TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİNİN TOPLAM SÜRECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Türkan Yeliz GÖKÇER

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

Ağustos 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142111006 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Türkan Yeliz GÖKÇER** 'in ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİNİN TOPLAM SÜRECİ"** başlıklı tezi **11.08.2016** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:	**Prof. Dr. Oktay DUMAN** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR(Başkan)** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI Ankara Üniversitesi	....

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Türkan Yeliz GÖKÇER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİNİN TOPLAM SÜRECİ

Türkan Yeliz GÖKÇER

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

Tarih: Ağustos 2016

Bu tezde, Bell tarafından tanımlanan genel bir toplam süreci kullanılarak sürekli fonksiyonlara pozitif fakat daha zayıf lineerlik koşulunu sağlayan maksimum-çarpım operatörleriyle yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu sayede, klasik yaklaşımın gerçeklenmediği durumlara da cevaplar aranmış, alternatif yaklaşım metodları elde edilmiştir. Burada elde edilen sonuçların klasik yakınsaklık, aritmetik ortalama yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık gibi bilinen pekçok regüler toplanabilme metodlarını içerdiği gösterilmiştir. Son olarak bu yaklaşımın hata tahmini hesaplanmış ve örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Toplam süreci, Maksimum-Çarpım operatörleri, Hata tahmini.

ABSTRACT

Master of Science

MAX-PRODUCT OPERATORS IN SUMMATION METHOD

Türkan Yeliz GÖKÇER

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Oktay DUMAN

Date: August 2016

In this thesis, with the help of a general summation method (process) introduced by Bell we study the approximation properties to non-negative continuous functions by max-product operators which are positive but have a weaker linearity condition. Thus, we also find solutions in case of the lack of classical approximation and drive some alternative approximation methods. We is shown that our results are included many known regular summability methods such as ordinary convergence, arithmetic mean convergence, almost convergence. Finally, its error estimation are computed and verified by some examples.

Keywords: Summation method, Max-product operators, Error estimate.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü Bölümü öğretim üyelerine ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.Son olarak da burs sağladığı için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Tezde kullandığımız simgeler dizini aşağıda listelenmektedir.

Simgeler	**Açıklama**
$\lvert A \rvert$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin $A-$ yoğunluğu
$st-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	(x_n) dizisinin istatistiksel limiti
$st_A-\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	(x_n) dizisinin $A-$istatistiksel limiti
$C[a,b]$	[a,b] kapalı aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_n^{(M)}(f;x)$	Maksimum-Çarpım Bernstein operatörü
V	Maksimum is
$C_1=(c_{jk})$	Cesàro matrisi
$\omega(f,\delta)$	Fonksiyonun süreklilik modülü
$L_n(f;x)$	Maksimum-çapım operatörünün genel formu
$Sh_n^{\lambda}(f;x)$	Shepard operatörleri

1. GİRİŞ

Korovkin tarafından 1950'li yıllarda, pozitif lineer operatörlerle sürekli fonksiyonlara yaklaşım problemi çalışılmıştır [23]. Korovkin tipinde yaklaşım teorisi olarak literatürde önemli bir yer tutan bu çalışma sahası, son yıllarda ve günümüzde geliştirilmeye devam etmektedir (bakınız ayrıca [1]). Şimdiye kadar operatörlerin pozitifliğini, lineerliğini ve yakınsaklığını zayıflatma yönünde çeşitli adımlar atılmıştır. Bu tez konusu daha çok yaklaşım operatörlerinin lineerliği ve yakınsaklığını zayıflatmak üzerine kurgulanmıştır. Lineerliğin zayıflatılması yönündeki ilk adımlar Bede ve arkadaşları tarafından başlatılmış ve bu alanda maksimum-çarpım ve maksimum-minimum tipinde yeni yaklaşım operatörleri inşa edilmiştir [6–14]. Yakınsaklığın zayıflatılması yönündeki adımlar ise istatistiksel yakınsaklık kullanılarak Gadjiev ve Orhan [21], A-istatistiksel yaklaşım ile Duman, Khan ve Orhan [18], Anastassiou ve Duman [3], Lorentz'in yakınsaklık metodu yardımıyla Nishishiraho [27] ve Swetits [29], Bell'in genel toplam süreci ile Mohapatra [26], Orhan ve arkadaşları [4, 5] tarafından incelenmiştir.

Maksimum-çarpım operatörlerinin istatistiksel yaklaşımı ilk kez 2010 yılında Duman [17] tarafından verilmiştir. Bu tez çalışmasında aynı operatörlerin yaklaşım özellikleri Bell tarafından verilen genel toplam süreci yardımıyla incelenecektir. Hemen belirtmeliyiz ki istatistiksel yaklaşım ile toplam süreçleri keyfi durumlarda birbirini gerektirmediğinden dolayı burada elde edeceğimiz sonuçlar özgün olup yaklaşımlar teorisine önemli bir katkı sağlamaktadır.

Bu tezde maksimum-çarpım operatörleriyle toplanabilme süreci kullanılarak sürekli fonksiyonlara yaklaşım problemi araştırılmıştır. Üsteki yaklaşımdaki hata oranı da süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır. Bu çalışmadaki yaklaşım sonuçları klasik yakınsaklığın gerçeklenmediği durumlara cevap verdiği gibi hemen hemen yakınsalık ve aritmetik ortalama yakınsaklık (Cesàro yakınsaklık) gibi bilinen pek çok regüler toplanabilme metodunu da içermektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu başlıkta İstatistiksel yakınsaklık kavramı daha sonrasında A-istatistiksel yakınsaklık ve son olarak da çalışmamızda kullandığımız toplanabilme metodu kavramlarına değinilecektir. Ayrıca hata tahmininde önemli rol oynayan süreklilik modülü kavramı ve onun özellikleri hatırlatılacaktır.

2.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Yoğunluk kavramını hatırlayarak başlayalım.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ tanımlansın. K kümesinin eleman sayısıda $|K|$ ile gösterelim.

Tanım 2.1.1. *Bir $K \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi verilsin. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|K_n|$$

mevcutsa buna K nın "yoğunluğu" adı verilir ve $\delta(K)$ sembolüyle gösterilir [28].

Bu tanıma göre $\delta(\mathbb{N}) = 1$ olup doğal sayıların tüm sonlu elemanlı alt kümelerinin 0 yoğunluklu olduğu görülebilir. Ayrıca tek sayılar ve çift sayılar kümelerinin yoğunlukları $\delta(\{2k-1 : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ ve $\delta(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olup, asal sayılar ve tam karelerin oluşturdukları kümelerin 0 yoğunluklu olduğu bilinmektedir [28].

İstatistiksel yakınsaklık kavramı yoğunluk tanımından yararlanılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(x_k) bir sayı dizisi olsun.

$$\delta(\{k : |x_k - L| \geqslant \varepsilon\}) = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

koşulu gerçekleniyorsa, (x_k) L ye “istatistiksel yakınsaklıktır" adı verilir ve bunu

$$st - \lim_{k} x_k = L$$

şeklinde yazarız [19].

Aslında bir dizinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması onun 1 yoğunluklu bir indis kümesi üzerinde klasik anlamdaki L yakınsaklığa denktir.

Dolayısıyla istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha geneldir. Yani her yakınsak dizi istatistiksel yakınsaktır ama bunun tersi genelde doğru değildir. Bu duruma bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.1. (x_k) dizisinin genel terimi

$$x_k := \begin{cases} \frac{2k+1}{k+2} & k = m^2 \\ 0 & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Tanımdan kolayca görüleceği üzere $st - \lim_{k\to\infty} x_k = 0$ olup (x_k) dizisi istatistiksel yakınsaktır ama klasik anlamda yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsaklık ile klasik yakınsaklık arasındaki önemli bir diğer farklılık ise sınırlılıktır. Yakınsak bir dizi sınırlıdır ama istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Bu durum aşağıda verilen örnekle gösterilmektedir.

Örnek 2.1.2. Genel terimi

$$x_k := \begin{cases} \sqrt[3]{k} & k = m^3 \\ 0 & k \neq m^3 \end{cases}$$

ile tanımlanan (x_k) dizisi göz önüne alalım. $st - \lim_{n\to\infty} x_k = 0$ olup (x_k) istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir.

2.2 İstatistiksel Yakınsaklığın Genel Hali

Bu bölümde A-dönüşüm dizisinden, regülerlik kavramından ve A-istatistiksel yakınsaklık kavramlarından bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1. *(x_n) dizisi ve $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin. Bu durumda*

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

ile tanımlanan diziye (x_n) nin "A-dönüşüm dizisi" denir. Yukarıdaki serinin her n için yakınsak olduğu varsayılmaktadır. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ iken $\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = L$ koşulu sağlanıyorsa, A matrisine 'regüler matris' denir [16, 22].

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması aşağıda verilen Silverman Toeplitz koşullarının sağlanmasıyla gerçeklenir.

Teorem 2.2.1. *$A = (a_{nk})$ matrisinin regülerdir $\Leftrightarrow$*

1. $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, a_k := \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0,$
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 0.$

(bkz. [22, 25]).

$C_1 = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \le k \le n \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlanıp C_1 Cesàro matrisi olarak adlandırılır. Cesàro matrisinin ve I birim matrisinin regüler bir matris oldukları yukarıdaki teoremden kolayca görülebilir.

A-yoğunluk kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Burada $A = (a_{nk})$ matrisinin negatif olmayan regüler bir matris olduğunu kabul edelim.

Tanım 2.2.2. *$K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için*

$$\delta_A(K) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} a_{nk}$$

limitinin mevcut olması durumunda bu değere K nın “A-yoğunluğu" adı verilir [20].

Tanım 2.2.3. $K(\varepsilon) := \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}(\varepsilon > 0)$ *şeklinde tanımlandığında*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0$$

gerçeklenirse ya da eşdeğer olarak, $\forall \varepsilon > 0$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:|x_k-L|\geq\varepsilon}^{\infty} a_{nk} = 0$$

oluyorsa, (x_k) *L ye “A-istatistiksel yakınsaktır" adı verilir ve*

$$st_A - \lim_{k\to\infty} x_k = L$$

şeklinde gösterilir [20].

Bu tanımda

- A matrisi yerine özel olarak C_1 Cesàro matrisi alınırsa, A-istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.

- Klasik yakınsaklıklığın elde edilebilmesi için A yerine birim matrisi almak yeterlidir.

Dolayısıyla, A-istatistiksel yakınsaklık kavramı istatistiksel yakınsaklık ve klasik anlamdaki yakınsaklığın genel halidir.

2.3 Toplanabilme Metotları ve Toplam Süreci

Bu bölümde aritmetik ortalama yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık gibi bilinen bazı toplanabilme metotları ile bunlardan daha genel olan toplam süreci kavramına yer vereceğiz.

Aritmetik ortalama yakınsaklık kavramıyla başlayalım.

Tanım 2.3.1. (x_n) *reel terimli bir dizi olmak üzere* $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ *dizisi için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$$

olacak şekilde L $\in \mathbb{R}$ *sayısı varsa* (x_n) *dizisi L sayısına "aritmetik ortalama yakınsaktır" (Cesàro yakınsaktır) denir [22, 25] .*

Aşağıdaki teoremle aritmetik ortalama yakınsaklıkla, klasik yakınsaklık arasındaki bağlantı ifade edilmektedir.

Teorem 2.3.1. (x_n) *reel bir dizi olmak üzere* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ *ise*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = L$$

olur; yani yakınsak her dizi aynı sayıya aritmetik ortalama yakınsaktır.

Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani bir dizinin aritmetik ortalama yakınsak olması demek onun klasik anlamda yakınsak olmasını gerektirmez. Buradan aritmetik ortalama yakınsaklığın bilinen anlamda yakınsaklıktan daha zayıf bir kavram olduğu görülür. Bu duruma örnek olarak;

Örnek 2.3.1.

$$x_n := \begin{cases} 0, & n \quad \text{tek} \quad \textit{ise} \\ 2, & n \quad \text{çift} \quad \textit{ise} \end{cases}$$

dizisi göz önüne alınsın. Bu dizinin alt dizileri $n \to \infty$ iken farklı iki noktaya yakınsadığından (x_n) dizisi yakınsak değildir. Buna rağmen bu dizinin aritmetik ortalaması

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j := \begin{cases} \frac{n-1}{n}, & n \quad \text{tek} \quad \textit{ise} \\ 1, & n \quad \text{çift} \quad \textit{ise} \end{cases}$$

olup, $n \to \infty$ iken (x_n) dizisi 1 sayısına aritmetik ortalama yakınsaktır.

Aritmetik ortalama yakınsak diziler sınırlı olmak zorunda değildir. Buna örnek olarak;

Örnek 2.3.2.

$$x_n := \begin{cases} \sqrt[3]{n^2}, & n = s^3 \quad (s \in \mathbb{N}) \quad ise \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\forall n$ için $s^3 \leqslant n < (s+1)^3$ olacak şekilde $\exists s \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s^3} x_j$$

yazılabilir. Çünkü s^3 ten n ye kadar olan dizinin terimleri tanım gereği sıfırdır. Şimdi yukarıdaki eşitlik düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s^3} x_j &= \frac{x_1 + \ldots + x_{s^3}}{n} \\ &= \frac{1 + 2^2 + \ldots + s^2}{n} \\ &= \frac{s(s+1)(2s+1)}{6n} \end{aligned}$$

yazılabilir. $s^3 \leqslant n < (s+1)^3$ eşitsizliği kullanılarak ;

$$\frac{s(s+1)(2s+1)}{6n} \leq \frac{s(s+1)(2s+1)}{6s^3} \tag{2.1}$$

ve

$$\frac{s(s+1)(2s+1)}{6n} > \frac{s(s+1)(2s+1)}{6(s+1)^3} \tag{2.2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Şimdi de (2.1) ve (2.2) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\frac{s(s+1)(2s+1)}{6(s+1)^3} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \leq \frac{s(s+1)(2s+1)}{6s^3} \tag{2.3}$$

elde edilir ve $n \to \infty$ iken $s \to \infty$ olduğundan dolayı (x_n) dizisi $\frac{1}{3}$ değerine aritmetik ortalama yakınsaktır ama sınırlı değildir.

Şimdi Lorentz tarafından verilen hemen hemen yakınsaklık kavramını hatırlatacağız.

Tanım 2.3.2. *(x_n) reel terimli bir dizi olmak üzere $c_\upsilon^n := \frac{1}{n}\sum_{j=\upsilon}^{n+\upsilon-1} x_j \quad (\upsilon, n \in \mathbb{N})$ şeklinde tanımlansın. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} c_\upsilon^n = L(\upsilon \quad \textit{ye göre düzgün})$$

olacak şekilde $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi L sayısına "hemen hemen yakınsaktır" (almost mean convergence) denir [*24*].

Hemen hemen yakınsak dizilerin sınırlılığı aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 2.3.2. *(x_n) reel terimli bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi hemen hemen yakınsak ise*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < M$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır; yani hemen hemen yakınsak diziler sınırlıdır.

Ayrıca biliyoruz ki yakınsak her dizi aynı limit değerine hemen hemen yakınsaktır fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

Şimdi de Bell tarafından verilen ve çalışmamızda esas olarak kullanacağımız toplam süreci kavramına değinelim.

Tanım 2.3.3. *$\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{a_{nk}^{\upsilon}\}(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ reel terimli matrislerin bir dizisi olsun. $x := (x_n)$ dizisi için*

$$t_n^{\upsilon} := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} x_k$$

dizisi $n \to \infty$ iken bir L sayısına υ ye göre düzgün yakınsıyorsa (x_k) dizisi L sayısına "$\mathscr{A}$-toplanabilirdir" denir, burada serinin her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için yakınsak olduğu kabul edilmektedir ve

$$\mathscr{A} - \lim x = L$$

şeklinde gösterilir [15].
Burada υ ye göre düzgün derken

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\upsilon \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} x_k \right) = L$$

olduğu kastedilmektedir.

- A^{υ} matrisi yerine I matrisi alındığında $\mathscr{A}$-toplanabilme klasik anlamda yakınsaklığa dönüşür.

- A^{υ} matrisi yerine C_1 yani Cesàro matrisi alındığında $\mathscr{A}$-toplam süreci aritmetik ortalama yakınsaklığa dönüşür.

- A^{υ} yerine $F^{\upsilon} = (c_{nk}^{\upsilon}) = \begin{cases} \frac{1}{n}; & 1 \le k \le n+\upsilon-1 \\ 0 & \text{d.d} \end{cases}$ olarak tanımlanan matris ailesi alındığında da hemen hemen yakınsaklık kavramı elde edilir.

- Toplam süreci için geçerli olan durumlar özel halde klasik anlamda yakınsaklık, aritmetik ortalama yakınsaklık ve hemen hemen yakınsaklık için de geçerlidir.

$\mathscr{A}$-toplanabilirlik ve A-istatistiksel yakınsaklık birbirini gerektirmeyen kavramlardır. Bunu aşağıdaki örneklerde görebiliriz.

Örnek 2.3.3. $(x_n) = \left((-1)^n \frac{3n}{n+2}\right)$ dizini ele alırsak ve $A^{\nu} = C_1$ Cesàro matrisi alınırsa, (x_n) dizisinin 0 a aritmetik ortalama yakınsak olduğu görülür. Fakat (x_n) dizisi, A-istatistiksel yakınsak değildir çünkü 3 ve -3 değerlerine yakınsayan alt dizileri $\frac{1}{2}$ yoğunluğa sahiptir.

Örnek 2.3.4. $A^{\nu} = C_1$ alınırsa ve (x_n) dizisi

$$x_n := \begin{cases} n, & n = s^3 \quad ise \\ 0, & n \neq s^3 \quad ise \end{cases} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu dizinin 0'a istatistiksel yakınsak olduğu görülür. Fakat bu dizinin aritmetik ortalama yakınsak olmadığı aşağıda gösterilmiştir. $s^3 \le n < (s+1)^3$ olduğu kullanılarak

$$\frac{1}{(s+1)^3}\sum_{j=1}^{n} x_j \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

eşitsizliği yazılır.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^2$$

sağlandığından yukarıdaki eşitsizliğin sol kısımında yerine yazılır ve $s \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s^2(s+1)^2}{4(s+1)^3} = \infty$$

olur. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \infty$ elde edilir.

Tanım 2.3.4. *$\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}(k,n,\upsilon \in \mathbb{N})$ toplanabilme metodu verilsin. Eğer $\lim_{n\to\infty}(x_n) = L$ iken (x_n) dizisi L ye $\mathscr{A}$-toplanabiliyorsa; $A = \{A^{\upsilon}\}$ metoduna "regülerdir" denir [16] .*

Teorem 2.2.1'e benzer bir sonuç $\mathscr{A}$-toplam süreci için Bell tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 2.3.3. *$\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{(a_{nk}^{\upsilon})\}$ metodu regülerdir $\Leftrightarrow$*

1. *$\forall k = 1,2,\ldots$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk}^{\upsilon} = 0$ (υ ye göre düzgün)*
2. *$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} = 1$ (υ ye göre düzgün)*
3. *$\forall n, \upsilon = 1,2,\ldots,$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{\upsilon}| < \infty$ ve $n \geqslant N$ için ve $\forall \upsilon = 1,2,\ldots,$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{\upsilon}| < M$ olacak şekilde N, M pozitif tam sayılar vardır.*

(bkz. [16]).

2.4 Süreklilik Modülü

Bu bölümde yaklaşım operatörlerinin hata tahmininde kullanılan ve süreklilik modülü kavramına ve onun önemli özelliklerine yer vereceğiz.

Tanım 2.4.1. *(X,d) kompakt metrik uzay olsun ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. O halde $\omega(f,.) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)| u, v \in X \quad ve \quad d(u,v) \leqslant \delta\}$$

olacak şekilde fonksiyonun süreklilik modülü tanımlanır [2].

Teorem 2.4.1. *Süreklilik modülünün bazı temel özellikleri [2] aşağıdaki gibidir;*

1) Herhangi bir $u, v \in X$ için $|f(u) - f(v)| \leqslant \omega(f, d(u,v))$;

2) $\omega(f,\delta)$, δ ya göre azalmayandır.

3) Herhangi bir $\delta \in [0,\infty)$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,k\delta) \leqslant k\omega(f,\delta)$

4) Herhangi bir $\delta, \mu \in [0,\infty)$ *için* $\omega(f,\mu\delta) \leqslant (\mu+1)\omega(f,\delta)$

5) f *fonksiyonu X üzerinde süreklidir gerek ve yeter şart* $\lim_{\delta\to 0^+}\omega(f,\delta)=0$ *dır.*

Bu özelliklerin ispatı mutlak değer metriği için yapılmış olan ispatlarda mutlak değer metriği yerine d metriği alınarak verilir.

1) $u \neq v$ ise süreklilik modülünün tanımından

$$w(f,d(u,v)) = \sup\{|f(x)-f(y)|; \quad x,y\in X \quad d(x,y)\leq d(u,v)\}$$

sağlanır. Burada özel olarak $x=u \quad ve \quad y=v$ olarak alınırsa;

$$|f(u)-f(v)| \leqslant w(f,d(u,v))$$

elde edilir.

2) $0<\delta_1\leq\delta' \Rightarrow w(f,\delta_1)\leq w(f,\delta')$ dır. Supremum tanımından δ arttıkça supremum büyür.

3) $d(u,v)\leq k\delta$ olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığında $u<v$ verilsin. $[u,v]$ aralığını boyları δ yı geçmeyecek şekilde k parçaya ayırılsın. $\forall m=1,2,\ldots,k$ için $d(u_m,u_{m-1})\leq\delta$ dır. O halde $|f(u_m)-f(u_{m-1})|\leq w(f,\delta)$ dır. $d(u,v)\leq k\delta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|f(u)-f(v)| &= \left|\sum_{m=1}^{k}(f(u_m)-f(u_{m-1}))\right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{k}|f(u)-f(m)| \\ &= kw(f,\delta)\end{aligned}$$

üzerinden supremum alınırsa sonuç elde edilir.

4) $k-1<\mu\leq k$ olacak şekilde $k\in\mathbb{N}$ vardır. O halde

$$w(f,\mu\delta)\leq w(f,k\delta)\leq kw(f,\delta)<(\mu+1)w(f,\delta)$$

yazılabilir.

5) f X üzerinde sürekli ve (X,d) kompakt olduğundan f düzgün süreklidir. O halde

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ni d(u,v)\leq\delta \text{olacak şekildeki} \forall u,v\in X \quad \text{için} \quad |f(u)-f(v)|<\varepsilon$$

olur. Son eşitsizlikte $d(u,v)\leq\delta$ üzerinden supremum alınırsa $0\leq\omega(f,\delta)\leq\varepsilon$ ifadesi elde edilir ve $\lim\limits_{\delta\to0^+} w(f,\delta)=0$ olur ve ispatın ilk kısmı tamamlanır. İspatın ikinci kısmında limit tanımından

$$\forall\varepsilon>0,\exists\varphi>0\ni 0<\delta<\varphi$$

için $w(f,\delta)<\varepsilon$ dur. Buradan

$$\sup\{|f(u)-f(v)|:u,v\in X ve d(u,v)\leq\delta\}\leq\varepsilon$$

olur. Eğer $d(u,v)\leq\delta\Rightarrow|f(u)-f(v)|<\varepsilon$ olup f düzgün süreklidir.

Bu özelliklerden bazıları sonraki bölümlerde elde edilen sonuçların ispatlarında kullanılacaktır.

2.5 Maksimum-Çarpım Operatörleri

Korovkin teorisindeki yaklaşım operatörlerinin lineerliğini zayıflatmak üzere Bede ve arkadaşları aşağıda tanımlanan maksimum-çarpım operatörlerini göz önüne almıştır. Bu bölümde, bu yaklaşım operatörlerinin bilinen temel özellikleri üzerinde duracağız. Bir sonraki bölümde de bunların $\mathscr{A}$-toplam süreci altındaki yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. [13]

Şimdi (X,d) kompakt metrik uzay olmak üzere $C(X,[0,+\infty))$, X üzerinde sürekli pozitif olmayan reel-değerli fonksiyonların kümesini göstersin. $f\in C(X,[0,+\infty))$ fonksiyonu ve $x_i\in X(i=0,1,\ldots,n)$ noktaları verilsin.

Maksimum-çarpım yaklaşımının genel formu

$$L_n(f,x)=\bigvee_{i=0}^{n}K_n(x,x_i).f(x_i) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada her bir $n\in\mathbb{N} \quad ve \quad i=0,1,\ldots,n \quad \text{için} K_n(.,x_i)\in C(X,[0,+\infty))$

tanımlanan sürekli fonksiyonlardır.

(2.5) operatörleri pozitiftir fakat lineer değildir. Onun yerine aşağdaki gibi pseudo-lineerlik adını verdiğimiz koşulu sağlar.

$$L_n(\alpha.f \vee \beta.g) = \alpha.L_n(f) \vee \beta.L_n(g) \tag{2.6}$$

Bu eşitlik, $\forall f, g \in C(X, [0, \infty))$ ve herhangi bir negatif olmayan α, β sabitleri için gerçeklenir [13].

2.5 formundaki operatörlere örnek olarak maksimum-çarpım Shepard operatörü Bede ve arkadaşları [13] tarafından tanımlanmıştır. Bunun için öncelikle Shepard ağırlık fonksiyonu tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$K_{n,\lambda}(x, x_i) = \frac{\frac{1}{d(x,x_i)^\lambda}}{\bigvee_{j=0}^{n} \frac{1}{d(x,x_i)^\lambda}}, \quad x \notin \{x_0, \ldots, x_n\} \quad ise \tag{2.7}$$

ve $K_{n,\lambda}(x, x_i) = \delta_{i,j}, i, j = 0, \ldots, n, n \leqslant 1$ ve $\lambda \leqslant 1$ olacak şekilde bir sabittir. Buradan maksimum-çarpım Shepard operatörü şu şekildedir:

$$Sh_n^\lambda(f, x) = \bigvee_{i=0}^{n} K_{n,\lambda}(x, x_i).f(x_i) = \frac{\bigvee_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{d(x,x_i)^\lambda}}{\bigvee_{j=0}^{n} \frac{1}{d(x,x_i)^\lambda}}, \quad x \notin \{x_i : i = 0, \ldots, n\} \quad ise \tag{2.8}$$

ve $i = 0, \ldots, n$ için $Sh_n^\lambda(f, x_i) = f(x_i)$ olur.

Shepard operatörlerinin aşağıdaki yaklaşım özellikleri bilinmektedir.

Teorem 2.5.1. *$f \in C(X, [0, \infty))$ fonksiyonu verilsin ve $x_i \in X, i \in \{0, \ldots, n\}$ olacak şekilde sabit noktalar olsun. $\lambda \leqslant 1$ olacak şekilde (2.8) de tanımlı olan $Sh_n^\lambda(f, x)$ Shepard operatörleri için $x \in X$ ve $m \in \mathbf{N}$ olmak üzere aşağıdaki hata tahmini geçerlidir.*

$$|Sh_n^\lambda(f, x) - f(x)| \leqslant \left(m \bigwedge_{i=0}^{n} d(x, x_i) + 1 \right).w\left(f, \frac{1}{m}\right)$$

Üstelik, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{0, \ldots, n\}$ olacak şekilde x_i noktaları vardır ve bu noktalar kullanılarak tanımlanan $Sh_n^\lambda(f, x)$ operatörü için $|Sh_n^\lambda(f, x) - f(x)| < \varepsilon$ (her $x \in X$) elde edilir [13, 14].

Teorem 2.5.2. *$f:[0,1]\to[0,\infty)$ olan sürekli fonksiyon ve $x_i=\frac{i}{n}, i=0,\ldots,n, n\leqslant 1, \lambda\leqslant 1$ olarak alınsın. O halde (2.8) deki gibi verilen $Sh_n^{\lambda}(f,x)$ ile f fonksiyonuna yaklaşım hatası için $x\in[0,1]$ olduğunda*

$$|Sh_n^{\lambda}(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{3}{2}w(f,\frac{1}{n})$$

elde edilir [13, 14].

Yukarıda Bede ve arkadaşları tarafından özel halde elde edilen teoremlerin genel hali, maksimum-çarpım operatörlerinin A-istatistiksel yakınsaklığı ile 2010 senesinde Duman [17] tarafından verilmiştir.

(2.5) de verilen maksimum-çarpım operatörü için aşağıdaki koşulun sağlandığını kabul edelim.

$$\delta_A\left(\left\{n\in\mathbf{N}:\bigvee_{k=0}^{n}K_n(x,x_k)=1\right\}\right)=1,\quad x\in X. \tag{2.9}$$

Buna göre aşağıdaki teorem bilinmektedir.

Teorem 2.5.3. *(X,d) keyfi kompakt bir metrik uzay, $A=(a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer, (2.9) sağlanırsa ve*

$$st_A-\lim_n\left\{\bigvee\{|L_n(\varphi_x;x)|:x\in X\}\right\};\quad \varphi_x(y)=d^2(y,x)$$

koşulu gerçeklenirse, bu durumda $\forall f\in C(x,[0,\infty))$ için

$$st_A-\lim_n\left\{\bigvee\{|L_n(f;x)-f(x)|:x\in X\}\right\}=0$$

olur [17].

Şimdi de Teorem 2.5.3 deki A-istatistiksel yakınsaklık oranlarının hesaplanmasından bahsedilecektir. Teoremi vermeden önce A-istatistiksel yakınsaklık oran kavramı hatırlatılacaktır. $A=(a_{jn})$ bir negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun ve $(p_n)_n\in\mathbb{N}$ reel sayıların pozitif artmayan dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\lim_j\frac{1}{p_j}\sum_{n:|x_n-L|\leqslant\varepsilon}a_{jn}=0 \tag{2.10}$$

gerçekleniyorsa, $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi L ye $o(p_n)$ oranında A-istatistiksel yakınsak bir dizi adı verilir [17]. Bu durumda $n\to\infty$ iken $x_n - L = st_A - o(p_n)$ şeklinde yazılır.

Teorem 2.5.4. *(X,d) keyfi bir kompakt metrik uzay ve $A=(a_{jn})$ regüler bir toplanabilme matrisinin negatif olmayan terimli olduğunu kabul edelim. (p_n) dizisinin pozitif reel sayıların artmayan bir dizisi olsun. Eğer L_n (2.5) ve (2.9) ile verilen L_n maksimum-çarpım operatörlerinin*

$$\omega(f,\delta_n) = st_A - o(p_n), \quad n\to\infty, \quad f\in C(X,[0,\infty)) \tag{2.11}$$

koşulunu gerçeklediğini kabul edelim; burada

$$\delta_n := \sqrt{\bigvee\{|L_n(\varphi_x;x)| : x\in X\}} \quad \varphi_x(y) = d^2(y,x) \tag{2.12}$$

ile verilmektedir. Bu durumda $\forall n$ için $(q_n)\geqslant(p_n)$ koşulunu gerçekleyen pozitif reel sayıların artmayan herhangi bir (q_n) dizisi için

$$\bigvee\{|L_n(f;x)-f(x)| : x\in X\} = st_A - o(q_n) \quad n\to\infty \tag{2.13}$$

elde edilir [17].

Teorem2.5.3 ve Teorem2.5.4'te A yerine birim matris alırsak alışılmış yakınsaklık sonucuna ulaşılır. Eğer A matrisi Cesàro matrisi ile yer değiştirilirse bu durumda da istatistiksel yaklaşım sonucu bulunur. Bir sonraki bölümde, maksimum-çarpım opratörlerinin toplam sürecini inceleyeceğiz ve elde edilen sonuçların, A-istatistiksel yakınsaklık için elde edilen sonuçlardan farklı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için aşağdaki lemmalardan yararlanacağız.

Lemma 2.5.1. *Herhangi a_k, b_k, $(k=0,1,\ldots,n)$ negatif olmayan sayıları verildiğinde*

$$\left|\bigvee_{k=0}^{n} a_k - \bigvee_{k=0}^{n} b_k\right| \leqslant \bigvee_{k=0}^{n} |a_k - b_k|$$

olur [13].

Lemma 2.5.2. *Herhangi a_k, b_k, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ negatif olmayan sayıları verildiğinde*

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} {a_k}^2} \sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} {b_k}^2}$$

gerçeklenir [17] .

3. MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde temel kavramlarda verilen genel toplanabilme metodu yardımı ile lineerlik şartı zayıflatılmış maksimum çarpım opeartörlerini kullanarak sürekli fonsiyonlara yaklaşım yapılacak ve bu yaklaşımın hata tahmini süreklilik modülü kullanılarak hesaplanacaktır.

3.1 Toplam Süreciyle Yaklaşım

Bu bölümde aksi söylenmediği sürece $\mathscr{A} = \{A^{\nu}\} = \{[a_{nk}^{\nu}]\}$ metodunun negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 3.1.1. *(2.5) ile verilen L_n operatörü*

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{\nu} L_n(e_0) - e_0\right\| = 0, \quad (\nu \quad \text{ye göre düzgün}) \tag{3.1}$$

ve

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{\nu} L_n(\varphi_x)\right\| = 0, \quad (\nu \quad \text{ye göre düzgün}) \tag{3.2}$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda $\forall f \in C(X,[0,\infty))$ için

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f) - f\right\| = 0,$$

elde edilir. Başka bir deyişle $\{L_n(f)\}$ dizisi f ye X üzerinde A-toplanabilirdir.

Ispat. $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ olsun. Operatörün tanımı ve Lemma 2.5.1 kullanılarak, $\forall j,\nu \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f;x) - f(x)\right| &= \sum_{k=1}^{\infty}\left|\bigvee_{k=0}^{n} K_{n,k}(x).f(x_{n,k}) - \bigvee_{k=0}^{n} K_{n,k}(x).f(x)\right| \\
&\quad + |f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} \bigvee_{k=0}^{n} K_{n,k}(x) - 1\right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} \bigvee_{k=0}^{n} K_{n,k}(x).\left|f(x_{n,k}) - f(x)\right| \\
&\quad + |f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(e_0;x)) - e_0(x)\right|
\end{aligned}$$

bulunur. f fonksiyonu kompakt bir X kümesi üzerinde sürekli ve dolayısıyla düzgün sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ bulunur $\ni$ $\forall x, x_k \in X$ için

$$|f(x_{n,k}) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|}{\delta^2}\varphi_x(x_{n,k})$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f;x) - f(x)\right| &\leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(e_0;x) + \frac{2\|f\|}{\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(\varphi_x;x) \\
&\quad + |f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(e_0;x)) - e_0(x)\right| \\
&\leqslant \varepsilon + (\varepsilon + \|f\|)\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(e_0;x)) - e_0(x)\right| \\
&\quad + \frac{2\|f\|}{\delta^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(\varphi_x;x)\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafında $x \in X$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f) - f\right\| &\leqslant \varepsilon + (\varepsilon + \|f\|)\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(e_0)) - e_0\right| \\
&\quad + \|f\|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(\varphi_x)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ifadenin $j \to \infty$ için (ν ye göre düzgün)limiti alınır ve (3.1), (3.2) de kullanılırsa ispat tamamlanır.

3.2 Yaklaşımdaki Hata Tahmini

Bu bölümde Teorem 3.1.1 deki toplam sürecinin hata tahmini incelenecektir.

Teorem 3.2.1.

$$\delta_j^{\nu} := \sqrt{\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(\varphi_x) \right\|} \quad (j, \nu \in \mathbb{N})$$

olmak üzere $\forall f \in (C(X,[0,\infty)))$ *için*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f) - f \right\| \leqslant w(f,\delta_j^{\nu}) &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) \right\| \\ &+ w(f,\delta_j^{\nu}) \sqrt{\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) \right\|} \\ &+ \|f\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) - e_0 \right\| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ispat. $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ verilsin. O halde Teorem 3.1.1'in ispatında olduğu gibi herhangi $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f;x) - f(x) \right| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} \bigvee_{k=0}^{\nu} K_{n,k}(x).|f(x_{n,k}) - f(x)| \\ &\quad + |f| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) - e_0 \right| \\ &\leqslant w(f,\delta_j^{\nu}) \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} \bigvee_{k=0}^{\nu} K_{n,k}(x).\left(1 + \frac{d(x_{n,k},x)}{\delta}\right) \\ &\quad + |f| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) - e_0 \right| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f;x) - f(x) \right| \leqslant w(f,\delta_j^{\nu}) &\sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0;x) \\ &+ \frac{w(f,\delta)}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} \bigvee_{k=0}^{\nu} K_{n,k}(x) d(x_{n,k},x) \\ &+ |f| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) - e_0 \right| \end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 2.5.2 kullanılarak

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f;x) - f(x)\right| \leqslant w(f,\delta_j^{\nu}) \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0;x)$$
$$+ \frac{w(f,\delta)}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} \bigvee_{k=0}^{\nu} \sqrt{L_n(e_0;x)} \sqrt{L_n(\varpi_x;x)}$$
$$+ |f| \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) - e_0\right|$$

olur. Son eşitsizlikte tekrar toplam için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f;x) - f(x)\right| \leqslant w(f,\delta_j^{\nu}) \sum_{k=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0;x)$$
$$+ \frac{w(f,\delta)}{\delta} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0;x)} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(\varpi_x;x)}$$
$$+ |f| \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) - e_0\right|$$

elde edilir. Burada $x \in X$ üzerinden supremum alınırsa ve $\delta := \delta_j^{\nu} := \sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n}^{\nu} L_n(\varphi_x)\right\|}$ $(j,\nu \in \mathbb{N})$ olduğu göz önünde bulunursa

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(f) - f\right\| \leqslant w(f,\delta_j^{\nu}) \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0)\right\|$$
$$+ w(f,\delta_j^{\nu}) \sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0)\right\|}$$
$$+ \|f\| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}^{\nu} L_n(e_0) - e_0\right\|$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

3.3 Uygulamalar

Bu bölümde elde ettiğimiz yaklaşımların maksimum-çarpım Bernstein operatörleriyle bir uygulaması verilecektir.

(u_n) dizisini

$$u_n := \begin{cases} 0 & n \quad tek \quad ise \\ \\ 2 & n \quad ift \quad ise \end{cases} \tag{3.3}$$

olacak şekilde tanımlayalım. O halde (u_n) dizisinin klasik anlamda yakınsak olmadığı halde Cesàro yakınsak olduğu görülür, yani $C_1 - \lim_n u_n = 1$.

$X = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $x_{n,k} = \frac{k}{n} \in [0,1]$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ alınsın ve

$$K_{n,k} = \frac{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}{\bigvee\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}} \tag{3.4}$$

tanımlansın. (3.4) eşitiliğini kullanarak, Bede ve Gal [12] tarafından tanımlanan maksimum-çarpım Bernstein operatörü aşağıdaki gibi verilir:

$$B_n^{(M)}(f;x) := \bigvee_{k=0}^{n} K_{n,k}(x).f(\frac{k}{n}) = \frac{\bigvee_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})}{\bigvee_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^k (1-x)^{n-k}}. \tag{3.5}$$

Görebiliriz ki $f \in C([0,1],[0,\infty))$ olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n^{(M)}(f) - f\| = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir (bkz.[12]). Şimdi de (3.3) de verilen (u_n) dizisini ve (3.5) eşitliğini kullanarak

$$L_n(f;x) := u_n B_n^M(f;x) \tag{3.7}$$

operatörünü göz önüne alalım. Bu durumda, (u_n) dizisi klasik anlamda yakınsak olmadığından yukarıda tanımlanan $L_n(f)$ operatörü ile f fonksiyonuna klasik anlamda yaklaşım yapılamadığı gözlemlenir. Buna rağmen, toplanabilme sürecinde $\mathscr{A}$ yerine C_1 Cesàro matrisi alındığında, (3.7) ile tanımlanan $L_n(f)$ operatörü $[0,1]$ üzerinde f ye Cesàro yakınsak olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten, herhangi bir $f \in C([0,1],[0,\infty))$

için

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}L_n(f)-f\right\| &= \left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}u_nB_n^{(M)}(f)-f\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}|u_n|\left\|B_n^{(M)}(f)-f\right\|+\|f\|\left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}u_n-1\right| \\ &\leqslant \frac{2}{j}\sum_{n=1}^{j}\left\|B_n^{(M)}(f)-f\right\|+\|f\|\left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}u_n-1\right|\end{aligned}$$

yazılabilir. Son olarak, C_1 matrisinin regülerliği kullanılarak ve son eşitsizliğin iki tarafında da $j\to\infty$ için limit alınırsa

$$\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}L_n(f)-f\right\|\to 0 \quad (j\to\infty \quad iken)$$

elde edilir ve böylece iddia doğrulanır.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmayla maksimum-çarpım operatörlerinin toplam süreci incelenmiş ve hata tahmini yapılmıştır. Daha önce Duman [17] tarafından yapılan maksimum-çarpım operatörlerinin istatistiksel yakınsaklığı çalışmasında elde edilen sonuçlardan farklı sonuçlar elde edilmiştir. Yapılan yaklaşımın genel bir yaklaşım olduğu ve klasik yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, aritmetik ortalama yakınsaklık kullanılarak yapılan yaklaşımları kapsadığı görülmüştür. Ayrıca klasik yakınsaklığın yetersiz olduğu durumlar da incelenmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçların gelecek yıllardaki çalışmalarda maksimum-minimum operatörlerinin toplam süreci kavramıyla incelenmesi başka bir araştırma problemi olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **ALTOMARE, F., AND CAMPITI, M.** *Korovkin-type approximation theory and its applications*, vol. 17. Walter de Gruyter, 1994.

[2] **ANASTASSIOU, G., AND GAL, S.** Moduli of continuity and global smoothness preservation, 2000.

[3] **ANASTASSIOU, G. A., AND DUMAN, O.** *Towards Intelligent Modeling: Statistical Approximation Theory*, vol. 14. Springer, 2011.

[4] **ATLIHAN, Ö. G., AND ORHAN, C.** Matrix summability and positive linear operators. *Positivity 11*, 3 (2007), 387–398.

[5] **ATLIHAN, Ö. G., AND ORHAN, C.** Summation process of positive linear operators. *Computers & Mathematics with Applications 56*, 5 (2008), 1188–1195.

[6] **BEDE, B., COROIANU, L., AND GAL, S. G.** Approximation and shape preserving properties of the bernstein operator of max-product kind. *International journal of mathematics and mathematical sciences 2009* (2009).

[7] **BEDE, B., COROIANU, L., AND GAL, S. G.** Approximation and shape preserving properties of the nonlinear bleimann-butzer-hahn operators of max-product kind. *Comment. Math. Univ. Carolin 51*, 3 (2010), 397–415.

[8] **BEDE, B., COROIANU, L., AND GAL, S. G.** Approximation and shape preserving properties of the nonlinear favardsza-szász-mirakjan operator of max-product kind. *Filomat 24*, 3 (2010), 55–72.

[9] **Bede, B., Coroianu, L., and Gal, S. G.** Approximation and shape preserving properties of the nonlinear meyer–könig and zeller operator of max-product kind. *Numerical functional analysis and optimization 31*, 3 (2010), 232–253.

[10] **Bede, B., Coroianu, L., and Gal, S. G.** Approximation by truncated favard–szász–mirakjan operator of max-product kind. *Demonstratio Mathematica (accepted for publication)* (2011).

[11] **Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G., et al.** Approximation and shape preserving properties of the nonlinear baskakov operator of max-product kind. *Studia Univ. Babes-Bolyai (Cluj), ser. math* (2010).

[12] **Bede, B., and Gal, S. G.** Approximation by nonlinear bernstein and favard-szász-mirakjan operators of max-product kind. *Journal of Concrete & Applicable Mathematics 8*, 1 (2010).

[13] **Bede, B., Nobuhara, H., Daňková, M., and Di Nola, A.** Approximation by pseudo-linear operators. *Fuzzy sets and systems 159*, 7 (2008), 804–820.

[14] **Bede, B., Nobuhara, H., Fodor, J. C., and Hirota, K.** Max-product shepard approximation operators. *JACIII 10*, 4 (2006), 494–497.

[15] **Bell, H.** *A-summability*. PhD thesis, Dissertation, Lehigh University, Bethlehem, Pa, 1971.

[16] **Bell, H. T.** Order summability and almost convergence. *Proceedings of the American Mathematical Society 38*, 3 (1973), 548–552.

[17] **Duman, O.** Statistical convergence of max-product approximating operators. *Turkish Journal of Mathematics 34*, 4 (2010), 501–514.

[18] **Duman, O., Khan, M., and Orhan, C.** A-statistical convergence of approximating operators. *Mathematical Inequalities and applications 6* (2003), 689–700.

[19] **Fast, H.** Sur la convergence statistique. In *Colloquium Mathematicae* (1951), vol. 2, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, pp. 241–244.

[20] **Freedman, A., and Sember, J.** Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics 95*, 2 (1981), 293–305.

[21] **Gadjiev, A., and Orhan, C.** Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math 32*, 1 (2002).

[22] **Hardy, G. H.** *Divergent series*, vol. 334. American Mathematical Soc., 2000.

[23] **Korovkin, P.** Linear operators and the theory of approximation, hindustan publ. *Co., Delhi* (1960).

[24] **Lorentz, G.** A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta mathematica 80*, 1 (1948), 167–190.

[25] **Maddox, I.** Elements of functional analysis, cambridge at the uni, 1970.

[26] **Mohapatra, R.** Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators. *Journal of Approximation Theory 20*, 3 (1977), 239–250.

[27] **Nishishiraho, T.** Convergence of positive linear approximation processes. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series 35*, 3 (1983), 441–458.

[28] **Niven, I., Zuckerman, H. S., and Montgomery, H. L.** *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons, 2008.

[29] **Swetits, J.** On summability and positive linear operators. *Journal of Approximation Theory 25*, 2 (1979), 186–188.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad :Türkan Yeliz Gökçer

Uyruğu : T.C

Doğum Tarihi ve Yeri :27.01.1991 Samsun

E-posta : y.gokcer@etu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2014, TOBB ETÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Yüksek Lisans** : 2016, TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2014-2016	TOBB ETÜ Matematik Bölümü	Burslu Y.L Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce, Almanca

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Y. Gokcer and O. Duman, Summation process by max-product operators, "3rd International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory - AMAT 2015", Ankara, Turkey, May 28-31, 2015.
- T. Y. Gökçer and O. Duman, Summation process by max-product operators, in "Computational Analysis", pp. 59-67, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer, New York, 2016.
- Y. Gokcer and O. Duman, Summation Process in Approximation by Nonlinear Operators, "Emerging Trends in Applied Mathematics and Mechanics ETAMM 2016", Perpignan, France, May 30 - June 03, 2016.