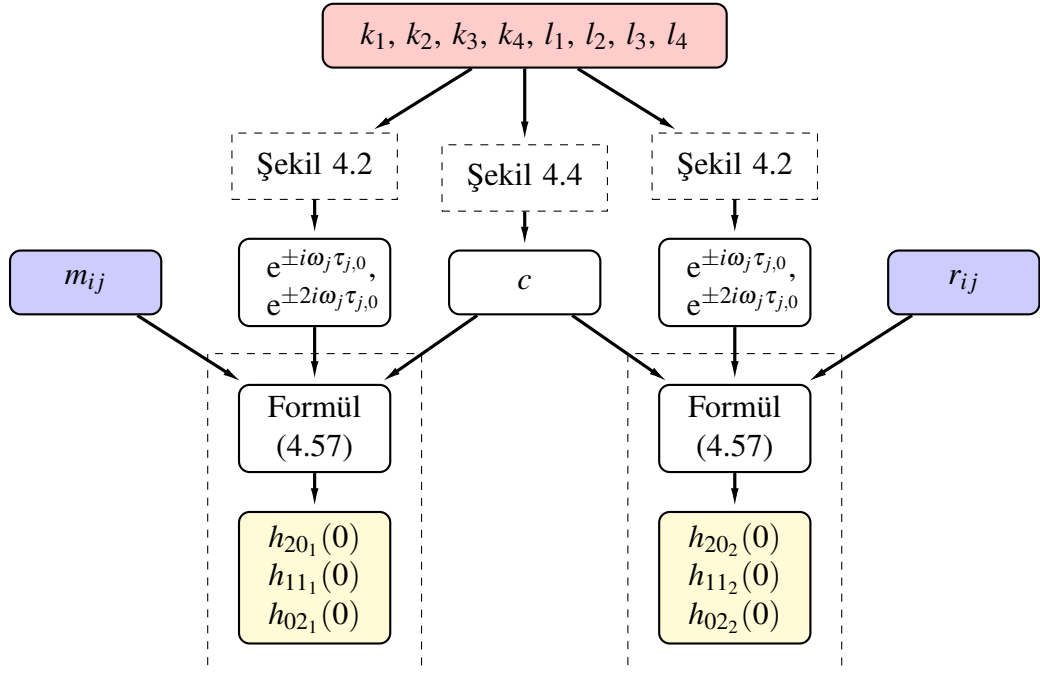
ve (4.30) ile tanımlanan

$$m_{ij}, \quad r_{ij}, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad i \leq j \leq 4$$

katsayılarını kullanarak Şekiller 4.2-4.6'da verilen adımlarla (4.1) sisteminin dinamiği hakkında bilgi sahibi olmaya yaracak  $g_{20}(0)$ ,  $g_{11}(0)$  ve  $g_{02}(0)$  katsayıları hesaplanabilir.



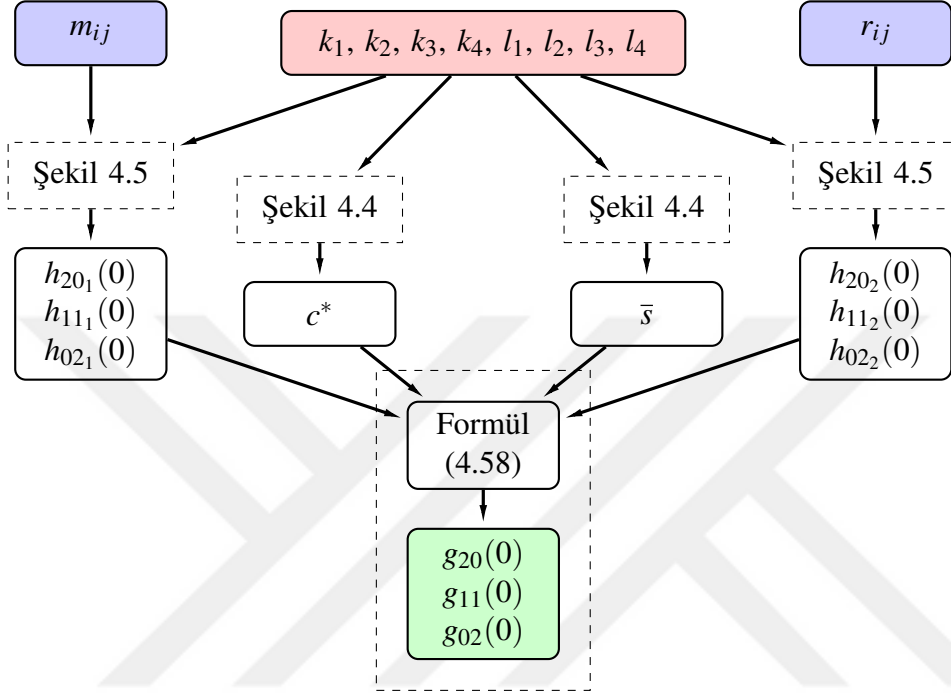
Şekil 4.4:  $c$ ,  $c^*$  ve  $\bar{s}$  sabitlerini hesaplama diyagramı.



Şekil 4.5:  $i+j=2$  için  $\mathbf{h}_{ij}(0)$  vektörlerini hesaplama diyagramı.

Geriye kalan  $g_{21}(0)$  katsayısının hesabı için yine  $c^*$ ,  $\bar{s}$  sabitleri ve  $\mathbf{h}_{21}(0)$  vektörüne ihtiyacımız vardır.  $c^*$  ve  $\bar{s}$  sabitlerini nasıl hesaplayacağımız Şekil 4.4 ile özetlenmiştir. Fakat (4.57g) ve (4.57h) denklemlerine dikkat edilirse  $\mathbf{h}_{21}(0)$  vektörünün hesabı için öncelikle  $\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun (4.55) ile verilen Taylor serisindeki  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$  ve  $\mathbf{W}_{11}(\theta; 0)$  vektörlerinin hesaplanması gerektiği görülür.

Şimdi ihtiyacımız olan bu katsayıları hesaplayalım.



Şekil 4.6:  $i + j = 2$  için  $g_{ij}(0)$  katsayısını hesaplama diyagramı.

### 4.3.5 Merkez manifoldu hesaplama

Açıklama 2.5'te ifade edildiği gibi,  $\mathbf{W}^c(0) \in C^k$ ,  $k \geq 2$  olduğu için  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun Taylor serisi kullanılarak  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifoldunu temsil eden fonksiyon istenen hassaslık derecesinde hesaplanabilir. Bu bölümde,  $g_{21}(0)$  katsayını elde etmek için merkez manifoldu temsil eden  $\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun (4.55) Taylor serisinin  $\mathbf{W}_{ij}(\theta; 0)$ ,  $i + j = 2$ , vektörlerini hesaplayacağız.

Öncelikle,  $\mathbf{h}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonu (4.56) ile tanımlanmak üzere  $\tilde{\mathbf{H}}$  fonksiyonunun (4.48c) ile verilen tanımında  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, \bar{z}; 0) &= \tilde{\mathbf{H}}(z, \bar{z}, \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0); 0) \\ &= \begin{cases} -g(z, \bar{z}; 0)\mathbf{q}(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z}; 0)\bar{\mathbf{q}}(\theta), & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ \mathbf{h}(z, \bar{z}; 0) - g(z, \bar{z}; 0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}(z, \bar{z}; 0)\bar{\mathbf{q}}(0), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.59)$$

fonksiyonu elde edilir. Böylece, (4.49) sisteminin ikinci denklemi

$$\dot{\mathbf{w}} = A(0)\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0) + \mathbf{H}(z, \bar{z}; 0),$$

denkleme dönüşür. Diğer taraftan,  $\mathbf{w} = \mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  olduğu için

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{W}_z(z, \bar{z}; 0)\dot{z} + \mathbf{W}_{\bar{z}}(z, \bar{z}; 0)\dot{\bar{z}} \\ &= \mathbf{W}_z(z, \bar{z}; 0)[i\omega_j z + g(z, \bar{z}; 0)] + \mathbf{W}_{\bar{z}}(z, \bar{z}; 0)[-i\omega_j \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}; 0)]\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak bu iki denklemden

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_z(z, \bar{z}; 0)[i\omega_j z + g(z, \bar{z}; 0)] + \mathbf{W}_{\bar{z}}(z, \bar{z}; 0)[-i\omega_j \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}; 0)] \\ = \\ A(0)\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0) + \mathbf{H}(z, \bar{z}; 0)\end{aligned}\tag{4.60}$$

eşitliğine ulaşılır. Şimdi,  $\mathbf{H} \in C^k$ ,  $k \geq 3$ , olmak üzere  $\mathbf{H}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun Taylor serisi

$$\mathbf{H}(z, \bar{z}; 0) = \sum_{i+j=2}^k \mathbf{H}_{ij}(\theta; 0) \frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} + \mathcal{O}(|z|^{k+1})\tag{4.61}$$

olsun.  $\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  ve  $\mathbf{H}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonlarının sırasıyla (4.55) ve (4.61) ile tanımlanan Taylor seri açılımlarını (4.60) eşitliğinde yerine yazarak

$$\begin{aligned}[\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)z + \mathbf{W}_{11}(\theta; 0)\bar{z} + \dots][i\omega_j z + g(z, \bar{z}; 0)] \\ + [\mathbf{W}_{11}(\theta; 0)z + \mathbf{W}_{02}(\theta; 0)\bar{z} + \dots][-i\omega_j \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}; 0)] \\ = \\ A(0) \left[ \mathbf{W}_{20}(\theta; 0) \frac{z^2}{2} + \mathbf{W}_{11}(\theta; 0)z\bar{z} + \mathbf{W}_{02}(\theta; 0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right] \\ + \left[ \mathbf{H}_{20}(\theta; 0) \frac{z^2}{2} + \mathbf{H}_{11}(\theta; 0)z\bar{z} + \mathbf{H}_{02}(\theta; 0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right]\end{aligned}$$

denkleme ulaşırız. Bu denklemden,  $z^2$ ,  $z\bar{z}$  ve  $\bar{z}^2$  terimlerinin katsayıları karşılıklı eşitlenirse

$$[2i\omega_j I - A(0)] \mathbf{W}_{20}(\theta; 0) = \mathbf{H}_{20}(\theta; 0)\tag{4.62a}$$

$$-A(0)\mathbf{W}_{11}(\theta; 0) = \mathbf{H}_{11}(\theta; 0)\tag{4.62b}$$

$$-[2i\omega_j I + A(0)] \mathbf{W}_{02}(\theta; 0) = \mathbf{H}_{02}(\theta; 0)\tag{4.62c}$$

denklemleri elde edilir. Dikkat edilirse Teorem 4.1'deki  $\mathbf{V}_2$  koşulundan  $A(0)$  operatörünün 0 özdeğeri yoktur. Ayrıca aynı teoremden dolayı basit  $\pm i\omega_j$  özdeğerlerinden geriye kalan özdeğerlerin reel kısmı negatif olduğu için  $2i\omega_j$ ,  $A(0)$  operatörünün bir özdeğeri değildir. Dolayısıyla,  $[A(0)]^{-1}$  ve  $[2i\omega_j I - A(0)]^{-1}$  mevcuttur. Bu nedenle, (4.62) denklemlerinden elde edilecek  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$ ,  $\mathbf{W}_{11}(\theta; 0)$

ve  $\mathbf{W}_{02}(\theta; 0)$  vektörleri tektir. Görüldüğü gibi tek olan bu vektörleri hesaplamak için  $\mathbf{H}_{20}(\theta; 0)$ ,  $\mathbf{H}_{11}(\theta; 0)$  ve  $\mathbf{H}_{02}(\theta; 0)$  vektörlerine ihtiyaç vardır. Bu vektörleri verecek eşitlikler,  $g(z, \bar{z}; 0)$  ve  $\mathbf{H}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonlarının sırasıyla (4.53) ve (4.61) ile tanımlanan Taylor serilerinin (4.59) denkleminde yerine yazılması ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{H}_{20}(\theta; 0) = \begin{cases} -g_{20}(0)\mathbf{q}(\theta) - \bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(\theta), & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ 2 \begin{pmatrix} h_{20_1}(0) \\ h_{20_2}(0) \end{pmatrix} - g_{20}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0), & \theta = 0 \text{ ise,} \end{cases} \quad (4.63a)$$

$$\mathbf{H}_{11}(\theta; 0) = \begin{cases} -g_{11}(0)\mathbf{q}(\theta) - \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(\theta), & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ \begin{pmatrix} h_{11_1}(0) \\ h_{11_2}(0) \end{pmatrix} - g_{11}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0), & \theta = 0 \text{ ise,} \end{cases} \quad (4.63b)$$

$$\mathbf{H}_{02}(\theta; 0) = \begin{cases} -g_{02}(0)\mathbf{q}(\theta) - \bar{g}_{20}(0)\bar{\mathbf{q}}(\theta), & \theta \in [-\tau, 0) \text{ ise} \\ 2 \begin{pmatrix} h_{02_1}(0) \\ h_{02_2}(0) \end{pmatrix} - g_{02}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{20}(0)\bar{\mathbf{q}}(0), & \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.63c)$$

Buradaki  $\mathbf{q}$  özvektörünün formülü (4.44);  $\mathbf{h}_{20}(0)$ ,  $\mathbf{h}_{11}(0)$  ve  $\mathbf{h}_{02}(0)$  vektörlerinin formülleri (4.57);  $g_{20}(0)$ ,  $g_{11}(0)$  ve  $g_{02}(0)$  katsayılarının formülleri (4.58) ile verilmiştir.

Şimdi,  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$ ,  $\mathbf{W}_{11}(\theta; 0)$  ve  $\mathbf{W}_{02}(\theta; 0)$  vektörlerine ait formülleri bulalım.

### $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$ vektörünün hesaplanması

$A(0)$  operatörünün tanımı (4.32a) ve  $\mathbf{H}_{20}(\theta; 0)$  vektörünün tanımı (4.63a) kullanılarak (4.62a) eşitliğinden  $\theta \in [-\tau, 0)$  iken

$$\frac{d\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)}{d\theta} - 2i\omega_j \mathbf{W}_{20}(\theta; 0) = g_{20}(0)\mathbf{q}(\theta) + \bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(\theta)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. İntegral çarpanı  $e^{-2i\omega_j\theta}$  kullanılarak  $\mathbf{K}_{20}$  integral sabiti olmak üzere bu denklemin çözümü

$$\mathbf{W}_{20}(\theta; 0) = -\frac{1}{i\omega_j} g_{20}(0)\mathbf{q}(0)e^{i\omega_j\theta} - \frac{1}{3i\omega_j} \bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)e^{-i\omega_j\theta} + \mathbf{K}_{20}e^{2i\omega_j\theta} \quad (4.64)$$

olur.

Şimdi  $\mathbf{K}_{20}$  sabitini bulalım. Öncelikle,  $\theta = 0$  iken (4.64) çözümüne  $A(0)$  operatörü uygulanırsa Açıklama 4.3'ten  $A(0)\mathbf{q}(0) = A(0)\bar{\mathbf{q}}(0)$  olduğu için

$$\begin{aligned}
A(0)\mathbf{W}_{20}(0;0) &= \int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)\mathbf{W}_{20}(\nu;0) \\
&= \int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu) \left[ \underbrace{-\frac{1}{i\omega_j}g_{20}(0)\mathbf{q}(0)e^{i\omega_j\nu}}_{\mathbf{q}(\nu)} - \frac{1}{3i\omega_j}\bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)e^{-i\omega_j\nu}}_{\bar{\mathbf{q}}(\nu)} + \mathbf{K}_{20}e^{2i\omega_j\nu} \right] \\
&= -\frac{1}{i\omega_j}g_{20}(0)\int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)\mathbf{q}(\nu) - \frac{1}{3i\omega_j}\bar{g}_{02}(0)\int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)\bar{\mathbf{q}}(\nu) + \mathbf{K}_{20}\int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)e^{2i\omega_j\nu} \\
&= -\frac{1}{i\omega_j}g_{20}(0)A(0)\mathbf{q}(0) - \frac{1}{3i\omega_j}\bar{g}_{02}(0)A(0)\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{K}_{20}\int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)e^{2i\omega_j\nu} \\
&= \underbrace{-g_{20}(0)\mathbf{q}(0)}_{i\omega_j\mathbf{q}(0)} + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{K}_{20}\int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)e^{2i\omega_j\nu} \quad \underbrace{-i\omega_j\mathbf{q}(0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç ile  $\theta = 0$  iken (4.62a) eşitliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned}
[2i\omega_j I - A(0)]\mathbf{W}_{20}(0;0) &= 2i\omega_j\mathbf{W}_{20}(0;0) - A(0)\mathbf{W}_{20}(0;0) \\
&= 2i\omega_j \left[ -\frac{1}{i\omega_j}g_{20}(0)\mathbf{q}(0) - \frac{1}{3i\omega_j}\bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{K}_{20} \right] \\
&\quad + g_{20}(0)\mathbf{q}(0) - \frac{1}{3}\bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) - \mathbf{K}_{20}\int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)e^{2i\omega_j\nu} \\
&= -g_{20}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{K}_{20} \left[ 2i\omega_j I - \int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)e^{2i\omega_j\nu} \right]
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, (4.63a) denklemi  $\theta = 0$  iken (4.62a) eşitliğinin sağ tarafını

$$\mathbf{H}_{20}(0;0) = 2 \begin{pmatrix} h_{20_1}(0) \\ h_{20_2}(0) \end{pmatrix} - g_{20}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{20}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)$$

olarak verir. Böylece, (4.62a) denkleminin yukarıda elde edilen sağ ve sol tarafları birbirine eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
&-g_{20}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{02}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{K}_{20} \left[ 2i\omega_j I - \int_{-\tau}^0 d\eta(0,\nu)e^{2i\omega_j\nu} \right] \\
&= 2 \begin{pmatrix} h_{20_1}(0) \\ h_{20_2}(0) \end{pmatrix} - g_{20}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{20}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)
\end{aligned}$$

olduğu için



$$\mathbf{K}_{20} \left[ 2i\omega_j I - \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) e^{2i\omega_j \nu} \right] = 2 \begin{pmatrix} h_{20_1}(0) \\ h_{20_2}(0) \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

sonucuna ulaşılır.  $d\eta(\mu, \theta)$  fonksiyonunun (4.31) tanımı kullanılarak (4.65) denklemindeki integral

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) e^{2i\omega_j \nu} &= B \int_{-\tau}^0 \delta(\nu) e^{2i\omega_j \nu} d\nu + C \int_{-\tau}^0 \delta(\nu + \tau_{j,0}) e^{2i\omega_j \nu} d\nu \\ &= B + C e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \\ &= \begin{pmatrix} -d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 + k_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & k_3 + k_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \\ l_1 + l_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & -d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 + l_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda

$$M_{20} = \begin{pmatrix} 2i\omega_j + d_1 \frac{n^2}{\ell^2} - k_1 - k_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & -k_3 - k_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \\ -l_1 - l_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & 2i\omega_j + d_2 \frac{n^2}{\ell^2} - l_3 - l_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere (4.65) denklemi

$$\mathbf{K}_{20} = 2(M_{20})^{-1} \begin{pmatrix} h_{20_1}(0) \\ h_{20_2}(0) \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

eşitliğine dönüşür. Şimdi,  $D_{20} = \det(M_{20})$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} D_{20} &= -4\omega_j^2 + 2i\omega_j \left[ (d_1 + d_2) \frac{n^2}{\ell^2} - (k_1 + l_3) - (k_2 + l_4) e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \right] \\ &\quad + d_1 d_2 \frac{n^4}{\ell^4} - (d_1 l_3 + d_2 k_1) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_3 - k_3 l_1) \\ &\quad + \left[ -(d_1 l_4 + d_2 k_2) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_4 - k_4 l_1) + (k_2 l_3 - k_3 l_2) \right] e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \\ &\quad + (k_2 l_4 - k_4 l_2) e^{-4i\omega_j \tau_{j,0}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.  $D_{20}$  (4.13b) karakteristik denkleminin katsayıları cinsinden ise

$$D_{20} = -4\omega_j^2 + 2i\omega_j (A + C e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}}) + D + B e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} + H e^{-4i\omega_j \tau_{j,0}}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca Teorem 4.1'in  $\mathbf{V}_1$  koşulundan dolayı  $H = 0$  olduğu için  $D_{20}$  aşağıdaki formülle hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
D_{20} &= -4\omega_j^2 + 2i\omega_j \left[ (d_1 + d_2) \frac{n^2}{\ell^2} - (k_1 + l_3) - (k_2 + l_4) e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \right] \\
&\quad + d_1 d_2 \frac{n^4}{\ell^4} - (d_1 l_3 + d_2 k_1) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_3 - k_3 l_1), \\
&\quad + \left[ -(d_1 l_4 + d_2 k_2) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_4 - k_4 l_1) + (k_2 l_3 - k_3 l_2) \right] e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \\
&= -4\omega_j^2 + 2i\omega_j (A + C e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}}) + D + B e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}}.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

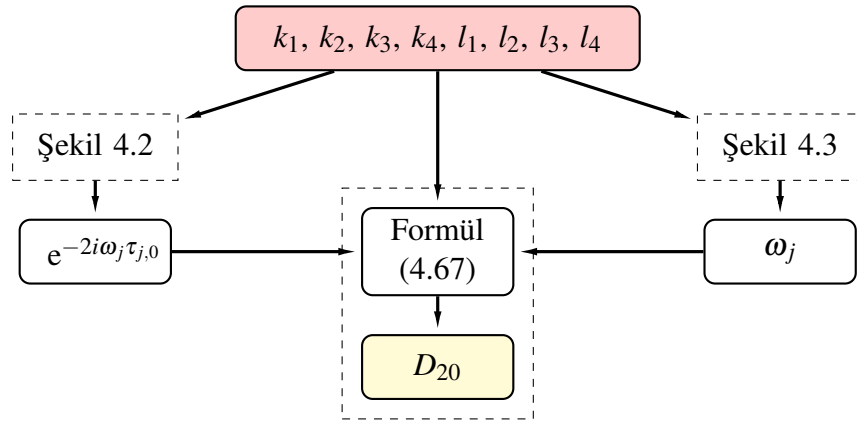
Böylece

$$(M_{20})^{-1} = \frac{1}{D_{20}} \begin{pmatrix} 2i\omega_j + d_2 \frac{n^2}{\ell^2} - l_3 - l_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & k_3 + k_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \\ l_1 + l_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & 2i\omega_j + d_1 \frac{n^2}{\ell^2} - k_1 - k_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, bu ifade (4.66) denkleminde yerine yazıldığında  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$  vektörünün (4.64) formülündeki bilinmeyen sabit

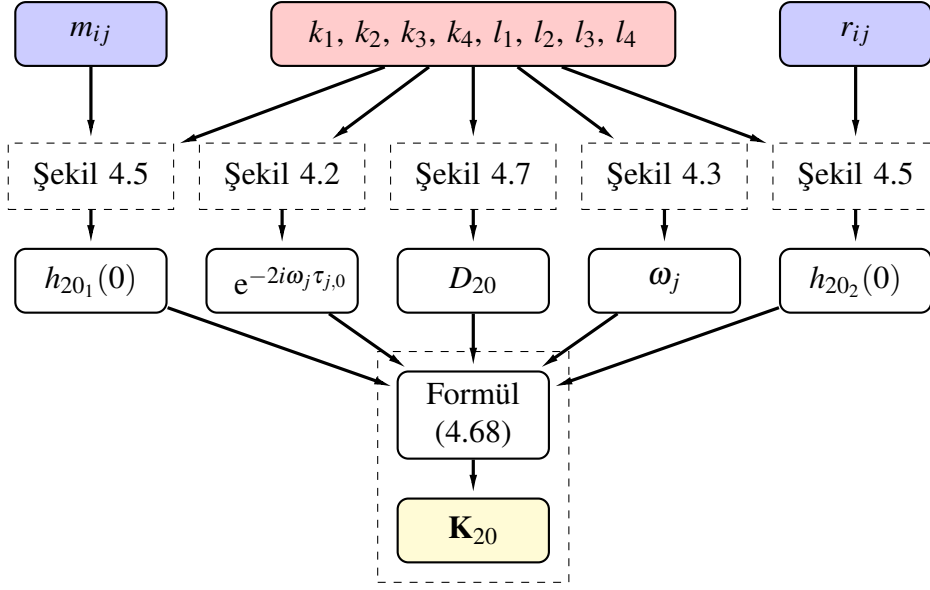
$$\mathbf{K}_{20} = \frac{2}{D_{20}} \begin{pmatrix} 2i\omega_j + d_2 \frac{n^2}{\ell^2} - l_3 - l_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & k_3 + k_4 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \\ l_1 + l_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} & 2i\omega_j + d_1 \frac{n^2}{\ell^2} - k_1 - k_2 e^{-2i\omega_j \tau_{j,0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{20_1}(0) \\ h_{20_2}(0) \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.7:  $D_{20}$  sabitini hesaplama diyagramı.

Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 sırasıyla  $D_{20}$  sabitinin ve  $\mathbf{K}_{20}$  vektörünün (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , ve  $m_{ij}, r_{ij}, 1 \leq i \leq 4, i \leq j \leq 4$ , katsayılarını kullanarak nasıl hesaplanacağını göstermektedir.



Şekil 4.8:  $\mathbf{K}_{20}$  vektörünü hesaplama diyagramı.

**Açıklama 4.4.**  $\mathbf{K}_{20}$  vektörü (4.68) ile tanımlanmak üzere  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$  vektörünün (4.64) formülü

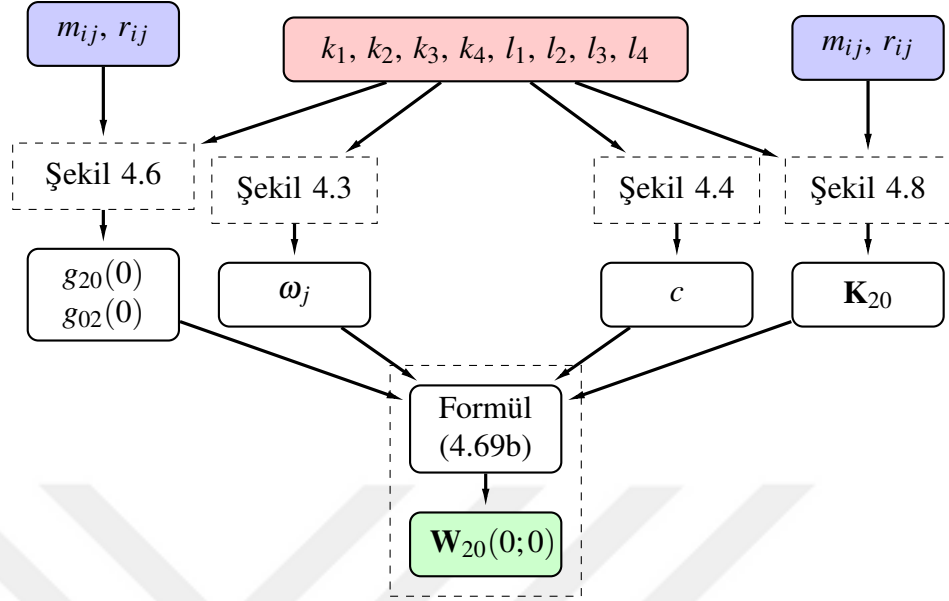
$$\mathbf{W}_{20}(\theta; 0) = -\frac{1}{i\omega_j} g_{20}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_j\theta} - \frac{1}{3i\omega_j} \bar{g}_{02}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} e^{-i\omega_j\theta} + \mathbf{K}_{20} e^{2i\omega_j\theta} \quad (4.69a)$$

olur. Ayrıca (4.57g) ve (4.57f) formüllerine bakılırsa  $\mathbf{h}_{21}(0)$  vektörünü hesaplamak için  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$  vektörünü her  $\theta \in [-\tau, 0]$  için hesaplamak gerekmediği, sadece  $\mathbf{W}_{20}(0; 0)$  ve  $\mathbf{W}_{20}(-\tau_{j,0}; 0)$  vektörlerinin hesaplanmasının yeterli olacağı görülür. Bu vektörlere ait formüller (4.69a) formülünden aşağıdaki gibi elde edilir:

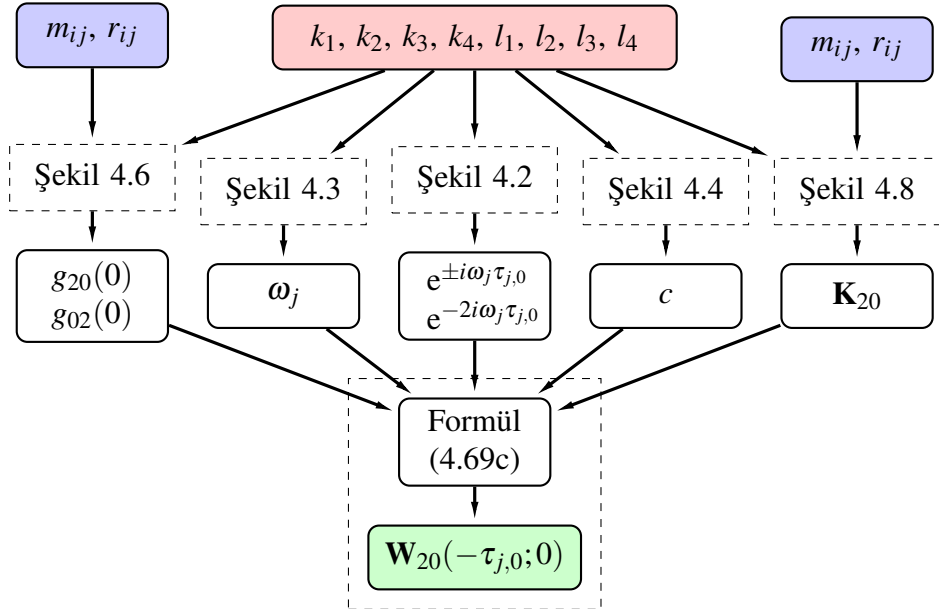
$$\mathbf{W}_{20}(0; 0) = -\frac{1}{i\omega_j} g_{20}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} - \frac{1}{3i\omega_j} \bar{g}_{02}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_{20}, \quad (4.69b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{20}(-\tau_{j,0}; 0) &= -\frac{1}{i\omega_j} g_{20}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{-i\omega_j\tau_{j,0}} - \frac{1}{3i\omega_j} \bar{g}_{02}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} e^{i\omega_j\tau_{j,0}} \\ &+ \mathbf{K}_{20} e^{-2i\omega_j\tau_{j,0}}. \end{aligned} \quad (4.69c)$$

Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 sırasıyla  $\mathbf{W}_{20}(0; 0)$  ve  $\mathbf{W}_{20}(-\tau_{j,0}; 0)$  vektörlerinin (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki  $k_i$ ,  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , ve  $m_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $i \leq j \leq 4$ , katsayılarını kullanarak nasıl hesaplanacağını özetlemektedir.



Şekil 4.9:  $\mathbf{W}_{20}(0;0)$  vektörünü hesaplama diyagramı.



Şekil 4.10:  $\mathbf{W}_{20}(-\tau_{j,0};0)$  vektörünü hesaplama diyagramı.

### $\mathbf{W}_{11}(\theta;0)$ vektörünün hesaplanması

$\theta \in [-\tau, 0)$  iken (4.62b) eşitliğinden  $A(0)$  operatörünün tanımı (4.32a) ve  $\mathbf{H}_{11}(\theta;0)$  vektörünün tanımı (4.63b) kullanılarak

$$\frac{d\mathbf{W}_{11}(\theta;0)}{d\theta} = g_{11}(0)\mathbf{q}(\theta) + \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(\theta)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem,  $\mathbf{K}_{11}$  integral sabiti olmak üzere

$$\mathbf{W}_{11}(\theta;0) = \frac{1}{i\omega_j}g_{11}(0)\mathbf{q}(0)e^{i\omega_j\theta} - \frac{1}{i\omega_j}\bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)e^{-i\omega_j\theta} + \mathbf{K}_{11} \quad (4.70)$$

çözümüne sahiptir.  $\mathbf{K}_{11}$  vektörünü bulmak için  $\theta = 0$  iken (4.70) çözümüne  $A(0)$  operatörü uygulandığında Açıklama 4.3'ten  $A(0)\mathbf{q}(0) = A(0)\bar{\mathbf{q}}(0)$  olduğu için

$$\begin{aligned} A(0)\mathbf{W}_{11}(0;0) &= \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu)\mathbf{W}_{11}(\nu;0) \\ &= \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) \left[ \frac{1}{i\omega_j}g_{11}(0)\mathbf{q}(0)e^{i\omega_j\nu} - \frac{1}{i\omega_j}\bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)e^{-i\omega_j\nu} + \mathbf{K}_{11} \right] \\ &= \frac{1}{i\omega_j}g_{11}(0) \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu)\mathbf{q}(\nu) - \frac{1}{i\omega_j}\bar{g}_{11}(0) \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu)\bar{\mathbf{q}}(\nu) + \mathbf{K}_{11} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) \\ &= \frac{1}{i\omega_j}g_{11}(0)A(0)\mathbf{q}(0) - \frac{1}{i\omega_j}\bar{g}_{11}(0)A(0)\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{K}_{11} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) \\ &= g_{11}(0)\mathbf{q}(0) + \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{K}_{11} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu sonuç ile  $\theta = 0$  iken (4.62b) eşitliğinin sol tarafı

$$-A(0)\mathbf{W}_{11}(0;0) = -g_{11}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) - \mathbf{K}_{11} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu)$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan,  $\theta = 0$  iken (4.62b) eşitliğinin sağ tarafı, (4.63b) denkleminde

$$\mathbf{H}_{11}(0;0) = \begin{pmatrix} h_{11_1}(0) \\ h_{11_2}(0) \end{pmatrix} - g_{11}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)$$

olarak bulunur. Böylece, (4.62b) denkleminin elde edilen sağ ve sol tarafları birbirine

eşitlenirse

$$-g_{11}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0) - \mathbf{K}_{11} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) = \begin{pmatrix} h_{11_1}(0) \\ h_{11_2}(0) \end{pmatrix} - g_{11}(0)\mathbf{q}(0) - \bar{g}_{11}(0)\bar{\mathbf{q}}(0)$$

olduğu için

$$\mathbf{K}_{11} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) = - \begin{pmatrix} h_{11_1}(0) \\ h_{11_2}(0) \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

eşitliği elde edilir. (4.31) ile tanımlanan  $d\eta(\mu, \theta)$  fonksiyonu kullanılarak (4.71) denklemindeki integral

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 d\eta(0, \nu) &= B \int_{-\tau}^0 \delta(\nu) d\nu + C \int_{-\tau}^0 \delta(\nu + \tau_{j,0}) d\nu \\ &= B + C \\ &= \begin{pmatrix} -d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 + k_2 & k_3 + k_4 \\ l_1 + l_2 & -d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 + l_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 + k_2 & k_3 + k_4 \\ l_1 + l_2 & -d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 + l_4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere (4.71) denklemi

$$\mathbf{K}_{11} = -(M_{11})^{-1} \begin{pmatrix} h_{11_1}(0) \\ h_{11_2}(0) \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

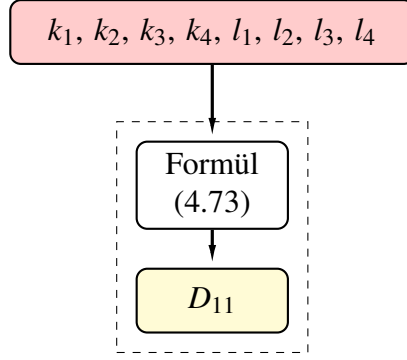
eşitliğine dönüşür.  $D_{11} = \det(M_{11})$  ile tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} D_{11} &= -(d_1 l_4 + d_2 k_2) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_4 - k_4 l_1) + (k_2 l_3 - k_3 l_2) \\ &\quad + d_1 d_2 \frac{n^4}{\ell^4} - (d_1 l_3 + d_2 k_1) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_3 - k_3 l_1) \\ &\quad + (k_2 l_4 - k_4 l_2) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.  $D_{11}$  (4.13b) karakteristik denkleminin katsayıları cinsinden ise

$$D_{11} = B + D + H$$

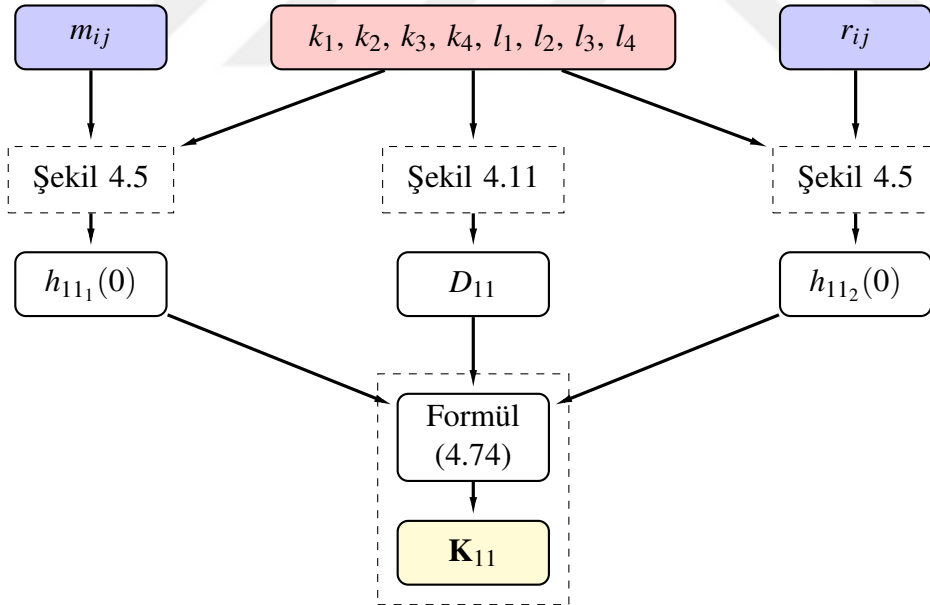
şeklinde ifade edilir.



Şekil 4.11:  $D_{11}$  sabitini hesaplama diyagramı.

Ayrıca Teorem 4.1'in  $\mathbf{V}_1$  koşulundan dolayı  $H = 0$  olduğu için  $D_{11}$  aşağıdaki formülle hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= -(d_1 l_4 + d_2 k_2) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_4 - k_4 l_1) + (k_2 l_3 - k_3 l_2) \\
 &\quad + d_1 d_2 \frac{n^4}{\ell^4} - (d_1 l_3 + d_2 k_1) \frac{n^2}{\ell^2} + (k_1 l_3 - k_3 l_1) \\
 &= B + D.
 \end{aligned} \tag{4.73}$$



Şekil 4.12:  $\mathbf{K}_{11}$  vektörünü hesaplama diyagramı.

Böylece

$$(M_{11})^{-1} = \frac{1}{D_{11}} \begin{pmatrix} -d_2 \frac{n^2}{\ell^2} + l_3 + l_4 & -k_3 - k_4 \\ -l_1 - l_2 & -d_1 \frac{n^2}{\ell^2} + k_1 + k_2 \end{pmatrix}$$

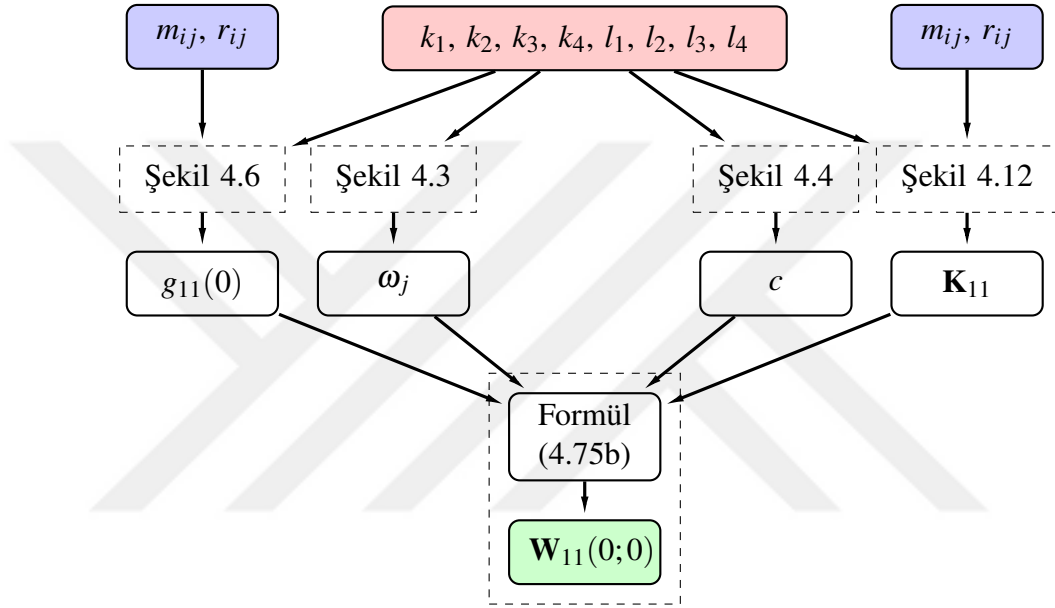
olarak elde edilir. Bu ifade (4.72) denkleminde yerine yazılırsa  $\mathbf{W}_{11}(\theta; 0)$  vektörünün

(4.70) formülündeki bilinmeyen sabit için

$$\mathbf{K}_{11} = \frac{1}{D_{11}} \begin{pmatrix} d_2 \frac{n^2}{\ell^2} - l_3 - l_4 & k_3 + k_4 \\ l_1 + l_2 & d_1 \frac{n^2}{\ell^2} - k_1 - k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11_1}(0) \\ h_{11_2}(0) \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

formülüne ulaşılır.

Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 sırasıyla  $D_{11}$  sabitinin ve  $\mathbf{K}_{11}$  vektörünün (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki  $k_i$ ,  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , ve  $m_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $i \leq j \leq 4$ , katsayılarını kullanarak nasıl hesaplanacağını göstermektedir.



Şekil 4.13:  $\mathbf{W}_{11}(0;0)$  vektörünü hesaplama diyagramı.

**Açıklama 4.5.**  $\mathbf{W}_{11}(\theta;0)$  vektörünün (4.70) formülü

$$\mathbf{W}_{11}(\theta;0) = \frac{1}{i\omega_j} g_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_j \theta} - \frac{1}{i\omega_j} \bar{g}_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} e^{-i\omega_j \theta} + \mathbf{K}_{11} \quad (4.75a)$$

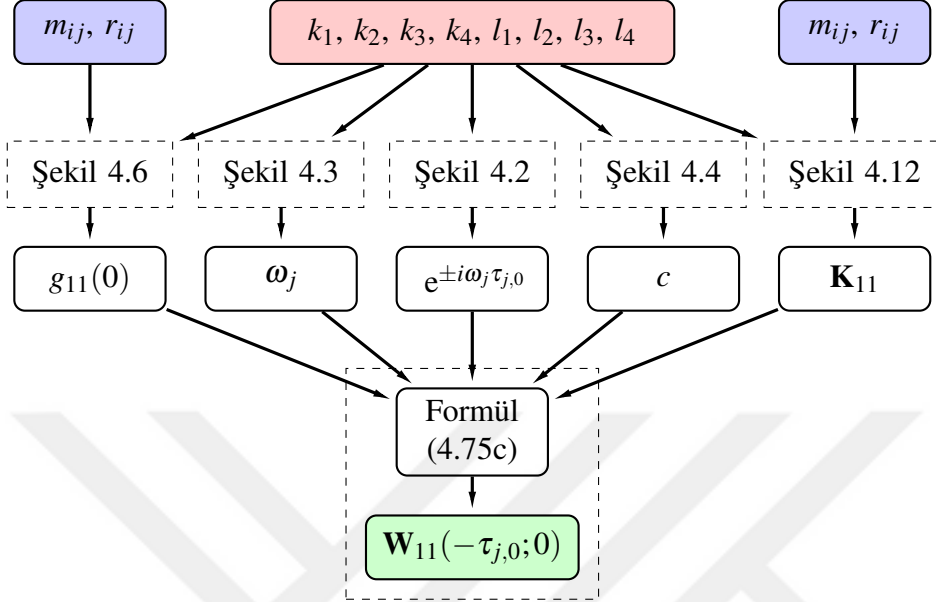
olur. Ayrıca (4.57g) ve (4.57f) formüllerine bakılırsa  $\mathbf{h}_{21}(0)$  vektörünü hesaplamak için  $\mathbf{W}_{11}(\theta;0)$  vektörünü her  $\theta \in [-\tau, 0]$  için hesaplamak gerekmediği, sadece  $\mathbf{W}_{11}(0;0)$  ve  $\mathbf{W}_{11}(-\tau_{j,0};0)$  vektörlerinin hesaplanmasının yeterli olacağı görülür. Bu vektörlere ait formüller (4.75a) formülünden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{W}_{11}(0;0) = \frac{1}{i\omega_j} g_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} - \frac{1}{i\omega_j} \bar{g}_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_{11}, \quad (4.75b)$$

$$\mathbf{W}_{11}(-\tau_{j,0};0) = \frac{1}{i\omega_j} g_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{-i\omega_j \tau_{j,0}} - \frac{1}{i\omega_j} \bar{g}_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} e^{i\omega_j \tau_{j,0}} + \mathbf{K}_{11}. \quad (4.75c)$$



Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 sırasıyla  $\mathbf{W}_{11}(0;0)$  ve  $\mathbf{W}_{11}(-\tau_{j,0};0)$  vektörlerinin (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , ve  $m_{ij}, r_{ij}, 1 \leq i \leq 4, i \leq j \leq 4$ , katsayılarını nasıl hesaplanacağını özetlemektedir.



Şekil 4.14:  $\mathbf{W}_{11}(-\tau_{j,0};0)$  vektörünü hesaplama diyagramı.

**Açıklama 4.6.**  $g_{21}(0)$  katsayısını hesaplamak için (4.58d) formülüünden  $\mathbf{h}_{21}(0)$  vektörüne ihtiyacımız olduğunu biliyoruz.  $\mathbf{W}_{20}(0;0)$ ,  $\mathbf{W}_{20}(-\tau_{j,0};0)$ ,  $\mathbf{W}_{11}(0;0)$  ve  $\mathbf{W}_{11}(-\tau_{j,0};0)$  vektörlerini hesapladığımızda göre artık  $\mathbf{h}_{21}(0)$  vektörünü hesaplayabiliriz. Şekil 4.15 bu hesaplama için izlenecek yolu göstermektedir.

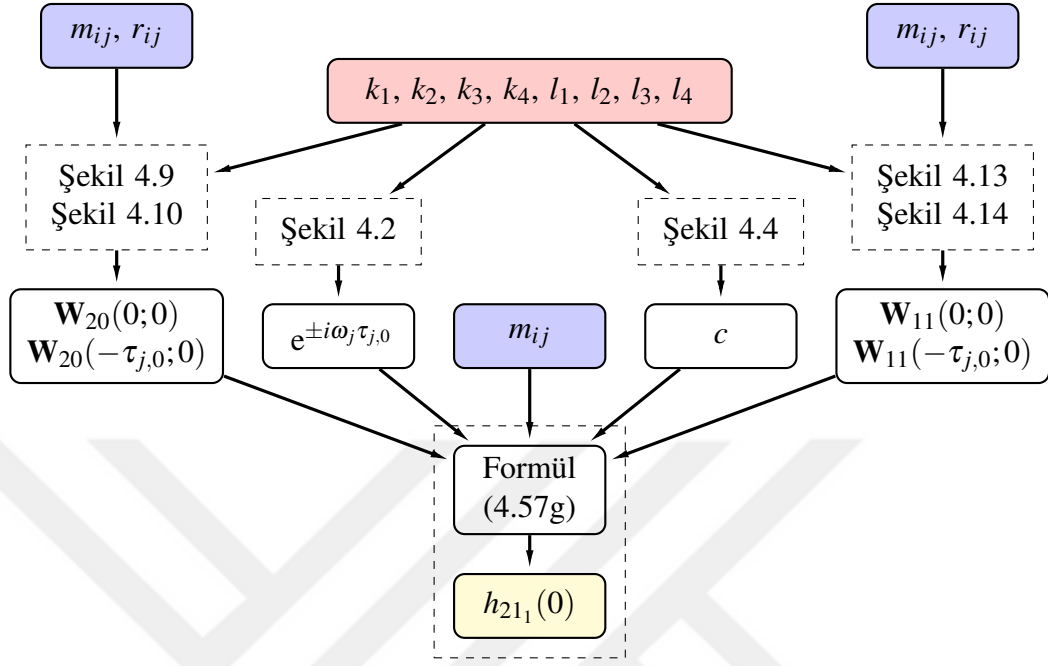
**Sonuç 4.11.** Şekil 4.16'da görüldüğü üzere  $g_{21}(0)$  katsayısını hesaplamak için (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci mertebeden türevlere karşılık gelen  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , katsayılarını ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen  $m_{ij}, r_{ij}, 1 \leq i \leq 4, i \leq j \leq 4$ , katsayılarını bilmek yeterlidir. Böylece, bütün bu adımların tekrarına gerek kalmadan sadece (4.2) ile tanımlanan

$$k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$$

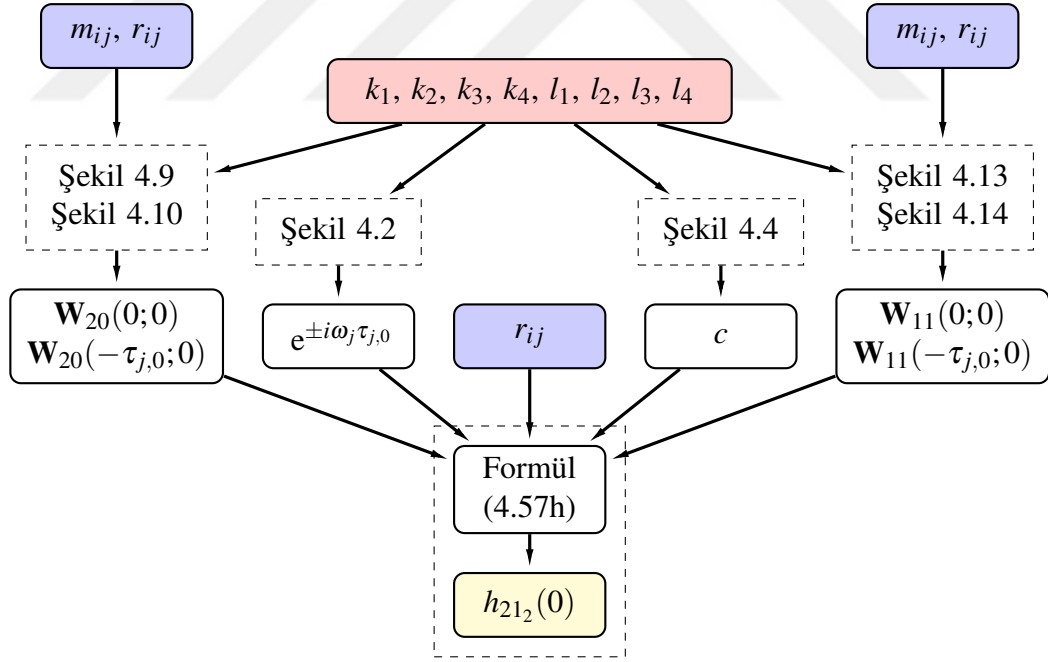
ve (4.30) ile tanımlanan

$$m_{ij}, r_{ij}, 1 \leq i \leq 4, i \leq j \leq 4$$

katsayılarını kullanarak Şekil 4.16'da verilen adımlarla (4.1) sisteminin dinamiği hakkında bilgi sahibi olmaya yarayacak  $g_{21}(0)$  katsayısı hesaplanabilir.

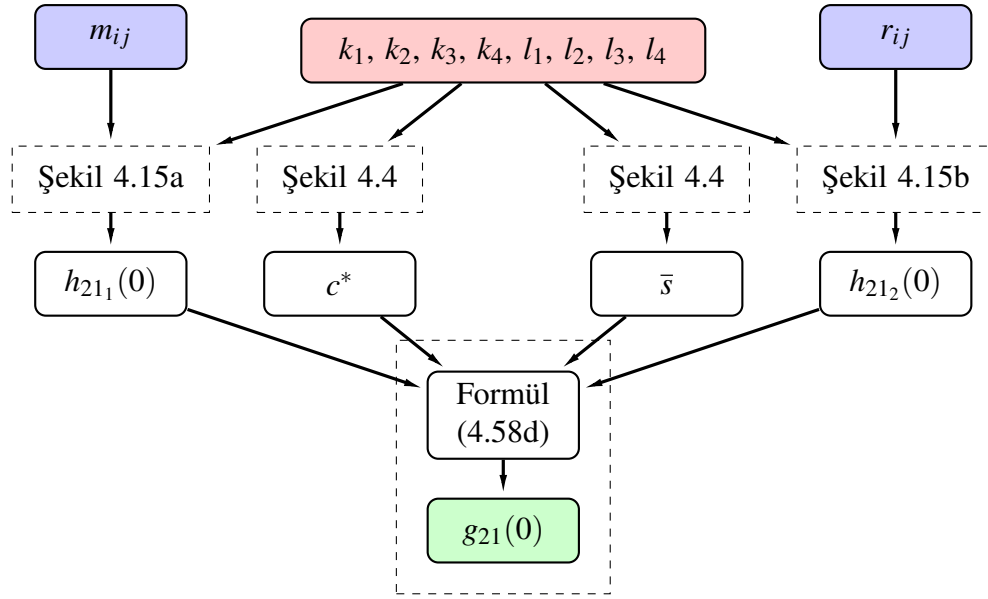


(a)



(b)

Şekil 4.15: (a)  $h_{21_1}(0)$  katsayısını hesaplama diyagramı.  
 (b)  $h_{21_2}(0)$  katsayısını hesaplama diyagramı.



Şekil 4.16:  $g_{21}(0)$  katsayısını hesaplama diyagramı.

### $\mathbf{W}_{02}(\theta; 0)$ vektörünün hesaplanması

Dikkat edilirse (4.57e) ve (4.57f)'den

$$h_{02_1}(0) = \bar{h}_{20_1} \quad \text{ve} \quad h_{02_2}(0) = \bar{h}_{20_2}$$

olduğu için (4.63c) tanımından

$$\mathbf{H}_{02}(\theta; 0) = \bar{\mathbf{H}}_{20}(\theta; 0)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, (4.62c) eşitliği

$$-\overline{[2i\omega_j I + A(0)] \mathbf{W}_{02}(\theta; 0)} = \bar{\mathbf{H}}_{02}(\theta; 0) = \mathbf{H}_{20}(\theta; 0)$$

denklemini verir. Diğer taraftan Açıklama 4.3'ten  $\overline{A(0) \mathbf{W}_{02}(\theta; 0)} = A(0) \bar{\mathbf{W}}_{02}(\theta; 0)$  olduğu için

$$-\overline{[2i\omega_j I + A(0)] \mathbf{W}_{02}(\theta; 0)} = [2i\omega_j I - A(0)] \bar{\mathbf{W}}_{02}(\theta; 0)$$

sağlanır. Bu eşitliklerin sağ tarafları ile

$$[2i\omega_j I - A(0)] \bar{\mathbf{W}}_{02}(\theta; 0) = \mathbf{H}_{20}(\theta; 0) \quad (4.76)$$

elde edilir. Son denklem (4.62a) eşitliğinden başka bir şey değildir. Ayrıca Sonuç 4.5'te açıklandığı üzere basit  $\pm i\omega_j$  özdeğerlerinden geriye kalan özdeğerlerin reel kısmı negatiftir. Dolayısıyla  $[2i\omega_j I - A(0)]^{-1}$  mevcuttur. Bu nedenle, (4.76) bir tek çözüme

sahiptir. Bu çözüm ise  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$  vektörüdür. Böylece,

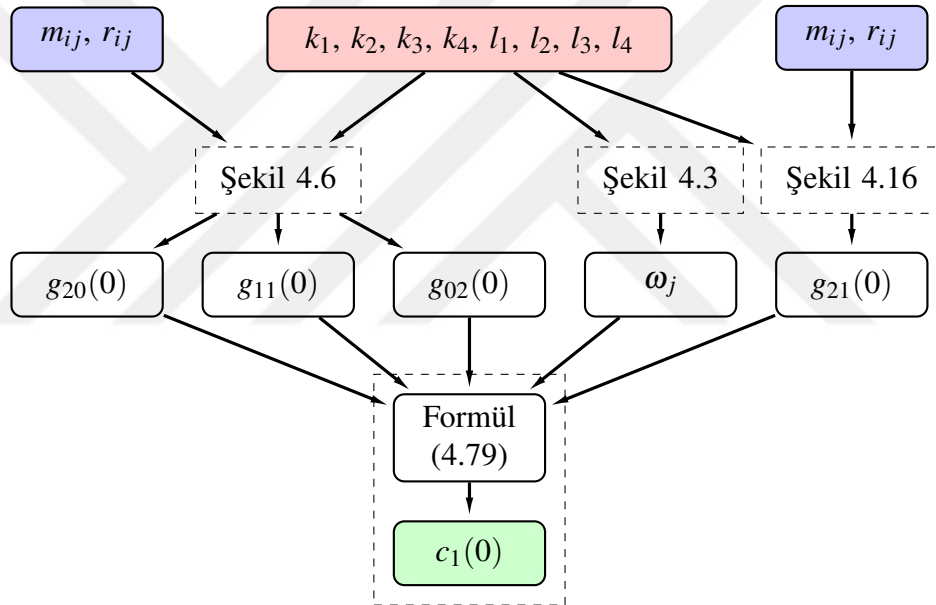
$$\mathbf{W}_{02}(\theta; 0) = \overline{\mathbf{W}}_{20}(\theta; 0) \quad (4.77)$$

eşitliğine ulaşılır.

**Sonuç 4.12.** Sistem (4.1)'in  $\mathbf{W}^c(0)$  merkez manifoldunu temsil eden  $\mathbf{W}(z, \bar{z}; 0)$  fonksiyonunun  $(0, 0)$  daki ikinci dereceden Taylor polinomu  $\mathbf{W}_2(z, \bar{z}; 0)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$  için

$$\mathbf{W}_2(z, \bar{z}; 0) = \mathbf{W}_{20}(\theta; 0) \frac{z^2}{2} + \mathbf{W}_{11}(\theta; 0) z\bar{z} + \overline{\mathbf{W}}_{20}(\theta; 0) (\theta; 0) \frac{\bar{z}^2}{2} \quad (4.78)$$

olur.  $\mathbf{W}_{20}(\theta; 0)$  ve  $\mathbf{W}_{11}(\theta; 0)$  vektörlerinin formülleri sırasıyla (4.69a) ve (4.75a) ile verilmiştir.



Şekil 4.17:  $c_1(0)$  Poincaré normal form katsayısını hesaplama diyagramı.

**Teorem 4.3** (Periyodik Çözümlerin Özellikleri).

(4.1) sisteminin Teorem 4.1'de ve Teorem 4.2'de verilen  $\mathbf{V}_1$  ve  $\mathbf{V}_2$  koşullarına ek olarak  $\mathbf{V}_3$  veya  $\mathbf{V}_4$  koşullarından birini sağladığını kabul edelim. Bu takdirde,

a) Poincaré normal form katsayısı

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_j} \left( g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}(0) \quad (4.79)$$

Şekil 4.17'de verilen diyagram ile sadece (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci mertebeden türevlere karşılık gelen

$k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , katsayılarını ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen  $m_{ij}, r_{ij}, 1 \leq i \leq 4, i \leq j \leq 4$ , katsayılarını kullanarak hesaplanabilir.

- b)** Bir  $\epsilon_p > 0$  mevcuttur ve her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  için  $\tau_{j,0}$  (4.21) ile tanımlanmak üzere (4.1) sisteminin periyodik çözümü çatallanma parametresi  $\tau$

$$\tau_{j,0} + \mu(\epsilon) = \tau_{j,0} + \mu_2 \epsilon^2 + \mu_4 \epsilon^4 + \text{YMT}$$

değerine eşit olduğunda ortaya çıkar.

Kabul edelim ki aşağıdaki koşul sağlansın:

**V<sub>5</sub>.**  $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$ .

Bu durumda, **V<sub>3</sub>** veya **V<sub>4</sub>** koşullarından hangisinin sağlandığına bağlı olarak bir  $j \in I_4$  için  $\alpha'_j(\tau_{j,0})$  ifadesi (4.24a) ile verilmek ve

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}(c_1(0))}{\alpha'_j(\tau_{j,0})} \quad (4.80)$$

olmak üzere yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için periyodik çözümler

**b<sub>1</sub>)**  $\mu_2 > 0$  ise  $\tau = \tau_{j,0}$  çatallanma değerinden sonra,

**b<sub>2</sub>)**  $\mu_2 < 0$  ise  $\tau = \tau_{j,0}$  çatallanma değerinden önce

ortaya çıkar.

**c)** Periyodik çözümler

**c<sub>1</sub>)**  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  ise kararsız (Hopf çatallanma subkritik),

**c<sub>2</sub>)**  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  ise yerel (lokal) asimptotik kararlıdır (Hopf çatallanma süperkritiktir).

**d)**  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  için periyodik çözümünün periyodu

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega_j} (1 + T_2 \epsilon^2 + T_4 \epsilon^4 + \text{YMT})$$

dir. Dolayısıyla, **V<sub>3</sub>** veya **V<sub>4</sub>** koşullarından hangisinin sağlandığına bağlı olarak bir  $j \in I_4$  için  $\omega'_j(\tau_{j,0})$  ifadesi (4.24b) ile verilmek ve

$$T_2 = -\frac{\omega'_j(\tau_{j,0})\mu_2 + \text{Im}(c_1(0))}{\omega_j} \quad (4.81)$$

olmak üzere yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için periyot

$$T(\epsilon) \approx \frac{2\pi}{\omega_j} \quad (4.82)$$

olur. Ayrıca periyot  $T(\epsilon)$ ,

- d<sub>1</sub>)**  $T_2 > 0$  ise artan,
- d<sub>2</sub>)**  $T_2 < 0$  ise azalmandır.





## 5. TEK GECİKME İÇEREN REAKSİYON-DİFÜZYON SİSTEMLERİNDE HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ UYGULAMALARI

Sistem (4.1), gecikme terimi içeren  $2 \times 2$  reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin bir sınıfını temsil etmektedir. Bölüm 4'te, sadece (4.1) sistemindeki  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci mertebeden türevlere karşılık gelen  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen  $m_{ij}, r_{ij}, 1 \leq i \leq 4, i \leq j \leq 4$ , katsayılarını hesaplayarak (4.1) sistemi için Hopf çatallanmanın varlık koşullarını belirleyebileceğimizi ve Hopf çatallanmanın yön analizi için gerekli değerleri hesaplayabileceğimizi gösterdik.

Bu bölümde ise önceki bölümde elde edilen algoritma farklı alanlardan dört farklı probleme uygulanacaktır. Öncelikle, Bi ve Ruan (2013) tarafından ele alınan gecikmeli tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modeli ile algoritma test edilecektir (Kayan ve Merdan 2017). Ardından, difüzyonun denge noktasının kararlılık yapısı üzerindeki etkisini inceleyebilmek için Zuo ve Wei (2010) tarafından çalışılan gecikmeli reaksiyon-difüzyon av-avcı modeli ele alınacaktır (Kayan ve Merdan 2017). Üçüncü olarak daha önce Merdan ve Kayan (2015) tarafından teorik analizi yapılmış gecikme içeren reaksiyon-difüzyon Lengyel-Epstein modelinin bir özel durumu için Hopf çatallanma analizi yapılarak difüzyonun Hopf çatallanmanın tipi üzerindeki etkisi incelenecektir (Kayan ve Merdan 2017). Son olarak algoritmanın yeni bir problemin Hopf çatallanma analizinde nasıl kullanılacağını görebilmek için algoritma gecikme içeren reaksiyon-difüzyon tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modeline uygulanacaktır (Kayan ve diğ. 2017).

Nümerik problemlerde, algoritmayı hızlı bir şekilde uygulayabilmek için MATLAB® programı kullanılarak Bölüm 4'te elde edilen bütün koşulların kontrolü ve formüllerin hesabını sağlayan bir kod yazılmıştır. Bu kod sayesinde nümerik problemler için  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , ve  $m_{ij}, r_{ij}, 1 \leq i \leq 4, i \leq j \leq 4$ , katsayı değerleri belirlendikten sonra hızlı bir şekilde sonuca ulaşılabilir ve farklı difüzyon katsayıları için birden fazla hesaplama kısa süre içerisinde yapılabilir. Bu bölümdeki nümerik örneklerin Hopf çatallanma varlık ve yön analizi ile ilgili bütün hesaplamalar, algoritmanın MATLAB kodu kullanılarak yapılacaktır.

### 5.1 Gecikmeli Tümör-Bağışıklık Sistemi Etkileşimi Modeli

Bağışıklık bilimi (immunoloji) ve kanser araştırmalarındaki en önemli ve zorlayıcı sorulardan biri, bağışıklık sisteminin kanser gelişimini ve ilerlemesini nasıl etkilediğidir. Bu soruya cevap arayan temel tümör<sup>1</sup>-bağışıklık sistemi etkileşimi

<sup>1</sup>Hücrelerin anormal çoğalmasıyla oluşan büyüme. Çoğalan hücreler ya o bölgede kalır (iyi huylu tümör) ya da çoğalmaya devam eden hücreler organizmanın diğer bölgelerine yayılarak metastaz yapar (habis tümör: kötü huylu tümör) (Url-14).



modelleri Kuznetsov (1996) tarafından özetlenmiştir. Bununla birlikte, hedef popülasyona sahip bağışıklık bileşenlerinin etkileşim dinamiklerini ele alan matematiksel modeller fazlasıyla idealize edilir. İlgili süreçlerin karmaşıklığı nedeniyle gerçekçi modeller oluşturmak oldukça zordur. Bu nedenle, baskın bağışıklık olaylarının bazılarını açığa çıkaran düşük boyutlu basit modeller önermek makuldür. Çalışmalarına yukarıdaki bilgilerle giriş yapan Bi ve Ruan (2013), bu noktada okuyucuya habis bir tümör ile bağışıklık sistemi arasındaki etkileşimleri tanımlayan ve konumsal olarak homojen olan matematiksel modeller üzerine Eftime ve diğ. (2010) tarafından yapılan incelemeyi tavsiye eder.

Tümör-bağışıklık sistemi etkileşimini modellemede esas alınan fikir, genellikle efektör hücrelerin<sup>1</sup> tümör hücrelerine saldırdığını ve bu hücrelerin çoğalmasının, tümör hücrelerinin mevcudiyetiyle uyarıldığını varsaymaktır. Fakat modele dahil edilmesi gereken bir gerçek daha vardır: tümör hücreleri hem yoğunluğu tümörün boyutuna bağlı olabilen bir efektör hücre akışı meydana getirir hem de efektör hücrelerin yok olmasına neden olur. Bu nedenle, çoğunlukla tümör hücrelerinin ve bağışıklık sisteminin efektör hücrelerinin etkileşimi için iki boyutlu adi diferensiyel denklem sistemleri kullanılır.

Tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modellenirken etkileşimi, avlanmadaki doyum noktasını, tümör hücrelerinin büyümesini ve efektör hücre akışını temsil eden terimleri biyolojik açıdan makul olan farklı fonksiyonlarla ifade etmek mümkündür. Bu nedenle, d'Onofrio (2005) tümör-bağışıklık sistemi etkileşimini

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) [\alpha f(x(t)) - \phi(x(t))y(t)] \\ \frac{dy}{dt} = \beta(x(t))y(t) - \mu(x(t))y(t) + \sigma q(x(t)) + \theta(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

modeli ile tanımlamış ve incelemiştir. Burada,

- $x(t)$  ve  $y(t)$  sırasıyla tümör hücrelerinin ve efektör hücrelerin  $t$  zamanındaki boyutsuz yoğunluğunu göstermektedir.
- $f(x)$  fonksiyonu, tümör hücrelerinin nispi büyüme oranını<sup>2</sup> tanımlamaktadır ve  $0 < f(0) \leq +\infty$ ,  $f'(x) \leq 0$  koşullarını sağlar. Ayrıca  $f$  azalan bir fonksiyon iken  $f(\bar{x}) = 0$  olacak şekilde  $0 < \bar{x} \leq +\infty$  vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = 0$$

dır. Bu koşullar sayesinde,  $f(x)$  yaygın olarak kullanılan tümör büyüme modellerini özetler. Örneğin, üstel modelde  $f(x) = 1$  (Wheldon, 1988), Gompertz modelinde  $f(x) = \log(A/x)$  (Laird, 1964; Marusic ve diğ., 1994; Wheldon, 1988), lojistik modelde  $f(x) = 1 - (x/A)^n$  (Marusic ve diğ., 1994),

<sup>1</sup>Belirli bir sürecin son cevabı veya işlevini yerine getiren bir hücre. Örneğin, bağışıklık sisteminin ana efektör hücreleri, aktive olmuş patojenlerin yok edilmesinde ve vücuttan çıkarılmasında rol alan lenfositler ve fagositlerdir (Url-15).

<sup>2</sup>Bir popülasyonun büyüme oranının, o popülasyonun nüfus büyüklüğüne bölünmesi ile elde edilen değere denir (Stewart, 2008).

Hart ve diğ. (1998) tarafından çalışılan modelde  $f(x) = x^{-\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 1$  ve Guiot ve diğ. (2003) tarafından çalışılan modelde  $f(x) = x^{3/4} - b$  olarak alınmıştır.

- $\phi(x)$ , efektör hücrelerin saldırısı nedeni ile tümör hücrelerinin oranında meydana gelen kayıptır ve  $\phi(x) > 0$ ,  $\phi(0) = 1$ ,  $\phi'(x) \leq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\phi(x) = \ell \leq +\infty$  koşullarını sağlar.
- $q(0) = 1$  ve  $q(x)$  artmayan veya başta artan sonra azalan bir fonksiyondur. Yani, tümörün büyümesi ya efektör hücre akışını azaltır ya da en başta akışı uyarır.
- $\beta(x)$ , tümörün efektör hücre proliferasyonu<sup>1</sup> üzerindeki uyarıcı etkisini modeller ve  $\beta(x) \geq 0$ ,  $\beta(0) = 0$ ,  $\beta'(x) \geq 0$  koşullarını sağlar.
- $\mu(x)$ , tümör hücreleri ile etkileşimden dolayı efektör hücre oranında meydana gelen kayıptır ve  $\mu(x) > 0$ ,  $\mu'(x) > 0$  koşullarını sağlar.
- $\theta(t) \geq 0$  immünoterapiyi<sup>2</sup> modeller ve sabit, periyodik veya  $\theta(t) = 0$  olabilir.

(5.1) modelinin biyolojik temellere dayanarak geliştirilmiş versiyonu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) [f(x(t)) - \Phi(x(t), y(t))] \\ \frac{dy}{dt} = \beta(x(t))y(t) - \mu(x(t))y(t) + \sigma q(x(t)) + \theta(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

d'Onofrio ve diğ. (2010) tarafından ele alınmıştır. İki sistem arasında aşağıdaki farklar vardır:

- $\sigma q(x) > 0$  ve  $q(0) = 1$ . Bu terim efektör hücrelerin tümörün bulunduğu bölgeye akışını temsil eder. Bu akışın yoğunluğu tümörün büyüklüğüne bağlıdır. Daha kesin bir ifade ile, bu terim artmayan veya başta artan sonra azalan bir yapıya sahip olabilir. Bu ise küçük tümörlerin efektör hücre akışını tetikleyebilirken ileri evrelerdeki tümörlerin ters etkiye sahip olabileceği anlamına gelir. Nitekim, Gabrilovich ve Hurwitz (2008) ve Schmielau ve Finn (2001) çalışmalarında  $x \gg 1$  için  $q'(x) < 0$  iken kanserin ilerlemesinin geliştirilmiş bir immünosupresyona<sup>3</sup> neden olabileceğinin deneysel olarak gözlemlendiği ifade edilmektedir (d'Onofrio ve diğ., 2010).
- $\Phi(x, y)$  efektör hücrelerin saldırısı nedeni ile tümör hücrelerinin oranında meydana gelen kayıptır ve  $\Phi(x, 0) = 0$ ,  $\Phi(0, y) > 0$  koşullarını sağlar. Ayrıca bu etkileşim terimi tümöre göre azalan, efektör hücreye göre artandır:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \leq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} > 0.$$

<sup>1</sup>Özellikle hücreler için kullanılır. Çoğalma, artma anlamına gelir (Url-16).

<sup>2</sup>Vücudun bağışıklık sistemini, kanserli hücrelere karşı daha kesin, etkili ve daha güçlü saldırılar yapacak şekilde yükselterek kanserli hücrelerin büyüme ve yayılmasını durdurmayı veya hücrenin tamamen ortadan kaldırılmasını amaçlayan tedavi yöntemi (Url-17).

<sup>3</sup>Vücudun antijene karşı göstereceği cevabın önlenmesidir, özellikle doku implantasyonunda vücudun dokuyu kabullenmesi için bağışıklığın ortadan kaldırılmasıdır (Url-18).

Diğer taraftan, bağışıklık sisteminin çok büyük bir tümör üzerindeki düşük etkinliğini modellemek için

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x, y) = 0$$

koşulu ve efektör hücre yoğunluğunun çok fazla olduğu ideal durumda, tümör hücrelerinin gerilemesini modellemek için  $f(x) < L(x) \leq +\infty$  olmak üzere

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \Phi(x, y) = L(x)$$

koşulu sağlanır. Böylece son koşul ile efektör hücre yoğunluğunun çok fazla olduğu durumda

$$\frac{dx}{dt} \approx x[f(x) - L(x)] < 0$$

garanti edilmiş olur.  $\Phi(x, y)$  fonksiyonu için şu örnekler verilebilir: d'Onofrio (2005),  $\Phi(x, y) = \phi(x)y$  fonksiyonunu terih ederken Huisman ve de Boer (1997),  $\Phi(x, y) = \frac{Ay}{1+Bx+Cy}$  Beddington-DeAngelis fonksiyonunu kullanmıştır.

Tümör-bağışıklık sistemi etkileşiminde Asachenkov ve diğ. (1994) hücrelerin oluşması için; Mayer ve diğ. (1995) moleküler üretim, proliferasyon, hücre ve moleküllerin taşınması, hücrelerin farklılaşması<sup>1</sup> vb. için belirli bir miktar zamana ihtiyaç olduğunu ifade eder. Bu nedenlerden dolayı, gecikmeli yanıtlar tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi için göz ardı edilmemiş ve gecikme terimi içeren tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modelleri kapsamlı olarak çalışılmıştır (Bakınız: Byrne, 1997; Byrne ve Gourley, 1997; d'Onofrio ve Gandolfi, 2009; d'Onofrio ve diğ., 2010; Galach, 2003; Liu ve diğ., 2007; Piotrowska ve Forys, 2011; Rodriguez-Perex ve diğ., 2007; Villasana ve Radunskaya, 2003 ve buralarda atıfta bulunulan kaynaklar).

d'Onofrio ve diğ. (2010) immünoterapinin olmadığı durumda, yani  $\theta(t) = 0$  iken, (5.2) sisteminde efektör hücre proliferasyonunu (çoğalmasını) temsil eden  $\beta(x)$  fonksiyonuna gecikme terimi eklemenin tümör-bağışıklık sistemi etkileşimini nasıl etkilediğini araştırmak için

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)[f(x(t)) - \Phi(x(t), y(t))] \\ \frac{dy}{dt} = \beta(x(t - \tau))y(t) - \mu(x(t))y(t) + \sigma q(x(t)) \end{cases} \quad (5.3)$$

modelini

$$(x_0(s), y_0(s)) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

başlangıç koşulları ile birlikte ele almışlardır. Gecikme terimi değişirken hastalık içermeyen denge noktasının kararlılık yapısının değişmediğini, aşık olmayan denge noktasında ise Hopf çatallanma meydana geldiğini göstermişlerdir.

<sup>1</sup>Bir doku veya oluşumun yapı veya görev bakımından kendine has özellik taşıyacak şekilde gelişmesidir (Url-19).

d'Onofrio ve diğ. (2010) çalışmasını takiben Bi ve Ruan (2013) aşağıda verilen gecikmeli tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modelini çalışmışlardır:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) [f(x(t - \tau_1)) - \Phi(x(t), y(t))] \\ \frac{dy}{dt} = \beta(x(t - \tau_2))y(t) - \mu(x(t))y(t) + \sigma q(x(t)) + \theta(t). \end{cases} \quad (5.4)$$

Burada,  $\tau_1 > 0$  tümör hücrelerinin proliferasyonundaki (çoğalmasındaki) gecikmeyi ifade ederken  $\tau_2 > 0$  tümör hücrelerinin büyümesine bağlı olarak uyarılan efektör hücrelerin çoğalma sürecini yansıtır.

Eğer  $\Phi(x, y) = \phi(x)y$  ve  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  alınırsa (5.4) sistemi, d'Onofrio (2005) ve d'Onofrio (2008) kaynaklarında çalışılan probleme dönüşür.  $\tau_1 = 0$  ve  $\tau_2 \neq 0$  alınırsa (5.4) sistemi d'Onofrio (2010) tarafından analiz edilen (5.3) sistemine dönüşür. Dolayısıyla, sistem (5.4) bahsi geçen çalışmalardaki modellerin bir genişlemesi olarak değerlendirilebilir.

Bi ve Ruan (2013), immünoterapinin olmadığını, yani  $\theta(t) = 0$  olduğunu, kabul etmişler ve  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  iken (5.4) sisteminin denge noktasından periyodik çözümlerin çatallanması için gereken koşulları belirlemişlerdir. Ayrıca Hassard ve diğ. (1981) kaynağında  $n$ -boyutlu gecikmeli diferensiyel denklem sistemleri için verilen hesaplama yöntemini kullanarak periyodik çözümlerin özelliklerini tespit etmeyi sağlayan sisteme ait  $c_1(0)$  Poincaré normal form katsayısını hesaplamışlardır. Bu teorik sonuçlara bir örnek vermek için Bi ve Ruan (2013), d'Onofrio (2005) tarafından önerilen

$$\begin{aligned} f(x) &= 1.636(1 - 0.002x), & \Phi(x, y) &= y \\ \beta(x) &= \frac{1.131x}{20.19 + x}, & \mu(x) &= 0.00311x + 0.3743, & \sigma q(x) &= 0.1181 \end{aligned}$$

fonksiyonlarını  $\theta(t) = 0$  ve  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  iken (5.4) sisteminde yerine koyarak aşağıdaki sistemi elde etmişlerdir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) [1.636(1 - 0.002x(t - \tau)) - y(t)] \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1.131x(t - \tau)}{20.19 + x(t - \tau)}y(t) - (0.00311x + 0.3743)y(t) + 0.1181. \end{cases} \quad (5.5)$$

Hastalık içermeyen denge noktası  $(0, 0.315522)$ , mikro denge noktası  $(8.18971, 1.6092)$ , pozitif bir denge noktası  $(267.798, 0.759765)$  ve makro denge noktası  $(447.134, 0.17298)$  olmak üzere (5.5) sisteminin dört farklı denge noktası olduğunu ifade eden Bi ve Ruan (2013), mikro denge noktası için (4.2) ile tanımlanan değerleri

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, & k_2 &= -0.0268, \\ k_3 &= 1.6902, & k_4 &= 0, \\ l_1 &= -0.005, & l_2 &= 0.0456, \\ l_3 &= -0.0734, & l_4 &= 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

olarak ve bu değerleri kullanarak (4.13a) ile tanımlanan karakteristik denklemin katsayılarını

$$A = 0.0734, \quad B = 0.07904, \quad C = 0.0268, \quad D = -0.00845, \quad H = 0, \quad (5.7)$$

şeklinde hesaplamışlardır. Ayrıca sistemin pozitif denge noktalarından (8.18971, 1.6092) mikro denge noktasının  $\tau < 1.27248$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu,  $\tau = 1.27248$  iken mikro denge noktasının kararlılığını kaybetmesine bağlı olarak sistemde süperkritik Hopf çatallanma meydana geldiğini ve ortaya çıkan periyodik çözümlerin kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Bölüm 4'te sistem (4.1) için elde ettiğimiz bütün sonuçlar, Açıklama 4.1'den dolayı  $d_1 = d_2 = 0$  alındığında (5.5) sistemi için de geçerli olur. Böylece, Bölüm 4'te oluşturulan algoritma ve algoritmanın MATLAB kodu  $d_1 = d_2 = 0$  alınarak (5.5) sistemi için kullanılabilir.

Hopf çatallanmanın varlık ve yön analizi için öncelikle (4.2) ile tanımlanan  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , katsayılarına ihtiyacımız vardır. Dikkat edilirse (5.6) ile verilen bu katsayılardan  $k_3$  ve buna bağlı olarak da (5.7) ile verilen katsayılardan  $B$  ve  $D$ , Bi ve Ruan (2013) tarafından yanlış hesaplanmıştır. Hopf çatallanma analizinde, özellikle yön analizinde, çok fazla değişken içeren, çok uzun denklemler olduğu için bu ve benzeri hatalar ne yazık ki olasıdır. Algoritmayı oluşturmamızın temel nedenlerinden biri, Hopf çatallanma analizinde yapılan karmaşık<sup>1</sup> hesaplamalara bağlı olarak ortaya çıkabilen bu gibi hataları ortadan kaldırmaktır. Her problem için ayrı, uzun ve karmaşık hesaplamalar yapmak yerine sadece sistemin fonksiyonlarının denge noktasındaki ikinci dereceden Taylor polinomuna odaklanmak, yapılması muhtemel hataları en aza indirgeyecektir.

Çizelge 5.1:  $k_3 = 1.6902$  iken (5.5) sisteminin varlık analizi.

Formül	Değer	Teorem 4.1'in koşulları
(4.13a)	$H = 0$	$V_1$ koşulu sağlanır.
Lemma 4.2	$H_1 0.1002 > 0$ $H_2 0.0706 > 0$	$V_2$ koşulu sağlanır.
(4.16)	$H_4 S = -0.0062 < 0$	$V_3$ koşulu sağlanır.
(4.18)	$\omega_2 = 0.2618$	Sırf sanal özdeğer çifti $\pm 0.2618i$
(4.21)	$\tau_{2,0} = 1.2725$	Çatallanma değeri.

Bi ve Ruan (2013) gibi  $k_3 = 1.6902$  alınıp algoritmanın MATLAB kodu kullanıldığında varlık analizi için Çizelge 5.1 ve yön analizi için Çizelge 5.2'de verilen sonuçlar elde edilir. Çizelge 5.1, sistemin (8.18971, 1.6092) mikro denge noktasının  $\tau \in [0, 1.2725)$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu;  $\tau = 1.2725$

<sup>1</sup>Ögelerin veya gerekli işlemlerin sayısının çokluğu, çeşitliliği yüzünden anlaşılması, yapılması güç olan, komplike (Url 10).

iken sistemin karakteristik denkleminin  $\pm 0.2618i$  sırf sanal kök çiftine sahip olması nedeni ile mikro denge noktasının kararlılığını kaybedeceğini ve bu gecikme değerinde sistemde Hopf çatallanmanın ortaya çıkacağını; denge noktasının  $\tau > 1.2725$  iken kararsız kalacağını gösterir. Yani, Teorem 4.1'e göre sistem (5.5) periyodik çözümler ailesine sahiptir. Çizelge 5.2 ise Teorem 4.3'e göre bu periyodik çözümlerin özellikleri hakkında bilgi verir ve meydana gelen Hopf çatallanmanın süperkritik olduğunu söyler. Kayan ve Merdan (2017) kaynağında belirtildiği gibi bu sonuçlar, Bi ve Ruan (2013) tarafından elde edilen sonuçlar ile örtüşür.

Çizelge 5.2:  $k_3 = 1.6902$  iken (5.5) sisteminin yön analizi.

Formül	Değer	Teorem 4.3'e göre sonuç
(4.79)	$\text{Re}(c_1(0)) = -0.1998 < 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V_5</math> koşulu sağlanır.</li> <li>• Periyodik çözümler <i>kararlıdır</i>.</li> <li>• Hopf çatallanma <i>süperkritiktir</i>.</li> </ul>
(4.80)	$\mu_2 = 5.3436 > 0$	Periyodik çözümler, çatallanma değerinden <i>sonra</i> ortaya çıkar.
(4.81)	$T_2 = 0.7035 > 0$	Çatallanma değerinden uzaklaştıkça periyot <i>artar</i> .
(4.82)	Periyot	Çatallanma değeri civarında Periyot $\approx 24.0002$ dir.

Şimdi, (5.5) sisteminin Hopf çatallanma analizini doğru değerler ile yapalım. Öncelikle, (4.2) ile tanımlanan  $k_i, l_i, 1 \leq i \leq 4$ , katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} k_1 = 0, \quad k_2 = -0.0268, \quad k_3 = -8.1897, \quad k_4 = 0, \\ l_1 = -0.0050, \quad l_2 = 0.0456, \quad l_3 = -0.0734, \quad l_4 = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Çizelge 5.3: Varlık analizi - Sistem (5.5).

Formül	Değer	Teorem 4.1'in koşulları
(4.13a)	$H = 0$	$V_1$ koşulu sağlanır.
Lemma 4.2	$H_1 = 0.1002 > 0$ $H_2 = 0.3346 > 0$	$V_2$ koşulu sağlanır.
(4.16)	$H_4, S = -0.1394 < 0$	$V_3$ koşulu sağlanır.
(4.18)	$\omega_1 = 0.5767$	Sırf sanal özdeğer çifti $\pm i0.5767$ .
(4.21)	$\tau_{2,0} = 0.2669$	Çatallanma değeri.

Karakteristik denklemin tanımları (4.13a) ile verilen katsayıları ise (5.8)'deki değerler kullanılarak

$$A = 0.0734, \quad B = 0.3756, \quad C = 0.0268, \quad D = -0.0410, \quad H = 0$$

şeklinde elde edilir. (5.8) ile verilen katsayı değerleri kullanıldığında Hopf çatallanma varlık analizi algoritması Çizelge 5.3'teki şu sonuçları verir: sistemin (8.18971, 1.6092) mikro denge noktası  $\tau \in [0, 0.2669)$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlıdır;  $\tau = 0.2669$  iken sistem  $\pm 0.5767i$  sırf sanal özdeğer çiftine sahip olduğu için mikro denge noktası kararlılığını kaybeder ve bu gecikme değerinde sistemde Hopf çatallanma meydana gelir; mikro denge noktası  $\tau > 0.2669$  iken kararsızdır. Ayrıca Teorem 4.1'e göre sistem (5.5), periyodik çözümler ailesine sahiptir.

Teorem 4.3'e göre Hopf çatallanmanın tipini ve periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemek için  $c_1(0)$  Poincaré normal form katsayısı hesaplanmalıdır. Bu hesaplama için gerekli olan ve (4.30) ile tanımlanan katsayıların sıfırdan farklı olanları aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} m_{12} &= -0.0033, & m_{13} &= -1, \\ r_{13} &= -0.0031, & r_{22} &= -0.0016, & r_{23} &= 0.0284. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Bölüm 4.3'te formülleri verilen ve  $c_1(0)$  Poincaré normal form katsayısını hesaplamak için gereken değerler, katsayılar (5.8) ve (5.9) kullanılarak Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.5'teki gibi hesaplanmıştır.

Çizelge 5.4: Yön analizi için gerekli değerler 1 - Sistem (5.5).

Diyagram	Formül	Algoritma ile elde edilen değer
Şekil 4.4	(4.39)	$c = -0.0032 - 0.0699i$
	(4.41)	$c^* = -0.0090 + 0.0704i$
	(4.43)	$\bar{s} = -0.0010 + 7.0568i$
Şekil 4.5	(4.57a)-(4.57b)	$\mathbf{h}_{20}(0) = \begin{pmatrix} 0.0704i \\ -0.0019 - 0.0012i \end{pmatrix}$
	(4.57c)-(4.57d)	$\mathbf{h}_{11}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.00282 \end{pmatrix}$
	(4.57e)-(4.57f)	$\mathbf{h}_{02}(0) = \begin{pmatrix} 0.0704i \\ -0.0019 + 0.0012i \end{pmatrix}$
Şekil 4.6	(4.58a)	$g_{20}(0) = 0.0264 + 0.0429i$
	(4.58b)	$g_{11}(0) = -0.0195i$
	(4.58c)	$g_{02}(0) = -0.0264 - 0.0970i$

Çizelge 5.5: Yön analizi için gerekli değerler 2 - Sistem (5.5).

Diyagram	Formül	Algoritma ile elde edilen değer
Şekil 4.9	(4.69b)	$\mathbf{W}_{20}(0;0) = \begin{pmatrix} -0.1238 + 0.0482i \\ 0.0047 + 0.0005i \end{pmatrix}$
Şekil 4.10	(4.69c)	$\mathbf{W}_{20}(-0.2669;0) = \begin{pmatrix} -0.1079 + 0.0478i \\ 0.0058 + 0.0002i \end{pmatrix}$
Şekil 4.13	(4.75b)	$\mathbf{W}_{11}(0;0) = \begin{pmatrix} -0.0676 - 0.0032i \\ 0.0002 \end{pmatrix}$
Şekil 4.14	(4.75c)	$\mathbf{W}_{11}(-0.2669;0) = \begin{pmatrix} -0.0668 - 0.0032i \\ 0.0009 \end{pmatrix}$
Şekil 4.15	(4.57g)-(4.57h)	$\mathbf{h}_{21}(0) = \begin{pmatrix} -0.0002 - 0.0007i \\ 0.0004 \end{pmatrix}$
Şekil 4.16	(4.58d)	$g_{21}(0) = 0.0001 + 0.0053i$
Şekil 4.17	(4.79)	$c_1(0) = 0.0005 - 0.0002i$

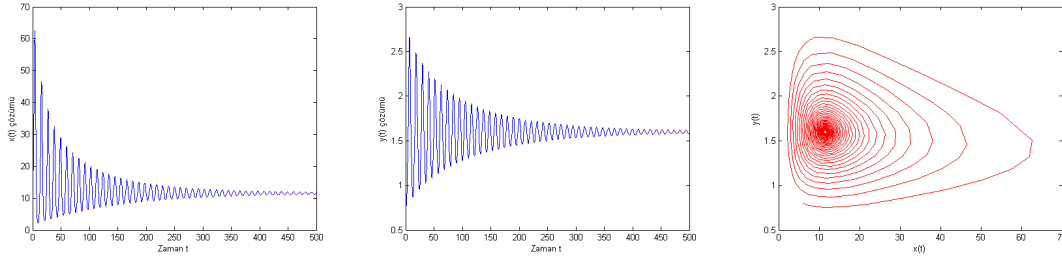
Çizelge 5.6, sistem (5.5)'te meydana gelen Hopf çatallanmanın yön analizi hakkında şu bilgileri verir: Hopf çatallanma subkritiktir ve çatallanma değerinden önce ortaya çıkan periyodik çözümler kararsızdır. Ayrıca çatallanma değerine yeterince yakın iken periyodik çözümlerin periyodu yaklaşık olarak 10.8955'tir ve bu periyot çatallanma değerinden uzaklaştıkça artar.

Çizelge 5.6: Yön analizi sonuç - Sistem (5.5).

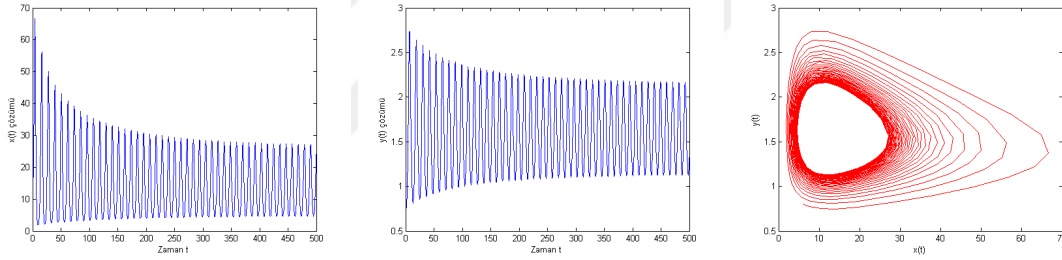
Formül	Değer	Teorem 4.3'e göre sonuç
(4.79)	$\text{Re}(c_1(0)) = 0.0005 > 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V_5</math> koşulu sağlanır.</li> <li>• Periyodik çözümler <i>kararsızdır</i>.</li> <li>• Hopf çatallanma <i>subkritiktir</i>.</li> </ul>
(4.80)	$\mu_2 = -0.0027 < 0$	Periyodik çözümler, çatallanma değerinden <i>önce</i> ortaya çıkar.
(4.81)	$T_2 = 0.0002 > 0$	Çatallanma değerinden uzaklaştıkça periyot <i>artar</i> .
(4.82)	Periyot	Çatallanma değeri civarında Periyot $\approx 10.8955$ dir.



Algoritmayı kullanarak ulaştığımız bu teorik sonuçları desteklemek üzere MATLAB DDE (Delay Differential Equations) paketi kullanılarak (5.5) sistemi için aşağıdaki simülasyonlar elde edilmiştir. Bu simülasyonlardan Şekil 5.1 çatallanma değerinden küçük  $\tau = 0.05 \in [0, 0.2669)$  gecikme değerinde denge noktasının yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu göstermekte iken Şekil 5.2 çatallanma değerinden küçük fakat çatallanma değerine daha yakın  $\tau = 0.1 \in [0, 0.2669)$  gecikme değerinde kararlılığın zayıflamaya başladığını gösterir.



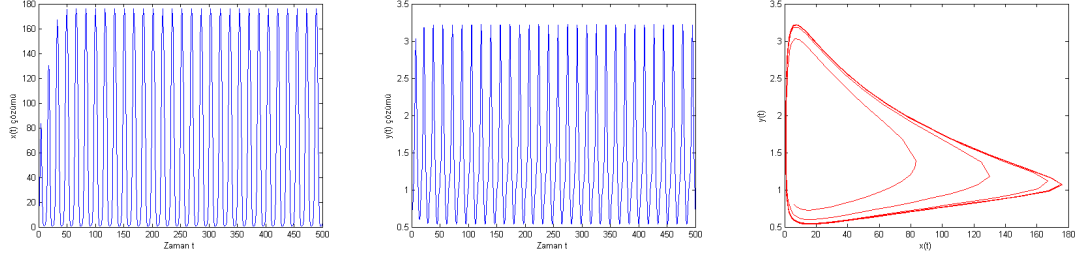
Şekil 5.1:  $\tau = 0.05 < \tau_{2,0}$  iken  $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$  başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.



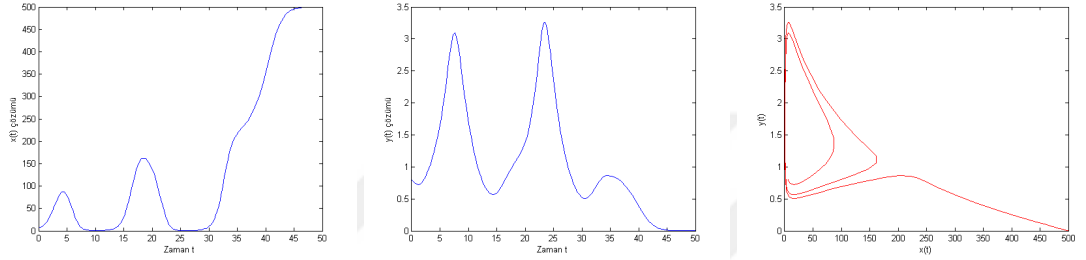
Şekil 5.2:  $\tau = 0.1 < \tau_{2,0}$  iken  $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$  başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.

Şekil 5.3'ten  $\tau = \tau_{2,0} = 0,0.2669$  iken  $(8.18971, 1.6092)$  mikro denge noktasının kararsızlığının zayıf olduğu görülmektedir. Tanım 3.1, çatallanma değerinde denge noktası zayıf bir şekilde itici ise Hopf çatallanmanın subkritik olarak adlandırıldığını söyler. Böylece Hopf çatallanma subkritiktir. Ayrıca Şekil 5.4, çatallanma değerinden büyük  $\tau = 0.3 > \tau_{2,0}$  gecikme değerinde denge noktasının kararsız olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak bu simülasyonlar algoritma ile elde edilen sonuçları destekler.

Dikkat edilirse hatalı  $k_3$  katsayı değeri kullanıldığı durumdan farklı bir sonuç ortaya çıkmıştır: Hopf çatallanmanın tipi değişmiştir. Yani, tek bir katsayıda yapılan basit bir hatayla yapılan analiz sonucu elde edilen bilgiler, sistemin gerçek dinamiğini yansıtmamaktadır. Bu da bize gerçek yaşam problemlerine doğru katkıda bulunabilmek için matematiksel modellerin analizindeki hata ihtimalini en aza indirmemiz gerektiğini gösterir. Bu tezde elde edilen algoritmanın amaçlarından birisi budur.



Şekil 5.3:  $\tau = \tau_{2,0} = 0.2669$  iken  $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$  başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.



Şekil 5.4:  $\tau = 0.3 > \tau_{2,0}$  iken  $(x_0, y_0) = (6, 0.8)$  başlangıç değerine sahip tümör hücre yoğunluğu çözüm grafiği solda, efektör hücre yoğunluğu çözüm grafiği ortada ve (5.5) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.

## 5.2 Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Av-Avcı Modeli

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin matematiksel biyoloji/ekoloji alanındaki uygulamalarından biri basit bir ekosistemde<sup>1</sup> av-avcı ilişkisini modellemektir. Örneğin, av ve avcı olmak üzere sadece iki tür hayvanın bulunduğu kapalı, yani içe veya dışa göçün izin verilmediği, bir ekosistem düşünelim. Bu ekosistemde avcı, av ile; av, ekosistemdeki üçüncü bir besin (örneğin bitki örtüsü) ile beslenerek basit bir besin zinciri oluşturur. Bu ekosistemde, av ve avcı türlerinin çevresi ve evrimi hakkında aşağıdaki varsayımlar sağlansın:

- Av hayvanlarının her zaman sınırsız besin kaynağı vardır.
- Avcının yokluğunda, av popülasyonu popülasyonun büyüklüğü ile orantılı olarak artar (üstel büyüme).
- Avcının yokluğunda, avcı popülasyonu popülasyonun büyüklüğü ile orantılı olarak azalır (avcı popülasyonu yok olur).
- Hem avın hem de avcının bulunduğu durumda, ekosistemde rastgele dolaşan avcı popülasyonundaki artış ve av popülasyonundaki azalış türlerin karşılaşma sıklıkları ile orantılı olarak gerçekleşir.

<sup>1</sup>Bir alandaki canlı birliklerin ve cansız varlıkların hepsinin birden oluşturduğu sistem.



Resim 5.1: Alfred James Lotka

Alfred James Lotka, 2 Mart 1880 tarihinde daha önce Polonya'nın bir parçası olan Lwów'da (Avusturya - Macaristan) doğdu. Lisans derecesini 1901'de Birmingham Üniversitesinden aldı. 1901-1902 yılları arasında Leipzig Üniversitesinde fizikokimya alanında lisansüstü çalışmalar yaptı. Yüksek lisans derecesini, fizik dalında 1909 yılında Cornell Üniversitesinden aldı ve 1909-1912 yılları arasında Birmingham Üniversitesinde doktora eğitimini tamamladı. Matematiksel nüfus bilimi alanındaki çalışmaları 1907 yılından 1939 yılına kadar devam etti. 1920'deki çalışmasında, biyolojik sistemlerde sönümsüz ve kalıcı salınımlar ortaya çıktığını kanıtladı (Lotka, 1920). Alfred James Lotka, yardımcı kimyager, yardımcı fizikçi, Scientific American Magazine dergisinin Scientific American Supplement haftalık ekinde editör ve Johns Hopkins Üniversitesinde öğretim elemanı olarak çalıştı. 1924'te New York Metropolitan Hayat Sigorta Şirketi'nde istatistikçi olarak başladığı görevine 1947'de emekli olana kadar devam eden Lotka, 5 Aralık 1949 tarihinde New York'ta öldü. Lotka, kimya, epidemiyoloji ve biyoloji konularında yaklaşık yüz makale yayınladı. Bu makalelerin yaklaşık yarısı nüfus konularına ayrılmıştır. Ayrıca altı kitap yazdı (Anisiu, 2014).

Böyle bir ekolojide iki türün (av ve avcı hayvanlar) varlık mücadelesini modelleyen denklemler, iki bilim insanının adını taşır: Lotka ve Volterra (Anisiu, 2014). Av-avcı etkileşimi problemi, Lotka tarafından 1920'de, Volterra tarafından 1926'da tartışılmış ve bu iki bilim insanı farklı ülkelerde yaşamış, farklı mesleki ve yaşam tecrübelerine sahip olmuş olmalarına rağmen aynı sonuca ulaşmışlardır: iki türün etkileşimi, popülasyonlarının periyodik salınım yapmasına neden olur.

Av-avcı etkileşiminde, Volterra kendi çalışmasındaki farklılıkları da ifade ederek Lotka'nın önceliğini kabul etmiştir. Böylece, bu popülasyonların büyüklüklerindeki değişimi tanımlayan, periyodik çözümlere sahip denklemlere Lotka-Volterra denklemleri denilmiştir.

Vito Volterra, 3 Mayıs 1860 tarihinde o zaman Papalık Devletlerinin bir parçası olan Ancona'da çok fakir bir Yahudi ailesinde dünyaya geldi. 1883 yılında Pisa Üniversitesinde makine bilimi (rational mechanics) profesörü olarak atandı. 1884 yılında başladığı şimdi Volterra integral denklemleri olarak adlandırılan denklemler üzerine yaptığı en ünlü çalışması, 1896 yılında yayımlandı. Çok değişkenli fonksiyonlar fikrinin bir genelleştirmesi olarak fonksiyoneller teorisi, Volterra tarafından 1887 yılından itibaren yayımlanan bir dizi yayın ile geliştirildi. Bu yayınlar fonksiyonel analiz modern teorisinin başlangıcı oldu. Vito Volterra, 1892'de Turin Üniversitesinde mekanik profesörü ve 1900'de Roma La Sapienza Üniversitesinde matematik fiziği profesörü oldu. Birinci Dünya Savaşı'nın başlangıcında İtalyan Ordusu'na katıldı ve hava gemileri geliştirmeye çalıştı. Birinci Dünya Savaşı'ndan sonra Volterra, dikkatini matematiksel fikirlerini biyolojiye uygulamaya çevirdi. Accademia Nazionale dei Lincei, Volterra'nın yayınlarını, notlarını ve anılarının çoğunu 3000 sayfalık 5 ciltte topladı. Volterra'nın ilk yayını 1881 yılında yayımlanırken son yayını 1939-1940 yıllarında kendisi neredeyse sekseninde iken yayımlanmıştır. Volterra, 11 Ekim 1940 tarihinde hayata veda etmiştir (Anisiu, 2014).



Resim 5.2: Vito Volterra

Lotka-Volterra denklemleri, doğal büyüme, doğal ölüm ve etkileşim oranlarını birleştirerek av ve avcı popülasyonundaki değişimi

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha u(t) - \beta u(t)v(t) \\ \frac{dv}{dt} = -\gamma v(t) + \delta u(t)v(t) \end{cases} \quad (5.10)$$

sistemiyle tanımlar. Burada,  $u(t)$  ve  $v(t)$  sırasıyla  $t$  zamanındaki av ve avcı popülasyon yoğunluğunu göstermektedir;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ve  $\delta$  pozitif katsayılardır. Bu modelde, av popülasyonundaki değişim, popülasyonun doğal büyümesi ile avlanıldığı miktarın farkı ile ifade edilir. Avcı popülasyonunun değişimi ise avlanmaya bağlı büyümeden doğal ölüm oranı çıkarılarak tanımlanır.

Temel av-avcı (5.10) sisteminin belirgin bir eksikliği vardır: av popülasyonunu, avcının yokluğunda katlanarak, sınırsız bir şekilde büyür. Bu gerçekçi olmayan davranış, üstel büyüme teriminin lojistik büyüme ifadesiyle değiştirilmesi sonucu düzeltilebilir. Böylece, av popülasyonu, lojistik denklem tarafından verilen çevresel taşıma kapasitesinde dengelenir (Url-20). Diğer taraftan, avcı türü avlanmak için kendi içerisinde bir yarışa girebilir. Bu durum, ikinci denklemdeki doğal ölüm teriminin değiştirilmesi ile (5.10) sistemine dahil edilebilir (Url-21). Bu gerçekleri baz alarak Volterra (1931),  $n$  tane tür için genel bir teori geliştirmiştir. Bu teoride  $n = 2$  alındığında aşağıdaki sistem elde edilir (Anisiu, 2014):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(t)[\alpha - \lambda u(t)] - \beta u(t)v(t) \\ \frac{dv}{dt} = v(t)[-\gamma - \kappa v(t)] + \delta u(t)v(t). \end{cases} \quad (5.11)$$

Gerçek yaşamda, bir türün nüfusunun büyüme hızı çoğu zaman türün kendi popülasyonundaki veya türün etkileşim halinde olduğu başka bir popülasyondaki değişikliklere hemen yanıt vermez, belirli bir zaman aralığından sonra yanıt verir (May, 1973). Örneğin, Volterra (1929) çalışmasında, türlerin popülasyonlarında belirli bir zaman aralığında meydana gelen artışın, aslında bu zaman aralığından önceki bir dönemde alınan besinlere bağlı olduğu ifade edilmiştir ve türlerin geçmiş etkileşimlerini içeren bir model geliştirilmiştir (Anisiu, 2014). Av-avcı etkileşimindeki geçmişe diğer bir bağlılık ise av ve avcı türlerin üreme olgunluğuna erişme süreleridir. Avın üreme olgunluğuna ulaşma süresi  $\tau$  nun (5.11) sistemine dahil edilmesi ile

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(t)[r_1 - a_{11}u(t - \tau) - a_{12}v(t)] \\ \frac{dv}{dt} = v(t)[-r_2 + a_{21}u(t) - a_{22}v(t)] \end{cases} \quad (5.12)$$

sistemi elde edilir. Burada,  $r_i$  ve  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  pozitifdir.  $r_1 a_{21} - r_2 a_{11} > 0$  olmak üzere sistem

$$E_1^* = (0, 0), \quad E_2^* = \left( \frac{r_1}{a_{11}}, 0 \right), \quad E_3^* = \left( 0, -\frac{r_2}{a_{22}} \right),$$

$$E_4^* = \left( \frac{r_1 a_{22} + r_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}, \frac{r_1 a_{21} - r_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}} \right),$$

denge noktalarından yalnızca  $E_4^*$  pozitifdir. Ruan (2001),  $E_4^*$  denge noktasının lineer kararlılık analizini yaparak denge noktasının mutlak kararlı olması, yerel (lokal) asimptotik kararlı olması, kararlılık yapısının değişmesi ve (5.12) sisteminde Hopf çatallanma meydana gelmesi için gerekli koşulları belirlemiştir. Song ve Wei (2005), lokal Hopf çatallanma analizi ile (5.12) sistemi için varlığı garanti edilen ve  $E_4^*$  denge

noktasından çatallanan periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemiş ve bazı koşullar altında global olarak da mevcut olduklarını göstermişlerdir.

Zuo ve Wei (2011), (5.12) modeline türlerin buldukları kapalı ekosistemdeki konumsal difüzyonunu dahil ederek

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = 0, \quad x \in \{0, \pi\}, \quad t \geq 0$$

Neumann sınır koşulları ve

$$u(t,x) = u_0(t,x) \geq 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [-\tau, 0],$$

$$v(t,x) = v_0(t,x) \geq 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [-\tau, 0]$$

başlangıç değerlerine sahip

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) [r_1 - a_{11}u(t-\tau,x) - a_{12}v(t,x)] \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + v(t,x) [-r_2 + a_{21}u(t,x) - a_{22}v(t,x)] \end{cases} \quad (5.13)$$

sistemini elde etmişlerdir. Burada  $d_1$  ve  $d_2$  sırasıyla av ve avcının difüzyon katsayılarıdır. Av ve avcının bulunduğu kapalı ekosistemdeki iç ve dış yönlü göçlere izin olmaması, homojen Neumann sınır koşulları ile temsil edilir. Zuo ve Wei (2011),  $E_4^*$  denge noktasının lineer kararlılık analizi sonucu (5.13) sisteminde Hopf çatallanma meydana geldiğini göstermişlerdir. Ayrıca ortaya çıkan periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemek için yön analizi yapmışlardır. Elde ettikleri teorik sonuçları

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 0.2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) [1 - u(t-\tau,x) - v(t,x)] \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + v(t,x) [-1 + 8u(t,x) - 7v(t,x)] \end{cases} \quad (5.14)$$

sistemine uyguladıklarında, bu sistemin  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  pozitif denge noktasının  $\tau \in [0, 21.3827)$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı,  $\tau > 21.3827$  iken ise kararsız olduğunu görmüşlerdir. Ayrıca  $\tau = 21.3827$  iken (5.14) sisteminde subkritik Hopf çatallanma meydana geldiğini, çatallanma değerinden önce ortaya çıkan periyodik çözümlerin kararsız olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Difüzyonun sistemler üzerindeki etkisi merak edilen konulardan biridir. "Modellerin reaksiyon-difüzyon terimi ile daha gerçekçi hale gelmesi, modelin dinamiği ile ilgili elde edilen sonuçları değiştirir mi?" sorusunun yanıtı için reaksiyon-difüzyon sistemlerinin  $d_1 = d_2 = 0$  durumu için de analiz edilmesi gerekir.

Şimdi, difüzyonun (5.14) reaksiyon-difüzyon sistemine etkisini araştıralım. Öncelikle, (5.14) sisteminin  $d_1 = d_2 = 0$  iken Hopf çatallanma analizi aşağıdaki sisteminin analizine denktir (Açıklama 4.1):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(t) [1 - u(t - \tau) - v(t)] \\ \frac{dv}{dt} = v(t) [-1 + 8u(t) - 7v(t)]. \end{cases} \quad (5.15)$$

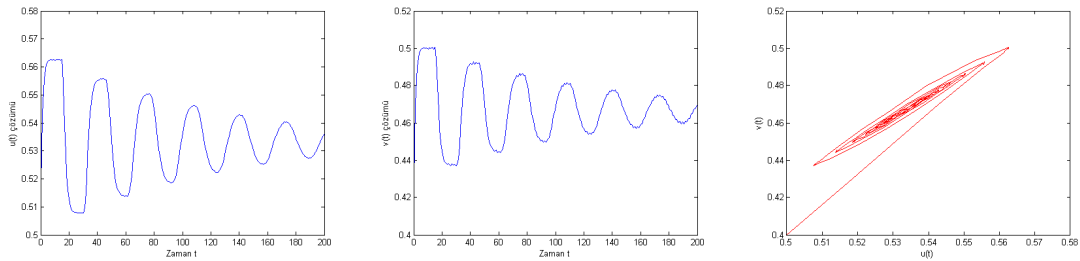
Bölüm 4’te elde edilen algoritma kullanılarak (5.15) sistemi için Çizelge 5.7’de verilen değerler elde edilmiştir. Bu değerlere göre  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  denge noktası mutlak kararlıdır ve dolayısıyla, (5.15) sisteminde Hopf çatallanma meydana gelmez.

Çizelge 5.7: Mutlak kararlılık analizi - Sistem (5.15).

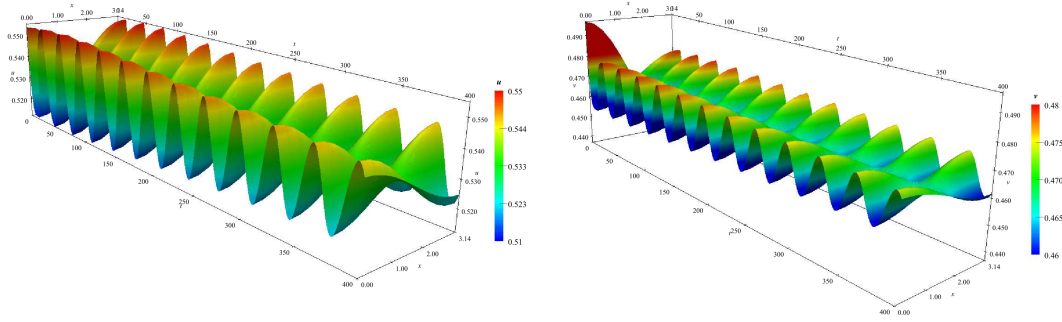
Formül	Değer	Sonuç
(4.13a)	$H = 0$	(5.15) sisteminin karakterisitik denkleminin, (4.15) formundadır.
Lemma 4.2	$H_1 3.8000 > 0$ $H_2 3.7333 > 0$	Denge noktası $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$ , $\tau = 0$ iken yerel (lokal) asimptotik kararlıdır.
Lemma 4.4 $H_{35}$	$R^2 - 4S = 37.3002 > 0$ , $R = 6.4044 > 0$ ve $S = 0.9292 > 0$ .	Denge noktası $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$ , her $\tau \geq 0$ için yerel (lokal) asimptotik kararlıdır, yani mutlak kararlıdır.

Bu sonuçları desteklemek amacıyla, (5.14) sistemi için FORTRAN programını ve (5.15) sistemi için MATLAB DDE (Delay Differential Equations) paketini kullanarak bazı simülasyonlar elde edilmiştir.

Gecikme değeri  $\tau = 15$  olarak, yani 21.3827 çatallanma değerinden küçük, seçildiğinde difüzyonun olmadığı durumdaki çözüm eğrileri Şekil 5.5 ile ve difüzyonun varlığındaki çözüm eğrileri Şekil 5.6 ile verilmiştir. Bu simülasyonlar bize her iki durumda da  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  denge noktasının yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğu gösterir.

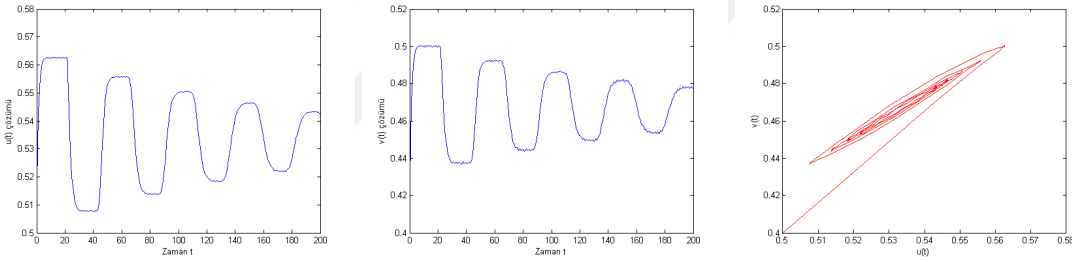


Şekil 5.5:  $d_1 = d_2 = 0$  ve  $\tau = 15 < 21.3827$  iken  $(u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$  başlangıç değerine sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t)$  solda, avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t)$  ortada ve (5.15) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.

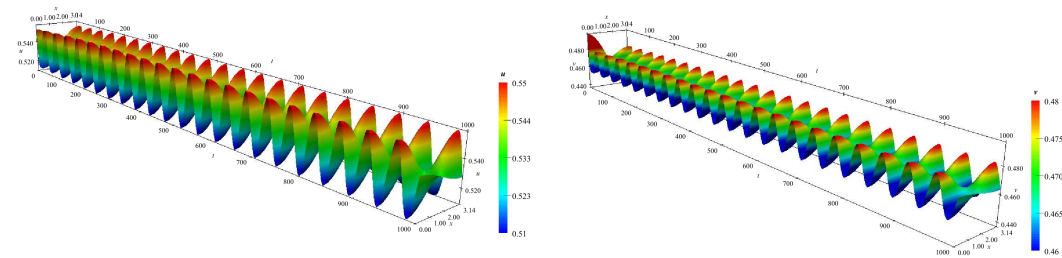


Şekil 5.6:  $d_1 = 0.2$ ,  $d_2 = 3$  ve  $\tau = 15 < 21.3827$  iken  $u(x, 0) = 0.5333 + 0.02 \cos(x)$  ve  $v(x, 0) = 0.4667 + 0.03 \cos(x)$  başlangıç değer fonksiyonlarına sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t, x)$  solda ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t, x)$  sağda verilmiştir.

Gecikme değeri  $\tau = 21.3827$  olarak, yani çatallanma değerine eşit, seçildiğinde elde edilen simülasyonlar Şekil 5.7 ve Şekil 5.8 ile verilmiştir. Bu simülasyonlara göre, difüzyonun olmadığı durumda  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  denge noktası Şekil 5.7’de görüldüğü gibi yerel (lokal) asimptotik kararlı iken difüzyonun varlığında (5.14) sisteminin çözüm eğrileri Şekil 5.8’deki gibi periyodik bir yapıya sahiptir.

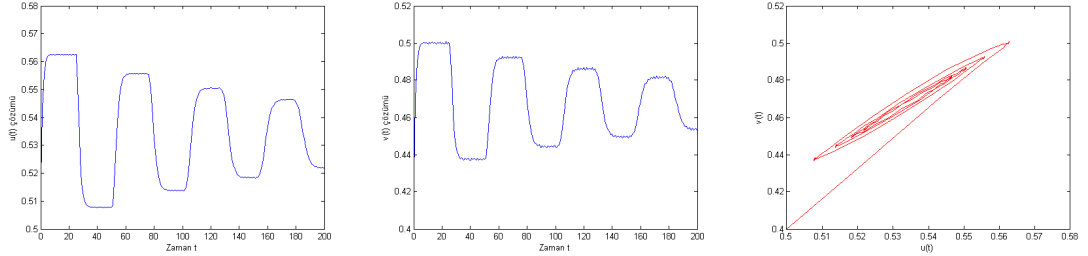


Şekil 5.7:  $d_1 = d_2 = 0$  ve  $\tau = 21.3827$  iken  $(u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$  başlangıç değerine sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t)$  solda, avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t)$  ortada ve (5.15) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.

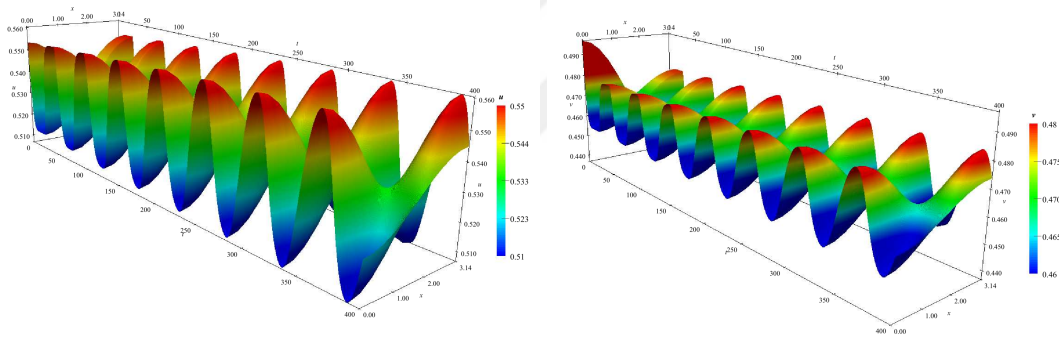


Şekil 5.8:  $d_1 = 0.2$ ,  $d_2 = 3$  ve  $\tau = 21.3827$  iken  $u(x, 0) = 0.5333 + 0.02 \cos(x)$  ve  $v(x, 0) = 0.4667 + 0.03 \cos(x)$  başlangıç değer fonksiyonlarına sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t, x)$  solda ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t, x)$  sağda verilmiştir.

Gecikme değeri  $\tau = 25$  olarak, yani 21.3827 çatalanma değerinden büyük, seçildiğinde Şekil 5.9 bize difüzyonun olmadığı durumda  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  denge noktasının kararlılık yapısını hala korumakta olduğunu gösterir. Şekil 5.10'da ise aynı gecikme değerinde difüzyonun  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  denge noktasını kararsız hale getirdiği görülmektedir.



Şekil 5.9:  $d_1 = d_2 = 0$  ve  $\tau = 25 > 21.3827$  iken  $(u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$  başlangıç değerine sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t)$  solda, avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t)$  ortada ve (5.15) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.



Şekil 5.10:  $d_1 = 0.2, d_2 = 3$  ve  $\tau = 25 > 21.3827$  iken  $u(x, 0) = 0.5333 + 0.02 \cos(x)$  ve  $v(x, 0) = 0.4667 + 0.03 \cos(x)$  başlangıç değer fonksiyonlarına sahip av popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t, x)$  solda ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t, x)$  sağda verilmiştir.

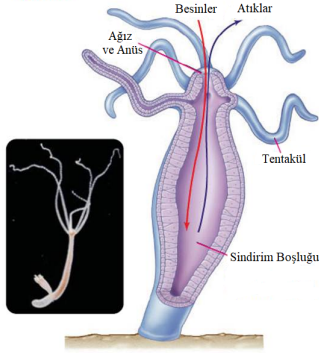
Sonuç olarak av-avcı etkileşimi analizinde difüzyon terimi içermeyen (5.15) sistemi kullanıldığında avın üreme olgunluğuna erişmek için ihtiyaç duyduğu süre ne olursa olsun popülasyonların yoğunluğunun  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  denge değerine ulaşacağı görülür. Fakat, difüzyonu ihtiva ettiği için daha gerçekçi olan (5.14) sistemine göre popülasyonların yoğunluğunun  $E_4^* = (0.5333, 0.4667)$  denge değerine ulaşıp ulaşamayacağı, avın üreme olgunluğuna erişmek için ihtiyaç duyduğu süreye bağlıdır. Bu ise bize gerçek yaşam problemleri hakkında gerçekçi sonuçlar elde edebilmek için difüzyon teriminin ihmal edilmemesi gerektiğini gösterir.

Difüzyonun etkisini inceleyebilmek için modellerin farklı difüzyon değerleri için pek çok kez analiz edilmesi gerekir. Bölüm 4'te elde edilen algoritmanın MATLAB kodu ile bir modelin farklı difüzyon katsayıları kullanarak hızlı bir şekilde analizini yapmak mümkündür.



### 5.3 Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Lengyel-Epstein Modeli

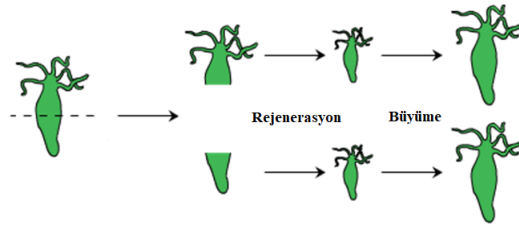
Morfogenez<sup>1</sup> alanındaki en eski ve en iyi bilinen örneklerden biri, 1744 yılında Abraham Trembley tarafından keşfedilen hidra rejenerasyonudur<sup>2</sup> (Şekil 5.11). 1952’de Alan Turing, biyolojik desen ve şekil oluşumunda (pattern formation) önemli bir yeri olan hidra rejenerasyonunu modellemeye çalışırken "difüzyon odaklı kararsızlık" fikrini ileri sürmüştür (Ni ve Tang, 2005).



Resim 5.3: Hidra hayvanı

Birkaç milimetrik bir hayvan olan Hidra, on beş civarında farklı türde yaklaşık 100.000 hücreden oluşur. Uzunluğunun bir ucunda yer alan bir baş bölgesi vardır. Hidra üzerinde yapılan tipik deneyler, baş bölgesinin bir kısmının çıkarılması ve vücut kolonunun diğer bölümlerine nakledilmesini içerir. Nakledilen alan (eski) kafadan yeterince uzakta ise yeni bir baş oluşur. Bu gözlemler, yavaş yavaş yayılmakta olan bir aktivatör ve hızla yayılan bir inhibitör olmak üzere iki kimyasal maddenin varlığının varsayımına yol açmıştır (Ni, 1998).

Uzun yıllar boyunca difüzyonun, kararsız bir denge noktasının kararlı hale gelmesi gibi, sadece karmaşık yapıdaki sistemleri düzenli hale getirdiğine inanılmıştır (Bilazeroğlu, 2012). Fakat Turing (1952), farklı difüzyon oranlarının, iki etkileşimli maddeden oluşan bir sistemde, reaktantların<sup>3</sup> homojen olmayan dağılımlarına yol açabileceğini savunmuştur (Ni ve Tang, 2005). Kararlı bir denge noktasının difüzyonun varlığında kararsız hale gelebileceğini ve biyolojik sistemlerde sık sık karşılaşılan düzgün olmayan desen ve şekil oluşumunun, kararlılık yapısında meydana gelen bu değişikliklerle açıklanabileceğini ifade etmiştir (Yi ve diğ., 2008). Bu kararsızlığa "Turing tipi kararsızlık" veya "difüzyon odaklı kararsızlık" denir.



Şekil 5.11: Hidra rejenerasyonu.

Turing’in bu yaklaşımı biyoloji, kimya, yarı iletken fiziği, yıldız oluşumu, ekonomi gibi alanlarda çalışan pek çok araştırmacının dikkatini çekmiş ve teorik anlamda kabul görmüştür (Epstein ve Pojmann, 1998). Örneğin, Gierer ve Meinhardt (1972),

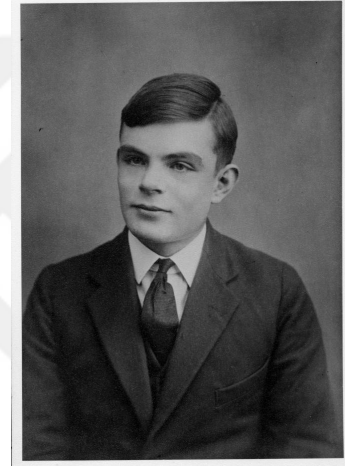
<sup>1</sup>1-Bir canlının gelişmesi ya da ontogenisi sırasında büyüme ve hücre farklılaşması ile özel şeklini alması olayı. 2-Hücrelerin embriyolojik olarak farklılaşması (Url-22).

<sup>2</sup>Organizmada yıkılanmış doku ve hücrelerin yerine aynı morfolojik yapıda ve aynı işlevi gören yeni bir dokunun meydana gelmesi (Url-23).

<sup>3</sup>Kimyasal reaksiyona dahil olan bir molekül, reaktan (Url-25).

bu fikri hidra rejenerasyonunu modellemede teorik açıdan başarılı bir şekilde geliştirmiştir. Fakat Turing'in bu devrimci fikri, hidra için bu tarihe kadar deneysel olarak henüz doğrulanmamıştır (Ni ve Tang, 2005).

23 Haziran 1912 tarihinde Londra'da dünyaya gelen Alan Mathison Turing on dört yaşına geldiğinde Dorset'te bulunan Sherborne Okulu'na başlar. Sherborne'dan sonra Cambridge'de Kings College'a kaydolur ve burayı Matematik Onur Öğrencisi olarak bitirir. 1936 yılında, daha sonraki yıllarda bilgisayar biliminin temel yapı taşı olarak kabul görecektir olan Hesaplanabilir Sayılar: Karar Verme Probleminin bir Uygulaması makalesini yazar. Bu makalede ünlü matematikçi Kurt Gödel'in 1931'de yaptığı hesaplamaları yeniden ve daha basit olarak formüle eder. Bu formülasyon sırasında, herhangi bir bilgisayar algoritmasını simüle etmeye yarayan ve kendi icadı soyut bir düzenek olan Turing makinesi kavramını da ortaya atar. Makine kavramı, Turing tarafından ilk defa ortaya konduğunda görünürde somut bir mekanizma yoktur. Makine iki yönde sonsuz uzunlukta olduğu varsayılan ve üzerine karakter basılabilen bir kağıt şerit, bu şeridi okuyabilen ve üzerine yazabilen bir kafa ve belirli sayıda komutlar içeren bir komut tablosundan oluşur. King's College'dan mezun olduktan sonra ABD'ye giden Turing 1936-1938 yılları arasında Princeton Üniversitesinde doktora yapar. Burada matematik ve kriptoloji (şifrebilim) üzerine çalışır, 1938 yılında II. Dünya Savaşının göbeğindeki İngiltere'ye geri döner ve bir süreliğine Alman deniz kuvvetlerine ait şifrelerin kırılması için çalışan kriptanaliz ekibinin başına getirilir. Alman hükümeti, savaş sırasındaki haberleşmesinde değişen şifreli mesajlar kullanmaktadır ve bu şifreleri Enigma adı verilen bir makine ile oluşturmaktadır. Bu görevdeyken, Alman şifrelerini kırmak için farklı yöntemler geliştirir ve Enigma cihazı tarafından üretilen şifreleri kırmaya yarayan Bombe isimli bir elektromekanik makinenin tasarımına katkıda bulunur. *Dijital bilgisayarlara giden ilk adım* olarak görülen Bombe cihazları, Nazileri şifreli mesajlarını deşifre ederek müttefik devletlere Nazi Almanyası karşısında çok büyük bir avantaj sağlar. Turing sayesinde pek çok kişinin hayatı kurtulur ve savaşın seyri Nazilerin aleyhine döner. 1949 yılında, "Bilgisayar Mekanizması ve Zeka" isimli ünlü makalesini yazar. Bu makalede özellikle *yapay zeka* konularına değinen Turing, bir makinenin "akıllı" sayılabilmesi için gereken standartları belirleyen bir deney tasarlar. Turing testi adı verilen bu test, makinenin karşısındaki deneğin, görmeden iletişime geçtiği şeyin makine mi yoksa insan mı olduğunu tahmin etmesi esasına dayanmaktadır. Son yıllarında *matematiksel biyoloji* üzerine çalışır. Özellikle bitkisel yapılarda görülen Fibonacci rakamlarını inceler ve 1952 yılında yazdığı "Morfogenez'in Kimyasal Kökenleri" isimli makalesinde doğada gözlemlenen çizgi, benek ve spiral gibi düzensiz yapıların homojen ve düzenli bir durumdan nasıl köken aldıklarını açıklar. Bireysel tercihleri yüzünden yargılanan, uğradığı ayrımcılık ve baskı nedeniyle intihar eden Alan Turing 1954 yılında, 42. yaş gününden birkaç hafta önce evinde ölü bulunur. O güne dek ortaya sürdüğü fikirler bilgisayar ve yapay zeka konularında çığır açmıştı, belki yaşasaydı bilim ve insanlığa çok daha fazla katkıda bulunacaktı. Ama toplumsal tahammülsüzlük bu dahinin aramızdan çok erken yaşta ayrılmasına neden oldu (Url-26).

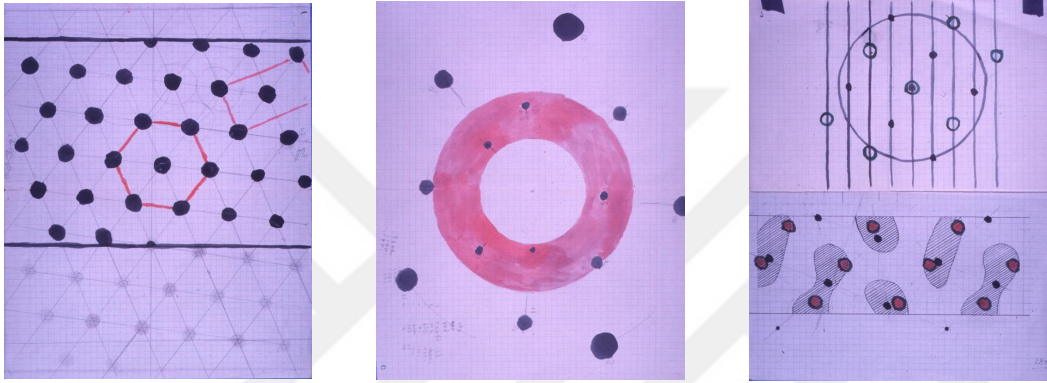


Resim 5.4: Alan Mathison Turing

Bu anlayış, uzun yıllar boyunca deneysel olarak desteklenemese de, ilk kanıt Castets ve diğ. (1990) ve De Kepper ve diğ. (1991) tarafından CIMA reaksiyonu ile gözlemlenmiştir (Ni ve Tang, 2005). CIMA reaksiyonunun 5 farklı reaktanttan oluşması, onun matematiksel olarak tanımlanmasını karmaşık hale getirir. Bununla birlikte, Lengyel ve Epstein (1991, 1992), CIMA reaksiyonundaki beş reaktant maddenin üçünün neredeyse sabit kaldığını gözlemlemiş ve reaksiyonu Lengyel-Epstein Modeli olarak adlandırılan aşağıda verilen  $2 \times 2$  sisteme indirgemişlerdir (Ni ve Tang, 2005):

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) + a - u(t,x) - 4 \frac{u(t,x)v(t,x)}{1+u^2(t,x)} \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \sigma \left[ c \Delta v(t,x) + b \left( u(t,x) - \frac{u(t,x)v(t,x)}{1+u^2(t,x)} \right) \right] \end{cases} \quad (5.16)$$

Burada,  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$  Laplace operatörü;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sınırlı bir küme olmak üzere  $u(t,x)$  ve  $v(t,x)$ , sırasıyla,  $t > 0$  zamanındaki ve  $x \in \Omega$  noktasındaki aktivatör iyodürün ( $I^-$ ) ve inhibitör klorürün ( $ClO_2^-$ ) konsantrasyonu;  $a > 0$  ve  $b > 0$  konsantrasyonla ilgili parametreler;  $c > 0$  aktivatör ve inhibitörün difüzyon katsayıları oranı ve  $\sigma > 0$  skale parametresidir. CIMA reaksiyon modeli hakkında daha fazla bilgi için Epstein ve Pojman (1998) kaynağına başvurulabilir.



Resim 5.5: Morfogenez üzerine yaptığı çalışmalarıyla bağlantılı olarak Turing tarafından yapılan örnek ve hesaplamaları gösteren renkli diyagramlar (Url-24)

Ni ve Tang (2005),  $u_0(t,x), v_0(t,x) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  olmak üzere

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$

Neumann sınır koşulları ve

$$\begin{aligned} u(t,x) = u_0(t,x) &\geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [-\tau, 0], \\ v(t,x) = v_0(t,x) &\geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned}$$

başlangıç değerlerini kullanarak (5.16) reaksiyon-difüzyon sisteminde küçük difüzyon oranları için sabit olmayan kararlı durumların<sup>1</sup> yokluğunu; büyük difüzyon oranları için ise sabit olmayan kararlı durumların varlığını göstermişlerdir.

Yi ve diğ. (2009), (5.16) reaksiyon-difüzyon sisteminin çözümlerinin global asimptotik davranışlarını incelemişlerdir.  $0 < a^2 < 27$  iken sistemin denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Du ve Wang (2010), (5.16)

<sup>1</sup>Zaman içinde değişmeyen veya bir yöndeki değişikliğin sürekli olarak değerinin değişimiyle dengelenmesine dayanan istikrarlı bir durum (Url-27). Burada zamana göre değişimin olmadığı çözümler kastedilmektedir.

reaksiyon-difüzyon sisteminin konumsal olarak homojen olmayan periyodik çözümlere, yani difüzyondan kaynaklanan periyodik çözümlere sahip olduğunu göstermişlerdir. Jin ve diğ. (2013),  $\alpha = a/5$  olmak üzere  $\alpha$  yı çatallanma parametresi olarak almış ve (5.16) sisteminde Hopf çatallanmanın ortaya çıktığını ifade etmişlerdir.

Yi ve diğ. (2008), (5.16) reaksiyon-difüzyon sisteminin yerel (lokal) sistemi olan

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = a - u(t) - 4\frac{u(t)v(t)}{1+u^2(t)} \\ \frac{dv(t)}{dt} = \sigma b \left( u(t) - \frac{u(t)v(t)}{1+u^2(t)} \right) \end{cases} \quad (5.17)$$

adi diferensiyel denklem sistemini ele almışlardır. Bu çalışmada sistemin parametrelerinden  $b > 0$  çatallanma parametresi olarak alınmış ve (5.17) sisteminde  $\alpha = a/5$  ve  $b_0 = (3\alpha^2 - 5)/(1 + \alpha^2)$  olmak üzere sistemin tek pozitif denge noktasının  $b < b_0$  iken kararsız,  $b > b_0$  iken kararlı olduğu ve  $b_0$  çatallanma değerinde (5.17) sisteminde Hopf çatallanma meydana geldiği ifade edilmiştir. Sisteme difüzyon teriminin eklenmesi ile denge noktasının kararlılık yapısında değişiklik olduğu, yani  $\Omega = (0, \pi)$  iken (5.16) sisteminin denge noktasının  $b > b_0$  iken bazı koşullar altında kararsız hale geldiği belirtilmiştir. (5.17) sisteminin periyodik çözümleri, (5.16) reaksiyon-difüzyon sistemi için konumsal olarak homojen olan periyodik çözümlerdir. Bu çalışmada, difüzyonun konumsal olarak homojen olan periyodik çözümlerin kararlılığı ve Hopf çatallanmanın yönü üzerindeki etkisi de incelenmiştir.

Çelik ve Merdan (2013), inhibitörün belirli bir süre içerisinde kimyasal tepkimeye gireceği gerçeğini (5.17) sistemine dahil ederek

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = a - u(t) - 4\frac{u(t)v(t-\tau)}{1+u^2(t)} \\ \frac{dv(t)}{dt} = \sigma b \left( u(t) - \frac{u(t)v(t-\tau)}{1+u^2(t)} \right) \end{cases} \quad (5.18)$$

gecikmeli diferensiyel denklem sistemini elde etmişlerdir.  $\tau$  gecikme terimini, çatallanma parametresi olarak alıp (5.18) sisteminin Hopf çatallanmaya sahip olması için sistemin parametreleri üzerine konması gereken şartı

$$k = \frac{\alpha\sigma b}{1 + \alpha^2} \quad \text{ve} \quad m = \frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2}$$

olmak üzere  $k > m$  olarak belirlemişlerdir. Ayrıca Hopf çatallanmanın yön analizi ile ortaya çıkan periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemişlerdir.

Merdan ve Kayan (2016), aktivatörün kimyasal tepkimeye girişindeki gecikmenin sistemin dinamiği üzerindeki etkisini görmek için öncelikle sadece inhibitör ile etkileşime giren aktivatör terimine gecikme ekleyerek

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = a - u(t) - 4 \frac{u(t-\tau)v(t)}{1+u^2(t)} \\ \frac{dv(t)}{dt} = \sigma b \left( u(t) - \frac{u(t-\tau)v(t)}{1+u^2(t)} \right) \end{cases} \quad (5.19)$$

sistemini ve daha sonra sistemdeki bütün aktivatör terimlerine gecikme ekleyerek de

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = a - u(t-\tau) - 4 \frac{u(t-\tau)v(t)}{1+u^2(t-\tau)} \\ \frac{dv(t)}{dt} = \sigma b \left( u(t-\tau) - \frac{u(t-\tau)v(t)}{1+u^2(t-\tau)} \right) \end{cases} \quad (5.20)$$

gecikmeli diferensiyel denklem sistemini elde etmişlerdir. Bu çalışmada,

$$k = \frac{\alpha\sigma b}{1+\alpha^2}, \quad m = \frac{3\alpha^2-5}{1+\alpha^2} \quad \text{ve} \quad p = \frac{1-7\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

olmak üzere eğer  $|k+p| < 4$  ise (5.19) sisteminde; eğer  $k-m > 0$  ise (5.20) sisteminde Hopf çatallanma meydana geldiği gösterilmiştir. Dolayısıyla, gecikme teriminin farklı terimlere eklenmesi Hopf çatallanmanın ortaya çıkma şartlarını değiştirmektedir. Ayrıca dikkat edilirse (5.18) ve (5.20) sistemlerinde Hopf çatallanmanın meydana gelmesi için gereken şart aynıdır.

Merdan ve Kayan (2015), difüzyonun (5.18) sistemindeki etkisini görmek için (5.18) sistemine reaksiyon-difüzyon terimi eklemiş ve  $u_0(t,x), v_0(t,x) \in C^2((0, \ell\pi), \mathbb{R}) \cap C([0, \ell\pi], \mathbb{R})$  olmak üzere

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, \ell\pi), \quad t \geq 0$$

Neumann sınır koşulları ve

$$u(t,x) = u_0(t,x) \geq 0, \quad x \in [0, \ell\pi], \quad t \in [-\tau, 0],$$

$$v(t,x) = v_0(t,x) \geq 0, \quad x \in [0, \ell\pi], \quad t \in [-\tau, 0]$$

başlangıç değerlerine sahip

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a - u(t,x) - 4 \frac{u(t,x)v(t-\tau,x)}{1+u^2(t,x)} \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + \sigma b \left( u(t,x) - \frac{u(t,x)v(t-\tau,x)}{1+u^2(t,x)} \right) \end{cases} \quad (5.21)$$

tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon sistemini elde etmişlerdir. Sistemin parametrelerine bağlı 6 farklı koşuldaki biri sağlanırsa (5.21) sisteminin pozitif denge noktasının bütün  $\tau \geq 0$  değerleri için kararlı olduğunu ve dolayısıyla (5.21) sisteminde Hopf çatallanmanın meydana gelmediğini göstermişlerdir. Gecikme değeri

$\tau$  sıfırdan sonsuza doğru artarken (5.21) sisteminde Hopf çatallanmanın meydana geldiği, yani reel değerli periyodik çözümlerin ortaya çıktığı ve sistemin parametrelerine bağlı 5 farklı koşul belirlemiştir. Ayrıca Hopf çatallanmanın yönünü ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapılarını tespit etmek için gerekli olan ve bu 5 farklı koşulun her biri için geçerli olan formülleri elde etmişlerdir.

Gecikmeli (5.18) sisteminin periyodik çözümleri, gecikmeli (5.21) reaksiyon-difüzyon sistemi için konumsal olarak homojen olan periyodik çözümlerdir. Çelik ve Merdan (2013), (5.18) sisteminde Hopf çatallanmanın  $k > m$  iken meydana geldiğini ifade etmişlerdir. Merdan ve Kayan (2015),  $-25k^2 < 0$  olduğu için herhangi bir şart olmaksızın (5.21) reaksiyon-difüzyon sisteminin konumsal olarak homojen olan periyodik çözümlere sahip olduğunu göstermişlerdir. Sisteme difüzyon teriminin eklenmesi, konumsal olarak homojen olan durum için sistemin denge noktasını belirli bir  $\tau$  değerinden sonra kararsız hale getirir.

Şimdi, Bölüm 4'te elde edilen algoritmayı kullanarak konumsal olarak homojen olmayan durumda difüzyonun (5.18) sistemi üzerindeki farklı bir etkisini görelim (Kayan ve Merdan, 2017). Laboratuvar koşullarında Lengyel-Epstein modelinin parametreleri için aşağıdaki değer ve aralıklar belirlenmiştir (Ni ve Tang, 2005):  $0 < a < 35$ ,  $0 < b < 8$  ve  $\sigma = 8$ .

Bu değer ve aralıkları dikkate alarak (5.21) reaksiyon-difüzyon sistemi için öncelikle

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad a = 15, \quad b = 1.2, \quad \sigma = 8, \quad (5.22)$$

parametre değerleri ile hesaplama yapılmıştır. Bu hesaplama,  $d_1 = d_2 = 0$  olduğundan (5.18) sistemi için de geçerli olan sonuçlar verir.

Çizelge 5.8, sistemin (3,10) denge noktasının  $\tau \in [0, 0.0443)$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu;  $\tau = 0.0443$  iken sistemin karakteristik denkleminin  $\pm 4.0287i$  sırf sanal kök çiftine sahip olması nedeni ile denge noktasının kararlılığını kaybettiğini ve bu gecikme değerinde sistemde Hopf çatallanmanın ortaya çıktığını; denge noktasının  $\tau > 0.0443$  iken kararsız kaldığını gösterir. Yani, Teorem 4.1'e göre sistem (5.18),  $\tau_{2,0} = 0.0443$  değerinin bir komşuluğunda periyodik çözümler ailesine sahiptir.

Çizelge 5.8: Varlık analizi - Sistem (5.18).

Formül	Değer	Teorem 4.1'in koşulları
(4.13a)	$H = 0$	$V_1$ koşulu sağlanır.
Lemma 4.2	$H_1 0.6800 > 0$ $H_2 14.4000 > 0$	$V_2$ koşulu sağlanır.
(4.16)	$H_4 S = -207.36 < 0$	$V_3$ koşulu sağlanır.
(4.18) (4.21)	$\omega_1 = 4.0287$ $\tau_{2,0} = 0.0443$	Sırf sanal özdeğer çifti $\pm i4.0287$ . Çatallanma değeri.

Çizelge 5.9: Yön analizi için gerekli değerler 1 - Sistem (5.18).

Diyagram	Formül	Algoritma ile elde edilen değer
Şekil 4.4	(4.39)	$c = 2.4000 - 2.9786i$
	(4.41)	$c^* = -1.8042 + 3.3040i$
	(4.43)	$\bar{s} = 0.0317 - 0.1647i$
Şekil 4.5	(4.57a)-(4.57b)	$\mathbf{h}_{20}(0) = \begin{pmatrix} -0.1333 - 1.0743i \\ -0.3200 - 2.5784i \end{pmatrix}$
	(4.57c)-(4.57d)	$\mathbf{h}_{11}(0) = \begin{pmatrix} -0.2667 \\ -0.6400 \end{pmatrix}$
	(4.57e)-(4.57f)	$\mathbf{h}_{02}(0) = \begin{pmatrix} -0.1333 + 1.0743i \\ -0.3200 + 2.5784i \end{pmatrix}$
Şekil 4.6	(4.58a)	$g_{20}(0) = -0.1644 - 1.2081i$
	(4.58b)	$g_{11}(0) = -0.1502 + 0.0018i$
	(4.58c)	$g_{02}(0) = -0.1359 + 1.2116i$

Çizelge 5.10: Yön analizi için gerekli değerler 2 - Sistem (5.18).

Diyagram	Formül	Algoritma ile elde edilen değer
Şekil 4.9	(4.69b)	$\mathbf{W}_{20}(0;0) = \begin{pmatrix} 0.0013 + 0.0054i \\ 0.0007 + 0.0122i \end{pmatrix}$
Şekil 4.10	(4.69c)	$\mathbf{W}_{20}(-0.0443;0) = \begin{pmatrix} 0.0349 + 0.1064i \\ 0.0732 + 0.2245i \end{pmatrix}$
Şekil 4.13	(4.75b)	$\mathbf{W}_{11}(0;0) = \begin{pmatrix} 0.0009 \\ 0.0024 + 0.0025i \end{pmatrix}$
Şekil 4.14	(4.75c)	$\mathbf{W}_{11}(-0.0443;0) = \begin{pmatrix} 0.0141 \\ 0.0302 + 0.0025i \end{pmatrix}$
Şekil 4.15	(4.57g)-(4.57h)	$\mathbf{h}_{21}(0) = \begin{pmatrix} 0.0172 + 0.0342i \\ 0.0412 + 0.0821i \end{pmatrix}$
Şekil 4.16	(4.58d)	$g_{21}(0) = 0.0198 + 0.0383i$
Şekil 4.17	(4.79)	$c_1(0) = -0.0126 - 0.0446i$

Çizelge 5.9 ve Çizelge 5.10’da verilen değerler kullanılarak yapılan yön analizi ile Teorem 4.3’e göre Çizelge 5.11, bu periyodik çözümlerin özellikleri hakkında bilgi verir. Sonuç olarak  $a = 15$ ,  $b = 1.2$  ve  $\sigma = 8$  iken (5.18) sisteminde, yani (5.22) parametre değerine sahip (5.21) sisteminde, süperkritik Hopf çatallanma meydana gelir.

Çizelge 5.11: Yön analizi sonuç - Sistem (5.18).

Formül	Değer	Teorem 4.3’e göre sonuç
(4.79)	$\text{Re}(c_1(0)) = -0.0126 < 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V_5</math> koşulu sağlanır.</li> <li>• Periyodik çözümler <i>kararlıdır</i>.</li> <li>• Hopf çatallanma <i>süperkritiktir</i>.</li> </ul>
(4.80)	$\mu_2 = 0.0014 > 0$	Periyodik çözümler, çatallanma değerinden <i>sonra</i> ortaya çıkar.
(4.81)	$T_2 = 0.0094 > 0$	Çatallanma değerinden uzaklaştıkça periyot <i>artar</i> .
(4.82)	Periyot	Çatallanma değeri civarında Periyot $\approx 1.5596$ dir.

İkinci olarak difüzyonun etkisini görebilmek amacıyla

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 13, \quad a = 15, \quad b = 1.2, \quad \sigma = 8, \quad (5.23)$$

parametre değerleri ile (5.21) sistemi için hesaplama yapılmıştır.

Çizelge 5.12’ye göre sistemin (3, 10) denge noktası  $\tau \in [0, 0.8650)$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı;  $\tau = 0.8650$  iken sistemin karakteristik denklemi  $\pm 0.5831i$  sıfır sanal kök çiftine sahip olduğu için denge noktası kararlılığını kaybeder ve bu gecikme değerinde sistemde Hopf çatallanma meydana gelir; denge noktası  $\tau > 0.8650$  iken kararsız kalır. Yani, Teorem 4.1’e göre sistem (5.21),  $\tau_{2,0} = 0.8650$  değerinin bir komşuluğunda periyodik çözümler ailesine sahiptir.

Çizelge 5.12: Varlık analizi - Sistem (5.21).

Formül	Değer	Teorem 4.1’in koşulları
(4.13a)	$H = 0$	$V_1$ koşulu sağlanır.
Lemma 4.2	$H_1 = 14.6800 > 0$ $H_2 = 1.6800 > 0$	$V_2$ koşulu sağlanır.
(4.16)	$H_4 S = -55.2384 < 0$	$V_3$ koşulu sağlanır.
(4.18)	$\omega_1 = 0.5831$	Sıfır sanal özdeğer çifti $\pm i0.5831$ .
(4.21)	$\tau_{2,0} = 0.8650$	Çatallanma değeri.



Çizelge 5.13: Yön analizi için gerekli değerler 1 - Sistem (5.21).

Diyagram	Formül	Algoritma ile elde edilen değer
Şekil 4.4	(4.39)	$c = 1.1103 + 0.0578i$
	(4.41)	$c^* = -11.6497 + 5.6604i$
	(4.43)	$\bar{s} = 0.0835 - 0.1913i$
Şekil 4.5	(4.57a)-(4.57b)	$\mathbf{h}_{20}(0) = \begin{pmatrix} -0.4000 - 0.1555i \\ -0.9600 - 0.3732i \end{pmatrix}$
	(4.57c)-(4.57d)	$\mathbf{h}_{11}(0) = \begin{pmatrix} -0.8000 \\ -1.9200 \end{pmatrix}$
	(4.57e)-(4.57f)	$\mathbf{h}_{02}(0) = \begin{pmatrix} -0.4000 + 0.1555i \\ -0.9600 + 0.3732i \end{pmatrix}$
Şekil 4.6	(4.58a)	$g_{20}(0) = -0.9456 + 1.6966i$
	(4.58b)	$g_{11}(0) = -0.2485 + 1.7932i$
	(4.58c)	$g_{02}(0) = 0.4485 + 1.8898i$

Çizelge 5.14: Yön analizi için gerekli değerler 2 - Sistem (5.21).

Diyagram	Formül	Algoritma ile elde edilen değer
Şekil 4.9	(4.69b)	$\mathbf{W}_{20}(0;0) = \begin{pmatrix} -2.7985 - 1.7264i \\ -2.9645 - 2.2618i \end{pmatrix}$
Şekil 4.10	(4.69c)	$\mathbf{W}_{20}(-0.8650;0) = \begin{pmatrix} -3.3312 + 1.3604i \\ -3.7331 + 1.1805i \end{pmatrix}$
Şekil 4.13	(4.75b)	$\mathbf{W}_{11}(0;0) = \begin{pmatrix} 5.5522 + 0.0066i \\ 6.1168 + 0.0073i \end{pmatrix}$
Şekil 4.14	(4.75c)	$\mathbf{W}_{11}(-0.8650;0) = \begin{pmatrix} 5.1983 + 0.0066i \\ 5.9020 + 0.0073i \end{pmatrix}$
Şekil 4.15	(4.57g)-(4.57h)	$\mathbf{h}_{21}(0) = \begin{pmatrix} -3.2247 + 0.0698i \\ -7.7394 + 0.1674i \end{pmatrix}$
Şekil 4.16	(4.58d)	$g_{21}(0) = -1.6910 + 14.5001i$
Şekil 4.17	(4.79)	$c_1(0) = 0.9702 - 1.8569i$

Çizelge 5.13 ve Çizelge 5.14’te verilen değerler kullanılarak yapılan yön analizi sonucu Teorem 4.3’e göre Çizelge 5.15, (5.23) parametre değerlerine sahip (5.21) sistemin periyodik çözümlerinin özellikleri hakkında bilgi verir ve meydana gelen Hopf çatallanmanın subkritik olduğunu belirtir.

Çizelge 5.15: Yön analizi sonuç - Sistem (5.21).

Formül	Değer	Teorem 4.3’e göre sonuç
(4.79)	$\text{Re}(c_1(0)) = 0.9702 > 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V_5</math> koşulu sağlanır.</li> <li>• Periyodik çözümler <i>kararsızdır</i>.</li> <li>• Hopf çatallanma <i>subkritiktir</i>.</li> </ul>
(4.80)	$\mu_2 = -0.5796 < 0$	Periyodik çözümler, çatallanma değerinden <i>önce</i> ortaya çıkar.
(4.81)	$T_2 = 2.6434 > 0$	Çatallanma değerinden uzaklaştıkça periyot <i>artar</i> .
(4.82)	Periyot	Çatallanma değeri civarında Periyot $\approx 10.7762$ dir.

Difüzyonun sistem üzerindeki ilk etkisi denge noktasının kararlılığı ile ilgilidir. Difüzyonun olmadığı durumda (3, 10) denge noktası  $\tau \in [0, 0.0443)$  değerleri için yerel (lokal) asimptotik kararlı iken difüzyonun varlığında  $\tau \in [0, 0.8650)$  değerleri için yerel (lokal) asimptotik kararlıdır. Yani, denge noktasının kararlılığı difüzyonun yokluğunda gecikme değerinden daha hızlı etkilenir. Difüzyon ikinci olarak sistemin sahip olduğu periyodik çözümlerin özelliklerini etkilemiştir. Çizelge 5.11 ve Çizelge 5.12 karşılaştırıldığında difüzyonun bu etkisi açıkça görülür. Difüzyonun yokluğunda periyodik çözümler kararlı ve çatallanma değerinden sonra ortaya çıkarken difüzyonun etkisi altında periyodik çözümler kararsızdır ve çatallanma değerinden önce ortaya çıkarlar. Dolayısıyla, difüzyon Hopf çatallanmanın tipini değiştirmiştir. Son olarak, difüzyon periyodik çözümlerin periyodunu, yani sistemin dinamiğinin kendini tekrarlama süresini, değiştirmiştir. Sonuç olarak reaksiyon-difüzyon teriminin (5.18) ve (5.21) sistemlerinin dinamiği üzerinde çok belirgin bir etkiye sahip olduğu görülmektedir. Reaksiyon-difüzyon terimini içeren modellerin daha gerçekçi olduğu göz önünde bulundurulduğunda bu etki daha anlamlı hale gelir.

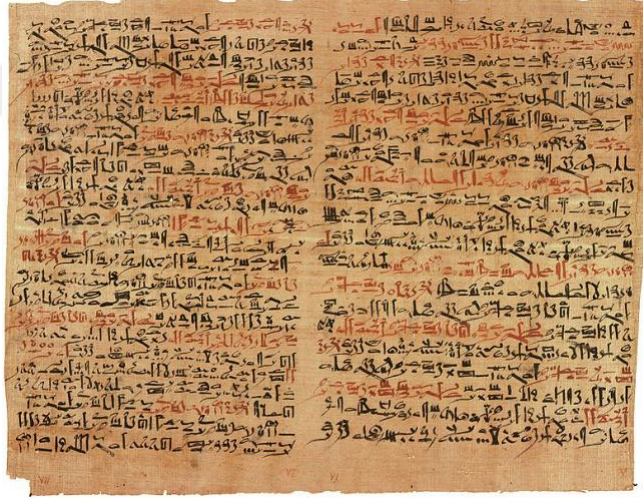
## 5.4 Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Tümör-Bağışıklık Sistemi Etkileşimi Modeli

### 5.4.1 Matematiksel model

Kanserle Savaş Vakfı’nın web sitesinde tanımlandığı üzere kanser, vücudun bir organ veya dokusunda beliren bazı anormal hücrelerin kontrolsüz ve düzensiz bir şekilde çoğalması sonucu ortaya çıkan kötü tabiatlı bir hastalıktır. Çoğalan bu hücreler (kanser

hücreleri) bir araya gelir ve tümör olarak isimlendirilen bir kitle oluştururlar. Normal vücut hücreleri bir düzen içinde büyür, bölünerek çoğalır ve ölürlür. Yaşamın erken dönemlerinde, kişi gelişmesini tamamlayana kadar, normal hücreler hızla bölünerek çoğalırlar. Gelişme tamamlanınca ise yalnızca yıpranan veya ölen hücrelerin yerini almak veya travmada tamir işlemini gerçekleştirmek için bölünür ve çoğalırlar. Buna karşılık kanser hücrelerinin çoğalması sürekli olduğundan, tümör kitleleri de devamlı büyürler. Kanser hücreleri çevre dokuları istila ederek buraları tahrip eder. Ayrıca kana ve lenf sıvısına katılarak, kan ve lenf yoluyla vücudun diğer kısımlarına yayılır ve yeni tümör odaklarının oluşmasına yol açarlar. Başka doku ve organlarda oluşan bu tümör odakları "metastaz" olarak isimlendirilir. Kanser kaynak aldığı vücut kısmına ve mikroskopik görünümüne göre isimlendirilir. Örneğin: meme kanseri, akciğer kanseri, deri kanseri, mide kanseri gibi. Değişik tipteki kanserlerin büyüme hızları, yayılma şekilleri ve farklı tedavilere verdikleri cevap da değişik olur (Url-28).

Kanser, yüzyıllar öncesinde olduğu gibi günümüzde de aramızdaki varlığını sürdürmekte ve insanlığı geçmişte olduğundan daha fazla tehdit etmektedir. Tıp tarihi boyunca hiçbir hastalığın kanser kadar araştırmalara konu olmadığını söylemek yanlış olmaz (Atıcı, 2007). Sigerist (1960) kaynağına göre malign (kötü huylu) tümörlerle ilgili tanımlara ilk olarak Mısır papirüsleri, Babil çivi yazısı tabletleri ve eski Hint yazmalarında rastlanılmaktadır (Resim 5.6). Kanser tarihçesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgiye Atıcı (2007) kaynağından ulaşılabilir.



Resim 5.6: Edwin Smith Papirüsü, dünyanın en eski cerrahi dokümanı olup MÖ 16. yüzyıla aittir (Van Middendorp ve diğ., 2010)

Dünya Sağlık Örgütünü'nün web sitesindeki verilere göre (Url-29):

- \* Kanser, hastalık ve ölümlerin dünya çapında önde gelen nedenlerinden biridir ve 2012 yılında yaklaşık 14 milyon yeni kanser vakası tespit edilmiştir (Ferlay ve diğ., 2015),
- \* Yeni vakaların sayısının önümüzdeki 20 yılda yaklaşık %70 artması beklenmektedir,
- \* Kanser, dünyadaki ölümlerin önde gelen ikinci nedenidir ve 2015 yılında 8,8 milyon ölümün ana nedenidir, yani 6 ölümün yaklaşık 1'i kansere bağlıdır,

\* Kanserden ölümlerin yaklaşık üçte biri, davranışsal ve diyetle ilgili beş temel riskten kaynaklanmaktadır: yüksek vücut kitle indeksi, düşük meyve ve sebze tüketimi, fiziksel aktivite eksikliği, tütün kullanımı ve alkol kullanımı,

\* Tütün kullanımı, kanser için en önemli risk faktörüdür ve kanser ölümlerinin yaklaşık %22'sinin başta gelen nedenidir (Forouzanfar ve diğ., 2016),

\* Kanserden ölümlerin yaklaşık %70'i, düşük ve orta gelirli ülkelerde gerçekleşmektedir. Hepatit ve insan papilloma virüsü (HPV) gibi kansere neden olan enfeksiyonlar, düşük ve orta gelirli ülkelerdeki bu kanser vakalarının %25'inin ana nedenidir (Plummer ve diğ., 2016).

Kanserin tedavisinde, genterapi<sup>1</sup>, immunoterapi<sup>2</sup>, kemoterapi<sup>3</sup>, radyoterapi<sup>4</sup> veya ameliyat gibi bazı ilerlemeler olmasına rağmen ne yazık ki bu yöntemler çoğunlukla tam bir tedavi sağlayamamaktadır. Bunun altında yatan temel sebep, kanserin gelişim mekanizması ve tahribatlarının tam olarak anlaşılabilmesidir.

Gatenby ve Maini (2003)'e göre, deneysel onkoloji verileri dolup taşıyor: 2001'de tek başına, habis tümörleri tanımlama, teşhis etme ve tedavi etme üzerine 21.000'den fazla makale yayınlandı. Moleküler biyolojinin güçlü teknikleri, memeli hücrelerinde yaşamı ve ölümü kontrol eden makromoleküllerin<sup>5</sup> yapısında ve işlevinde kansere bağlı sayısız değişiklik olduğunu göstermiştir. İnsan genomunda<sup>6</sup>, kanseri teşvik edebilen veya önleyebilen en az 200 gen tanımlanmıştır. Dikkat çekici bir şekilde, bu zengin bilgiye rağmen, klinik onkologlar ve tümör biyologları, bu verilerin anlaşılması, organize edilmesi ve uygulanması için bir çerçeve görevi görecektir neredeyse hiçbir kapsamlı teorik modele sahip değildir. Mevcut matematiksel modeller tamamen doğru olmayabilir. Fakat bu modeller, basit bir sözel akıl yürütme ve doğrusal sezgilerin ötesinde gerekli olan bir sonraki adımı temsil edebilmektedir. Bu nedenle, kanser biyolojisindeki karmaşık, lineer olmayan sistemlerin anlaşılması mevcut verilere dayanan ve sürekli yeni bilgilerle revize edilen matematiksel modellerin deneysel tasarım ve yorumlamaya kılavuzluk ettiği disiplinler arası, interaktif bir araştırmayı gerektirir (Gatenby ve Maini, 2003).

Disiplinler arası çalışmaları artırabilmek için dünya genelinde tıp doktoru, biyolog, uygulamalı matematikçi ve fizikçilerin yer aldığı kanser araştırma enstitüleri ve merkezleri kurulmaktadır. Bu enstitü ve merkezlerde, kanserin başlangıç ve gelişim evrelerini daha iyi anlamak, mevcut tedavi yöntemlerini iyileştirmek ve yeni tedavi stratejileri geliştirmek amacıyla matematiksel modeller ve bu modellerin simülasyonları üzerinde çalışılmaktadır.

<sup>1</sup>Vücudun bağışıklık sistemini, kanserli hücrelere karşı daha kesin, etkili ve daha güçlü saldırılar yapacak şekilde yükselterek kanserli hücrelerin büyüme ve yayılmasını durdurmayı veya hücrenin tamamen ortadan kaldırılmasını amaçlayan tedavi yöntemi (Url-17).

<sup>2</sup>Gen terapisi, hastalığı tedavi etmek veya önlemek için genleri kullanan deneysel bir tekniktir. Bu teknik, gelecekte, doktorlara bir hastalığı ilaç veya ameliyat yerine, hastanın hücrelerine gen ekleyerek tedavi etme imkanı sunacaktır (Url-30).

<sup>3</sup>Vücutta bulunan mikropları, organizmaya zarar vermeden kimyasal maddelerle öldürme veya üremelerine engel olma ve bu yolla hastalığı tedavi etme (Url-31).

<sup>4</sup>Kanser gibi hastalıkların X ışınları ya da radyoaktif maddelerle tedavisi. (Url-32).

<sup>5</sup>Proteinler, polisakkaritler ve diğer doğal ve sentetik polimerlerde olduğu gibi birkaç binden milyona uzanan molekül ağırlığına sahip çok büyük polimerik zincir yapıda bir molekül (Url-33).

<sup>6</sup>Bireye bir veya her iki ebeveyninden gelen gen takımı (Url-34).

Kanserin ortaya çıkmasında genetik yatkınlık, sağlıksız beslenme, çevre kirliliği, radyasyon, alkol ve tütün ürünleri gibi pek çok farklı etken söz konusudur. Gerekçe ne olursa olsun kanserle mücadele sürecinde tümör hücreleri ile bağışıklık sistemi arasındaki ilişki çok önemli bir yere sahiptir.

Şekil 5.12’de görüldüğü gibi bilinmeyen bir doku, bir organizma veya tümör hücreleri vücutta görüldüğünde, bağışıklık sistemi onları tanımaya ve başarılı olursa onları ortadan kaldırmaya çalışır. Bağışıklık sistemi hücresel<sup>1</sup> ve hümorale<sup>2</sup> olmak üzere iki farklı şekilde yanıt<sup>3</sup> verir. T hücreleri hücresele bağışıklık yanıtını oluştururken, B hücreleri hümorale bağışıklık yanıtını oluştururlar. Bağışıklık yanıtı, tümör hücrelerinin vücuda ait bir doku olmadığı fark edildiği anda başlar. Sonra, tümör hücreleri vücuttaki bütün dokularda bulunan makrofajlar<sup>4</sup> tarafından yakalanır. Makrofajlar tümör hücrelerini içine alır, onları yer ve karşı atağı koordine etmek için yardımcı T hücrelerini<sup>5</sup> aktif hale getirecek sitokinleri<sup>6</sup> serbest bırakırlar. T hücreleri, aynı zamanda antijenlerle<sup>7</sup> etkileşime girmesi için doğrudan uyarılabilir. Bu yardımcı hücreler tümör hücrelerini öldüremezler, fakat T lenfositlerin özel bir tipi olan doğal öldürücü hücreleri<sup>8</sup> uyarmak için acil kimyasal sinyaller gönderirler. T hücreleri çoğalmaya başlar ve daha fazla T hücresi, B hücresi ve doğal öldürücü hücrelerin uyarılması için sitokin salgırlar. B hücrelerinin sayısı artarken, T hücreleri antikor<sup>9</sup> üretiminin başlaması için sinyal gönderirler. Antikorlar kanda dolaşırlar ve tümör hücrelerine tutunurlar ki makrofajlar onları daha hızlı yutabilsin ve doğal öldürücü hücreler daha hızlı yok edebilsin. Bütün T hücreleri gibi, doğal öldürücü hücreler de enfekte olmuş özel bir hücre veya kanser hücresi tipini tanımaya yönelik eğitilmişlerdir. Doğal öldürücü hücreler vücut savunmasında kritik bir rol oynarlar (Galach, 2003).

1970’li yıllardan itibaren, bağışıklık sistemi ile büyüyen bir tümör arasındaki etkileşimi ele alan modeller geliştirilmiştir (Bakınız: Kuznetsov ve diğ., 1994 ve burada atıfta bulunulan kaynaklar). Tümör-bağışıklık sistemi dinamikleri üzerine yapılan deneysel ve klinik çalışmaların yanı sıra, bu dinamiğin matematiksel

<sup>1</sup>Vücuda giren mikroorganizmalar, tümör hücreleri veya aktarılan organ ve doku gibi antijenlere karşı T hücrelerinin gösterdiği tepkiye bağlı olarak gelişen bağışıklık türü (Url-35).

<sup>2</sup>Vücuda giren antijenlere karşı B hücrelerinin oluşturduğu immünooglobulinler (antikorlar) aracılığıyla gerçekleşen bağışıklık türü (Url-36).

<sup>3</sup>Yabancı madde ile karşılaşmada immün sistem hücre ve moleküllerinin karşılıklı ve düzenli etkileşimleriyle ortaya çıkan savunmadır (Url-37).

<sup>4</sup>Dokularda bulunan patojenlerin, ölü hücrelerin, hücresele kalıntıların ve vücuttaki yabancı maddelerin yutulmasından sorumlu hücrelerdir (Url-38).

<sup>5</sup>Bazı antijenlerle uyarıldığında T hücrelerinden oluşan, sitotoksik T hücrelerinin üretilmesine yardım eden, antikor yanıtının oluşmasında B hücreleri ile birlikte görev yapan T hücresi türü. (Url-39).

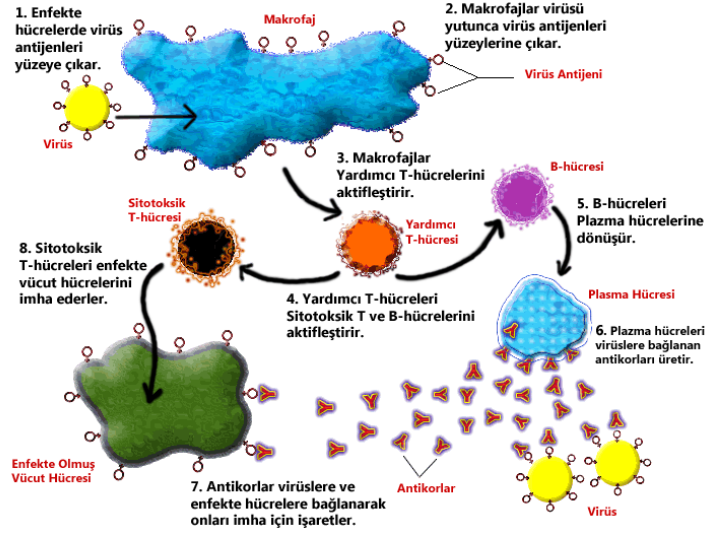
<sup>6</sup>Yangısal ve bağışıklık ile ilgili yanıtlara aracılık eden, farklı hücre türleri tarafından üretilen ve bağışıklık sisteminin hücreleri arasında iletişimi sağlayan proteinlerden herhangi biri (Url-40).

<sup>7</sup>Organizmada kendisine karşı bağışık cevap oluşturan ve bu cevap sonucu ortaya çıkan antikor ve duyarlı hücre almaçlarıyla özgül olarak birleşme özelliği gösteren bakteri, zehir, yabancı protein vb. maddeler, immünojen (Url-41).

<sup>8</sup>Sitotoksik T hücreleri gibi sitotoksiksite yeteneği olan, ancak T hücresi antijen reseptörleri ve yüzey immünooglobulinleri taşımadıklarından dolayı ne T ne de B hücresi olmayan, özellikle bazı virüslerle enfekte olmuş hücreler ile tümör hücrelerini tanıyıp yok edebilen hücrelerin oluşturduğu lenfositlerin bir grubu (Url-42).

<sup>9</sup>Özel bir antijene cevap olarak B lenfositleri ve plazma hücreleri tarafından meydana getirilen ve bağışıklıktan sorumlu olan glikoprotein yapısındaki maddeler (Url-43).

modellemesi çok ilgi çekmiştir. Bu modeller çoğunlukla tümör ile mikro-çevrenin birçok bileşeni arasındaki etkileşimi anlamak için kullanılmıştır (Bakınız: Adam ve Bellomo, 1997; Eftime ve diğ., 2010 ve burada atıfta bulunulan kaynaklar).



Şekil 5.12: Bağışıklık yanıtı (İmmün yanıt) süreci.

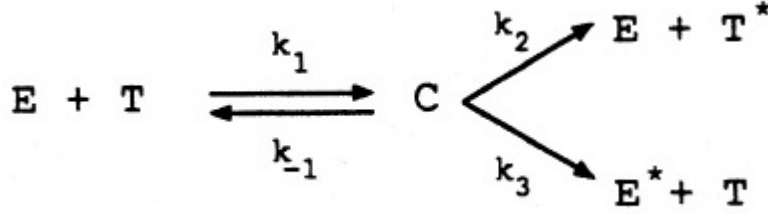
Tümör-bağışıklık sistemi etkileşiminin matematiksel modelleri ağırlıklı olarak adi diferensiyel denklemler (Örnek için bakınız: Arciero ve diğ., 2004; de Pillis ve diğ., 2005; Kirschner ve Panetta, 1998; Kuznetsov ve diğ., 1994; Lejeune ve diğ., 2008; Nani ve Freedman, 2000; Owen ve Sherratt, 2008 ve buralarda atıfta bulunulan kaynaklar), gecikmeli diferensiyel denklemler (Örnek için bakınız: Asachenkov ve diğ., 1994; Byrne, 1997; Byrne ve Gourley, 1997; d'Onofrio ve Gandolfi, 2009; d'Onofrio ve diğ., 2010; Galach, 2003; Liu ve diğ., 2007; Piotrowska ve Forys, 2011; Rodriguez-Perex ve diğ., 2007; Villasana ve Radunskaya, 2003 ve buralarda atıfta bulunulan kaynaklar) ve kısmi türevli diferensiyel denklemler (Örnek için bakınız: Gatenby ve Gawlinski, 1996; Matzavinos ve diğ., 2004 ve buralarda atıfta bulunulan kaynaklar) kullanılarak türetilmiştir.

Kuznetsov ve diğ. (1994) tarafından adi diferensiyel denklemler kullanılarak oluşturulan tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modeli, bu etkileşimde tümör hücrelerinin yok edilmesi yanında, buna eş zamanlı olarak bağışıklık sistemi hücrelerinin de etkisiz hale geldiği durumu ele alıyor olması nedeni ile diğer modellerden ayrılmaktadır (Galach, 2003). Kuznetsov ve diğ. (1994), laboratuvar ortamındaki efektör hücreler<sup>1</sup> ile tümör hücreleri arasındaki etkileşimi, Şekil 5.13'teki kinetik şema ile ifade etmişlerdir.

Bu şemada,  $E$  efektör hücrelerin,  $T$  tümör hücrelerinin,  $C$  efektör hücre-tümör hücresi çiftinin,  $E^*$  aktive olmamış efektör hücrelerin ve  $T^*$  ölmüş tümör hücrelerinin lokal konsantrasyonlarını göstermektedir. Ayrıca  $k_1$  efektör hücre-tümör hücresi birleşme oranını,  $k_{-1}$  efektör hücresinin tümör hücresinden, tümör hücresine zarar vermeden

<sup>1</sup>Belirli bir sürecin son cevabı veya işlevini yerine getiren bir hücre. Örneğin, bağışıklık sisteminin ana efektör hücreleri, aktive olmuş patojenlerin yok edilmesinde ve vücuttan çıkarılmasında rol alan lenfositler ve fagositlerdir (Url-15).

ayrılma oranını,  $k_2$  tümör hücrelerinin efektör hücreler tarafından yok edilmesi oranını,  $k_3$  efektör hücre-tümör hücresi etkileşiminin efektör hücreyi etkisiz hale getirmesi oranını ifade etmektedir.



Şekil 5.13: Efektör hücre-tümör hücre etkileşimi (Kuznetsov ve diğ., 1994).

Bu etkileşimde aktif olmayan efektör hücrelerin hesaba katılması bu modeli daha önceki çalışmalardan ayıran bir özelliktir. Bunun sebebi ise laboratuvar ortamındaki kültürde doğal öldürücü hücrelerin hedef hücreleri tekrar tekrar öldürme yeteneğinin sınırlı gözükmeleridir. Bunun, efektör hücrelerin tümör hücrelerine tutunduğu sırada, tümör hücrelerinden moleküllerin salınmasına bağlı olarak sitotoksik etki veya diğer düzenleyici etkilerden sorumlu moleküllerin tüketilmesinden kaynaklanıyor olduğu düşünülmektedir (Kuznetsov ve diğ., 1994).

Şekil 5.13'teki kinetik şemaya göre, Kuznetsov ve diğ. (1994) bağışıklık sistemi ile büyüyen bir tümör arasındaki etkileşimi adi bir diferensiyel denklem sistemi olarak aşağıdaki gibi oluşturmuşlardır:

$$\frac{dE}{dt} = s + F(C, T) - d_1E - k_1ET + (k_{-1} + k_2)C, \quad (5.24a)$$

$$\frac{dT}{dt} = aT(1 - bT_{tot}) - k_1ET + (k_{-1} + k_3)C, \quad (5.24b)$$

$$\frac{dC}{dt} = k_1ET - (k_{-1} + k_2 + k_3)C, \quad (5.24c)$$

$$\frac{dE^*}{dt} = k_3C - d_2E^*, \quad (5.24d)$$

$$\frac{dT^*}{dt} = k_2C - d_3T^*. \quad (5.24e)$$

Burada,  $s$ , olgun efektör hücrelerin tümör hücrelerinin bulunduğu bölgeye normal (tümör hücresinin varlığı ile ilişkisi olmaksızın) akışını gösteren oran;  $F(C, T)$ , efektör hücrelerin tümör hücrelerinin bulunduğu bölgede tümör hücresinin varlığı nedeni ile çoğalma oranını karakterize eden fonksiyon;  $d_1, d_2$  ve  $d_3$ , imha olma veya göç nedeni ile, sırasıyla,  $E, E^*$  ve  $T^*$  hücrelerinin, tümör hücrelerinin bulunduğu bölgeden ayrılma oranlarını gösteren pozitif sabitler;  $a$ , tümör hücrelerinin maksimum büyüme oranı;  $b^{-1}$ , biyolojik çevrenin tümör hücreleri için maksimum taşıma kapasitesini gösteren sabit ve  $T_{tot} = T + C$ , tümör hücrelerinin bulunduğu bölgedeki tümör hücrelerinin toplam popülasyonudur. Tümörün metastaz yapmadığı

ve dolayısıyla tümör hücrelerinin veya efektör hücre-tümör hücresi çiftinin göç etmediği varsayılmaktadır.

Hem laboratuvar koşullarında hem de yaşayan organizmalar üzerinde yapılan birçok çalışmada, tümör hücresi popülasyonunun büyümesinin, küçük popülasyonlu tümör hücreleri için üstel olduğu ancak büyümenin büyük popülasyon boyutlarında yavaşladığı tespit edilmiştir (Kuznetsov ve diğ., 1994). Bu durum, (5.24b) denkleminde  $aT(1 - bT_{tot})$  lojistik denklemi eklenerek modele dahil edilmiştir.

Fonksiyon  $F(C, T)$ , sitotoksik efektör hücrelerin, tümör varlığı nedeniyle tümör hücrelerinin bulunduğu bölgede birikme oranını karakterize eder. Bu birikmeye, efektör hücrelerin tümör hücreleri tarafından uyarılmasına bağlı artışı ve lenf düğümleri gibi çevredeki dokulardan bu bölgeye olan efektör hücre göçü katkıda bulunabilir. Kuznetsov (1979)'un analizi, efektör hücrelerin bu uyarılan birikimi için  $f, g$  pozitif sabitler olmak üzere Michaelis-Menten denklemi formunu önermektedir:

$$F(C, T) = \frac{fC}{g + T}.$$

Bu fonksiyon efektör hücre-tümör hücresi çiftine bağlıdır ama açıkça  $E$  ye bağlı değildir. Ayrıca bu form efektör hücrelerin birikiminin, efektör hücre-tümör hücresi birleşmesi sonucu, efektör hücreler tarafından üretilen sitokinler gibi sinyallerden kaynaklandığını varsayan bir model ile uyumludur.

Dikkat edilirse  $E^*$  ve  $T^*$  değişkenleri birbirleri üzerinde veya sistemdeki diğer değişkenler üzerinde hiçbir etkiye sahip değildir. Bu nedenle, bu sistemin davranışını (5.24a)-(5.24c) denklemleri belirler. Diğer taraftan, deneysel gözlemleri sonucunda Kuznetsov ve diğ. (1994),  $\frac{dC}{dt} \approx 0$  yaklaşımını kullanmışlar ve sonuç olarak  $K = \frac{k_1}{k_2 + k_3 + k_{-1}}$  olmak üzere

$$C \approx KET$$

olarak kabul etmişlerdir. Böylece,  $F(C, T) = F(E, T)$  olur. Ayrıca Bronz (1987); Fishelson ve Berke (1981) tarafından yapılan deneysel gözlemler,  $T_{tot} \approx T$  olduğunu göstermiştir.

Bu bilgiler ışığında,  $p = fK$ ,  $m = Kk_3$ ,  $n = Kk_2$  ve  $d = d_1$  olmak üzere (5.24a) ve (5.24b) denklemleri

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = s + \frac{pET}{g + T} - mET - dE \\ \frac{dT}{dt} = aT(1 - bT) - nET \end{cases} \quad (5.25)$$

sistemine dönüşür.

Galach (2003), Kuznetsov ve diğ. (1994) tarafından üretilen modeldeki efektör hücrelerin çoğalma oranını Michaelis-Menten formu ile ele alan  $F(E, T)$  fonksiyonunu, Lotka-Volterra formu ile değiştirmiştir ve  $F(E, T) = \theta ET$  olarak almıştır. Böylece, (5.25) sistemi  $\alpha_1 = \theta - m$  olmak üzere



$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = s + \alpha_1 ET - dE \\ \frac{dT}{dt} = aT(1 - bT) - nET \end{cases}$$

sistemine dönüşür. Kuznetsov ve diğ. (1994),  $E_0$  ve  $T_0$  değerlerini sırasıyla,  $E$  ve  $T$  hücre popülasyon konsantrasyonlarının basamaksal büyüklüğü olarak tanımlamışlardır. Galach (2003) bu sistemi,  $u = \frac{E}{E_0}$  ve  $v = \frac{T}{T_0}$  olarak alıp tümör hücrelerinin etkisiz hale getirilme oranına göre  $\xi = nT_0t$  zaman skalasını kullanarak boyutsuzlaştırmış ve  $\sigma = \frac{s}{nE_0T_0}$ ,  $\omega = \frac{\alpha_1}{n}$ ,  $\delta = \frac{d}{nT_0}$ ,  $\alpha = \frac{a}{nT_0}$  ve  $\beta = bT_0$  olmak üzere aşağıdaki denklemleri elde etmiştir:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = \sigma + \omega uv - \delta u \\ \frac{dv}{d\xi} = \alpha v(1 - \beta v) - uv \end{cases}$$

Burada,  $u$  ve  $v$ , sırasıyla efektör hücre ve tümör hücrelerinin boyutsuz popülasyon yoğunluklarını ve  $\omega$  tümörün varlığına bağlı bağışıklık yanıtını göstermektedir. Kuznetsov ve diğ. (1994), deneysel çalışmalardan yola çıkarak  $E_0 = T_0$  kabul etmişlerdir. Bu sistemde, zaman bağımsız değişkeni  $\xi = t$  olarak değiştirilirse

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sigma + \omega uv - \delta u \\ \frac{dv}{dt} = \alpha v(1 - \beta v) - uv \end{cases} \quad (5.26)$$

sistemi elde edilir.

Galach (2003), öncelikle, negatif olmayan bütün başlangıç değerleri için (5.26) sisteminin negatif olmayan tek bir çözümünün var olduğunu göstermiştir. Ardından,  $\omega > 0$  ve  $\alpha\delta < \sigma$  iken (5.26) sisteminin negatif olmayan tek bir denge noktasına sahip ve bu denge noktasının yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu;  $\omega > 0$  ve  $\alpha\delta > \sigma$  iken ise (5.26) sisteminin biri yerel (lokal) asimptotik kararlı biri kararsız negatif olmayan iki denge noktasına sahip olduğunu ispatlamıştır. Son olarak, Galach (2003), (5.26) sisteminin negatif olmayan periyodik çözümlere sahip olmadığını göstermiştir.

Bağışıklık sistemi, fonksiyonlarını sürdürebilmek için organizmada yer alan tümör ve zararlı hücreleri, sağlıklı hücre ve dokulardan doğru bir şekilde ayırt edebilmelidir. Tümör hücreleri vücuda yabancı yani antijen özellikte olmalarına rağmen vücut hücrelerinden türedikleri için bağışıklık sisteminin bu hücreleri yabancı ve tehdit olarak görmesi belirli bir zaman gerektirmektedir. Çünkü vücudun direnç sistemi kendini tahrip etmesi için eğitilmemiştir. Bu nedenle, Galach (2003), (5.26) modelindeki etkileşim terimine gecikme terimi eklemiştir.

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \sigma + \omega u(t - \tau)v(t - \tau) - \delta u(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \alpha v(t)(1 - \beta v(t)) - u(t)v(t) \end{cases} \quad (5.27)$$

sistemini elde etmiştir. Burada,  $\tau$  tümör hücrelerinin tanınmasından sonra, bağışıklık sisteminin uygun bir yanıt geliştirebilmesi için gereken zaman gecikmesidir. Bu çalışmada  $u_0$  ve  $v_0$  başlangıç fonksiyonlarının negatif olmayan ve  $[-\tau, 0]$  aralığında tanımlı olduğu kabul edilmiştir.

Galach (2003), (5.27) sisteminin sürekli her başlangıç fonksiyonu için tek bir çözüme sahip olduğunu göstermiş ve bu sistemin denge noktalarının kararlılık analizini yapmıştır. Bu analize göre,  $\omega > 0$  ve  $\alpha\delta < \sigma$  iken (5.27) sisteminin negatif olmayan tek denge noktası  $\tau < \frac{\pi}{2\delta}$  değerleri için yerel (lokal) asimptotik kararlı  $\tau > \frac{\pi}{2\delta}$  değerleri için kararsızdır.  $\omega > 0$  ve  $\alpha\delta > \sigma$  iken gecikme teriminin olmadığı durumda kararsız olan denge noktası kararsızlığını korurken kararlı olan denge noktası belirli bir  $\tau_0$  değerinde kararlılığını kaybetmiştir. Galach (2003) tarafından yapılan nümerik çalışmalar (5.27) sisteminin, Kirschner ve Panetta (1998) tarafından gerçekte gözlemlenen periyodik çözümlere sahip olduğunu göstermiştir. Bu durum, (5.27) sistemini, (5.25) sisteminden ayıran en önemli özelliktir.

Yafia (2007), salınımların hastalığın terminal olmayan dönemini<sup>1</sup> uzattığını, bu nedenle, tıbbi açıdan monoton olarak büyüyen durumdan daha fazla arzu edildiğini ifade etmiştir. Bu motivasyon ile, Yafia (2007), Kirschner ve Panetta (1998) tarafından elde edilen deneysel ve Galach (2003) tarafından elde edilen nümerik sonuçları, (5.27) sisteminde Hopf çatallanmanın ortaya çıktığını göstererek matematiksel olarak ispatlamıştır.

Tümör hücreleri ile bağışıklık sisteminin arasındaki etkileşimin sonucunu etkileyen en önemli faktörlerden biri sitotoksik T hücrelerinin<sup>2</sup> konumsal olarak dağılımıdır (Matzavinos ve diğ., 2004). Ayrıca bağışıklık sisteminin yanıtını oluşturan hücreler hareket kabiliyeti olan hücrelerdir. Dolayısıyla, bu hücrelerin zaman ilerlerken uzaya göre aynı konumda kalacaklarını düşünmek pek gerçekçi olmaz. Bu nedenle, Kayan ve diğ. (2017), tümör-bağışıklık sistemi etkileşimine daha gerçekçi bir yaklaşım elde etmek için (5.27) sistemine reaksiyon-difüzyon terimi ekleyerek

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = 0, \quad x \in \{0, \pi\}, \quad t \geq 0$$

Neumann sınır koşulları ve

$$u(t, x) = u_0(t, x) \geq 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [-\tau, 0],$$

$$v(t, x) = v_0(t, x) \geq 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [-\tau, 0]$$

başlangıç değerlerine sahip

<sup>1</sup>Terminal dönem, kanser ve artan fiziksel kısıtlanmalara karşın hastanın yaşam kalitesini korumak ve iyileştirmek amacıyla bütüncü bakımın süre geldiği ölüm öncesi dönemdir (Çavdar, 2011).

<sup>2</sup>Enfekte olmuş hücreleri öldürebilen T hücresi türü (Url-44)

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = c_1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \sigma + \omega u(t-\tau,x)v(t-\tau,x) - \delta u(t,x), \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = c_2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + \alpha v(t,x)(1 - \beta v(t,x)) - u(t,x)v(t,x) \end{cases} \quad (5.28)$$

gecikme içeren reaksiyon-difüzyon tümör-bağışıklık sistemi etkileşimi modeli elde etmişlerdir. Burada,  $u$  ve  $v$ , sırasıyla efektör hücrenin ve tümör hücrenin  $t$  zamanındaki,  $x$  konumundaki boyutsuz popülasyon yoğunluğunu göstermektedir.  $\sigma$  olgun efektör hücrelerin, tümör hücrelerinin bulunduğu bölgeye akışını gösteren oran,  $\omega$  efektör hücre ile tümör hücrelerinin bağlanma oranı ve  $\delta$  efektör hücrelerin tümör hücrelerinin bulunduğu bölgeden ayrılma oranıdır.  $\alpha$  tümör hücrelerinin maksimum büyüme oranını,  $\beta^{-1}$  biyolojik çevrenin tümör hücreleri için maksimum taşıma kapasitesini ve  $\tau$  tümör hücrelerinin tanınmasından sonra, bağışıklık sisteminin uygun bir yanıt geliştirebilmesi için gereken zaman gecikmesini ifade etmektedir.  $\omega$  hariç bütün katsayılar pozitifdir. Neumann sınır koşulları ise tümörün metastaz yapmadığı ve dolayısıyla tümör hücrelerinin veya efektör hücre-tümör hücre çiftinin göç etmediği anlamına gelir. Bu durum, Kuznetsov ve diğ. (1994)'ün varsayımı ile örtüşmektedir.

#### 5.4.2 Lineer kararlılık ve Hopf çatalanmanın varlık analizi

Bu bölümde, (5.28) sisteminin denge noktalarının yerel (lokal) kararlılık analizi yapılacak ve (5.28) sisteminin periyodik çözüme sahip olup olmadığı araştırılacaktır. Dikkat edilirse (5.28) sistemi, (4.1) sistemi formundadır. Bu nedenle, Bölüm 4'te elde ettiğimiz algoritma ve sonuçlar, (5.28) sistemi için de kullanılabilir.

Öncelikle, (5.28) sisteminin denge noktalarını bulalım:

$$u_0^* = \frac{\sigma}{\delta}, \quad v_0^* = 0, \quad (5.29a)$$

olmak üzere  $E_0^* = (u_0^*, v_0^*)$ , (5.28) sisteminin bir denge noktasıdır. Diğer taraftan,  $\Delta = \alpha^2 (\omega + \beta\delta)^2 + 4\alpha\beta\omega(\sigma - \alpha\delta) = \alpha^2 (\omega - \beta\delta)^2 + 4\alpha\beta\omega\sigma$  olmak üzere eğer  $\Delta > 0$  ise

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{\alpha(\omega - \beta\delta) - \sqrt{\Delta}}{2\omega}, & v_1^* &= \frac{\alpha(\omega + \beta\delta) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha\beta\omega} \\ u_2^* &= \frac{\alpha(\omega - \beta\delta) + \sqrt{\Delta}}{2\omega}, & v_2^* &= \frac{\alpha(\omega + \beta\delta) - \sqrt{\Delta}}{2\alpha\beta\omega} \end{aligned} \quad (5.29b)$$

olmak üzere (5.28) sisteminin iki denge noktası daha olur:  $E_1^* = (u_1^*, v_1^*)$  ve  $E_2^* = (u_2^*, v_2^*)$ .

Galach (2003),  $\omega < 0$  iken difüzyon terimi içermeyen (5.27) sisteminin  $u(t)$  çözümlerinin sonlu bir zaman aralığında negatif hale geldiği negatif olmayan başlangıç değerleri olduğunu;  $\omega \geq 0$  iken ise (5.27) sisteminin çözümlerinin herhangi bir negatif olmayan başlangıç değeri için negatif olmadığını göstermiştir. Çalışılan model biyolojik bir model olduğu için negatif çözümler ilgi alanımızda değildir. Bu

nedenle,  $\omega > 0$  olduğunu kabul edeceğiz. Dikkat edilirse  $\omega > 0$  iken  $\Delta = \alpha^2(\omega - \beta\delta)^2 + 4\alpha\beta\omega\sigma > 0$  olur. Bu ise  $\alpha^2(\omega - \beta\delta)^2 < \alpha^2(\omega - \beta\delta)^2 + 4\alpha\beta\omega\sigma$  olduğu için  $u_1^* < 0$ , yani  $E_1^* = (u_1^*, v_1^*)$  denge noktasının mevcut ama pozitif olmadığı anlamına gelir. Biyolojik olarak anlamlı olmadığı için bu denge noktası ile ilgili bir analiz yapılmayacaktır.

Şimdi,

$$(A_1) \quad \alpha\delta < \sigma$$

$$(A_2) \quad \alpha\delta > \sigma$$

olsun. Eğer  $A_1$  koşulu sağlanırsa  $\alpha^2(\omega + \beta\delta)^2 < \alpha^2(\omega + \beta\delta)^2 + 4\alpha\beta\omega(\sigma - \alpha\delta)$  olduğu için  $v_2^* < 0$  olur. Bu nedenle, (5.28) sisteminin negatif olmayan tek denge noktası  $E_0^* = (u_0^*, v_0^*)$  olur. Eğer  $A_2$  koşulu sağlanırsa  $0 < \alpha^2(\omega + \beta\delta)^2 + 4\alpha\beta\omega(\sigma - \alpha\delta) < \alpha^2(\omega + \beta\delta)^2$  olduğu için  $u_2^* > 0$  ve  $v_2^* > 0$  olur. Böylece,  $A_2$  koşulu altında, (5.28) sisteminin negatif olmayan iki denge noktası vardır:  $E_0^* = (u_0^*, v_0^*)$  ve  $E_2^* = (u_2^*, v_2^*)$ .

Sistem (5.28), biyolojik bir model olduğundan, yalnızca  $E_0^* = (u_0^*, v_0^*)$  ve  $E_2^* = (u_2^*, v_2^*)$  negatif olmayan denge noktalarının kararlılık yapılarını analiz edeceğiz.

Öncelikle,

$$\begin{aligned} f(u(t,x), u(t-\tau,x), v(t,x), v(t-\tau,x)) &= \sigma + \omega u(t-\tau,x)v(t-\tau,x) - \delta u(t,x) \\ g(u(t,x), u(t-\tau,x), v(t,x), v(t-\tau,x)) &= \alpha v(t,x)(1 - \beta v(t,x)) - u(t,x)v(t,x) \end{aligned} \quad (5.30)$$

olmak üzere (4.2) ile tanımlanan katsayılar

$$\begin{aligned} k_1 = f_u(E_0^*) &= -\delta, \quad k_2 = f_{u_\tau}(E_0^*) = 0, \quad k_3 = f_v(E_0^*) = 0, \quad k_4 = f_{v_\tau}(E_0^*) = \frac{\omega\sigma}{\delta}, \\ l_1 = g_u(E_0^*) &= 0, \quad l_2 = g_{u_\tau}(E_0^*) = 0, \quad l_3 = g_v(E_0^*) = \alpha - \frac{\sigma}{\delta}, \quad l_4 = g_{v_\tau}(E_0^*) = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.13a) tanımından,  $d_1 = d_2 = 0$  iken karakteristik denklemin katsayıları

$$\begin{aligned} A &= (c_1 + c_2)n^2 - \left(\alpha - \delta - \frac{\sigma}{\delta}\right), \\ B &= 0, \quad C = 0, \\ D &= c_1c_2n^4 - \left(c_1\left(\alpha - \frac{\sigma}{\delta}\right) - c_2\delta\right)n^2 - \delta\left(\alpha - \frac{\sigma}{\delta}\right), \\ H &= 0 \end{aligned} \quad (5.31a)$$

ve sonuç olarak  $E_0^*$  denge noktasına karşılık gelen karakteristik denklem

$$\left(\lambda + (c_1n^2 + \delta)\right) \left(\lambda + \left(c_2n^2 - \alpha + \frac{\sigma}{\delta}\right)\right) = 0 \quad (5.31b)$$

olur.

**Lemma 5.1.** *Eğer  $\mathbf{A}_1$  koşulu sağlanırsa (5.28) sisteminin tek ve tümör içermeyen denge noktası  $E_0^* = \left(\frac{\sigma}{\delta}, 0\right)$ , her  $\tau \geq 0$  için yerel (lokal) asimptotik kararlıdır, yani mutlak kararlıdır.*

**İspat.**  $E_0^*$  denge noktasına karşılık gelen (5.31b) karakteristik denkleminin

$$\lambda_1 = -(c_1 n^2 + \delta) \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -\left(c_2 n^2 - \alpha + \frac{\sigma}{\delta}\right)$$

olmak üzere iki kökü vardır.  $c_1, \delta > 0$  ve  $n \geq 0$  olduğundan  $\lambda_1 < 0$  dır. Diğer taraftan,  $c_2 > 0, n \geq 0$  ve  $\mathbf{A}_1$  koşulundan  $\alpha\delta < \sigma$  olduğu için  $\lambda_2 < 0$  olur. Böylece,  $\mathbf{A}_1$  koşulu altında, (5.31b) karakteristik denklemi,  $\tau$  gecikme değerinden bağımsız olarak negatif reel iki köke sahiptir. Bu ise  $\mathbf{A}_1$  koşulu altında,  $E_0^*$  denge noktasının her  $\tau \geq 0$  için yerel (lokal) asimptotik kararlı, yani mutlak kararlı olduğu anlamına gelir.  $\square$

**Açıklama 5.1.** *Lemma 5.1'de elde edilen sonuç, difüzyon terimi içermeyen (5.27) sistemi için Yafia (2007) tarafından elde edilen sonuç ile aynıdır. Difüzyon terimi,  $\mathbf{A}_1$  koşulu altında tek ve tümör içermeyen  $E_0^*$  denge noktasının kararlılık yapısında bir değişikliğe neden olmamıştır.*

**Lemma 5.2.**  *$n > 0$  ve  $c_2^* = \frac{\alpha\delta - \sigma}{n^2\delta}$  olsun. Eğer  $\mathbf{A}_2$  koşulu sağlanırsa (5.28) sisteminin negatif olmayan denge noktalarından biri olan ve tümör içermeyen  $E_0^* = \left(\frac{\sigma}{\delta}, 0\right)$  denge noktası  $c_2 > c_2^*$  iken her  $\tau \geq 0$  için yerel (lokal) asimptotik kararlı, yani mutlak kararlı;  $c_2 < c_2^*$  iken ise her  $\tau \geq 0$  için kararsızdır.*

**İspat.**  $E_0^*$  denge noktasına karşılık gelen (5.31b) karakteristik denkleminin

$$\lambda_1 = -(c_1 n^2 + \delta) \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -\left(c_2 n^2 - \alpha + \frac{\sigma}{\delta}\right)$$

olmak üzere iki kökü olduğunu ve  $c_1, n, \delta > 0$  olması nedeniyle  $\lambda_1 < 0$  olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan,  $n > 0$  ve  $\mathbf{A}_2$  koşulundan  $\alpha\delta > \sigma$  olduğu için  $c_2 > c_2^*$  iken  $\lambda_2 < 0$  ve  $c_2 < c_2^*$  iken  $\lambda_2 > 0$  olur. Böylece,  $\mathbf{A}_2$  koşulu altında, (5.31b) karakteristik denklemi,  $\tau$  gecikme değerinden bağımsız olarak  $c_2 > c_2^*$  iken negatif;  $c_2 < c_2^*$  iken ise bir negatif, bir pozitif iki reel köke sahiptir. Bu ise  $\mathbf{A}_2$  koşulu altında,  $E_0^*$  denge noktasının her  $\tau \geq 0$  için  $c_2 > c_2^*$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı, yani mutlak kararlı;  $c_2 < c_2^*$  iken kararsız olduğu anlamına gelir.  $\square$

**Açıklama 5.2.** *Yafia (2007), difüzyon terimi içermeyen (5.27) sistemi için  $\mathbf{A}_2$  koşulu altında  $E_0^*$  denge noktasının  $\tau \geq 0$  için kararsız olduğunu göstermiştir. Lemma 5.2'de elde edilen sonuç bize, difüzyon teriminin tümör içermeyen  $E_0^*$  denge noktasının kararsızlığını,  $c_2 > c_2^*$  koşulu altında yerel (lokal) asimptotik kararlılığa dönüştürdüğünü göstermektedir.*

Şimdi,  $E_2^* = (u_2^*, v_2^*)$  pozitif denge noktasının kararlılık yapısını analiz edelim.  $f$  ve  $g$  fonksiyonları (5.30) ile verilmek üzere (4.2) ile tanımlanan katsayılar

$$\begin{aligned}
k_1 &= f_u(E_2^*) = -\delta, & k_2 &= f_{u\tau}(E_2^*) = \omega v_2, \\
k_3 &= f_v(E_2^*) = 0, & k_4 &= f_{v\tau}(E_2^*) = \omega u_2, \\
l_1 &= g_u(E_2^*) = -v_2, & l_2 &= g_{u\tau}(E_2^*) = 0, \\
l_3 &= g_v(E_2^*) = -\alpha\beta v_2, & l_4 &= g_{v\tau}(E_2^*) = 0
\end{aligned} \tag{5.32a}$$

ve dolayısıyla (4.13a) ile tanımlanan karakteristik denklem katsayıları

$$\begin{aligned}
A &= (c_1 + c_2)n^2 + \delta + \alpha\beta v_2, \\
B &= -\omega v_2 (c_2 n^2 - \alpha + 2\alpha\beta v_2), \\
C &= -\omega v_2, \\
D &= c_1 c_2 n^4 + (\delta c_2 + \alpha\beta v_2 c_1)n^2 + \alpha\beta \delta v_2, \\
H &= 0
\end{aligned} \tag{5.32b}$$

olarak elde edilir. Böylece,  $E_2^*$  denge noktasına karşılık gelen ve (4.13b) ile verilen karakteristik denklem

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D = 0 \tag{5.32c}$$

olur. Bölüm 3.2’de elde ettiğimiz algoritma ile  $E_2^*$  denge noktasının kararlılık yapısı ile ilgili aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz:

**Sonuç 5.1.** *Eğer*

$$(\mathbf{H}_1) \quad \alpha > \sup\left\{\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\omega}{\beta}\right\}$$

*koşulu sağlanıyorsa  $\tau = 0$  iken (5.32c) karakteristik denkleminin kökleri negatif reel kısma sahiptir. Yani  $\mathbf{H}_1$  koşulu altında  $\tau = 0$  iken (5.28) sisteminin pozitif denge noktası  $E_2^*$  yerel (lokal) asimptotik kararlıdır.*

**İspat.** Bu sonucu elde etmek için Lemma 4.2’yi kullanacağız. Bu nedenle, bu lemmanın  $\mathbf{H}_1$   $A + C > 0$  ve  $\mathbf{H}_2$   $B + D > 0$  hipotezlerinin hangi koşullar altında sağlandığını bulmalıyız. Öncelikle, (5.32b) denklemlerinden

$$A + C = n^2 (c_1 + c_2) + \delta + (\alpha\beta - \omega) v_2$$

olur.  $c_1, c_2, \delta > 0$  ve  $n \geq 0$  olduğu için  $\alpha > \frac{\omega}{\beta}$  olarak seçilirse  $A + C > 0$  sağlanır. Ayrıca  $E_2^*$  mevcut olması için  $\alpha > \frac{\sigma}{\delta}$  olması gerektiğini biliyoruz. Böylece,  $\alpha > \sup\left\{\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\omega}{\beta}\right\}$  olması gerekir.

Diğer taraftan, (5.32b) denklemlerinden

$$B + D = \underbrace{c_1 c_2 n^4 + \alpha \beta v_2 c_1 n^2}_{\text{I}} + \underbrace{(\delta - \omega v_2) c_2 n^2}_{\text{II}} + \underbrace{\alpha \omega v_2 + \alpha \beta v_2 (\delta - 2\omega v_2)}_{\text{III}} \quad (5.33)$$

olarak elde edilir. Öncelikle,  $c_1, c_2, \alpha, \beta > 0, n \geq 0$  ve  $\alpha > \frac{\sigma}{\delta}$  koşulundan  $v_2 > 0$  olduğu için (5.33) denkleminin **I.** terimi pozitiftir. Ayrıca (5.29b) ile tanımlanan  $v_2$  kullanılarak

$$\delta - \omega v_2 = \frac{\alpha(\beta\delta - \omega) + \sqrt{\alpha^2(\beta\delta - \omega)^2 + 4\alpha\beta\omega\sigma}}{2\alpha\beta} > 0$$

elde edilir. Böylece (5.33) denkleminin **II.** terimi de pozitif olur. Şimdi, yine (5.29b) ile tanımlanan  $v_2$  kullanıldığında

$$\delta - 2\omega v_2 = \frac{-\alpha\omega + \sqrt{\Delta}}{\alpha\beta}$$

eşitliği elde edilir. Son ifade, (5.33) denkleminin **III.** teriminde yerine yazıldığında

$$\alpha\omega v_2 + \alpha\beta v_2 (\delta - 2\omega v_2) = v_2 \sqrt{\Delta} > 0$$

olduğundan, bu terimin de pozitif olduğu görülür. Böylece  $B + D > 0$  sağlanır.

Sonuç olarak  $\alpha > \sup\{\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\omega}{\beta}\}$  koşulu sağlanırsa Lemma 4.2'den,  $\tau = 0$  iken (5.28) sisteminin pozitif denge noktası  $E_2^*$ , yerel (lokal) asimptotik kararlı olur.  $\square$

**Sonuç 5.2.** *Kabul edelim ki Sonuç 5.1'de tanımlanan  $\mathbf{H}_1$  koşulu sağlansın ve*

$$\beta_1 = \frac{\omega}{3\alpha\delta^2} \left( -(\alpha\delta - 2\sigma) + \sqrt{(\alpha\delta - 2\sigma)^2 + 3\alpha^2\delta^2} \right) > 0$$

*olsun. Bu takdirde, eğer*

$$(\mathbf{H}_{4_2}) \quad 0 < \beta < \beta_1,$$

*koşulu sağlanırsa yeterince küçük  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri için (5.32c) karakteristik denkleminin bir  $\tau_0 > 0$  değerinde tek bir  $\lambda(\tau_0) = i\omega$  ve  $\bar{\lambda}(\tau_0) = -i\omega, \omega > 0$  sırf sanal kök çifti vardır.*

**İspat.** (5.32c) karakteristik denkleminin (5.32b) ile verilen katsayıları (4.16) tanımında yerine yazılırsa  $\mathbf{H}_1$  koşulundan  $\alpha > \sup\{\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\omega}{\beta}\}$  olduğu için

$$R = (\alpha^2\beta^2 - \omega^2)v_2^2 + (c_1^2 + c_2^2)n^4 + 2(\alpha\beta c_2 v_2 + \delta c_1)n^2 + \delta^2 > 0. \quad (5.34a)$$

olur. Lemma 4.5'in koşullarına bakıldığında  $R > 0$  iken (5.32c) karakteristik denkleminin sırf sanal kök çiftine sahip olmasının tek yolu  $S < 0$  olmasıdır. (4.16)

tanımından  $S = D^2 - B^2 = (D - B)(D + B)$  ve Sonuç 5.1'in ispatından  $B + D > 0$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,  $S$  nin işaretini  $(D - B)$  nin işareti belirler. (5.32b) ile verilen katsayılar ile

$$D - B = c_1 c_2 n^4 + (\delta c_2 + \alpha \beta c_1 v_2) n^2 + \alpha \beta \delta v_2 + \omega v_2 (c_2 n^2 - \alpha + 2\alpha \beta v_2) \quad (5.34b)$$

olarak elde edilir.  $(D - B)$  nin işareti hakkında yorum yapabilmek için öncelikle,  $c_1 = c_2 = 0$  iken ne olduğunu analiz edelim.  $c_1 = c_2 = 0$  iken (5.34b)

$$D - B = v_2 (2\alpha \delta \beta - \sqrt{\Delta})$$

eşitliğine dönüşür.  $\alpha > \sup\{\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\omega}{\beta}\}$  olduğu için  $v_2$  pozitiftir. Bu durumda,  $c_1 = c_2 = 0$  iken  $D - B$  nin işaret analizini yapmak için  $(2\alpha \delta \beta - \sqrt{\Delta})$  fonksiyonunun köklerini bulmak yeterlidir.  $(2\alpha \delta \beta - \sqrt{\Delta}) = 0$  denklemi bize

$$\beta_1 = \frac{\omega}{3\alpha \delta^2} \left( -(\alpha \delta - 2\sigma) + \sqrt{(\alpha \delta - 2\sigma)^2 + 3\alpha^2 \delta^2} \right) > 0,$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{3\alpha \delta^2} \left( -(\alpha \delta - 2\sigma) - \sqrt{(\alpha \delta - 2\sigma)^2 + 3\alpha^2 \delta^2} \right) < 0$$

köklerine sahip

$$3\alpha^2 \delta^2 \beta^2 + 2\alpha \omega (\alpha \delta - 2\sigma) \beta - \alpha^2 \omega^2 = 0$$

denklemini verir. Böylece,  $(2\alpha \delta \beta - \sqrt{\Delta})$  fonksiyonunun,  $\beta \in (-\infty, \beta_2) \cup (\beta_1, \infty)$  iken pozitif;  $\beta \in (\beta_2, \beta_1)$  iken negatif olduğu görülür. Sonuç olarak  $\beta > 0$  olduğu için  $c_1 = c_2 = 0$  iken  $\beta \in [0, \beta_1)$  değerleri için  $D - B < 0$  olur. (5.34b) denklemi ile verilen  $D - B$ ,  $c_1$  ve  $c_2$  ye göre sürekli olduğundan yeterince küçük  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri için  $\beta \in [0, \beta_1)$  iken  $D - B < 0$  olur.

$0 < \beta < \beta_1$  koşulu sağlanırsa Lemma 4.5'in bir sonucu olarak yeterince küçük  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri için (5.32c) karakteristik denkleminin bir  $\tau_0 > 0$  için

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4S}}{2}} > 0 \quad (5.35a)$$

olmak üzere tek bir  $\lambda_2(\tau_0) = i\omega_2$  ve  $\bar{\lambda}_2(\tau_0) = -i\omega_2$ ,  $\omega_2 > 0$  sırf sanal kök çifti vardır. Bu kök çiftinin ortaya çıktığı gecikme değeri,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $D$  (5.32b) ile verilmek üzere (4.21) denkleminde

$$\tau_0 = \tau_{2,0} = \frac{1}{\omega_2} \arctan \left( \frac{C\omega_2^3 + (AB - CD)\omega_2}{(B - AC)\omega_2^2 - BD} \right) \quad (5.35b)$$

olarak elde edilir. □

Bölüm 4.2'de elde ettiğimiz algoritma sayesinde, türev hesabı yapmamıza gerek kalmadan Lemma 4.6'nın sonucu olarak  $\text{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_{2,0}} \right) > 0$  olduğu için



transversalite koşulunun sağlandığını biliyoruz. Ayrıca yine bu algoritma sayesinde, Sonuç 4.3'ten  $\tau = \tau_{2,0}$  iken (5.32c) karakteristik denkleminin  $\lambda_2(\tau_{2,0}) = i\omega_2$  ve  $\bar{\lambda}_2(\tau_{2,0}) = -i\omega_2$  kompleks eşlenik kök çiftinden geriye kalan köklerin reel kısmının negatif olduğunu ve Sonuç 4.4'ten bu kompleks eşlenik kök çiftinin  $\tau_{2,0}$  in bir komşuluğunda basit olduğunu biliyoruz.

Bu bilgiler ışığında, Teorem 4.1'in  $\mathbf{V}_1$  koşulunun doğrudan sağlandığını;  $\mathbf{V}_2$  ve  $\mathbf{V}_3$  koşullarının, sırasıyla  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_{4_2}$  koşullarına denk olduğunu görebiliriz. Böylece, Teorem 4.1'i kullanarak (5.28) sisteminin periyodik çözümleri ile ilgili aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

**Teorem 5.1** (Hopf Çatallanmanın Varlığı).

(5.28) sisteminin parametrelerinin, aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

$$(\mathbf{H}_1) \quad \alpha > \sup\left\{\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\omega}{\beta}\right\},$$

$$(\mathbf{H}_{4_2}) \quad 0 < \beta < \beta_1 \text{ öyle ki}$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{3\alpha\delta^2} \left( -(\alpha\delta - 2\sigma) + \sqrt{(\alpha\delta - 2\sigma)^2 + 3\alpha^2\delta^2} \right) > 0.$$

Bu takdirde,  $A, B, C$  ve  $D$  (5.32b) ile verilmek,  $\omega_2$  (5.35a) ile tanımlanmak ve

$$\tau_{2,0} = \frac{1}{\omega_2} \arctan \left( \frac{C\omega_2^3 + (AB - CD)\omega_2}{(B - AC)\omega_2^2 - BD} \right)$$

olmak üzere

1.  $E_2^*$  denge noktası  $\tau \in [0, \tau_{2,0})$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlıdır ve  $\tau > \tau_{2,0}$  iken kararsızdır.
2. Yeterince küçük  $c_1$  ve  $c_2$  değerleri için  $\tau = \tau_{2,0}$  iken (5.28) sisteminde Hopf çatallanma meydana gelir, yani (5.28) sistemi  $\tau_{2,0}$  in bir komşuluğunda periyodik çözümler ailesine sahiptir.

**Sonuç 5.3.** Kabul edelim ki Sonuç 5.1'de tanımlanan  $\mathbf{H}_1$  ve

$$(\mathbf{H}_3) \quad n > 0 \text{ olmak üzere } c_1 c_2 \geq \frac{\alpha\omega v_2}{n^4}$$

koşulları sağlansın. Bu takdirde, her  $\tau \geq 0$  için (5.32c) karakteristik denkleminin bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir. Sonuç olarak (5.28) sisteminin pozitif denge noktası  $E_2^*$  mutlak kararlıdır. Başka bir deyişle,  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_3$  koşulları sağlanıyorsa (5.28) sisteminde Hopf çatallanma meydana gelmez.

**İspat.** (5.34a) denkleminde  $R > 0$  olduğunu biliyoruz. Ayrıca  $n > 0$  olmak üzere  $c_1 c_2 \geq \frac{\alpha\omega v_2}{n^4}$  koşulu sağlanırsa (5.34b) denkleminde  $D - B > 0$  ve dolayısıyla,  $S > 0$  olur. Bu durumda, (5.32c) karakteristik denkleminin katsayılarının, Lemma 4.4'te tanımlanan  $\mathbf{H}_{3_1}$ ,  $\mathbf{H}_{3_2}$  veya  $\mathbf{H}_{3_5}$  koşullarından birini sağlamasından başka ihtimal yoktur. Sonuç olarak Lemma 4.4'ten (5.28) sisteminin pozitif denge noktası  $E_2^*$  mutlak kararlıdır.  $\square$

### 5.4.3 Hopf çatallanmanın yön analizi

Bu bölümde, (5.28) sisteminin  $E_2^*$  denge noktasından çatallanan periyodik çözümlere sahip olduğu, yani Teorem 5.1'in şartlarının sağlandığı kabul edilecektir. Periyodik çözümlerin özelliklerini belirlemek için, (5.28) sistemi (4.1) sistemi formunda olduğundan, (5.28) sistemini merkez manifolduna indirgemek yerine doğrudan Teorem 4.3 kullanılacaktır. Bu nedenle, (4.79) ile tanımlanan

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_j} \left( g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}(0)$$

Poincaré normal form katsayısının hesaplanması gerekmektedir. Bu hesabı yapmak için Bölüm 4.3'teki algoritma ile elde edilen formüller kullanılacaktır. Bölüm 4.3'te belirtildiği gibi bu formüller (5.30) ile tanımlanan  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılara bağlıdır. Bu nedenle, bu formülleri kullanabilmek için öncelikle bu katsayılara ihtiyacımız vardır. Birinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılar, bir önceki bölümde elde edilmiş ve (5.32a) ile verilmiştir. İkinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayılar ise (4.30) kullanılarak

$$\begin{aligned} m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_{14} = m_{22} = m_{23} = m_{33} = m_{34} = m_{44} &= 0, \\ r_{11} = r_{12} = r_{14} = r_{22} = r_{23}r_{24} = r_{34} = r_{44} &= 0, \\ m_{24} = \omega, \quad r_{13} = -1, \quad r_{33} = -\alpha\beta & \end{aligned} \quad (5.36)$$

şeklinde elde edilir. Öncelikle,

$$\mathbf{q}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_j\theta} \quad \text{ve} \quad \mathbf{q}^*(\sigma) = s \begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_j\sigma}$$

özvektörleri için gerekli olan  $c$ ,  $c^*$  ve  $s$  sabitleri,  $\omega_2$  ve  $\tau_{2,0}$  sırasıyla (5.35a) ve (5.35b) ile tanımlanmak üzere Şekil 4.4 ile verilen diyagramı kullanarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$c = \frac{i\omega_2 + c_1n^2 + \delta - \omega v_2 e^{-i\omega_2\tau_{2,0}}}{\omega u_2 e^{-i\omega_2\tau_{2,0}}},$$

$$c^* = \frac{-i\omega_2 + c_2n^2 + \alpha\beta v_2}{\omega u_2 e^{i\omega_2\tau_{2,0}}},$$

$$\bar{s} = [c + \bar{c}^* + \tau_{2,0} e^{-i\omega_2\tau_{2,0}} \omega \bar{c}^* (v_2 + u_2 c)]^{-1}.$$

Poincaré normal form katsayısının formülünde yer alan ve (4.58) ile tanımlanan  $g_{20}(0)$ ,  $g_{11}(0)$  ve  $g_{02}(0)$  katsayılarını hesaplamak için ihtiyacımız olan  $\mathbf{h}_{20}(0)$ ,  $\mathbf{h}_{11}(0)$  ve  $\mathbf{h}_{02}(0)$  vektörlerinin değerleri Şekil 4.5 ile verilen diyagram kullanılarak

$$h_{20_1}(0) = c\omega e^{-2i\omega_2\tau_{2,0}}, \quad h_{20_2}(0) = -c - \alpha\beta c^2,$$

$$h_{11_1}(0) = (c + \bar{c}) \omega, \quad h_{11_2}(0) = -(c + \bar{c}) - 2\alpha\beta c\bar{c},$$

$$h_{02_1}(0) = \bar{c}\omega e^{2i\omega_2\tau_{2,0}}, \quad h_{02_2}(0) = -\bar{c} - \alpha\beta\bar{c}^2$$

şekinde elde edilir. Böylece, Şekil 4.6 ile verilen diyagram ile

$$\begin{aligned} g_{20}(0) &= 2\bar{s}c \left[ \bar{c}^* \omega e^{-2i\omega_2\tau_{2,0}} - (1 + \alpha\beta c) \right], \\ g_{11}(0) &= \bar{s} \left[ (c + \bar{c}) (\bar{c}^* \omega - 1) - 2\alpha\beta c\bar{c} \right], \\ g_{02}(0) &= 2\bar{s}\bar{c} \left[ \bar{c}^* \omega e^{2i\omega_2\tau_{2,0}} - (1 + \alpha\beta\bar{c}) \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

eşitliklerine ulaşılır.

Şimdi, Poincaré normal form katsayısının formülünde yer alan ve (4.58d) ile tanımlanan  $g_{21}(0)$  katsayısını hesaplayalım. Öncelikle, Şekiller 4.7-4.10 ile verilen diyagramlar kullanılarak  $A, B, C$  ve  $D$  (5.32b) ile verilmek ve

$$D_{20} = -4\omega_2^2 + 2i\omega_2 (A + Ce^{-2i\omega_2\tau_{2,0}}) + D + Be^{-2i\omega_2\tau_{2,0}},$$

$$\mathbf{K}_{20} = \frac{2}{D_{20}} \begin{pmatrix} (2i\omega_2 + c_2n^2 - (1 + \alpha\beta c)u_2 + \alpha\beta v_2) c \omega e^{-2i\omega_2\tau_{2,0}} \\ -2i\omega_2 c (1 + c\alpha\beta) - c (c_1n^2 + \delta) (1 + c\alpha\beta) + c^2\alpha\beta\omega v_2 e^{-2i\omega_2\tau_{2,0}} \delta \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_{20}(0;0) = -\frac{1}{i\omega_2} g_{20}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} - \frac{1}{3i\omega_2} \bar{g}_{02}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_{20},$$

$$\mathbf{W}_{20}(-\tau_{2,0};0) = -\frac{1}{i\omega_2} g_{20}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{-i\omega_2\tau_{2,0}} - \frac{1}{3i\omega_2} \bar{g}_{02}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} e^{i\omega_2\tau_{2,0}} + \mathbf{K}_{20} e^{-2i\omega_2\tau_{2,0}}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, Şekiller 4.11-4.14 ile verilen diyagramlar kullanılarak  $B$  ve  $D$  (5.32b) ile verilmek ve

$$\mathbf{K}_{11} = \frac{1}{B+D} \begin{pmatrix} \omega (c_2n^2 + \alpha\beta v_2) (c + \bar{c}) - \omega u_2 (c + \bar{c} + 2c\bar{c}\alpha\beta) \\ -(c_1n^2 + \delta - \omega v_2) (c + \bar{c} + 2c\bar{c}\alpha\beta) - \omega v_2 (c + \bar{c}) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}_{11}(0;0) = \frac{1}{i\omega_2} g_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} - \frac{1}{i\omega_2} \bar{g}_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_{11},$$

$$\mathbf{W}_{11}(-\tau_{2,0};0) = \frac{1}{i\omega_2} g_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{-i\omega_2\tau_{2,0}} - \frac{1}{i\omega_2} \bar{g}_{11}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} e^{i\omega_2\tau_{2,0}} + \mathbf{K}_{11}$$

olarak elde edilir. Şekil 4.15 ile verilen diyagram ile  $g_{21}(0)$  katsayısını hesaplamak için gerekli olan son değerler

$$h_{21_1}(0) = \omega \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}W_{20_1}(-\tau_{2,0})\bar{c}e^{i\omega_2\tau_{2,0}} + W_{11_1}(-\tau_{2,0})ce^{-i\omega_2\tau_{2,0}} \\ + \frac{1}{2}W_{20_2}(-\tau_{2,0})e^{i\omega_2\tau_{2,0}} + W_{11_2}(-\tau_{2,0})e^{-i\omega_2\tau_{2,0}} \end{array} \right],$$

$$h_{21_2}(0) = - \left( \frac{1}{2}W_{20_1}(0)\bar{c} + W_{11_1}(0)c + \frac{1}{2}W_{20_2}(0) + W_{11_2}(0) \right)$$

$$- \alpha\beta (W_{20_2}(0)\bar{c} + 2W_{11_2}(0)c)$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$g_{21}(0) = 2\bar{s} [h_{21_1}(0)\bar{c}^* + h_{21_2}(0)] \quad (5.38)$$

formülü ile hesaplanabilir.

Bu verileri kullanarak (5.28) sisteminin  $E_2^*$  denge noktasından çatallanan periyodik çözümlerin özelliklerini hakkında bilgi verecek teoremi artık ifade edebiliriz.

**Teorem 5.2** (Periyodik Çözümlerin Özellikleri).

(5.28) sisteminin, Teorem 5.1'de verilen  $\mathbf{H}_1$  ve  $\mathbf{H}_2$  koşullarını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde,

a) Poincaré normal form katsayısı

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_2} \left( g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}(0)$$

(5.37) ve (5.38) denklemleri kullanılarak hesaplanabilir.

b) Bir  $\epsilon_p > 0$  vardır öyle ki her bir  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  için  $\tau_{2,0}$  (5.35b) ile verilmek üzere (5.28) sisteminin periyodik çözümü çatallanma parametresi  $\tau$

$$\tau_{2,0} + \mu(\epsilon) = \tau_{2,0} + \mu_2\epsilon^2 + \mu_4\epsilon^4 + \text{YMT}$$

değerine eşit olduğunda ortaya çıkar:

Kabul edelim ki aşağıdaki koşul sağlansın:

$$\mathbf{V}_5. \operatorname{Re}(c_1(0)) \neq 0.$$

Bu durumda,  $\alpha_2'(\tau_{2,0})$  ifadesi (4.24a) ile verilmek ve

$$\mu_2 = - \frac{\operatorname{Re}(c_1(0))}{\alpha_2'(\tau_{2,0})}$$

olmak üzere yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için periyodik çözümler

**b<sub>1</sub>)**  $\mu_2 > 0$  ise  $\tau = \tau_{2,0}$  çatallanma değerinden sonra,

**b<sub>2</sub>)**  $\mu_2 < 0$  ise  $\tau = \tau_{2,0}$  çatallanma değerinden önce

ortaya çıkar.

c) *Periyodik çözümler*

**c<sub>1</sub>)**  $\text{Re}(c_1(0)) > 0$  ise *kararsız (Hopf çatallanma subkritik),*

**c<sub>2</sub>)**  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  ise *yerel (lokal) asimptotik kararlıdır (Hopf çatallanma süperkritiktir).*

**d)**  $\epsilon \in (0, \epsilon_p)$  için *periyodik çözümünün periyodu*

$$T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega_2} (1 + T_2\epsilon^2 + T_4\epsilon^4 + \text{YMT})$$

*dir. Dolayısıyla,  $\omega_2'(\tau_{2,0})$  ifadesi (4.24b) ile verilmek ve*

$$T_2 = -\frac{\omega_2'(\tau_{2,0})\mu_2 + \text{Im}(c_1(0))}{\omega_2}$$

*olmak üzere yeterince küçük  $\epsilon$  değerleri için periyot*

$$T(\epsilon) \approx \frac{2\pi}{\omega_2}$$

*olur. Ayrıca periyot  $T(\epsilon)$ ,*

**d<sub>1</sub>)**  $T_2 > 0$  ise *artan,*

**d<sub>2</sub>)**  $T_2 < 0$  ise *azalandır.*

#### 5.4.4 Nümerik sonuçlar

Bu bölümün amacı, önceki iki bölümde elde edilen analitik sonuçları, nümerik simülasyonlar kullanarak desteklemek ve difüzyon teriminin (5.28) sisteminin dinamiği üzerindeki etkisini göstermektir. Bunun için, tıbbi deneylerle tahmin edilen

$$\alpha = 1.636, \quad \beta = 0.002, \quad \delta = 0.3743, \quad \omega = 0.04, \quad \sigma = 0.1181 \quad (5.39)$$

parametre değerlerini kullanılacaktır (Kuznetsov ve diğ., 1994). Bu parametre değerleriyle, sistem (5.28)

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = c_1 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 0.1181 + 0.04u(t-\tau,x)v(t-\tau,x) - 0.3743u(t,x) \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = c_2 \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + 1.636v(t,x)(1 - 0.002v(t,x)) - u(t,x)v(t,x) \end{cases} \quad (5.40)$$

sistemine dönüşür.

$$E_0^* = (0.3155, 0), \quad E_1^* = (-0.0060, 501.8323), \quad \text{ve} \quad E_2^* = (1.6114, 7.5252),$$

olmak üzere bu sistemin 3 tane denge noktası vardır. Bölüm 5.4.2'de bazı koşullar altında  $E_2^*$  denge noktasının kararlılığını kaybedebileceğini ve bu denge noktasından

periyodik çözümlerin çatallanabileceğini gösterdik. Bu nedenle, bu bölümde  $E_2^*$  denge noktasının kararlılık yapısı ile ilgili simülasyonlara yer verilecektir.

Difüzyon teriminin, sistemin dinamiği üzerindeki etkisini görebilmek için biyolojik açıdan farklı anlamlar taşıyan 5 farklı durum ele alınacaktır. Durum I: difüzyon yok, sadece zamana göre değişim var; Durum II: efektör hücrelerde yayılma yokken tümör hücreleri  $c_2 = 0.02$  sabit difüzyon katsayısı ile yayılır; Durum III: tümör hücrelerinde yayılma yokken efektör hücreler  $c_2 = 0.03$  sabit difüzyon katsayısı ile yayılır; Durum IV: hem efektör hücreler hem de tümör hücreleri sabit difüzyon katsayıları ile yayılır fakat tümör hücrelerinin yayılma hızı daha fazladır; Durum V: efektör hücreler ve tümör hücreleri aynı hızla yayılır. Bölüm 4'te oluşturulan algoritmanın MATLAB kodu kullanılarak bu difüzyon katsayı değerleri için varlık analizi ve yön analizi için gerekli değerler sırasıyla, Çizelge 5.16 ve Çizelge 5.17'te verilmiştir.

Çizelge 5.16, ele alınan 5 farklı difüzyon katsayı değeri için (5.40) sisteminin  $E_2^* = (1.6114, 7.5252)$  denge noktasının  $\tau \in [0, \tau_{2,0})$  iken yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu (Çizelge 5.16'nın son satırı);  $\tau = \tau_{2,0}$  iken sistemin karakteristik denkleminin  $\pm i\omega_2$  sıfır sanal kök çiftine sahip olması nedeni ile  $E_2^* = (1.6114, 7.5252)$  denge noktasının kararlılığını kaybedeceğini ve bu gecikme değerinde sistemde Hopf çatallanmanın ortaya çıkacağını; denge noktasının  $\tau > \tau_{2,0}$  iken kararsız kalacağını gösterir. Yani, Teorem 5.1'e göre sistem (5.40), Çizelge 5.16'da verilen her bir difüzyon katsayı değeri için  $\tau_{2,0}$  değerinin bir komşuluğunda periyodik çözümler ailesine sahiptir. Dikkat edilirse difüzyon terimi, Hopf çatallanmanın ortaya çıktığı çatallanma değerini değiştirmiştir (Çizelge 5.16'nın son satırı). Difüzyon katsayı değerleri büyüdükçe denge noktası kararlılığını, daha büyük gecikme değerlerinde kaybetmektedir, yani gecikme terimine göre daha uzun süre kararlı kalmaktadır.

Çizelge 5.16: (5.40) sisteminin varlık analizi için gerekli değerler.

	I	II	III	IV	V
	$c_1 = 0$ $c_2 = 0$	$c_1 = 0$ $c_2 = 0.02$	$c_1 = 0.03$ $c_2 = 0$	$c_1 = 0.01$ $c_2 = 0.03$	$c_1 = 0.03$ $c_2 = 0.03$
$H_1$	0.0979	0.1179	0.1279	0.1379	0.1579
$H_{4_2}$	-0.2280	-0.2221	-0.2280	-0.2191	-0.2191
$\omega_2$	0.6732	0.6680	0.6650	0.6626	0.6570
$\tau_{2,0}$	0.2121	0.2610	0.2804	0.3100	0.3580

Çizelge 5.16'daki verilere göre, (5.40) sisteminde Hopf çatallanmanın meydana geldiğini ifade ettik. Bu çatallanmanın yön analizi hakkında, Çizelge 5.17, Teorem 5.2'ye göre bütün difüzyon katsayı değerleri için şu bilgileri verir:  $\text{Re}(c_1(0)) < 0$  olduğundan Hopf çatallanma süperkritiktir ve ortaya çıkan periyodik çözümler kararlıdır;  $\mu_2 > 0$  olduğundan periyodik çözümler çatallanma değeri  $\tau_{2,0}$  dan sonra ortaya çıkar; çatallanma değerine yeterince yakın iken periyodik çözümlerin periyodu Çizelge 5.17'nin son satırındaki gibidir ve bu periyot,  $T_2 > 0$  olduğundan çatallanma

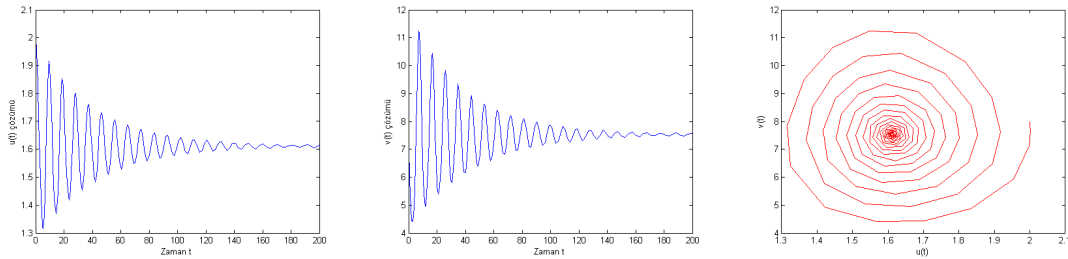
değerinden uzaklaştıkça artar. Dikkat edilirse difüzyon terimi, ortaya çıkan periyodik çözümlerin periyodunu değiştirmiştir (Çizelge 5.17'nin son satırı). Difüzyon katsayı değerleri arttıkça periyot artmaktadır.

Çizelge 5.17: (5.40) sisteminin için yön analizi için gerekli değerler.

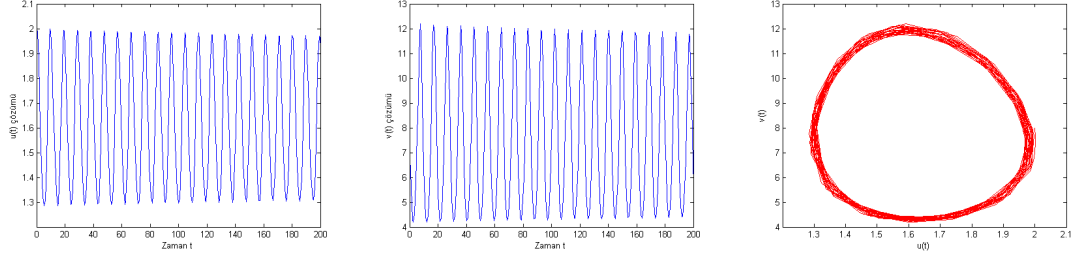
	I	II	III	IV	V
	$c_1 = 0$ $c_2 = 0$	$c_1 = 0$ $c_2 = 0.02$	$c_1 = 0.03$ $c_2 = 0$	$c_1 = 0.01$ $c_2 = 0.03$	$c_1 = 0.03$ $c_2 = 0.03$
$\text{Re}(c_1(0))$	-0.0365	-0.0656	-0.0490	-0.0847	-0.0936
$\mu_2$	0.1762	0.3326	0.2487	0.4485	0.5140
$T_2$	0.4991	0.4999	0.5393	0.5135	0.5382
Periyot	9.3339	9.4055	9.4486	9.4824	9.5630

Bu sonuçları desteklemek amacıyla, sıfırdan farklı difüzyon katsayıları içeren (5.40) sistemi için FORTRAN programı ve difüzyon katsayılarının sıfır olduğu durum için ise MATLAB DDE (Delay Differential Equations) paketini kullanarak bazı simülasyonlar elde edilmiştir.

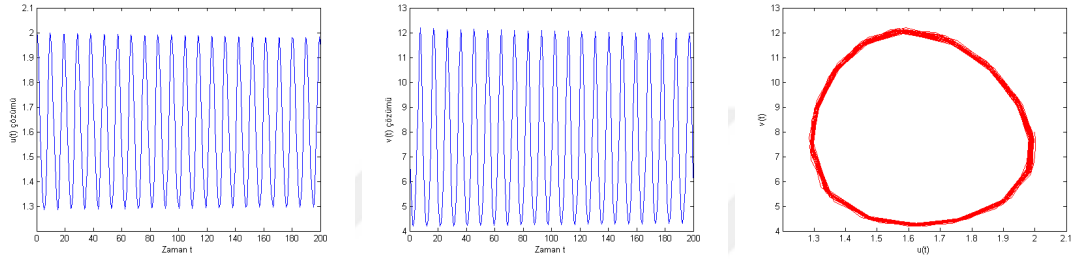
Difüzyonun olmadığı durumda, çatallanma değerinden küçük  $\tau = 0.1 \in [0, 0.2121)$  gecikme değerinde denge noktasının yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğu Şekil 5.14'ten görülmektedir. Şekil 5.15 ve Şekil 5.16,  $\tau = 0.2121$  çatallanma değerinde ve çatallanma değerinden büyük fakat çatallanma değerine çok yakın  $\tau = 0.213 > 0.2121$  değerinde, (5.40) sisteminin periyodik çözüme sahip olduğunu göstermektedir. Bu simülasyonlar, periyodik çözümlerin çatallanma değerinden sonra ortaya çıktığı sonucunu, difüzyon katsayı değerlerinin sıfır olduğu durum için destekler.



Şekil 5.14:  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $\tau = 0.1 < 0.2121$  iken  $(u_0, v_0) = (2, 8)$  başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t)$  solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t)$  ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.

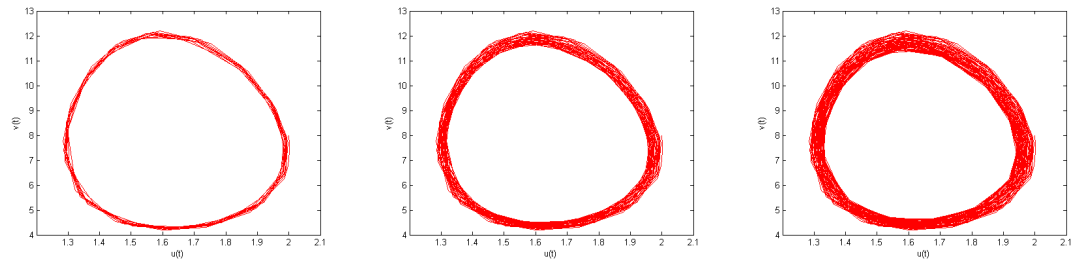


Şekil 5.15:  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $\tau = 0.2121$  iken  $(u_0, v_0) = (2, 8)$  başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t)$  solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t)$  ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.



Şekil 5.16:  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $\tau = 0.213 > 0.2121$  iken  $(u_0, v_0) = (2, 8)$  başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t)$  solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t)$  ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.

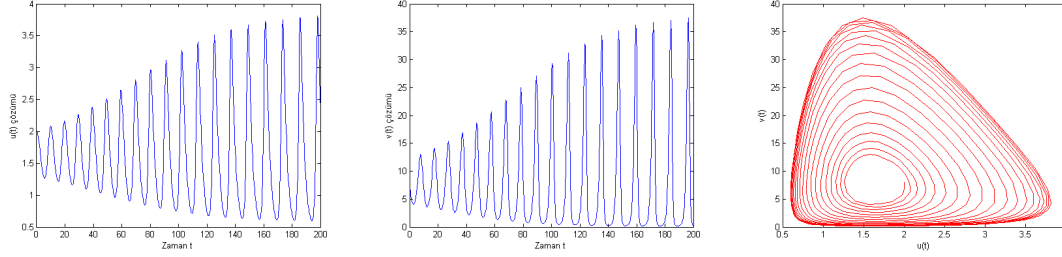
Tanım 3.1, çatallanma değerinde denge noktası zayıf bir şekilde çekici ise Hopf çatallanmanın süperkritik olarak adlandırıldığını söyler. Şekil 5.17'ye bakılırsa  $E_2^* = (1.6114, 7.5252)$  denge noktasının kararlılığının zaman aralığı artırılmasına rağmen zayıf kaldığı görülür. Bu simülasyon, Hopf çatallanmanın tipinin süperkritik olduğunu destekler. Şekil 5.18'de ise çatallanma değerinden büyük  $\tau = 0.3 > 0.2121$  gecikme değerinde denge noktasının kararsız olduğu görülmektedir.



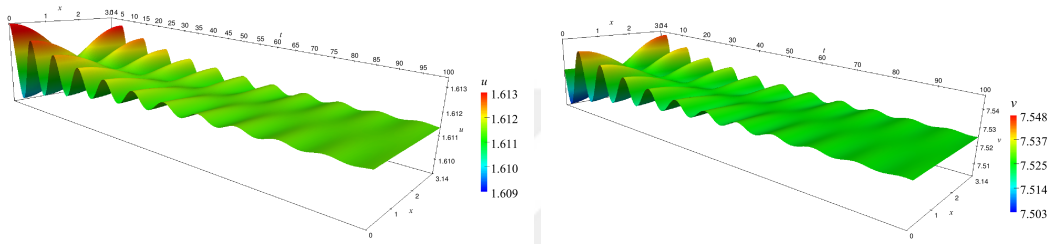
Şekil 5.17:  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $\tau = 0.2121$  iken  $(u_0, v_0) = (2, 8)$  başlangıç değerine sahip (5.40) sisteminin faz portresi,  $t \in [0, 100]$  için solda,  $t \in [0, 300]$  için ortada ve  $t \in [0, 500]$  için sağda verilmiştir.

Şimdi, difüzyon teriminin  $E_2^* = (1.6114, 7.5252)$  denge noktasının kararlılığı üzerindeki etkisini inceleyelim. Şekil 5.19, farklı difüzyon katsayı değerleri için ilgili çatallanma değerlerinden küçük  $\tau = 0.1$  gecikme değerinde denge noktasının yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğunu göstermektedir.

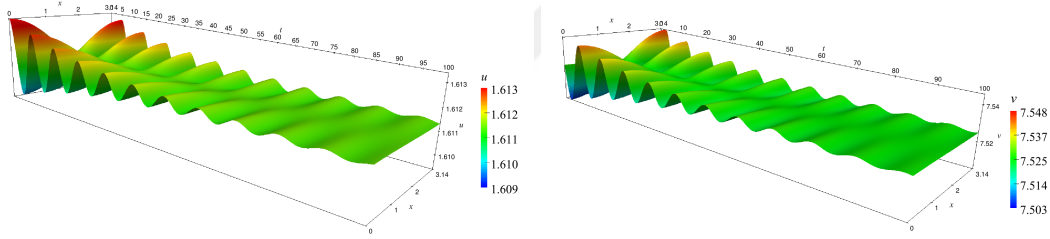




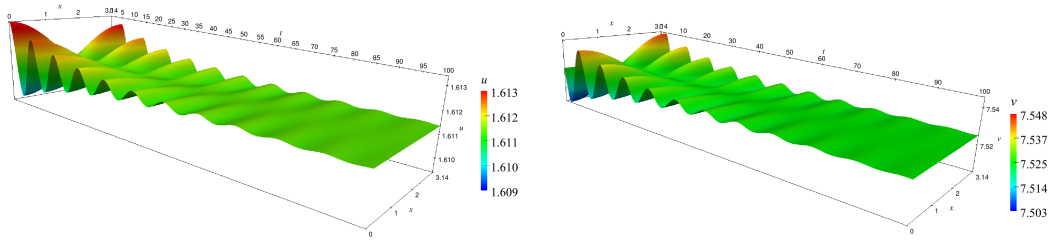
Şekil 5.18:  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $\tau = 0.3 > 0.2121$  iken  $(u_0, v_0) = (2, 8)$  başlangıç değerine sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t)$  solda, tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t)$  ortada ve (5.40) sisteminin faz portresi sağda verilmiştir.



(a)  $c_1 = 0, c_2 = 0.02$  ve  $\tau = 0.1 < \tau_{2,0} = 0.2610$



(b)  $c_1 = 0.03, c_2 = 0$  ve  $\tau = 0.1 < \tau_{2,0} = 0.2804$

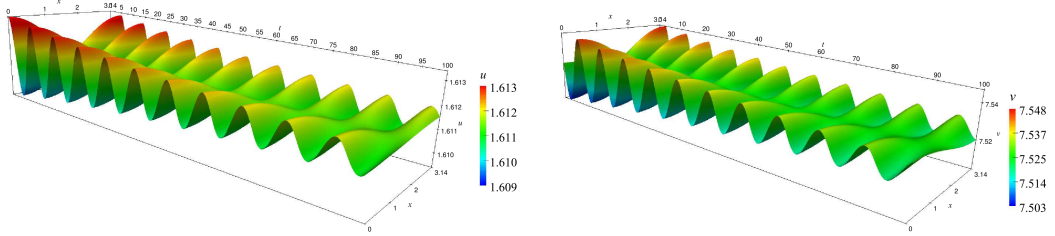


(c)  $c_1 = 0.01, c_2 = 0.03$  ve  $\tau = 0.1 < \tau_{2,0} = 0.3100$

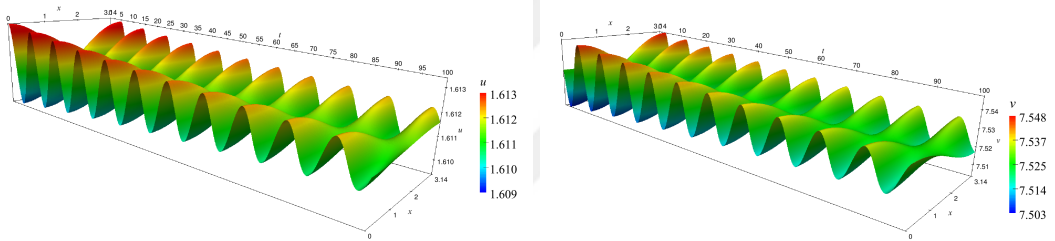
Şekil 5.19:  $u(x,0) = 1.6114 + 0.002 \cos(x)$  ve  $v(x,0) = 7.5252 + 0.002 \cos(x)$  başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t, x)$  solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t, x)$  sağda verilmiştir.

Difüzyonun olmadığı Durum I için çatallanma değerinin  $\tau = 0.2121$  olduğunu ve dolayısıyla difüzyonun yokluğunda, bu gecikme değerinde ve bu değerden büyük fakat çok yakın gecikme değerlerinde (5.40) sisteminin periyodik çözüme sahip olduğunu biliyoruz (Şekil 5.15 ve Şekil 5.16). Şekil 5.20'ye bakılırsa farklı difüzyon

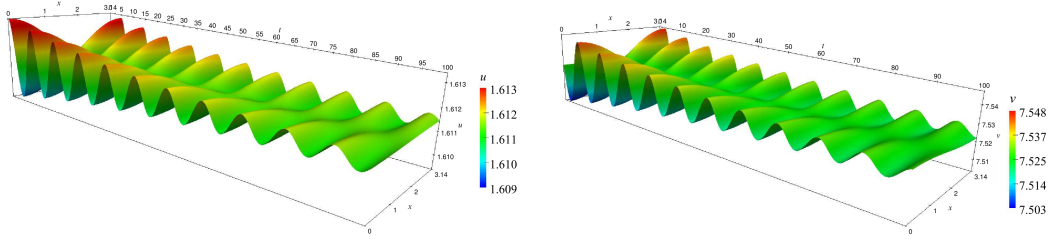
değerlerinin ele alındığı sistemlerde,  $\tau = 0.2121$  gecikme değerinde, (5.40) sisteminin  $E_2^* = (1.6114, 7.5252)$  denge noktası halen yerel (lokal) asimptotik kararlı olduğu görülür. Bu sonuç, sistem difüzyon içeriyorsa difüzyonun pozitif denge noktasının kararlı kaldığı gecikme aralığını uzattığının altını çizmektedir. Başka bir deyişle, difüzyon, periyodik bir çözümü asimptotik olarak kararlı bir denge noktasına dönüştürebilecek bir etkiye sahiptir.



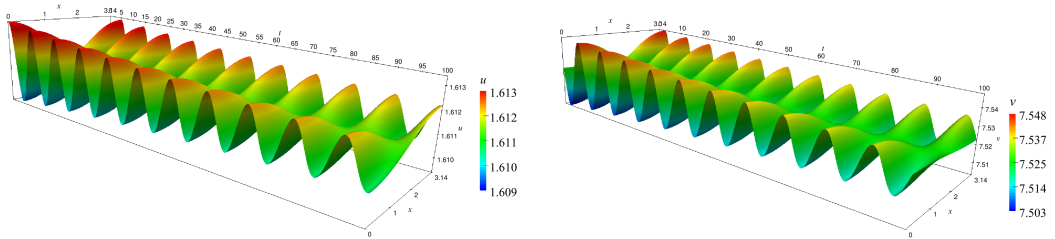
(a)  $c_1 = 0, c_2 = 0.02$  ve  $\tau = 0.2121 < \tau_{2,0} = 0.2610$



(b)  $c_1 = 0.03, c_2 = 0$  ve  $\tau = 0.2121 < \tau_{2,0} = 0.2804$



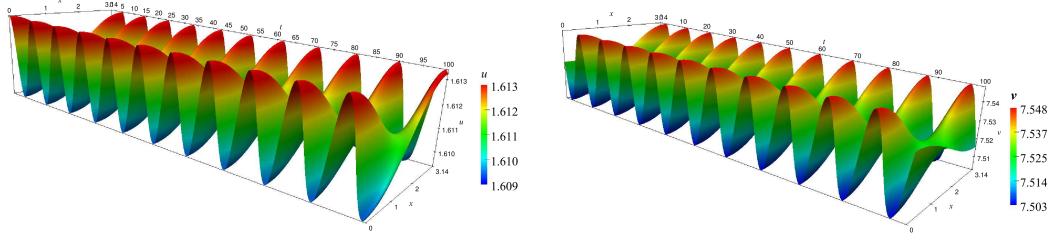
(c)  $c_1 = 0.01, c_2 = 0.03$  ve  $\tau = 0.2121 < \tau_{2,0} = 0.3100$



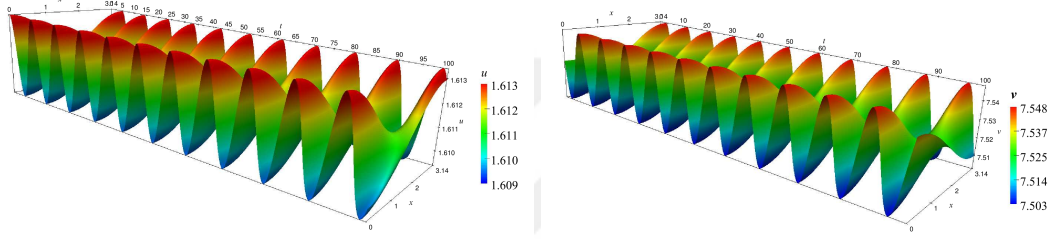
(d)  $c_1 = 0.03, c_2 = 0.03$  ve  $\tau = 0.2121 < \tau_{2,0} = 0.3580$

Şekil 5.20:  $u(x,0) = 1.6114 + 0.002 \cos(x)$  ve  $v(x,0) = 7.5252 + 0.002 \cos(x)$  başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t,x)$  solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t,x)$  sağda verilmiştir.

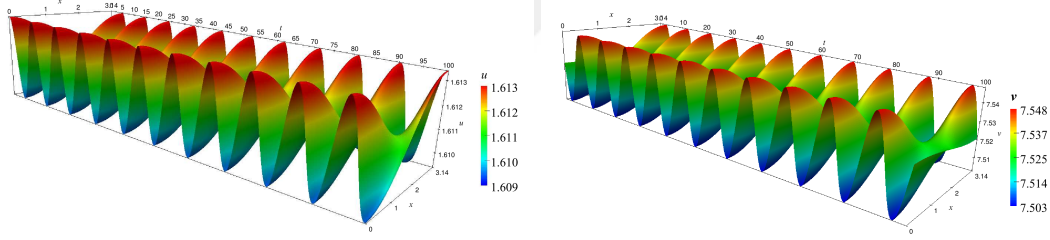
Şekil 5.21, (5.40) sisteminin  $c_1 = 0$  ve  $c_2 = 0.02$  iken  $\tau = 0.2610$ ;  $c_1 = 0.03$  ve  $c_2 = 0$  iken  $\tau = 0.2804$ ;  $c_1 = 0.01$  ve  $c_2 = 0.03$  iken  $\tau = 0.3100$ ;  $c_1 = 0.03$  ve  $c_2 = 0.03$  iken  $\tau = 0.3580$  çatallaşma değerlerinde periyodik çözüme sahip olduğunu göstermektedir.



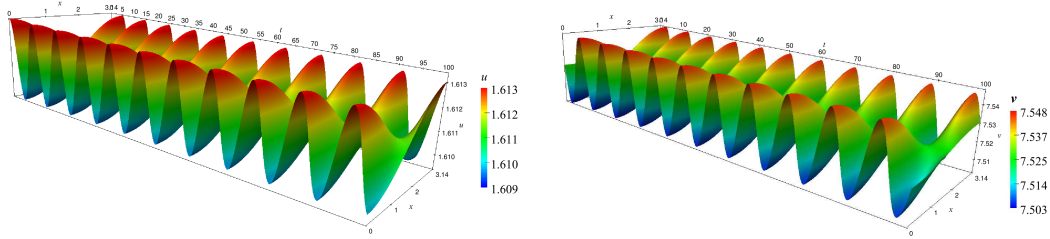
(a)  $c_1 = 0, c_2 = 0.02$  ve  $\tau = \tau_{2,0} = 0.2610$



(b)  $c_1 = 0.03, c_2 = 0$  ve  $\tau = \tau_{2,0} = 0.2804$



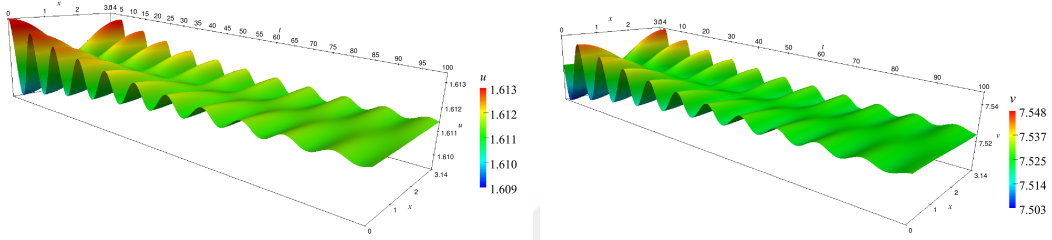
(c)  $c_1 = 0.01, c_2 = 0.03$  ve  $\tau = \tau_{2,0} = 0.3100$



(d)  $c_1 = 0.03, c_2 = 0.03$  ve  $\tau = \tau_{2,0} = 0.3580$

Şekil 5.21:  $u(x,0) = 1.6114 + 0.002\cos(x)$  ve  $v(x,0) = 7.5252 + 0.002\cos(x)$  başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t,x)$  solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t,x)$  sağda verilmiştir.

$c_1 = 0.01$  ve  $c_2 = 0.03$  iken çatallanma değerinin  $\tau = 0.3100$  olduğunu ve dolayısıyla, bu gecikme değerinde (5.40) sisteminin periyodik çözüme sahip olduğunu biliyoruz (Şekil 5.21c). Difüzyon içeren (5.40) sisteminde, difüzyon katsayılarının artışının,  $E_2^* = (1.6114, 7.5252)$  denge noktasının kararlılık yapısı üzerinde nasıl bir etkiye sahip olabileceğini görmek için  $c_1 = 0.03$  ve  $c_2 = 0.03$  difüzyon katsayı değerinde  $\tau = 0.3100$  iken çözüm eğrileri elde edilmiştir. Şekil 5.22'de görüldüğü gibi,  $c_1 = 0.01$  ve  $c_2 = 0.03$  için çatallanma değeri olan  $\tau = 0.3100$  gecikme değerinde,  $c_1 = 0.03$  ve  $c_2 = 0.03$  iken  $E_2^* = (1.6114, 7.5252)$  denge noktası halen yerel (lokal) asimptotik kararlıdır.



Şekil 5.22:  $c_1 = 0.03$ ,  $c_2 = 0.03$  ve  $\tau = 0.3100 < 0.3580$  iken  $u(x, 0) = 1.6114 + 0.002 \cos(x)$  ve  $v(x, 0) = 7.5252 + 0.002 \cos(x)$  başlangıç değer fonksiyonlarına sahip efektör hücre popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $u(t, x)$  solda ve tümör hücresi popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği  $v(t, x)$  sağda verilmiştir.

Bu sonuç, difüzyon katsayı değerlerinin artmasının, denge noktasının kararlılığını, daha büyük gecikme değerlerinde kaybettiğinin, yani gecikme terimine göre daha uzun süre kararlı kaldığının altını çizmektedir. Difüzyon katsayı değerlerinin artması, periyodik bir çözümü asimptotik olarak kararlı bir denge noktasına dönüştürebilecek bir etkiye sahiptir. Başka bir deyişle, difüzyon katsayı değerlerinin azalması yerel (lokal) asimptotik olarak kararlı bir denge noktasını, periyodik bir çözüme dönüştürebilir.



## 6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Gerçek yaşam problemlerini anlamının, açıklayabilmenin ve bu problemlere çözüm üretebilmenin bir yolu matematiksel modelleme ve onun analizidir. Gerçek yaşam problemlerini modellerken pek çok problemin doğasında bulunan reaksiyon-difüzyon mekanizmasını ve girdilere/uyaranlara verilen cevapta meydana gelecek gecikmeyi ihmal etmemek, problemleri daha gerçekçi bir şekilde temsil etmeyi sağlayacaktır.

Gerçekçi bir model elde edildikten sonra ikinci adım modelin dinamiğini anlamaya çalışmaktır. Matematiksel modeller pek çok parametre içerir ve bu parametreler değişirken sistemin nitel davranışında ne gibi değişiklikler olacağı merak edilen konulardan biridir. Hopf çatallanma, sistem içindeki parametrelerden biri değişirken sistemin denge noktasının kararlılık yapısının değiştiği ve bu değişime periyodik çözümlerin ortaya çıkmasının veya kaybolmasının eşlik ettiği çatallanma tipidir. Sistemin dinamiğinde periyodik davranışların bulunması sağlıklı olmak, öğrenmek, yaşamaya devam etmek gibi olumlu şeyleri veya epilepsi atakları, Alzaymır hastalığı gibi olumsuz şeyleri temsil edebilir. Bu nedenle, periyodik davranışların varlığı ve yokluğu, gerçek yaşam problemlerini temsil eden modellerin analizinde önemli bir yere sahiptir.

Bu gerekçeler göz önünde bulundurularak bu tezde, gecikme parametresi değişirken tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon sistemlerinin bir sınıfının dinamik yapısında ne gibi değişikliklerin ortaya çıktığı analiz edilmiştir. Bu sınıfa ait sistemlerde periyodik çözümlerin varlığını garanti etmek için gecikme terimi çatallanma parametresi olarak alınıp bahsi geçen sistem sınıfında hangi koşullar altında Hopf çatallanmanın ortaya çıktığı belirlenmiştir. Ayrıca sistem merkez manifolduna indirgenmiş ve böylece periyodik çözümlerin özellikleri belirlenmiştir.

Aynı sınıfa ait farklı problemler için bu adımların tekrarını engellemek amacıyla, Hopf çatallanma varlık analizini sadece sistemin karakteristik denkleminin katsayılarını kullanarak ve yön analizini ise sadece sistemdeki fonksiyonların Taylor serilerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevlere karşılık gelen katsayıları kullanarak tamamlamayı sağlayacak koşullar ve formüller içeren bir algoritma oluşturulmuştur. Böylece, tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon denklemlerinin bahsi geçen sınıfı Hopf çatallanmanın varlığı ve yönü anlamında tamamen analiz edilmiştir.

Elde edilen algoritma kullanılarak dört problemin Hopf çatallanma analizleri yapılmıştır. İlk olarak literatürden bir tümör-bağışıklık etkileşimi modeli seçilmiş ve böylece algoritma test edilmiştir. Bu uygulamada, gerçek yaşam problemlerine doğru katkıda bulunabilmek için matematiksel modellerin analizindeki hata ihtimalini en aza indirmek gerektiği görülmüştür. Bu tezde oluşturulan algoritmanın temel amaçlarından birisi budur.

Çalıştığımız sistem sınıfı hem gecikme terimi hem reaksiyon-difüzyon terimi içermektedir. Gecikme teriminin değişimine bağlı olarak sistemin dinamiğinde meydana gelen değişiklikler analiz edilmiştir. Diğer taraftan, difüzyonun sistemler üzerindeki etkisi merak edilen konulardan biridir. Oluşturulan algoritmanın MATLAB kodu sayesinde farklı difüzyon değerleri için Hopf çatallanma analizini hızlı bir şekilde yapmak mümkündür. "Modellerin reaksiyon-difüzyon terimi ile daha gerçekçi hale gelmesi, modelin dinamiği ile ilgili elde edilen sonuçları değiştirir mi?" sorusuna yanıt bulmak için literatürde yer alan fakat difüzyonun etkisinin araştırılmamış olduğu iki farklı problem, algoritma kullanılarak analiz edilmiştir. Bu analizin sonucunda, av-avcı etkileşimini ele alan ve difüzyon terimi içermeyen sistemde avın üreme olgunluğuna erişmek için ihtiyaç duyduğu süre ne olursa olsun popülasyonların yoğunluğunun sistemin denge değerine ulaşacağı görülmüştür. Bununla birlikte, reaksiyon-difüzyon mekanizmasını ihtiva ettiği için daha gerçekçi olan sistemde ise popülasyonların yoğunluğunun sistemin denge değerine ulaşım ulaşamayacağı, avın üreme olgunluğuna erişmek için ihtiyaç duyduğu süreye bağlı kalmıştır. Bir kimyasal tepkimeyi modelleyen üçüncü sistemde, denge noktasının kararlılığı difüzyonun yokluğunda gecikme değerinden daha hızlı etkilenmiştir. Ayrıca difüzyonun yokluğunda periyodik çözümler kararlı ve çatallanma değerinden sonra ortaya çıkarken difüzyonun etkisi altında periyodik çözümler kararsız hale gelmiş ve çatallanma değerinden önce ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla, difüzyon Hopf çatallanmanın tipini değiştirmiştir. Son olarak difüzyon periyodik çözümlerin periyodunu, yani sistemin dinamiğinin kendini tekrarlama süresini değiştirmiştir.

Son örnekte ise literatürde bulunan bir tümör-bağışıklık etkileşim modeline reaksiyon-difüzyon mekanizması eklenerek model daha gerçekçi hale getirilmiştir. Ardından, algoritma kullanılarak modelin Hopf çatallanma varlık ve yön analizi yapılmış ve gecikme parametresi değişirken sistemin belirli koşullar altında periyodik çözümlere sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca difüzyon teriminin model üzerindeki etkisi araştırılmış ve difüzyon katsayı değerleri artırıldığında denge noktasının kararlılığını daha büyük gecikme değerlerinde kaybettiği, yani gecikme terimine göre daha uzun süre kararlı kaldığı görülmüştür. Bu sistem için difüzyon katsayı değerlerinin artması, periyodik bir çözümü asimptotik olarak kararlı bir denge noktasına dönüştürebilecek bir etkiye sahiptir. Başka bir deyişle, difüzyon katsayı değerlerinin azalmasının yerel (lokal) asimptotik olarak kararlı bir denge noktasını, periyodik bir çözüme dönüştürebildiği tespit edilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Adam, J.A., Bellomo, N.,** *A survey of models for tumor-immune system dynamics*, Birkhauser Basel, Boston, (1997).
- Allen, L.J.S.,** *An Introduction to Mathematical Biology*, Upper Saddle River, Pearson-Prentice Hall, New Jersey, (2007).
- Anisiu, M.C.,** (2014). Lotka, Volterra and their model, *Didactica Mathematica*, 32, 9-17.
- Andronov, A.A., Witt, A.,** (1930). Sur la théorie mathematiques des autooscillations, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 190, 256-258.
- Arciero, J., Jackson, T., Kirschner, D.,** (2004). A mathematical model of tumor-immune evasion and siRNA treatment, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 4, 39-58.
- Asachenkov, A., Marchuk, G., Mohler, R., Zuev, S.,** (1994). Immunology and disease control: A systems approach, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 41, 943-953.
- Asl, F.M., Ulsoy, A.G.,** (2003). Analysis of a System of Linear Delay Differential Equations, *Semantic Scholar*.
- Atıcı, E.,** (2007). Tıp tarihinde kanser ve lösemi, *Türk Onkoloji Dergisi*, 22(4), 197-204.
- Balachandran, B., Kalmar-Nagy, T., Gilsinn, D.E.,** *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, Springer, New York, (2009).
- Baptistini, M., Táboas, P.,** (1997). On the stability of some exponential polynomials, *J. Math. Anal. Appl.*, 205, 259-272, doi:10.1007/BF00989279.
- Bayraktar, M.,** *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Kitabevi, Ankara, (2006).
- Bayraktar, M.,** *Analiz*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, (2010).
- Bellman, R., Cooke, K.L.,** *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, (1963).
- Bi, P., Ruan, S.,** (2013). Bifurcations in delay differential equations and applications to tumor and immune system interaction models, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.*, 12, 1847-1888, doi:10.1137/120887898.



- Bilazeroğlu, Ş.**, (2012). *Gecikmeli reaksiyon-difüzyon Lengyel-Epstein modelinin Hopf çatalanma analizi* (Yüksek Lisans Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Bodnar, M., Foryś, U., Poleszczuk, J.**, (2011). Analysis of biochemical reactions models with delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 376, 74-832, doi:10.1016/j.jmaa.2010.10.038.
- Brauer, F.**, (1987). Absolute stability in delay equations, *J. Diff. Equations*, 69, 185-191.
- Bressan, A.**, *A tutorial on the center manifold theorem*, In E. P. Marcati (Ed.), *Hyperbolic Systems of Balance Laws, Lecture Notes in Math: Vol.1911*. (Sf. 327-344), Springer, Berlin, (2007).
- Brondz, B.D.**, (1987). T Lymphocytes and Their Receptors in Immunological Recognition (in Russian), *Moscow: Nauka*, 4-70.
- Byrne, H.M.**, (1997). The effect of time delay on the dynamics of avascular tumor growth, *Math. Biosci.*, 144, 83-117.
- Byrne, H.M., Gourley, S.A.**, (1997). The role of growth factors in avascular tumour growth, *Math. Comput. Model.*, 26, 35-55.
- Cantrell, R.S., Cosner, C.**, (1989). Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments, *Proc. Roy. Soc. of Edinburgh*, 112(3-4), 293-318, doi:10.1017/S030821050001876X.
- Cantrell, R.S., Cosner, C.**, *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*, John Wiley & Sons, Chichester, (2003).
- Carr, J.**, *Applications of Center Manifold Theory*, New York, Heidelberg, Springer-Verlag, Berlin, (1981).
- Castets, V., Dulos, E., Boissonade, J., De Kepper, P.**, (1990). Experimental evidence of a sustained Turing-type equilibrium chemical pattern, *Phys. Rev. Lett.*, 64, 2953-2956.
- Chen, S., Shi, J., Wei, J.**, (2013). Time delay-induced instabilities and Hopf bifurcations in general reaction-diffusion systems, *J. Nonlinear Sci.*, 23, 1-38, doi:10.1007/s00332-012-9138-1.
- Chow, S.N., Hale, J.K.**, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1982).
- Cooke, K.L., van den Driessche, P.**, (1986). On zeros of some transcendental equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 29, 77-90.
- Cooke, K.L., Grossman, Z.**, (1982). Discrete delay, distributed delay and stability switches, *J. Math. Anal. Appl.*, 86, 592-627, doi:10.1016/0022-247X(82)90243-8.
- Çavdar, İ.**, (2011). Kanserli hastanın terminal dönemdeki bakımı, *Türk Onkoloji Dergisi*, 26(3), 142-147.

- Çelik, C., Merdan, H.,** (2013). Hopf bifurcation analysis of a system of coupled delayed-differential equations, *Appl. Math and Comp.*, 219(12), 6605-6617.
- Das, P., Kundu, A.,** (2014). Bifurcation and chaos in delayed cellular neural network model, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2, 219-224, doi:10.4236/jamp.2014.25027.
- De Kepper, P., Castets, V., Dulos, E., Boissonade, J.,** (1991). Turing-type chemical patterns in the chlorite-iodide-malonic acid reaction, *Physica D*, 49, 161-169.
- de Pillis, L., Radunskaya, A., Wiseman, C.,** (2005). A validated mathematical model of cell-mediated immune response to tumor growth, *Cancer Res.*, 65, 7950-7958.
- d’Onofrio, A.,** (2005). A general framework for modeling tumour-immune system competition and immunotherapy: Mathematical analysis and biomedical inferences, *Phys. D*, 208, 220-235.
- d’Onofrio, A.,** (2008). Metamodeling tumour-immune system interaction, tumour evasion and immunotherapy, *Math. Comput. Model.*, 47, 614-637.
- d’Onofrio, A., Gandolfi, A.,** (2009). A family of models of angiogenesis and anti-angiogenesis anti-cancer therapy, *Math. Med. Biol.*, 26, 63-95.
- d’Onofrio, A., Gatti, F., Cerrai, P., Freschi, L.,** (2010). Delay-induced oscillatory dynamics of tumour immune system interaction, *Math. Comput. Model.*, 51, 572-591.
- Du, L., Wang, M.,** (2010). Hopf bifurcation analysis in the 1-D Lengyel-Epstein reaction-diffusion model, *J. Math. Anal. Appl.*, 366, 473-485.
- Eftimie, R., Bramson, J.L., Earn, D.J.D.,** (2010). Interactions between the immune system and cancer: A brief review of non-spatial mathematical models, *Bull. Math. Biol.*, 73, 2-32.
- El’sgol’ts, L.E., Norkin, S.B.,** *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, (1973).
- Epstein, I.R., Pojman, J.A.,** *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, (1998).
- Ferlay, J., Soerjomataram, I., Ervik, M., Dikshit, R., Eser, S., Mathers, C., Rebelo, M., Parkin, D.M., Forman, D., Bray, F.,** (2015). Cancer incidence and mortality worldwide: sources, methods and major patterns in GLOBOCAN 2012, *Int. J. Cancer*, 136(5), E359-86, doi: 10.1002/ijc.29210.
- Fishelson, Z., Berke, G.,** (1981). Tumor cell destruction by cytotoxic T lymphocytes: The basis of reduced antitumor cell activity in syngeneic hosts, *J. Immunol.*, 125, 2048-2052.

- Forde, J.E.**, (2005). *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology* (Doktora Tezi), University of Michigan, Department of Mathematics, Michigan.
- Forouzanfar, M.H., Afshin, A., Alexander, L.T., ve diğ.**, (2016). Global, regional, and national comparative risk assessment of 79 behavioural, environmental and occupational, and metabolic risks or clusters of risks, 1990-2015: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2015., *Lancet.*, 388(10053), 1659-1724, doi: 10.1016/S0140-6736(16)31679-8.
- Gabrilovich, D.I., Hurwitz, A.A.**, *Tumor-Induced Immune Suppression: Mechanisms and Therapeutic Reversal*, Springer Verlag, Heidelberg, (2008).
- Galach, M.**, (2003). Dynamics of the tumor-immune system competition-the effect of time delay, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 13, 395-406.
- Gatenby, R.A., Maini, P.K.**, (2003). Mathematical oncology: cancer summed up, *Nature*, 421, 321, DOI: 10.1038/421321a.
- Gierer, A., Meinhardt, H.**, (1972). A theory of biological pattern formation, *Kybernetik*, 12, 30-39.
- Gleick, J.**, *Kaos*, (F. Üçcan, Çev.) TÜBİTAK, Ankara, (1987).
- Guiot, C., Degiorgis, P.G., Delsanto, P.P., Gabriele, P., Deisboecke, T.S.**, (2003). Does tumor growth follow a “universal law”?, *J. Theor. Biol.*, 225, 147-151.
- Hadeler, K.P., Ruan, S.**, (2007). Interaction of diffusion and delay, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 8, 95-105.
- Hart, D., Shochat, E., Agur, Z.**, (1998). The growth law of primary breast cancer as inferred from mammography screening trials data, *Br. J. Cancer*, 78, 382-387.
- Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D., Wan, Y.H.**, *Theory and Application of Hopf Bifurcation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1981).
- Hirsch, M.W., Smale, S.**, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, (1974).
- Huisman, G., de Boer, R.J.**, (1997). A formal derivation of the Beddington functional response, *J. Theoret. Biol.*, 185, 389-400.
- Hopf, E.**, (1942). Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, *Ber. Math-Phys. Sachsische Adademie der Wissenschaften Leipzig*, 94, 1-22.
- Jin, J., Shi, J., Wei, J., Yi, F.**, (2013). Bifurcations of patterned solutions in diffusive Lengyel-Epstein system of CIMA chemical reaction, *Rocky Mountain J. Math.*, 43(5), 1637-1674.

- Karaoğlu, E.**, (2016). *Gecikmeli bir yapay sinir ağı modeli ile gecikmeli bir av-avcı modelinin kararlılık ve Hopf çatallanma analizleri* (Doktora Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kalecki, M.**, (1935). A macrodynamic theory of business cycles, *Econometrica*, 3, 327-344.
- Kareiva, P.M.**, (1983). Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments, *Oecologia (Berlin)*, 57, 322-327.
- Kayan, Ş., Merdan, H.**, (2017). An algorithm for Hopf bifurcation analysis of a delayed reaction-diffusion model, *Nonlinear Dyn.*, 89, 345-366, doi:10.1007/s11071-017-3458-5.
- Kayan, Ş., Merdan, H., Yafia, R., Göktepe, S.**, (2017). Bifurcation analysis of a modified tumor-immune system interaction model involving time delay, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 12(5), 120-145, doi:https://doi.org/10.1051/mmnp/201712508.
- Kierstead, H., Slobodkin, L.B.**, (1953). The size of water masses containing plankton blooms, *J. Mar. Res.*, 12, 141-147.
- Kirschner, D., Panetta, J.C.**, (1998). Modeling immunotherapy of the tumor-immune interaction, *Nonlinear Dyn.*, 37(3), 235-252.
- Kolman, B., Hill, D.R.**, *Elementary Linear Algebra with Applications*, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, (2008).
- Kuang, Y.**, *Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics*, Academic Press, (1993).
- Kuang, Y.**, (2002). Basic properties of mathematical population models, *J. Biomathematics.*, 17, 129-142.
- Kuznetsov, V.A.**, *The dynamics of cellular immunological antitumor reactions*, InE. V.D. Fedorov (Ed.), 1. Synthesis of a multi-level model, in *Mathematical Methods of Systems Theory (in Russian)* (Sf. 57-71), Kyrghiz State Univ. Press, (1979).
- Kuznetsov, V.A.**, *Basic models of tumor-immune system interactions*, InE. J.A. Adam, N. Bellomo (Ed.), *A Survey of Models for Tumor-Immune System Dynamics*. (Sf. 237-294), Springer, Birkhauser, (1996).
- Kuznetsov, V.A., Makalkin, I.A., Taylor, M.A., Perelson, A.S.**, (1994). Nonlinear dynamics of immunogenic tumors: Parameter estimation and global bifurcation analysis, *Bull. Math. Biol.*, 56, 295-321.
- Kuznetsov, Y.A.**, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1998).
- Laird, A.K.**, (1964). Dynamics of Tumour Growth, *Br J Cancer.*, 18(3), 490-502.

- Lejeune, O., Chaplain, M.A.J., El Akili, I.,** (2008). Oscillations and bistability in the dynamics of cytotoxic reactions mediated by the response of immune cells to solid tumours, *Math. Comput. Model.*, 47, 649-662.
- Lengyel, I., Epstein, I.R.,** (1991). Modeling of Turing structure in the Chlorite-iodide-malonic acid-starch reaction system, *Science*, 251, 650-652.
- Lengyel, I., Epstein, I.R.,** (1992). A chemical approach to designing Turing patterns in reaction-diffusion system, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 89, 3977-3979.
- Liu, W., Hillen, T., Freedman, H.I.,** (2007). A mathematical model for M-phase specific chemotherapy including the G<sub>0</sub>-phase and immunoresponse, *Math. Biosci. Eng.*, 4, 239-259.
- Lotka, A.J.,** (1920). Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 6, 410-415, doi:10.1073/pnas.6.7.410.
- MacDonald, N.,** *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- Mahaffy, J.M.,** (1982). A test for stability of linear differential delay equations, *Quart. Appl. Math.*, 40, 193-202.
- Malchow, H., Petrovskii, S.V., Venturino, E.,** *Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulations*, Chapman & Hall/CRC, London, (2008).
- Marsden, J.E., McCracken, M.,** *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, (1976).
- Marusic, M., Bajzer, Z., Freyer, J.P., Vuk-Pavlovic, S.,** (1994). Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models, *Cell Prolif.*, 27, 73-94.
- MATLAB** version 7.10.0. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., (2010).
- Matzavinos, A., Chaplain, M.A., Kuznetsov, V.A.,** (2004). Mathematical modelling of the spatio-temporal response of cytotoxic T-lymphocytes to a solid tumour, *Math Med Biol.*, 21(1), 1-34.
- May, R.M.,** (1973). Time delay versus stability in population models with two and three trophic levels, *Ecology*, 4, 315-325.
- Mayer, H., Zaenker, K., an der Heiden, U.,** (1995). A basic mathematical model of the immune response, *Chaos*, 5, 155-161.
- Merdan, H., Kayan, Ş.,** (2015). Hopf bifurcations in Lengyel-Epstein reaction-diffusion model with discrete time delay, *Nonlinear Dyn.*, 79, 1757-1770, doi:10.1007/s11071-014-1772-8.

- Merdan, H., Kayan, Ş.**, *Delay Effects on the Dynamics of the Lengyel-Epstein Reaction-Diffusion Model*, InE. A.C.J. Luo, H. Merdan (Ed.), *Mathematical Modelling and Applications in Nonlinear Dynamics*. (Sf. 125-160), doi:10.1007/978-3-319-26630-5\_6, Springer, Switzerland, (2016).
- Murray, J.D.**, *Mathematical Biology I: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, (2002).
- Nani, F., Freedman, I.**, (2000). A mathematical model of cancer treatment by immunotherapy, *Math. Biosci.*, 163, 159-199.
- Ni, W.M.**, (1998). Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states, *Notices Amer. Math. Soc.*, 45, 9-18.
- Ni, W.M., Tang M.**, (2005). Turing patterns in the Lengyel-Epstein system for the CIMA reaction, *Tran. Am. Math. Soc.*, 357, 3953-3969.
- Owen, M., Sherratt, J.**, (1998). Modeling the macrophage invasion of tumors: Effects on growth and composition, *Math. Med. Biol.*, 15, 165-185.
- Pal, N., Samanata, S., Chattopadhyay, J.**, (2015). The impact of diffusive migration on ecosystem stability, *Chaos Solitons Fract.*, 78, 317-328, doi:10.1016/j.chaos.2015.08.011.
- Perko, L.**, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Newyork, (2001).
- Piotrowska, M.J., Foryś, U.**, (2011). Analysis of the Hopf bifurcation for the family of angiogenesis models, *J. Math. Anal. Appl.*, 382, 180-203.
- Plummer, M., de Martel, C., Vignat, J., Ferlay, J., Bray, F., Franceschi, S.**, (2016). Global burden of cancers attributable to infections in 2012: a synthetic analysis, *Lancet Glob Health.*, 4(9), e609-16, doi: 10.1016/S2214-109X(16)30143-7.
- Poincaré, H.**, *Sur les Propriétés des Fonctions Définies par des Equations aux Différences Partielles Thèse Inaugural*, Gauthier-Villars, Paris, (1879).
- Poincaré, H.**, *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*, Vol. I, Paris, (1892).
- Puralı, N.**, (2017). Günlük Ritmi Kontrol Eden Moleküler Mekanizmaların Keşfi Posterı, *Bilim ve Teknik*, Kasım, 600.
- Robinson, R.C.**, *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, (2004).
- Rordriguez-Perez, D., Sotolongo-Grau, O., Espinosa Riquelme, R., Sotolongo-Costa, O., Santos Miranda, J.A., Antoranz, J.C.**, (2007). Assessment of cancer immunotherapy outcome in terms of the immune response time features, *Math. Med. Biol.*, 24, 287-300.

- Ruan, S.**, (2001). Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator-prey systems with discrete delays, *Quart. Appl. Math.*, 59, 159-173.
- Schmielau, J., Finn, O.J.**, (2001). Activated granulocytes and granulocyte-derived hydrogen peroxide are the underlying mechanism of suppression of T-cell function in advanced cancer patients, *Cancer Research*, 61, 4756-4760.
- Seydel, R.**, *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Springer-Verlag, New York, (2010).
- Sezer, İ.Ç.**, (2017). Biyolojik saatin işleyişini çözenler nobel kazandı, *Bilim ve Teknik*, Kasım, 600.
- Shi, J.**, (2004). Partial Differential Equations and Mathematical Biology [Pdf uzantılı belge], <http://www.resnet.wm.edu/~Jxshix/math490/lecture-chap1.pdf>, alındığı tarih: 9 Şubat 2018.
- Sigerist, H.E.**, *The historical development of the pathology and therapy of cancer*, InE. F. Marti-Ibanez (Ed.), *On the history of medicine*. (Sf. 59-65), MD Publications Inc., New York, (1960).
- Singla, P.**, (2003). Notes on Normal Form, *Semantic Scholar*.
- Smith, H.**, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, *Texts in Applied Math*, 57, Springer-Verlag, New York, (2011).
- Song, Y., Wei, J.**, (2005). Local Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system, *J. Math. Anal. Appl.*, 301, 1-21.
- Stewart, J.**, *Calculus: Early Transcendentals*, 6e, Thomson Brooks/Cole, (2008).
- Strogatz, S.**, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Books Publishing, New York, (1994).
- Touzé, C.**, *Normal form theory and nonlinear normal modes: Theoretical settings and applications*, InE. G. Kerschen (Ed.), *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol 555, (Sf. 75-160), doi:[https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1791-0\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1791-0_3), Springer, Vienna, (2014).
- Townley, S., Ilchmann, A., Weib, M.G., McClements, W., Ruiz, A.C., Owens, D.H., Pratzel-Wolters, D.**, (2000). Existence and learning of oscillations in recurrent neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, 205-214, doi:10.1109/72.822523.
- Turing, A.M.**, (1952). The chemical basis of morphogenesis, *Philos. Trans. R. Soc., Ser. B*, 237, 37-72.

- Wiggins, S.**, *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos*, Springer-Verlag, New York, (2003).
- Wheldon, T.E.**, *Mathematical Models in Cancer Research*, Adam Hilger, Bristol, (1988).
- Wu, J.**, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1996).
- Villasana, M., Radunskaya, A.**, (2003). A delay differential equation model for tumor growth, *J. Math. Biol.*, 47, 270-294.
- Van Middendorp, J.J., Sanchez, G.M., Burridge, A.L.**, (2010). The Edwin Smith papyrus: a clinical reappraisal of the oldest known document on spinal injuries, *European Spine Journal*, 19(11), 1815-1823, <http://doi.org/10.1007/s00586-010-1523-6>.
- Volpert, V., Petrovskii, S.**, (2009). Reaction-diffusion waves in biology, *Phys Life Rev.*, 6(4), 267-310, doi: 10.1016/j.plrev.2009.10.002.
- Volterra, V.**, (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, *Nature*, 118, 558-560.
- Volterra, V.**, (1929). Sulle uttuazioni biologiche, *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 3(1), 154-174.
- Volterra, V.**, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, (1931).
- Yafia, R.**, (2007). Hopf Bifurcation in differential equations with delay for tumor-immune system competition model, *SIAM J. on Appl. Math.*, 67(6), 1693-1703.
- Yıldız, C.**, *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi, Ankara, (2005).
- Yi, F.Q., Wei, J.J., Shi, J.P.**, (2008). Diffusion-driven instability and bifurcation in the Lengyel-Epstein system, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 9(3), 1038-1051.
- Yi, F.Q., Wei, J.J., Shi, J.P.**, (2009). Global asymptotical behavior of the Lengyel-Epstein reaction-diffusion system, *Appl. Math. Lett.*, 22(1), 52-55.
- Yu, P., Leung, A.Y.T.**, (2003). The simplest normal form of Hopf bifurcation, *Nonlinearity*, 16, 277-300.
- Zuo, W., Wei, J.**, (2011). Stability and Hopf bifurcation in a diffusive predator-prey system with delay effect, *Nonlinear Anal. RWA.*, 12, 1998-2011, doi:10.1016/j.nonrwa.2010.12.016.
- Url-1** Jeremy John Gray, Henri Poincaré, <https://www.britannica.com/biography/Henri-Poincare>, alındığı tarih: 22 Şubat 2018.



- Url-2** <https://www.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth>, alındığı tarih: 10 Şubat 2018.
- Url-3** <http://www.wikizero.info/index.php?q=aHR0cHM6Ly9lbi53aWtpcGVkaWEub3JnL3dpa2kvRmljaydzX2xhd3Nfb2ZfZGlmZnVzaW9uI0ZpY2snc19maXJzdF9sYXc>, alındığı tarih: 9 Şubat 2018.
- Url-4** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a7dc130b5d5d9.16863145](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a7dc130b5d5d9.16863145), alındığı tarih: 9 Şubat 2018.
- Url-5** [https://evolutionnews.org/2016/11/pattern\\_formati/](https://evolutionnews.org/2016/11/pattern_formati/), alındığı tarih: 15 Şubat 2018.
- Url-6** <https://www.popmath.org.uk/rpamaths/rpampages/leopard.html>, alındığı tarih: 15 Şubat 2018.
- Url-7** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a7f2efa1bedb0.36036932](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a7f2efa1bedb0.36036932), alındığı tarih: 10 Şubat 2018.
- Url-8** <https://www.slideshare.net/prettygirll/genetik-szlk>, alındığı tarih: 6 Şubat 2018.
- Url-9** <http://www.wikizero.info/index.php?q=aHR0cHM6Ly90ci53aWtpcGVkaWEub3JnL3dpa2kvxLDFn19kw7ZuZ8O8c8O8>, alındığı tarih: 11 Şubat 2018.
- Url-10** <http://www.wikizero.info/index.php?q=aHR0cHM6Ly9lbi53aWtpcGVkaWEub3JnL3dpa2kvQ2VsbF9jeWNsZQ>, alındığı tarih: 11 Şubat 2018.
- Url-11** [https://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/medicine/laureates/2017/press.html](https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/2017/press.html), alındığı tarih: 15 Şubat 2018.
- Url-12** [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hopf\\_Eberhard.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hopf_Eberhard.html), alındığı tarih: 8 Nisan 2018.
- Url-13** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.59a282d2b749f1.05692535](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.59a282d2b749f1.05692535), alındığı tarih: 27 Ağustos 2017.
- Url-14** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a1559a6e14110.04644681](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a1559a6e14110.04644681), alındığı tarih: 22 Kasım 2017.
- Url-15** <https://medical-dictionary.thefreedictionary.com/effector+cell>, Farlex Partner Medical Dictionary (2012), alındığı tarih: 19 Kasım 2017.
- Url-16** <http://www.tipterimlerisozlugu.com/proliferation.html>, alındığı tarih: 22 Kasım 2017.
- Url-17** <http://www.acibadem.com.tr/Hayat/Bilgi/kanserle-savasta-yeni-bir-yontem-immunoterapi>, alındığı tarih: 21 Kasım 2017.
- Url-18** <http://www.tipterimlerisozlugu.com/immunosuppression.html>, alındığı tarih: 21 Kasım 2017.

- Url-19** <http://www.tipterimlerisozlugu.com/differentiation.html>, alındığı tarih: 22 Kasım 2017.
- Url-20** <http://www.math.psu.edu/tseng/class/Math251/Notes-Predator-Prey.pdf>, alındığı tarih: 7 Aralık 2017.
- Url-21** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a2ead22776c65.36226406](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a2ead22776c65.36226406), alındığı tarih: 11 Aralık 2017.
- Url-22** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a4f570eef0806.38810483](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a4f570eef0806.38810483), alındığı tarih: 5 Ocak 2018.
- Url-23** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a4f5714c059c3.05670065](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a4f5714c059c3.05670065), alındığı tarih: 5 Ocak 2018.
- Url-24** <http://www.turingarchive.org/browse.php/K/3>, alındığı tarih: 5 Ocak 2018.
- Url-25** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a4f5a893be8a4.78830026](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a4f5a893be8a4.78830026), alındığı tarih: 5 Ocak 2018.
- Url-26** Işıl Arıcan, Doğumunun 100. yılında unutulmuş bir dahi: Alan Turing, <http://www.acikbilim.com/2012/04/dosyalar/dogumunun-100-yilinda-unutulmus-bir-dahi-alan-turing.html>, alındığı tarih: 5 Ocak 2018.
- Url-27** <https://www.seslisozluk.net/steady%20state-nedir-ne-demek/>, alındığı tarih: 6 Ocak 2018.
- Url-28** <http://www.kanservakfi.com/kanser-nedir-108.html>, alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-29** <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs297/en/>, alındığı tarih: 11 Ocak 2018.
- Url-30** <https://www.thefreedictionary.com/gene+therapy>, American Heritage Dictionary of the English Language, Fifth Edition (2011), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-31** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59fd206ef5c9.86275639](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59fd206ef5c9.86275639), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-32** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59fdada4c6f0.64964298](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59fdada4c6f0.64964298), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-33** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59f62d6480a1.37670254](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59f62d6480a1.37670254), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-34** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59f62fa7cb51.78193824](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a59f62fa7cb51.78193824), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-35** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=4653](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=4653), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.

- Url-36** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=4663](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=4663), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-37** <http://ichastaliklariromatoloji.medicine.ankara.edu.tr/files/2014/02/%C4%B0mm%C3%BCn-Sistemin-Tan%C4%B1t%C4%B1m%C4%B1.pdf>, alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-38** <https://www.wikizero.com/tr/Makrofaj>, alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-39** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=11250](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=11250), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-40** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=9606](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=9606), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-41** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a5a30de5311c5.67187948](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a5a30de5311c5.67187948), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-42** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=2522](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=2522), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-43** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a5a37ec9949c0.38988979](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&arama=kelime&guid=TDK.GTS.5a5a37ec9949c0.38988979), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.
- Url-44** [http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=9620](http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_eczacilik&view=eczacilik&kategori1=yazimay&kelimesec=9620), alındığı tarih: 13 Ocak 2018.

## **EKLER**

**EK 1** : Bazı Temel Teoremler

**EK 2** : Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

**EK 3** : Biyoloji, Matematik ve Tıp Terimleri Sözlüğü



## EK 1: Bazı Temel Teoremler

### Divergence Teoremi . (Bayraktar, 2010)

$C, xy$  düzleminde parçalı düzgün, basit, kapalı ve pozitif yönlü bir eğri olsun.  $C$  nin dış birim normalini  $\mathbf{n}$  ve sınırladığı kapalı bölgeyi  $D$  ile gösterelim. Ayrıca

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

ve  $\mathbf{F} \in C^1(D)$  olsun. Bu takdirde,

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

olmak üzere

$$\oint_{C=\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dA$$

dır. Yani,  $\oint_{C=\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$  eğrisel integrali  $\mathbf{F}$  nin  $D$  bölgesinin dışına akısıdır ve bu akı,  $\operatorname{div}(\mathbf{F})$  nin  $D$  üzerinden integraline eşittir.

### Kapalı Fonksiyon Teoremi . (Bayraktar, 2010)

$U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  açık bir küme,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere  $(x_0, y_0) \in U$  olsun.  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

1.  $F(x_0, y_0) = 0$  dır.
2.  $F$  nin her mertebeden türevleri belli bir  $\delta_1 > 0$  için  $N_{\delta_1}(x_0, y_0)$  civarında sürekli, yani  $F \in C^\infty(N_{\delta_1}(x_0, y_0))$  dır.
3.  $\det(F_y(x_0, y_0)) \neq 0$  öyle ki  $F_y(x, y) = \left( \frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y_j} \right)$ ,  $1 \leq k, j \leq m$ .

Bu takdirde,

a)  $F(x, f(x)) \equiv 0$  olacak şekilde,  $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$  açık kümesinde tanımlı bir tek  $y = f(x)$  fonksiyonu vardır. (Yani  $x \in V$  için  $y = f(x)$ ,  $F(x, y) = 0$  m  $y$  ye göre çözümdür,  $y \in W \subset \mathbb{R}^m$ ,  $W$  açık bir kümedir).

b)  $y_0 = f(x_0)$  dır.

c)  $f \in C^\infty(V)$  ve  $x \in V$  için

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left( \frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$F_y(x, y) = \left( \frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y_j} \right), \quad 1 \leq k, j \leq m,$$

$$F_x(x, y) = \left( \frac{\partial F_k(x, y)}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq n$$

olmak üzere

$$\det(F_y(x, f(x))) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -[F_y(x, f(x))]^{-1} F_x(x, f(x))$$

dir.

**Poincaré-Bendixson Teoremi .** (Strogatz, 1994)

$x \in \mathbb{R}^2$  ve  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  olmak üzere

$$\dot{x} = f(x)$$

diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

1.  $R \subset \mathbb{R}^2$  kapalı ve sınırlıdır.
2.  $f$ ,  $R$  yi içeren açık bir kümede sürekli türevlenibildir.
3.  $R$  denge noktası içermez.
4.  $C$  yörüngesi,  $R$  de başlar ve  $t \rightarrow \infty$  iken  $R$  de kalır.

Bu takdirde,  $C$  yörüngesi kapalı bir yörüngedir veya  $t \rightarrow \infty$  iken sarmal bir hareketle kapalı bir yörüngeye yaklaşır. Her koşulda  $R$  bölgesi kapalı bir yörüngeye sahiptir.

**Riesz Temsil Teoremi .** (Bayraktar, 2006)

$H_1$  ve  $H_2$  iki Hilbert uzayı ve

$$\varphi : H_1 \times H_2 \rightarrow F$$

sınırlı bir  $s$ -lineer form olsun. Bu takdirde,  $\varphi(x, y) = \langle T(x), y \rangle$  olacak şekilde  $H_1$  uzayından  $H_2$  uzayına tanımlı bir  $T$  sınırlı lineer dönüşümü vardır. Ayrıca  $\|\varphi\| = \|T\|$  olup  $\varphi$  tarafından belirtilen bu  $T$  dönüşümü tektir.

## EK 2: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

<b>Türkçe terim</b>	<b>İngilizce Terim</b>
Akış	Flow
Ardışık	Recursive
Aşıkır Olmayan Denge Noktası	Nontrivial Equilibrium Point
Basamaksal Büyüklük	Order of Magnitude
Çatallanma	Bifurcation
Çekici	Attractive
Denge noktası	Equilibrium Point
Değişmez	Invariant
Düzgün	Smooth
Evolüsyon Operatörü	Evolution Operator
Gecikme	Delay
Gradyen	Gradient
Hassaslık Derecesi	Degree of Accuracy
Hastalık İçermeyen Denge Noktası	Disease-Free Equilibrium Point
Hiperbolik	Hyperbolic
Bağışıklık bilimi	Immunology
İzdüşüm	Projection
Kararlı Durum	Steady State
Kararlılık	Stability
Kararlılık Geçişi	Stability Switches
Karakteristik	Characteristic
Kesikli Gecikme	Discrete Delay
Kısıtlama	Restriction
Kompleks Devrik	Conjugate Transpose
Lineer	Linear
Manifold (Çok Katlı)	Manifold
Merkez Manifold	Center Manifold
Nitel	Qualitative
Özdeğer	Eigenvalue
Özuzay	Eigenspace
Özvektör	Eigenvector

**Türkçe terim****İngilizce Terim**

Sınırlı Değişim

Bounded Variation

Sırf Sanal

Purely Imaginary

Skaler Çarpım

Dot Product

Subkritik

Subcritical

Süperkritik

Supercritical

Süperpozisyon Prensibi

Principle of Superposition

Tek Katlı (Basit) Kök

Simple Root

Transandantal Denklem

Transcendental Equation

Transversalite (Kesme) Koşulu

Transversality Condition

Topolojik Olarak Denklik

Topologically Equivalent

Topolojik Olarak Eşlik

Topologically Conjugate

Uzaysal/Konumsal

Spatial

Uzaysal/Konumsal Olarak Homojen

Spatially Homogeneous

Yarı lineer

Quasilinear

Yerel (Lokal)

Local

Yerel Olarak Değişmez

Locally Invariant

Yerel Olarak Tanımlı

Locally Defined

Yön

Direction

Zamansal

Temporal

Zayıf Bir Şekilde Çekici

Weakly Attracting

Zayıf Bir Şekilde İtici

Weakly Repelling



### **EK 3: Biyoloji, Matematik ve Tıp Terimleri Sözlüğü**

**Akı** (Flux) Birim yüzeyden birim zamanda geçen (giren ve çıkan) madde ya da ışıının niceliği (Url-4).

**Antijen** (Antigen) Organizmada kendisine karşı bağışık cevap oluşturan ve bu cevap sonucu ortaya çıkan antikor ve duyarlı hücre almaçlarıyla özgül olarak birleşme özelliği gösteren bakteri, zehir, yabancı protein vb. maddeler, immünojen (Url-41).

**Antikor** (Antibody) Özel bir antijene cevap olarak B lenfositleri ve plazma hücreleri tarafından meydana getirilen ve bağışıklıktan sorumlu olan glikoprotein yapısındaki maddeler (Url-43).

**Bağışıklık Yanıt/İmmün Yanıt** (Immune Response) Yabancı madde ile karşılaşmada immün sistem hücre ve moleküllerinin karşılıklı ve düzenli etkileşimleriyle ortaya çıkan savunmadır (Url-37).

**Doğal Öldürücü Hücreler** (Natural Killer Cells) Sitotoksik T hücreleri gibi sitotoksikite yeteneği olan, ancak T hücresi antijen reseptörleri ve yüzey immünoglobulinleri taşımadıklarından dolayı ne T ne de B hücresi olmayan, özellikle bazı virüslerle enfekte olmuş hücreler ile tümör hücrelerini tanıyıp yok edebilen hücrelerin oluşturduğu lenfositlerin bir grubu (Url-42).

**Efektör Hücre** (Effector Cell) Belirli bir sürecin son cevabı veya işlevini yerine getiren bir hücre. Örneğin, bağışıklık sisteminin ana efektör hücreleri, aktive olmuş patojenlerin yok edilmesinde ve vücuttan çıkarılmasında rol alan lenfositler ve fagositlerdir (Url-15).

**Epidemiyoloji** (Epidemiology) Toplumda görülen hastalıkların nedenlerini, görülme sıklığı veya oranını, yayılışlarını, hastalıklara karşı alınacak önlem ve korunma yöntemlerini konu alan bilim alanı (Url-7).

**Faz Portresi** (Phase Portrait) Sistemin nitel olarak farklı olan bütün yörüngelerini gösteren şekil, faz portresi olarak adlandırılır (Strogatz, 1994).

**Genom** (Genome) 1-Prokaryot ya da ökaryot organizmalardaki genetik materyalin hepsi. 2-Bir gamette bulunan ve bir türe özgü en küçük sayıdaki bir seri kromozom, haploit sayıdaki kromozom. 3-Bireye bir veya her iki ebeveynden gelen gen takımı (Url-34).

**Gen Terapisi** (Gene Therapy) Gen terapisi, hastalığı tedavi etmek veya önlemek için genleri kullanan deneysel bir tekniktir. Bu teknik, gelecekte, doktorlara bir hastalığı ilaç veya ameliyat yerine, hastanın hücrelerine gen ekleyerek tedavi etme imkanı sunacaktır (Url-30).

**Hücre Farklaşması** (Differentiation of cells) Bir doku veya oluşumun yapı veya görev bakımından kendine has özellik taşıyacak şekilde gelişmesidir (Url-19).

**Hücrel Bağışıklık Yanıtı** (Cellular Immune Response) Vücuda giren mikroorganizmalar, tümör hücreleri veya aktarılan organ ve doku gibi antijenlere karşı T hücrelerinin gösterdiği tepkiye bağlı olarak gelişen bağışıklık türü (Url-35).

**Hümmoral Bağışıklık Yanıtı** (Humoral Immune Response) Vücuda giren antijenlere karşı B hücrelerinin oluşturduğu immünoglobulinler (antikorlar) aracılığıyla gerçekteşen bağışıklık türü (Url-36).

**İmmünoterapi** (Immunotherapy) Vücudun bağışıklık sistemini, kanserli hücelere karşı daha kesin, etkili ve daha güçlü saldırılar yapacak şekilde yükselterek kanserli hücelerin büyüme ve yayılmasını durdurmayı veya hücrenin tamamen ortadan kaldırılmasını amaçlayan tedavi yöntemi (Url-17).

**İmmünosupresyon** (Immunosuppression) Vücudun antijene karşı göstereceği cevabın önlenmesidir, özellikle doku implantasyonunda vücudun dokuyu kabullenmesi için bağışıklığın ortadan kaldırılmasıdır (Url-18).

**Kararlı Durum** (Steady State) Zaman içinde değişmeyen veya bir yöndeki değişikliğin sürekli olarak diğerinin değişimiyle dengelenmesine dayanan istikrarlı bir durum (Url-27). Burada zamana göre değişimin olmadığı çözümler kastedilmektedir.

**Kemoterapi** (Chemotherapy) Vücutta bulunan mikropları, organizmaya zarar vermeden kimyasal maddelerle öldürme veya üremelerine engel olma ve bu yolla hastalığı tedavi etme (Url-31).

**Makrofaj** (Macrophage) (Yunanca: "büyük-yiyiciler") dokularda bulunan patojenlerin, ölü hücelerin, hücre kalıntılarının ve vücuttaki yabancı maddelerin yutulmasından sorumlu hücelerdir. Makrofajlar doğuştan bağışıklık sisteminin bir bölümüdürler (Url-38).

**Makromolekül** (Macromolecul) Proteinler, polisakkaritler ve diğer doğal ve sentetik polimerlerde olduğu gibi birkaç binden milyona uzanan molekül ağırlılığına sahip çok büyük polimerik zincir yapısına sahip bir molekül (Url-33).

**Morfogenez** (Morphogenesis) 1-Bir canlının gelişmesi ya da ontogenisi sırasında büyüme ve hücre farklılaşması ile özel şeklini alması olayı. 2-Hücelerin embriyolojik olarak farklılaşması (Url-22).

**Morfojen** (Morphogen) Embriyonik dokularda bir konsantrasyon gradyeni oluşturarak gelişme sürecini başlatan bir protein (Url-8).

**Nispi Büyüme Oranı** (Relative Growth Rate) Bir popülasyonun büyüme oranının, o popülasyonun nüfus büyüklüğüne bölünmesi ile elde edilen değere denir (Stewart, 2008).

**Proliferasyon** (Proliferation) Özellikle hüceler için kullanılır. Çoğalma, artma anlamına gelir (Url-16).

**Radyoterapi** (Radiotherapy) Kanser gibi hastalıkların X ışınları ya da radyoaktif maddelerle tedavisi. (Url-32).

**Reaktant** (Reactant) Kimyasal reaksiyona dâhil olan bir molekül, reaktan (Url-25).

**Rejenerasyon** (Regeneration) Organizmada yıkılanmış doku ve hücelerin yerine aynı morfolojik yapıda ve aynı işlevi gören yeni bir dokunun meydana gelmesi (Url-23).

**Sitokin** (Cytokine) Yangısal ve bağışıklık ile ilgili yanıtla aracılık eden, farklı hücre türleri tarafından üretilen ve bağışıklık sisteminin hücreleri arasında iletişimi sağlayan proteinlerden herhangi biri (Url-40).

**Sitotoksik T hücresi** (Cytotoxic T cell) Sınıf I doku uygunluk kompleksi molekülleri tarafından sunulan, antijenik peptitler bulunan, özellikle virüslerle enfekte olmuş hücreleri öldürebilen ve üzerinde CD8 belirteci taşıyan T hücresi türü (Url-44).

**Terminal Dönem** (Terminal Period) Kanser ve artan fiziksel kısıtlanmalara karşın hastanın yaşam kalitesini korumak ve iyileştirmek amacıyla bütüncü bakımın süre geldiği ölüm öncesi dönemdir (Çavdar, 2011).

**Tümör** (Tumor/Tumour) Hücrelerin anormal çoğalmasıyla oluşan büyüme. Çoğalan hücreler ya o bölgede kalır (iyi huylu tümör) ya da çoğalmaya devam eden hücreler organizmanın diğer bölgelerine yayılarak metastaz yapar (habis tümör: kötü huylu tümör) (Url-14).

**Üstel/Lojistik Büyüme** (Exponential/Logistic Growth) Üstel büyümede, kişi başına düşen (kişi başına) büyüme oranı, nüfus büyüklüğüne bakılmaksızın aynı kalır ve böylece nüfus arttıkça daha hızlı ve daha hızlı büyür. Lojistik büyümede ise nüfus büyüklüğü, taşıma kapasitesi olarak bilinen çevre kaynaklarının azami miktarına yaklaştığında, nüfusun kişi başına büyüme oranı gittikçe küçülmektedir (Url-2).

**Yardımcı T hücresi** (Helper T cell) Bazı antijenlerle uyarıldığında T hücrelerinden oluşan, sitotoksik T hücrelerinin üretilmesine yardım eden, antikor yanıtının oluşmasında B hücreleri ile birlikte görev yapan, antjeni sınıf II doku uygunluk kompleksi moleküllerinin yardımıyla tanıyan ve üzerinde CD4 belirteci taşıyan T hücresi türü (Url-39).

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad** : Şeyma KAYAN  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 30.05.1987, Kayseri  
**E-posta** : seymabkayan@gmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2010, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2012, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik
- **Doktora** : 2018, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

### MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2010-2012	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2012-2017	TÜBİTAK	Yurtiçi Doktora Bursu
2012-2018	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Ar-Ge Burslu Doktora Öğrencisi
2012-2018	Çankaya Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

**YABANCI DİL:** İngilizce

## TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Kayan Ş.**, Merdan H., 2017. An algorithm for Hopf bifurcation analysis of a delayed reaction-diffusion model, *Nonlinear Dynamics*, 89, 345-366, doi: 10.1007/s11071-017-3458-5.
- **Kayan Ş.**, Merdan H., Yafia R., Göktepe S., 2017. Bifurcation analysis of a modified tumor-immune system interaction model involving time delay, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 12(5), 120-145, doi: <https://doi.org/10.1051/mmnp/201712508>.
- **Kayan Ş.**, Merdan H., Yafia R., Göktepe S., 2016. Hopf bifurcation in a reaction-diffusion tumor-immune competition model with discrete delay, *Fourth International Conference on Complex Dynamical Systems in Life Sciences: Modeling and Analysis (4thICCDs'2016)*, October 26-28, Ibn Zohr University, Agadir, Morocco.
- **Kayan Ş.**, Merdan H., 2017. An algorithm for Hopf bifurcation analysis of a delayed reaction-diffusion model, *International Symposium on Mathematical methods in Engineering (MME2017)*, April 27-29, Çankaya University, Ankara, Turkey.

## DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Merdan H., **Kayan Ş.**, 2015. Hopf bifurcations in Lengyel-Epstein reaction-diffusion model with discrete time delay, *Nonlinear Dynamics*, 79, 1757-1770, doi: 10.1007/s11071-014-1772-8.
- Merdan H., **Kayan Ş.**, 2016. Delay effects on the dynamics of the Lengyel-Epstein reaction-diffusion model. In: Luo, A.C.J., Merdan, H. (eds.) *Mathematical Modelling and Applications in Nonlinear Dynamics*, pp. 125-160, Springer, Switzerland.
- Merdan H., **Kayan Ş.**, 2013. Gecikme teriminin reaksiyon-difüzyon Lengyel-Epstein modeline etkisi, 8. Ankara Matematik Günleri, 13-14 Haziran, Çankaya Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Merdan H., **Kayan Ş.**, 2013. Effect of delay on the Lengyel-Epstein reaction-diffusion model, *6th International Workshop on Differential Equations*, September 11-14, İzmir Ekonomi University, İzmir, Turkey.
- Merdan H., **Kayan Ş.**, 2013. Effect of delay on the Lengyel-Epstein reaction-diffusion model, 2. Uluslararası Karmaşık Dinamik Sistemler ve Uygulamaları Çalıştayı, 24-26 Kasım, Işık Üniversitesi, İstanbul, Turkey.