TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL TOPLANABİLME METODU İLE BERNSTEIN-CHLODOVSKY TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Meryem Ece ALEMDAR

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

NİSAN 2020

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172111003 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Meryem Ece ALEMDAR**'ın ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"GENEL TOPLANABİLME METODU İLE BERNSTEIN-CHLODOVSKY TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI"** başlıklı tezi **21.04.2020** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Oktay DUMAN** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Cihan ORHAN (Başkan)** ....
Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Meryem Ece Alemdar

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENEL TOPLANABİLME METODU İLE BERNSTEIN-CHLODOVSKY TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI

Meryem Ece Alemdar

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay Duman

Tarih: Nisan 2020

Bu yüksek lisans tezinde toplanabilme teorisindeki yöntemler ile özellikle de regüler toplanabilme matrisleri kullanılarak Bernstein-Chlodovsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir ve yaklaşımdaki yakınsaklık oranları hesaplanmıştır.

Bilindiği üzere Weierstrass Yaklaşım Teoremi ifade etmektedir ki, kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olan her fonksiyona, polinomlarla düzgün olarak yaklaşılabilir. Bu teoremin ilk orijinal versiyonu 1885 yılında Weierstrass tarafından verilmiştir. Daha sonra Bernstein, 1912 yılında tanımladığı polinomlarla bu teoremin inşaya dayanan bir başka ispatını vermiştir. Bu yaklaşım fikri pek çok araştırmacı tarafından uygulanmış ve bu durum yeni ve etkin yaklaşım operatörlerinin tanımlanmasına imkan sağlamıştır.

1937 yılında Chlodovsky, $[0,+\infty)$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlara yaklaşabilmek için Bernstein'nın polinomlarını genelleştirmiştir. Daha sonra bu alanda günümüze kadar literatürde pek çok çalışma yapılmıştır. Fakat bu çalışmaların hemen hemen tamamında yaklaşımın gerçeklenebilmesi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayıların bir (b_n) dizisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tez çalışmasında, regüler toplanabilme metotları yardımıyla bu limit koşulunun

zayıflatılması amaçlanmıştır. Hatırlatmalıyız ki regüler toplabilme metotları, örneğin aritmetik ortalama yakınsaklık metodu, yakınsak dizileri koruduğu gibi klasik anlamda yakınsak olmayan pek çok diziyi de toplayabilmektedir. Dolayısıyla toplanabilme metotlarıyla elde edilecek yaklaşım teoremleri, klasik sonuçları bir adım daha ileriye götürmektedir. Literatürde pozitif lineer operatörlerin yaklaşımlarında toplanabilme metotları sıklıkla kullanılmasına rağmen Bernstein-Chlodovsky operatörlerinin yaklaşımı üzerinde henüz bu yönde bir inceleme yapılmamıştır. Bu tez çalışmasında literatürdeki bu boşluğun doldurulması hedeflenmiştir.

Tezde öncelikle klasik Bernstein-Chlodovsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri hatırlatılacak, sonra bunların toplanabilme metotları yardımıyla bir modifikasyonu tanımlanacak ve daha sonra da bu yeni operatörün klasik yaklaşımdan daha genel ve güçlü yaklaşım özelliklerine ulaşılacaktır. Yakınsaklık oranları da hesaplanacaktır. Bunun için yaklaşımlar teorisinde önemli bir araç olan süreklilik modülü kavramı kullanılacaktır. Klasik durumu gerçeklemeyen fakat bu yeni modifikasyona göre yaklaşıma imkan sağlayan bir uygulama verilecek ve sonuçlar grafiksel olarak gözlemlenecektir.

Tezin bir diğer hedefi ise elde edilen sonuçların çok değişkenli fonksiyonlara aktarılması üzerine olacaktır. Burada genel bir yaklaşım teoremi verildikten sonra özellikle iki değişkenli fonksiyonlara yaklaşım durumu grafiklerle desteklenecektir.

Son olarak, tezde elde edilen sonuçlar tartışılacak ve gelecekte konuyla ilgili yapılabilecek olası araştırmalar değerlendirilecektir.

Anahtar Kelimeler: Pozitif lineer operatörler, Bernstein-Chlodovsky operatörleri, Regüler toplanabilme metodu, Cesàro metodu, Ağırlıklı uzay, Süreklilik modülü.

ABSTRACT

Master of Science

GENERAL SUMMABILITY METHODS IN THE APPROXIMATION BY BERNSTEIN-CHLODOVSKY OPERATORS

Meryem Ece Alemdar

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Oktay Duman

Tarih: April 2020

In this master thesis, the approximation properties of Bernstein-Chlodovsky operators has been investigated by using methods in summability theory, especially regular summability matrices, and rate of convergences in the approximation have been computed.

As is known, the Weierstrass Approximation Theorem states that any function that is continuous on a closed interval $[a,b]$ can be approximated uniforomly by polynomials. The first original version of this theorem was introduced by Weierstrass in 1885. Later, Bernstein gave another proof of this theorem in 1912, which was based on the construction with the polynomials. The idea of this approach has been applied by many researchers and this situation has enabled to determine new and effective approximation operators.

In 1937, Chlodovsky generalized Bernstein's polynomials to approximate the functions defined in the interval $[0,+\infty)$. Later, many studies in this field have been conducted in the literature so far. However, in almost all of these studies, the following limit condition on a given sequence (b_n) of positive real numbers

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

is needed to achieve the approximation. In this thesis, it is aimed to weaken this limit condition with the help of regular summability methods. We should remind that regular summability methods, such as the method of arithmetic mean convergence, preserve the usual convergence as well as able to sum many sequences that are not the classical convergent. Therefore, the approximation theorems obtained with summability methods take the classical results one step further. Although summability methods are frequently used in the approximation by positive linear operators in the literature, no approach has yet been made on the approximation by Bernstein-Chlodovsky operators. In this thesis, it is aimed to fill this gap in the literature.

In the thesis, first of all, the approximation properties of the classical Bernstein-Chlodovsky operators will be reminded, then a modification of them will be defined with the help of summability methods, and then more general and strong approximation results for this new operators will be reached. Rate of convergences in the approximation will also be calculated. For this, the concept of modulus of continuity, which is an important tool in approximation theory, will be used. An application that does not satisfy the classical situation but allows an approximation according to this new modification will be given and the results will be graphically observed.

Another aim of the thesis will be on extending the obtained results to multivariable functions. After giving a general approximation theorem here, the situation of approximation to functions of two variables will be supported with graphics.

Finally, the results obtained in the thesis will be discussed and possible future research on the topic will be evaluated.

Keywords: Positive linear operators, Bernstein-Chlodovsky operators, Regular summability methods, the Cesàro method, Weighted spaces, Modulus of continuity.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve ilgiyle elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağım kıymetli danışmanım Prof. Dr. Oktay DUMAN'a ve tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine; değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Cihan ORHAN'a ve Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR'a; sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım. Son olarak destekleri ile her zaman yanımda olan bu hayattaki en büyük şansım olan kıymetli ailem ve sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

KISALTMALAR

sup : Supremum

maks : Maksimum

lim : Limit

bkz. : Bakınız

d.d. : Diğer durumlarda

SEMBOL LİSTESİ

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda yer almaktadır.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^d$	d boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}^d$	d boyutlu doğal sayılar kümesi
$B(I)$	I aralığında sınırlı fonksiyonların uzayı
$C(I)$	I aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$C^*[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$ aralığında sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ limiti mevcut olan fonksiyonların uzayı
$C_0[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$ aralığında sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ olan fonksiyonların uzayı
E_2	$[0,+\infty)$ aralığında sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$ limiti mevcut olan fonksiyonların uzayı
$C_B[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
B_n	Bernstein polinomları
C_n	Bernstein-Chlodovsky Operatörü
$\mathscr{C}_j$	Modifiye Bernstein-Chlodovsky Operatörü
$e_i(x)$	x^i ile tanımlanan test fonksiyonları
$f_\lambda(x)$	$e^{-\lambda x}$ ile tanımlanan test fonksiyonları
$\|.\|_\infty$	Alışılmış supremum normu
$\|.\|_{E_2}$	E_2 uzayındaki norm
$C_1=(c_{jk})$	Cesàro matrisi
$\omega(f,\delta)$	Süreklilik modülü
$\mathbf{x_d}$	$(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$
$\mathbf{k_d}$	$(k_1,k_2,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d$

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi, bir fonksiyona daha basit fonksiyonlarla (polinom ya da operatörlerle) nasıl yaklaşılabileceği problemini incelemektedir. Bir kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olan fonksiyona polinomlarla yaklaşılabileceği ilk olarak 1885 yılında Alman matematikçi Weierstrass tarafından verilmiştir. Daha sonra bunun için yapısal bir ispat, Rus matematikçi olan Bernstein'ın 1912 yılında tanımladığı polinomlarla verilmiştir. Bilindiği üzere Bernstein polinomları

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile tanımlanır (bkz. [14]). Buna göre, f, $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli olan herhangi bir fonksiyon olmak üzere $(B_n(f))$ dizisiyle f fonksiyonuna düzgün olarak yaklaşmak mümkündür. Bernstein'ın bu ispatından sonra 1937 yılında Chlodovsky, $[0,\infty)$ aralığı üzerindeki fonksiyonlara yaklaşabilmek için yukarıdaki operatörleri şu şekilde genelleştirmiştir:

$$C_n(f;b_n;x) := \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{b_n k}{n}\right)\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\dfrac{x}{b_n}\right)^{n-k}, & x \in [0,b_n] \text{ ise} \\ f(x), & x > b_n \text{ ise,} \end{cases}$$

burada (b_n)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını gerçekleyen pozitif reel terimli bir dizidir. Bu operatörler literatürde Bernstein-Chlodovsky operatörleri olarak bilinir (bkz. [1, 8]).

Toplanabilme metotları şimdiye kadar operatörlerle fonksiyonlara yaklaşımda sıklıkla kullanılmış ve bu sayede klasik teoriden daha genel ve kuvvetli olan yaklaşım sonuçlarına ulaşılmıştır (bkz.[3–6, 15–17]). Fakat yukarıda tanımlanan C_n Bernstein-Chlodovsky operatörleriyle ilgili literatürde henüz bu yönde bir çalışma yapılmamıştır. Bu yüksek lisans tezinde, esas olarak regüler toplanabilme metotları yardımıyla $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ limit koşulu zayıflatılarak Bernstein-Chlodovsky operatörünün yaklaşım özellikleri yeniden ele alınacaktır.

Bu tez toplam beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, yaklaşımlar teorisine ve toplanabilme teorisine ilişkin tez boyunca ihtiyaç duyulacak bazı temel kavramlar, tanım, notasyon ve teoremler hatırlatılacaktır. Üçüncü bölümde, klasik Bernstein-Chlodovsky operatörünün yaklaşım özellikleri ve yakınsaklık oranları verilecektir. Tezin orijinal bölümü olan dördüncü bölümde, önce Bernstein-Chlodovsky operatörlerinin regüler toplanabilme metotlarıyla bir modifikasyonu verilecek, sonra bu yeni operatör dizisine ilişkin yaklaşım teoremleri elde edilecek ve yakınsaklık oranları hesaplanacaktır. Bu bölümde ayrıca çok değişkenli duruma ilişkin sonuçlara da yer verilecek olup elde edilen yaklaşım teoremlerinin uygulamaları Wolfram Mathematica programı yardımıyla grafiksel olarak gösterilecektir. Tezin son bölümünde ise sonuç ve önerilere değinilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, üzerinde çalışacağımız fonksiyon uzaylarının tanımı verilecektir. Ayrıca yaklaşımlar teorisinden pozitif lineer operatör ve süreklilik modülü kavramları ile toplanabilme teorisinden regüler matris metotları ve aritmetik ortalama yakınsaklık kavramı hatırlatılacaktır.

2.1 Yaklaşımlar Teorisine İlişkin Bazı Kavramlar

Öncelikle tez boyunca ihtiyaç duyacağımız bazı fonksiyon uzaylarını aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür (bkz. [1]) :

$$\begin{aligned}
C[a,b]: &= \{f \mid f:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\}, \\
B[a,b]: &= \{f \mid f:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ sınırlı}\}, \\
C[0,+\infty): &= \{f \mid f:[0,+\infty) \to \mathbb{R} \text{ sürekli}\}, \\
C^*[0,+\infty): &= \left\{f \in C[0,+\infty) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ mevcut}\right\}, \\
C_0[0,+\infty): &= \left\{f \in C[0,+\infty) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\right\}, \\
B[0,+\infty): &= \{f \mid f:[0,+\infty) \to \mathbb{R} \ \text{ sınırlı}\}, \\
C_B[0,+\infty): &= C[0,+\infty) \cap B[0,+\infty).
\end{aligned}$$

$B[0,+\infty)$ uzayı üzerinde alışılmış supremum normu gözönüne alınacaktır; yani

$$f \in B[0,+\infty) \text{ olmak üzere } \|f\|_\infty := \sup_{x\geq 0} |f(x)|$$

şeklindedir. Aynı norm, $C^*[0,+\infty)$, $C_0[0,+\infty)$ ve $C_B[0,+\infty)$ altuzaylarında da geçerlidir. Üstelik, $[a,b]$ aralığı üzerinde supremum alınarak, benzer normu $C[a,b]$ ve $B[a,b]$ uzayları üzerinde de tanımlamak mümkündür.

Ayrıca aşağıdaki ağırlıklı uzaya ve üzerinde tanımlanan norma ihtiyacımız olacak:

$$E_2 := \left\{ f \in C[0,+\infty) \mid \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$f \in E_2 \text{ olmak üzere } \|f\|_{E_2} := \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^2}.$$

Şimdi pozitif lineer operatörler üzerinde bazı bilgiler verelim.

Tanım 2.1.1. *X ve Y reel değerli fonksiyon uzayları olmak üzere $L : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in X$ için*

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

*koşulu sağlanırsa, L ye **lineer operatör** adı verilir.* [1]

Tanım 2.1.2. *$L : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. $f \geq 0$ olduğunda $L(f) \geq 0$ gerçekleniyorsa, L ye **pozitif lineer operatör** denir.* [1]

Yaklaşımlar teorisinde özellikle de yakınsaklık oranı hesaplamasında ihtiyaç duyulan süreklilik modülü kavramını ve onun genel özelliklerini hatırlatalım.

Tanım 2.1.3. *Reel sayıların bir I aralığı üzerinde sınırlı bir f fonksiyonunun **süreklilik modülü**, $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega(f,\delta) := \sup_{\substack{|x-y|\leq\delta \\ x,y\in[a,b]}} |f(x) - f(y)|$$

şeklinde tanımlanır. Burada I, reel sayıların sınırlı veya sınırsız bir aralığı olabilir (*bkz.* [*1*, *13*, *14*]).

Teorem 2.1.1. *$\omega(f,\delta)$ süreklilik modülü için aşağıdakiler gerçeklenir:*

(i) *Her $x \neq y$ $x,y \in [a,b]$ için $|f(x) - f(y)| \leq \omega(f, |x-y|)$ olur.*

(ii) *$\omega(f,\delta)$, δ ya göre artandır.*

(iii) *f fonksiyonu I üzerinde düzgün sürekli ise $\lim_{\delta\to 0^+} \omega(f,\delta) = 0$ olur.*

(iv) *f' türevi mevcut ve I üzerinde sınırlı ise, bu durumda bir $M > 0$ sabiti için $\omega(f,\delta) \leq M\delta$ olur.*

(v) *f Hölder sürekli ise, yani $\alpha \in (0,1]$, $M > 0$, $x,y \geq 0$ olmak üzere $|f(y) - f(x)| \leq M|x-y|^{\alpha}$ gerçekleniyorsa, bu durumda her $\delta > 0$ için $\omega(f,\delta) \leq M\delta^{\alpha}$ olur.*

(vi) *Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,n\delta) \leq n\omega(f,\delta)$ dır; dolayısıyla, her $\lambda > 0$ için $\omega(f,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f,\delta)$ olur.*

(*bkz.*[*1*, *13*]).

Şimdi

$$e_i(x) = x^i \ \ (i = 0,1,2) \tag{2.1}$$

ve

$$f_{\lambda}(x) = e^{-\lambda x} \ \ (\lambda = 0,1,2) \tag{2.2}$$

test fonksiyonlarını kullanarak, $C[a,b]$ üzerindeki klasik Korovkin Teoremini ve onun ağırlıklı uzaylara olan genişlemesini hatırlatalım.

Teorem 2.1.2. ***(Klasik Korovkin Teoremi)***
$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi olmak üzere eğer her bir $i = 0,1,2$ için

$$L_n(e_i) \rightrightarrows e_i$$

ise, bu durumda her $f \in C[a,b]$

$$L_n(f) \rightrightarrows f$$

gerçeklenir. Burada $\rightrightarrows$ sembolü, düzgün yakınsaklığı göstermektedir. [*1*, *13*]

Teorem 2.1.3. ***(Ağırlıklı Uzaylarda Korovkin Teoremi-1)***
$L_n : E_2 \to E_2$ pozitif lineer operatörler dizisi olmak üzere eğer her bir $i = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_i) - e_i\|_{E_2} = 0,$$

ise, bu durumda her $f \in E_2$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_{E_2} = 0$$

gerçeklenir. [*1*]

Teorem 2.1.4. ***(Ağırlıklı Uzaylarda Korovkin Teoremi-2)***
$L_n : C^*[0,+\infty) \to C^*[0,+\infty)$ pozitif lineer operatörler dizisi olmak üzere eğer her $\lambda = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f_\lambda) - f_\lambda\|_\infty = 0$$

ise, bu durumda her $f \in C^*[0,+\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_\infty = 0$$

olur. [*1*]

Son olarak, yakınsaklık oranı üzerine aşağıdaki teorem bilinmektedir.

Teorem 2.1.5. *I reel sayılarda bir aralık olsun. $C(I)$ uzayının E alt vektör uzayı, e_0, e_1 ve e_2 test fonksiyonlarının yanı sıra $C_B(I)$ uzayını da içersin. Her bir $x \in I$ için I üzerinde $\psi_x(t) = t - x$ ile tanımlanan ψ_x fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $L : E \to B(I)$ bir pozitif lineer operatör ise, bu durumda her $f \in C_B(I)$, $\delta > 0$ ve $x \in I$ için,*

$$|L(f;x) - f(x)| \le |f(x)||L(e_0;x) - e_0(x)| \left(L(e_0;x) + \frac{1}{\delta}\sqrt{L(\psi_x^2;x)}\sqrt{L(e_0;x)} \right) \omega(f,\delta) \tag{2.3}$$

elde edilir. Üstelik, eğer f fonksiyonu I aralığında türevlenebilir ve $f' \in C_B(I)$ ise,

$$\begin{aligned} |L(f;x) - f(x)| &\le |f(x)||L(e_0;x) - e_0(x)| + |f'(x)||L(\psi_x;x)| \\ &+ \sqrt{L(\psi_x^2;x)} \left(\sqrt{L(e_0;x)} + \frac{1}{\delta}\sqrt{L(\psi_x^2;x)} \right) \omega(f',\delta) \end{aligned} \tag{2.4}$$

gerçeklenir. [*1*, *13*]

2.2 Toplanabilme Teorisine İlişkin Bazı Kavramlar

Tanım 2.2.1. *(y_n) bir sayı dizisi olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k = K$$

olacak şekilde bir K sayısı varsa, (y_n) dizisi K ya ***aritmetik ortalama yakınsaktır*** *(ya da, Cesàro yakınsaktır) denir.* [7, 10]

Aşağıda verilen teorem klasik yakınsaklık ile aritmetik ortalama yakınsaklık arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Teorem 2.2.1. *(y_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} y_n = K$ ise,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n} = K$$

olur; yani yakınsak her dizi aynı sayıya aritmetik ortalama yakınsaktır. [7, 10]

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $((-1)^k)$ dizisi klasik anlamda yakınsak olmamasına rağmen 0 sayısına aritmetik ortalama yakınsaktır. Ayrıca sınırsız olduğu halde Cesàro toplanabilen dizi örnekleri de vardır.

Tanım 2.2.2. *Bir (y_n) dizisi ve $A = [a_{nk}]$ sonsuz matrisi verilsin ve*

$$(Ay)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} y_k$$

şeklinde tanımlanan serisinin her n için yakınsak olduğunu kabul edelim. Eğer $\lim_{n\to\infty} y_n = K$ iken $\lim_{n\to\infty} (Ay)_n = K$ koşulu sağlanıyorsa, A ya ***regüler matris*** *denir.* [7, 10]

Örneğin

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n}, & k = 1, 2, \ldots, n \text{ ise} \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ Cesàro matrisi regülerdir. Aşağıdaki teorem regüler matrisleri karakterize etmektedir.

Teorem 2.2.2. ***(Silverman-Toeplitz Koşulları)***

Bir $A = [a_{nk}]$ *matrisinin regüler olması için gerek ve şart*

(i) $\sup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$

(ii) $\forall k$ *için* $a_k := \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0,$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarının sağlamasıdır. [7, 10]

3. BERNSTEIN-CHLODOVSKY OPERATÖRÜ

Bu bölümde klasik Bernstein-Chlodovsky operatörü ve onun yaklaşım özellikleri üzerine bilgiler hatırlatılacaktır.

3.1 Operatörün Tanımı

Bernstein polinomları, yaklaşımlar teorisinde ve analitik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yapı taşı niteliğindedir. Bilindiği üzere

$$B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

eşitliği ile verilen Bernstein operatörleri yardımıyla $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli olan fonksiyonlara (düzgün olarak) yaklaşabilmek mümkündür. Fonksiyonların tanım kümesini $[0,1]$ aralığından $[0,+\infty)$ aralığı üzerine genişletebilmek için Chlodovsky 1937 yılında aşağıdaki operatör dizisini tanımlamıştır:

$$C_n(f;b_n;x) := \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{b_n k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, & x \in [0,b_n] \text{ ise} \\ f(x), & x > b_n \text{ ise,} \end{cases} \tag{3.1}$$

burada (b_n),

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \ \text{ ve } \ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 0 \tag{3.2}$$

koşullarını gerçekleyen pozitif reel terimli bir dizidir. (3.1) ile verilen C_n operatörleri, literatürde **Bernstein-Chlodovsky operatörleri** olarak bilinmektedir (bkz. [1, 8]). Dikkat edilmelidir ki her bir $n \in \mathbb{N}$ için C_n, pozitif ve lineer bir operatör olup, yaklaşılacak olan f fonksiyonunun tanım kümesi $[0,+\infty)$ aralığı üzerindedir.

C_n operatörünün E_2, $C^*[0,+\infty)$ ve $C_0[0,+\infty)$ uzaylarını kendi üzerlerine götürdüğü bilinmektedir; yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} C_n &: E_2 \to E_2 \\ C_n &: C^*[0,+\infty) \to C^*[0,+\infty) \\ C_n &: C_0[0,+\infty) \to C_0[0,+\infty) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

3.2 Yaklaşım Özellikleri

Bernstein-Chlodovsky operatörlerinin yaklaşım özelliklerini inceleyebilmek için (2.1) ve (2.2) de verilen test fonksiyonlarındaki değerlerinin hesaplanması gerekmektedir. Öncelikle $e_0(x) = 1$ test fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda $0 \leq x \leq b_n$ için binom açılımından yararlanarak

$$C_n(e_0; b_n; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} = 1$$

bulunur. Şimdi $e_1(x) = x$ test fonksiyonunu kullanarak yine her $0 \leq x \leq b_n$ için

$$\begin{aligned} C_n(e_1; b_n; x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b_n k}{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{x^k}{b_n^{k-1}} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \frac{x^{k+1}}{b_n^k} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-1-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right) \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\ &= x = e_1(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $e_2(x) = x^2$ test fonksiyonu dikkate alındığında $0 \leq x \leq b_n$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
C_n(e_2;b_n;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b_n^2 k^2}{n^2} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^k}{b_n^k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{x^k}{b_n^{k-2}} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{x^k}{b_n^{k-2}} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-2)!} \frac{x^k}{b_n^{k-2}} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \frac{x^k}{b_n^{k-2}} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılarak

$$
\begin{aligned}
C_n(e_2;b_n;x) &= \frac{(n-1)x^2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{x^k}{b_n^k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} \\
&\quad + \frac{b_n x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{x^k}{b_n^k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{b_n x}{n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıdaki üç durum gözönüne alındığında her $x \geq 0$ için

$$
\begin{aligned}
C_n(e_0;b_n;x) &= e_0(x) = 1 \\
C_n(e_1;b_n;x) &= e_1(x) = x \\
C_n(e_2;b_n;x) &= \begin{cases} x^2 - \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{b_n x}{n}, & x \in [0,b_n] \ \text{ ise} \\ x^2, & x > b_n \ \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi E_2 ağırlıklı uzayını ve onun üzerinde tanımlanan normu dikkate alırsak (3.2) koşulları altında

$$\lim_{n\to\infty} \|C_n(e_0;b_n) - e_0\|_{E_2} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \|C_n(e_1;b_n) - e_1\|_{E_2} = 0$$

olduğunu görmek kolaydır. Yine aynı koşullar altında

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|C_n(e_2;b_n)-e_2\|_{E_2} &= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{x(b_n-x)}{(1+x^2)n}\\ &\le \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 2.1.3 uyarınca aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.2.1. (3.1) *ile tanımlanan* (C_n) *operatör dizisi için* (3.2) *koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda her* $f\in E_2$ *için*

$$\lim_{n\to\infty}\|C_n(f;b_n)-f\|_{E_2}=0$$

olur. [*1*, *8*]

Şimdi $C^*[0,+\infty)$ uzayı üzerindeki fonksiyonlara (alışılmış supremum normuna göre düzgün olarak) yaklaşabilmek için $f_\lambda(x)=e^{-\lambda x}$ $(\lambda=0,1,2)$ test fonksiyonlarından yararlanacağız. $\lambda=0$ iken $C_n(f_0;b_n;x)=1$ olduğundan durum açıktır. Diğer λ değerleri için

$$\begin{aligned}C_n(f_\lambda;b_n;x) &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{\lambda b_n k}{n}}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\frac{x}{b_n}\right]^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\ &= \left(e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\frac{x}{b_n}+1-\frac{x}{b_n}\right)^n\end{aligned}$$

olup buradan

$$C_n(f_\lambda;b_n;x)=\left[1-\lambda x\left(\frac{1-e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}}{\lambda b_n}\right)\right]^n$$

elde ederiz. Şimdi eşitliğin her iki tarafında $n\to\infty$ için *limit* alınırsa $[0,+\infty)$ aralığı üzerinde

$$C_n(f_\lambda;b_n)\rightrightarrows f_\lambda$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 2.1.4 uyarınca aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.2.2. (3.1) *ile tanımlanan* (C_n) *operatör dizisi için* (3.2) *koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda her* $f \in C^*[0,+\infty)$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \|C_n(f;b_n) - f\|_\infty = 0$$

olur. [*1*, *8*]

3.3 Yakınsaklık Oranı

Yakınsaklık oranını hesaplayabilmek için Teorem 2.1.5 ten yararlanacağız. Öncelikle her $i = 0,1,2$ için $e_i \in E_2$ olup (3.3) ten her $x \in [0,b_n]$ için

$$\begin{aligned} C_n(\psi_x^2;b_n;x) &= C_n(e_2;b_n;x) - 2xC_n(e_1;b_n;x) - x^2C_n(e_0;b_n;x) \\ &= \frac{b_nx - x^2}{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 3.3.1. *Her* $f \in C_B[0,+\infty)$ *ve* $0 \le x \le b_n$ *için*

$$|C_n(f;b_n;x) - f(x)| \le 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{b_nx - x^2}{n}}\right)$$

gerçeklenir. [*1*]

Sonuç 3.3.2. $f \in C_B[0,+\infty)$ *fonksiyonu türevlenebilir ve* $f' \in C_B[0,+\infty)$ *ise, bu durumda her* $0 \le x \le b_n$ *için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır* (*bkz.* [*1*])*:*

$$|C_n(f;b_n;x) - f(x)| \le 2\sqrt{\frac{b_nx - x^2}{n}}\,\omega\left(f', \sqrt{\frac{b_nx - x^2}{n}}\right).$$

4. REGÜLER TOPLANABİLME METOTLARI İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde (3.1) ile verilen klasik Bernstein-Chlodovsky operatürünün yaklaşımında gerekli olan $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ limit koşulunun regüler toplanabilme metotları yardımıyla zayıflatılması ve böylece olası yakınsaklık kaybını gidermek için alternatif bir yöntem sunulması planlanmaktadır. Literatürde bilinen yaklaşım teoremlerinin hemen hemen tamamı söz konusu limit koşuluna dayanmaktadır. Bu nedenle özellikle bu bölümde yapacağımız çalışmaların yaklaşımlar teorisine orijinal katkılar sunacağını düşünüyoruz. Öncelikle klasik Bernstein-Chlodovsky operatörünün bir modifikasyonu tanımlanacak ve daha sonra onun yaklaşım özellikleri incelenecektir.

4.1 Bernstein-Chlodovsky Operatörünün Bir Modifikasyonu

$A = [a_{jn}]$ $(j, n \in \mathbb{N})$ negatif olmayan bir regüler toplanabilme metodu olsun. Bunun yardımıyla verilen (3.1) deki C_n operatörünün yeni bir modifikasyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\mathscr{C}_j(f;x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} C_n(f;b_n;x). \tag{4.1}$$

Şimdi (4.1) operatörleri için (3.2) deki limit koşulundan daha zayıf olan

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \frac{b_n}{n} = 0 \tag{4.2}$$

koşulunu göz önüne alalım. Tez boyunca $\mathscr{C}_j$ operatörlerinin E_2, $C^*[0,+\infty)$ ve $C_0[0,+\infty)$ uzaylarını kendi üzerlerine dönüştürecek şekilde $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler toplanabilme metotlarını gözönüne alacağız. Bu şekildeki regüler metotlara ilişkin uygulamalara son bölümde değinilecektir. Öncelikle, her bir $n \in \mathbb{N}$ için C_n operatörü pozitif ve lineer olduğundan, her bir $j \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{C}_j$ operatörleri de öyledir. Üstelik $f \in B[0,+\infty)$ olduğunda $A = [a_{jn}]$ $j, n \in \mathbb{N}$ negatif olmayan bir regüler toplanabilme metodu olduğundan Teorem 2.2.2 ile verilen Silverman-Toeplitz koşulları uyarınca her bir $j \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{C}_j(f) \in C_B[0,+\infty)$ olduğunu görmek zor değildir.

4.2 Yaklaşım Teoremleri

İlk olarak $[0,+\infty)$ aralığı üzerinde aşağıdaki noktasal yaklaşım teoremini elde edeceğiz. Bu yaklaşım $[0,+\infty)$ aralığının kompakt altkümeleri üzerinde düzgün olacaktır.

Teorem 4.2.1. *$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir (b_n) dizisi verilsin. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun ve (4.2) koşulu gerçeklensin. Bu durumda her $f \in C_B[0,+\infty)$ ve her $x \in [0,+\infty)$ için*

$$\lim_{j\to\infty} \mathscr{C}_j(f;x) = f(x)$$

noktasal yaklaşımı geçerlidir. Bu yaklaşım $[0,+\infty)$ aralığının kompakt altkümeleri üzerinde düzgündür.

İspat. *Teoremi ispatlayabilmek için Altomare'nin [2] deki bir sonucundan yararlanacağız. Bu sonuca göre, eğer bir (L_n) pozitif lineer operatör dizi e_0, e_1 ve e_2 test fonksiyonlarında tanımlı ve her bir $x \in [0,+\infty)$ için*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(e_i;x) = e_i(x) \quad (i = 0,1,2)$$

oluyorsa, bu durumda her $f \in C_B[0,+\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f;x) = f(x)$$

gerçeklenir. Şüphesiz bu yaklaşım $[0,+\infty)$ aralığının kompakt altkümeleri üzerinde düzgündür.

Şimdi bir önceki bölümden C_n klasik Bernstein-Chlodovsky operatörleri için

$$\begin{aligned} C_n(e_0,b_n;x) &= e_0(x) = 1 \\ C_n(e_1,b_n;x) &= e_1(x) = x \\ C_n(e_2,b_n;x) &= \begin{cases} x^2 - \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{xb_n}{n}, & x \in [0,b_n] \text{ ise} \\ x^2, & x > b_n \text{ ise}, \end{cases} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz; yani C_n operatörleri $e_i(x) = x^i$ $(i = 0,1,2)$ test fonksiyonlarında tanımlıdır. Yine (4.1) *tanımından, $\mathscr{C}_j$ operatörlerinin de aynı test fonksiyonlarında tanımlı olduğunu görmek zor değildir. Şimdi $\mathscr{C}_j$ operatörleriyle bu test fonksiyonlarına nasıl yaklaşılabileceğini göstereceğiz. Öncelikle her bir $x \in [0,+\infty)$ ve $j \in \mathbb{N}$ için*

$$\mathscr{C}_j(e_0;x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \ \text{ ve } \ \mathscr{C}_j(e_1;x) = x\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}$$

olacağından

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(e_0;x) - e_0(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right|, \\ |\mathscr{C}_j(e_1;x) - e_1(x)| &= x\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right| \end{aligned}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Yukarıdaki eşitsizliklerin her iki yanında $j \to \infty$ için limit alınırsa ve $A = [a_{jn}]$ matrisinin regüler olduğu da gözönünde bulundurulursa Teorem 2.2.2 deki Silverman-Toeplitz koşulları uyarınca

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} |\mathscr{C}_j(e_0;x) - e_0(x)| &= 0, \\ \lim_{j\to\infty} |\mathscr{C}_j(e_1;x) - e_1(x)| &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca her $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|C_n(e_2;b_n;x) - e_2| \leq \frac{x^2}{n} + \frac{xb_n}{n}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(e_2;x) - e_2(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} C_n(e_2;b_n;x) - e_2(x)\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |C_n(e_2;b_n;x) - e_2(x)| + |e_2(x)| \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right| \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılarak

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{C}_j(e_2;x)-e_2(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\left(\frac{x^2}{n}+\frac{xb_n}{n}\right)+x^2\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \\
&= x^2\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{1}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{b_n}{n}+x^2\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafında $j\to\infty$ için limit alınırsa, $A=[a_{jn}]$ matrisinin regülerliğinden ve (4.2) koşulundan

$$
\lim_{j\to\infty}|\mathscr{C}_j(e_2;x)-e_2(x)| \ =0
$$

elde edilir. Dolayısıyla tüm koşullar gerçeklendiğinden her $f\in C_B[0,+\infty)$ ve her $x\in[0,+\infty)$ için

$$
\lim_{j\to\infty}\mathscr{C}_j(f;x)=f(x)
$$

noktasal yaklaşımı bulunur. Bu yaklaşım $[0,+\infty)$ aralığının kompakt altkümeleri üzerinde de düzgün olacaktır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi $(\mathscr{C}_j)$ operatör dizisi için Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.4 te olduğu gibi E_2 ve $C^*[0,\infty)$ uzayları üzerinde yaklaşım sonuçlarını vereceğiz.

Teorem 4.2.2. *$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir (b_n) dizisi verilsin. $A=[a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun ve (4.2) koşulu gerçeklensin. Bu durumda her $f\in E_2$ için*

$$
\lim_{j\to\infty}\|\mathscr{C}_j(f)-f\|_{E_2}=0
$$

elde edilir.

İspat. *Teorem 2.1.3 e göre her $i=0,1,2$ için*

$$
\lim_{j\to\infty}\|\mathscr{C}_j(e_i)-e_i\|_{E_2}=0
$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$\mathscr{C}_j(e_0;x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left\|\mathscr{C}_j(e_0) - e_0\right\|_{E_2} &= \sup_{x\geq 0} \frac{|\mathscr{C}_j(e_0;x) - e_0(x)|}{1+x^2} \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right| \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafında $j \to \infty$ için limit alınırsa ve $A = [a_{jn}]$ matrisinin regülerliği kullanılırsa,

$$\lim_{j\to\infty} \left\|\mathscr{C}_j(e_0) - e_0\right\|_{E_2} = 0$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\mathscr{C}_j(e_1;x) = x\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left\|\mathscr{C}_j(e_1) - e_1\right\|_{E_2} &= \sup_{x\geq 0} \frac{|\mathscr{C}_j(e_1;x) - e_1(x)|}{1+x^2} \\ &= \sup_{x\geq 0} \frac{x}{1+x^2} \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right| \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Yine $j \to \infty$ için limit alınarak

$$\lim_{j\to\infty} \left\|\mathscr{C}_j(e_1) - e_1\right\|_{E_2} = 0$$

olduğu görülür. Son olarak Teorem 4.2.1 *in ispatındaki*

$$|\mathscr{C}_j(e_2;x) - e_2(x)| \leq x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{1}{n} + x\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{b_n}{n} + x^2 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right|$$

eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$\left\|\mathscr{C}_j(e_2)-e_2\right\|_{E_2} \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{b_n}{n}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\lim_{j\to\infty} \left\|\mathscr{C}_j(e_2)-e_2\right\|_{E_2} = 0$$

bulunur. Sonuç olarak Teorem 2.1.3 ün tüm koşulları gerçeklendiğinden her $f \in E_2$ için

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathscr{C}_j(f)-f\|_{E_2} = 0$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Bir diğer yaklaşım teoremimiz aşağıda verilmektedir.

Teorem 4.2.3. $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ *olacak şekilde pozitif reel sayıların bir* (b_n) *dizisi verilsin.* $A = [a_{jn}]$ *negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun ve* (4.2) *koşulu gerçeklensin. Bu durumda her* $f \in C^*[0,+\infty)$ *için*

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathscr{C}_j(f)-f\|_{\infty} = 0$$

elde edilir; yani $[0,+\infty)$ *aralığı üzerinde* $\mathscr{C}_j(f) \rightrightarrows f$ *sağlanır.*

İspat. $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ *olmak üzere Teorem* 2.1.4 *uyarınca her* $\lambda = 0,1,2$ *için*

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathscr{C}_j(f_\lambda)-f_\lambda\|_{\infty} = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Önceki teoremlerin ispatlarında olduğu gibi $\lambda = 0$ *durumu açıktır. Şimdi diğer* λ *değerleri için aşağıdaki eşitsizliğin Holhoş tarafından ispatlandığını biliyoruz* (*bkz.* [*11*], *Lemma* 3.1)*:*

$$|C_n(f_\lambda;b_n;x)-f_\lambda(x)| \leq \frac{\lambda b_n}{2en}.$$

Böylece

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{C}_j(f_\lambda;x)-f_\lambda(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_n(f_\lambda;b_n;x)-f_\lambda(x)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}|C_n(f_\lambda;b_n;x)-f_\lambda(x)|+|f_\lambda(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \\
&\leq \frac{\lambda}{2e}\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{b_n}{n}+\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir. $A=[a_{jn}]$ *matrisinin regülerliği ve* (4.2) *koşulu gözönüne alındığında,*

$$\lim_{j\to\infty}\|\mathscr{C}_j(f_\lambda)-f_\lambda\|_\infty=0$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla Teorem 2.1.4 ten her $f\in C^*[0,+\infty)$ *için*

$$\lim_{j\to\infty}\|\mathscr{C}_j(f)-f\|_\infty=0$$

olup bu da ispatı tamamlar. $\square$

Uyarı 4.2.1. *Teorem* 4.2.2 *ve Teorem* 4.2.3 *te* $A=[a_{jn}]$ *matrisi yerine özel olarak birim matris alınırsa, bu durumda sırasıyla Sonuç* 3.2.1 *ve Sonuç* 3.2.2 *elde edilir.*

Uyarı 4.2.2. *Teorem* 4.2.2 *ve Teorem* 4.2.3 *te* $A=[a_{jn}]$ *matrisi yerine özel olarak* (2.5) *ile tanımlanan* $C_1=(c_{nk})$ *Cesàro matrisi alınırsa sırasıyla aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.*

Sonuç 4.2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$ *olacak şekilde pozitif reel sayıların bir* (b_n) *dizisi verilsin. Ayrıca*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b_1/1)+(b_2/2)+\cdots+(b_n/n)}{n}=0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.1) *ile tanımlanan* (C_n) *operatör dizisi için* $f\in E_2$ *olduğunda*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{C_1(f;b_1)+C_2(f;b_2)+\cdots+C_n(f;b_n)}{n}-f\right\|_{E_2}=0$$

gerçeklenir.

Sonuç 4.2.2. *(b_n) dizisi Sonuç 4.2.1 deki gibi olsun. Bu durumda (3.1) ile tanımlanan (C_n) operatör dizisi için $f \in C^*[0,+\infty)$ olduğunda*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{C_1(f;b_1)+C_2(f;b_2)+\cdots+C_n(f;b_n)}{n} - f \right\|_\infty = 0$$

gerçeklenir.

4.3 Yakınsaklık Oranı Hesabı

Şimdi (4.1) ile tanımlanan $(\mathscr{C}_j)$ operatör dizisi için Teorem 2.1.5 te olduğu gibi yaklaşımdaki yakınsaklık oranı hesaplanacaktır.

Teorem 4.3.1. *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve (b_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda her $f \in C_B[0,+\infty)$ ve her $j \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ için*

$$|\mathscr{C}_j(f;x) - f(x)| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\omega\left(f, \sqrt{\delta_n(x)}\right) + |f(x)| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1 \right| \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(f;x) - f(x)| \leq & \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}} \right\} \omega\left(f, \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}\right) \\ & + |f(x)| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1 \right|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

yakınsaklık oranları elde edilir; burada $\delta_n(x)$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\delta_n(x) := \frac{x|b_n - x|}{n}. \tag{4.5}$$

Özel olarak eğer her $j \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$ sağlanıyorsa ve f fonksiyonu α-ıncı mertebeden Hölder sürekli ise, yani $\alpha \in (0,1]$, $M > 0$, $x,y \geq 0$ olmak üzere $|f(y) - f(x)| \leq M|x-y|^\alpha$ gerçekleniyorsa, bu durumda

$$|\mathscr{C}_j(f;x) - f(x)| \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}(\delta_n(x))^{\alpha/2} \tag{4.6}$$

ve

$$|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq 2M\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)\right)^{\alpha/2} \tag{4.7}$$

olur.

İspat. (4.5) *teki* $\delta_n(x)$ *kullanılarak Sonuç* 3.2.1 *uyarınca* (C_n) *klasik Bernstein-Chlodovsky operatör dizisi için* $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ *ve* $f \in C_B[0,\infty)$ *olmak üzere*

$$|C_n(f;b_n;x)-f(x)| \leq 2\omega\left(f,\sqrt{\delta_n(x)}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bunu $\mathscr{C}_j$ *operatörlerinin tanımında kullanırsak*

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_n(f;b_n;x)-f(x)\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}|C_n(f;b_n;x)-f(x)|+|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\omega\left(f,\sqrt{\delta_n(x)}\right)+|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu (4.3) *eşitsizliğini verir. Diğer yandan Teorem* 2.1.5 *teki* (2.3) *yakınsaklık oranını doğrudan* $(\mathscr{C}_j)$ *operatör dizisine uygularsak* $\delta > 0$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq\ & \omega(f,\delta)\left(\mathscr{C}_j(e_0;x)+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathscr{C}_j\left((y-x)^2;x\right)}\sqrt{\mathscr{C}_j(e_0;x)}\right) \\ & +|f(x)||\mathscr{C}_j(e_0;x)-e_0(x)| \end{aligned}$$

bulunur. $\mathscr{C}_j$ *operatörünün özelliklerinden yararlanarak*

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| &\leq \omega(f,\delta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}}\sqrt{\mathscr{C}_j((y-x)^2;x)}\right\}+|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \\ &\leq \omega(f,\delta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_n\left((y-x)^2;b_n;x\right)}\right\} \\ &\quad +|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi (C_n) *klasik Bernstein-Chlodovsky operatör dizisi gözönüne alındığında her* $n \in \mathbb{N}$ *ve* $x \geq 0$ *için*

$$C_n\left((y-x)^2; b_n; x\right) \leq \frac{x|b_n - x|}{n} = \delta_n(x)$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(f;x) - f(x)| \quad &\leq \quad \omega(f,\delta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} + \frac{1}{\delta}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}}\right\} \\ &\quad + |f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte

$$\delta := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}$$

yazacak olursak, (4.4) *yakınsaklık oranını buluruz. Özel olarak, eğer her* $j \in \mathbb{N}$ *için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$$

sağlanıyorsa ve f, α*-ıncı mertebeden Hölder sürekli ise, bu durumda Teorem* $2.1.1 - (vi)$ *uyarınca* $\omega(f,\delta) \leq M\delta^{\alpha}$ *olup bunu* (4.3) *ve* (4.4) *eşitsizliklerinde yerine yazacak olursak, sırasıyla* (4.6) *ve* (4.7) *yakınsaklık oranlarını elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.* $\square$

Bir diğer yakınsaklık oranı için aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.3.2. *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve (b_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $f \in C_B[0,+\infty)$ fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında türevlenebildiğini ve ayrıca $f' \in C_B[0,+\infty)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $j \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 0$ için,*

$$|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\sqrt{\delta_n(x)}\,\omega\left(f,\sqrt{\delta_n(x)}\right)+|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned}|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq & \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}}+1\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}\,\omega\left(f',\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}\right) \\ & +|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right|\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir; burada $\delta_n(x)$ *yine* (4.5) *teki gibi tanımlanmaktadır.*
Özel olarak eğer her $j \in \mathbb{N}$ *için* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{jn}=1$ *sağlanıyorsa ve* f' *türev fonksiyonu* β*-ıncı mertebeden Hölder sürekli ise, yani* $\beta \in (0,1]$, $K>0$, $x,y \geq 0$ *olmak üzere*

$$|f'(y)-f'(x)| \leq K|x-y|^{\beta}$$

gerçekleniyorsa, bu durumda

$$|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq 2K\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}(\delta_n(x))^{\frac{(\beta+1)}{2}} \tag{4.10}$$

ve

$$|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq 2K\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)\right)^{\frac{(\beta+1)}{2}} \tag{4.11}$$

olur.

İspat. *Hipotezdeki gibi* f *ve* f' *fonksiyonlarını gözönüne alalım.* (4.5) *te tanımlanan* $\delta_n(x)$ *kullanılarak Sonuç* 3.2.2 *uyarınca* (C_n) *klasik Bernstein-Chlodovsky operatör dizisi için* $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ *olduğunda*

$$|C_n(f;b_n;x)-f(x)| \leq 2\sqrt{\delta_n(x)}\,\omega\left(f',\sqrt{\delta_n(x)}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi $\mathscr{C}_j$ *operatörlerinin tanımını kullanarak*

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_n(f;b_n;x)-f(x)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}|C_n(f;b_n;x)-f(x)|+|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right| \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\sqrt{\delta_n(x)}\,\omega\left(f',\sqrt{\delta_n(x)}\right)+|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right|
\end{aligned}
$$

buluruz. Bu ise (4.8) *yakınsaklık oranını verir. Diğer taraftan, Teorem* 2.1.5 *teki* (2.4) *yakınsaklık oranını doğrudan* $(\mathscr{C}_j)$ *operatör dizisine uygularsak* $\delta > 0$ *için*

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq\; & \omega(f',\delta)\left(\sqrt{\mathscr{C}_j(e_0;x)}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathscr{C}_j((y-x)^2;x)}\right)\sqrt{\mathscr{C}_j((y-x)^2;x)} \\
& +|f(x)||\mathscr{C}_j(e_0;x)-e_0(x)|+|f'(x)||\mathscr{C}_j((y-x);x)|
\end{aligned}
$$

olur. $\mathscr{C}_j$ *operatörünün tanımını kullanırsak*

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq\; & \omega(f',\delta)\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_n((y-x)^2;b_n;x)}\right) \\
& \times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_n((y-x)^2;b_n;x)} \\
& +|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right|+|f'(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_n((y-x);b_n;x)\right|
\end{aligned}
$$

elde edilir ve buradan da

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{C}_j(f;x)-f(x)| \leq\; & \omega(f',\delta)\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}}+\frac{1}{\delta}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)} \\
& +|f(x)|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}-1\right|
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Son elde edilen eşitsizliğin sağ tarafında

$$
\delta := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}
$$

alırsak (4.9) yakınsaklık oranına ulaşırız. Eğer f' türev fonksiyonu β-ıncı mertebeden Hölder sürekli ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}_j(f;x) - f(x)| &\leq 2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}\,\omega\left(f', \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)}\right) \\ &\leq 2K\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\delta_n(x)\right)^{(\beta+1)/2} \end{aligned}$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanır. $\square$

4.4 Uygulama ve Grafiksel Gösterim

Bu bölümde daha önce elde ettiğimiz yaklaşım sonuçlarının aşikar olmayan bir uygulaması verilecek ve grafiksel olarak gösterilecektir.

(b_n) dizisini ve $A = [a_{jn}]$ matrisini sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$b_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ çift ise} \\ n, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{4.12}$$

ve

$$a_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{j}, & n = 2,4,...,2j \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Bu durumda A matrisi, klasik C_1 Cesàro matrisine oldukça benzemekte olup

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{j} & 0 & \frac{1}{j} & 0 & \frac{1}{j} & 0 & ... & \frac{1}{j} & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Dolayısıyla Teorem 2.2.2 ile verilen Silverman-Toeplitz koşulları uyarınca A negatif olmayan regüler bir matristir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ olduğunu ve

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \frac{b_n}{n} &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{n=1}^{j} \frac{b_{2n}}{2n} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{n=1}^{j} \frac{\sqrt{2n}}{2n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

gerçeklendiğini görebiliriz. Buna karşılık gelen $\mathscr{C}_j$ operatörü ise

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_j(f;x) &= \frac{1}{j} C_{2n}\left(f;\sqrt{2n};x\right) \\
&= \frac{C_2\left(f;\sqrt{2};x\right) + C_4\left(f;\sqrt{4};x\right) + ... + C_{2j}\left(f;\sqrt{2j};x\right)}{j}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklinde elde edilir. Her j için $\mathscr{C}_j$ operatörü, E_2 , $C^*[0,+\infty)$ ve $C_0[0,+\infty)$ uzaylarını kendi üzerlerine götürür. Yani, (4.14) ile verilen $(\mathscr{C}_j)$ operatör dizisi için Teorem 4.2.1, 4.2.2 ve 4.2.3 teki tüm koşullar sağlanır. Sonuç olarak, aşağıdakileri elde ederiz:

(i) Her $f \in C_B[0,+\infty)$ için ve her $x \in [0,+\infty)$ için $\lim_{j\to\infty} \mathscr{C}_j(f;x) = f(x)$ olur. Bu yakınsama, $[0,+\infty)$ aralığının her kompakt altkümesi üzerinde düzgündür.

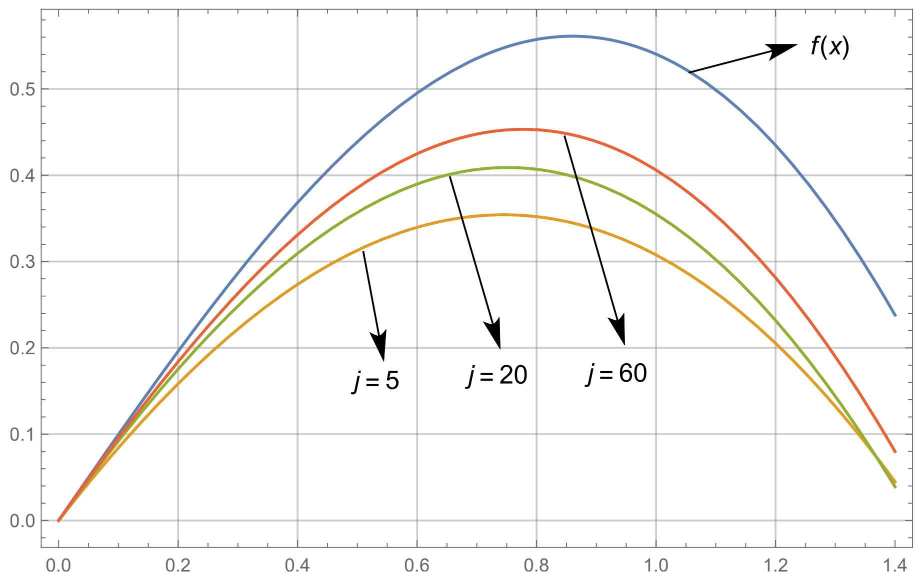
(ii) Her $f \in E_2$ için $\lim_{j\to\infty} \|\mathscr{C}_j(f) - f\|_{E_2} = 0$ olur.

(iii) Her $f \in C^*[0,\infty)$ için $\lim_{j\to\infty} \|\mathscr{C}_j(f) - f\|_\infty = 0$ gerçeklenir.

Şimdi bu yaklaşım sonuçlarını

$$f(x) = x\cos x \tag{4.15}$$

fonksiyonu üzerinde test edebiliriz. Şekil 4.1 de $\mathscr{C}_j$ operatörleriyle bu fonksiyona yaklaşım, $j = 5$, 20 ve 60 parametre değerleri ile gösterilmektedir.



Şekil 4.1: (4.15) ile verilen f fonksiyonuna (4.14) teki $\mathscr{C}_j(f)$ operatörleriyle yaklaşım

Şimdi aynı $\mathscr{C}_j$ operatörleri için α-ıncı mertebeden Hölder sürekli bir f fonksiyonu verildiğinde (4.6) ve (4.7) den sırasıyla aşağıdaki yakınsaklık oranlarını elde etmek mümkündür:

$$|\mathscr{C}_j(f;x) - f(x)| \leq 2M \frac{(\delta_2(x))^{\alpha/2} + (\delta_4(x))^{\alpha/2} + \cdots + (\delta_{2j}(x))^{\alpha/2}}{j}$$

ve

$$|\mathscr{C}_j(f;x) - f(x)| \leq 2M \left(\frac{\delta_2(x) + \delta_4(x) + \cdots + \delta_{2j}(x)}{j} \right)^{\alpha/2};$$

burada $n \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 0$ için

$$\delta_{2n}(x) := \frac{x|\sqrt{2n} - x|}{n}$$

ile tanımlanır. Son olarak, (4.14) ile verilen $\mathscr{C}_j$ operatörlerinin $e_2(x) = x^2$ test fonksiyonundaki değerini aşağıdaki gibi hesaplamak mümkündür:

$$\mathscr{C}_j(e_2;x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{j} \sum\limits_{n=1}^{j} \left(\frac{\sqrt{2n} - x}{2n} \right), & x \in \left[0, \sqrt{2}\right] \\ x^2 + \frac{x}{j} \sum\limits_{n=m+1}^{j} \left(\frac{\sqrt{2n} - x}{2n} \right), & x \in \left(\sqrt{2m}, \sqrt{2m+2}\right] \ (m = 1, 2, ..., j-1) \\ x^2, & x > \sqrt{2j}. \end{cases}$$

Fakat (3.1) ile verilen C_n klasik Bernstein-Chlodovsky operatörleri (4.12) dizisiyle birlikte gözönüne alındığında

$$C_n(e_2;b_n;x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{n}} - \dfrac{x^2}{n}, & n \text{ çift ve } 0 \leq x \leq \sqrt{n} \\ x^2, & n \text{ çift ve } x > \sqrt{n} \\ x^2 + x - \dfrac{x^2}{n} & n \text{ tek ve } 0 \leq x \leq n \\ x^2, & n \text{ tek ve } x > n \end{cases}$$

elde edilir. Buradan e_2 test fonksiyonuna $(C_n(e_2;b_n))$ dizisi ile (alışılmış anlamda) yaklaşılamayacağını görürüz. Dolayısıyla, örneğin (4.13) teki gibi toplanabilme metotları yardımıyla bu yakınsaklık kaybının giderilebileceğini gözlemlemiş oluruz.

4.5 Çok Değişkenli Duruma Genişleme

Bu bölümde çok değişkenli reel değerli fonksiyonlara Bernstein-Chlodovsky operatörleriyle nasıl yaklaşılabileceği üzerinde incelemeler yapacağız. Öncelikle çok değişkenli Bernstein-Chlodovsky operatörünün tanımını verip daha sonra regüler toplanabilme metotları yardımıyla bunun bir modifikasyonunu elde edeceğiz.

Şimdi (b_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve d pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda verilen bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_d(b_n) = \left\{ \mathbf{x_d} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,d,\ |\mathbf{x_d}| \leq b_n \right\}$$

ile tanımlanan d-boyutlu simpleksi gözönüne alalım. Bu bölümde aşağıdaki notasyonlardan yararlanacağız:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_d} &= (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{k_d} &= (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d, \\ |\mathbf{x_d}| &= x_1 + x_2 + \cdots + x_d, \\ |\mathbf{k_d}| &= k_1 + k_2 + \cdots + k_d, \\ \mathbf{x_d^{k_d}} &= x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{k_d}! &= k_1!k_2!\cdots k_d!,\\ \binom{n}{\mathbf{k_d}} &= \frac{n!}{\mathbf{k_d}!(n-|\mathbf{k_d}|)!}.\end{aligned}$$

Buna göre çok değişkenli Bernstein-Chlodovsky operatörleri

$$C_{n,d}(f;b_n;\mathbf{x_d}) = \begin{cases} \sum\limits_{|\mathbf{k_d}|\leq n} f\left(\dfrac{b_n\mathbf{k_d}}{n}\right)\binom{n}{\mathbf{k_d}}\left(\dfrac{\mathbf{x_d}}{b_n}\right)^{\mathbf{k_d}}(1-|\mathbf{x_d}|)^{n-|\mathbf{k_d}|}, & \mathbf{x_d}\in S_d(b_n)\\ f(\mathbf{x_d}), & \mathbf{x_d}\in[0,+\infty)^d\setminus S_d(b_n)\end{cases} \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır; burada $[0,+\infty)^d := [0,+\infty)\times\cdots\times[0,+\infty)$ (d-kez) olur.

Şimdi önceki bölümde yaptığımız gibi bir $A=[a_{jn}]$ regüler toplanabilme metodu yardımıyla (4.16) daki tanımı aşağıdaki şekilde genelleştirmek mümkündür:

$$\mathscr{C}_{j,d}(f;\mathbf{x_d}) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}C_{n,d}(f;b_n;\mathbf{x_d}). \tag{4.17}$$

Tek değişkenli duruma benzer bir yöntem izlenerek aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Teorem 4.5.1. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ *olacak şekilde pozitif reel sayıların bir* (b_n) *dizisi verilsin.* $A=[a_{jn}]$ *negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun ve* (4.2) *koşulu gerçeklensin. Bu durumda her* $f\in C_B[0,+\infty)$ *ve her* $\mathbf{x_d}\in[0,+\infty)^d$ *için*

$$\lim_{j\to\infty}\mathscr{C}_{j,d}(f;\mathbf{x_d}) = f(\mathbf{x_d})$$

noktasal yaklaşımı geçerlidir. Bu yaklaşım $[0,+\infty)^d$ *nin kompakt altkümeleri üzerinde düzgündür.*

Elbette Teorem 4.5.1 de $A=I$ birim matrisi alınırsa, bu durumda (4.16) ile tanımlanan $C_{n,d}$ çok değişkenli Bernstein-Chlodovsky operatörleri için yakınsaklık sonucunu elde ederiz. Şimdi bu yaklaşımı grafiksel olarak gözlemleyebilmek için aşağıdaki özel durumları gözönüne alalım. $d=2$ olsun. Bu durumda, $S_2(b_n)$ simpleksi ve $C_{n,2}$ operatörleri (yani $A=I$ özel hali) aşağıdaki gibi tanımlanır (bkz. [12]):

$$S_2(b_n) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0 \text{ ve } x+y \geq b_n\right\}$$

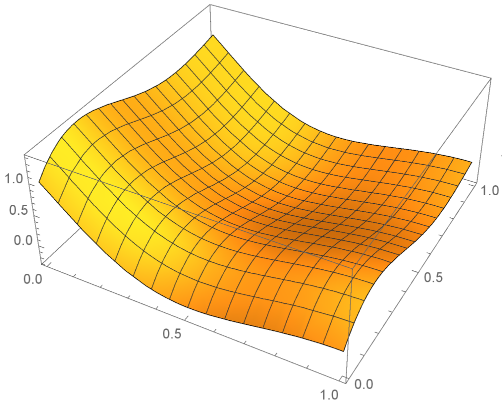
olmak üzere eğer $(x,y) \in S_2(b_n)$ ise

$$C_{n,2}(f;b_n;x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} f\left(\frac{b_n k}{n}, \frac{b_n m}{n}\right) \frac{n!\left(1-\frac{(x+y)}{b_n}\right)^{n-k-m}}{k!m!(n-k-m)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{b_n}\right)^m \tag{4.18}$$

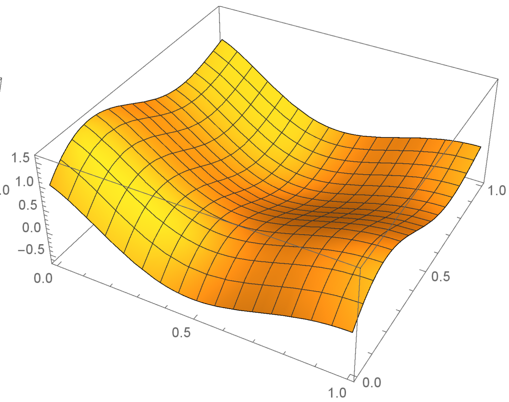
ve eğer $(x,y) \in [0,+\infty)^2 \setminus S_2(b_n)$ ise $C_{n,2}(f;b_n;x,y) = f(x,y)$ olur. Şimdi

$$f(x,y) = \cos(2\pi x) + \sin(2\pi y) \tag{4.19}$$

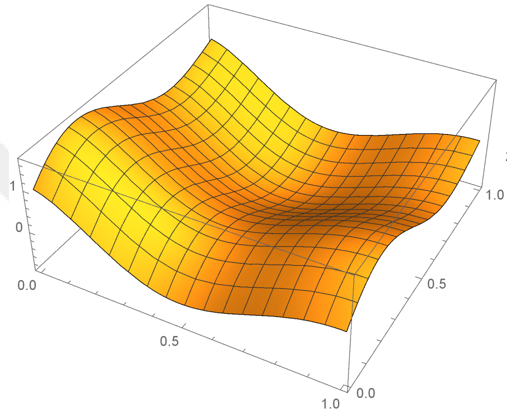
fonksiyonu ve $(b_n) = \left(n^{1/3}\right)$ dizisi tanımlansın. Buna göre (4.18) deki $C_{n,2}(f,b_n)$ operatörleriyle (4.19) daki f fonksiyonuna olan klasik yaklaşım (yani $A = I$ hali) Şekil 4.2 de $n = 10$, 25 ve 45 değerleri için gösterilmektedir.



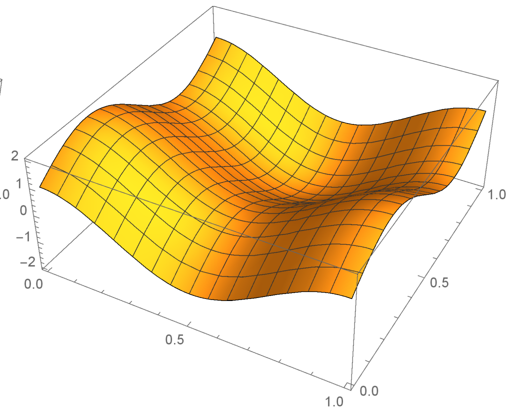
(a) $n = 10$



(b) $n = 25$



(c) $n = 45$



(d) f

Şekil 4.2: (4.19) ile verilen f fonksiyonuna (4.18) deki $C_{n,2}(f)$ operatörleriyle yaklaşım

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tezinde klasik Bernstein-Chlodovsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri regüler toplanabilme metotları yardımıyla geliştirilmiştir. Böylece alışılmış anlamda yaklaşımın gerçeklenmediği durumlar için alternatif yaklaşım metodu sunulmuştur. Ayrıca yaklaşımdaki yakınsaklık oranları da hesaplanmıştır. Çok değişkenli fonksiyonlara sonuçların nasıl genelleştirilebileceği gösterilmiştir. Son olarak elde edilen yaklaşım sonuçlarını destekleyen uygulamalar verilmiş ve bu yaklaşımlar grafiksel olarak gösterilmiştir.

Buradaki yöntemin uygun başka operatörler üzerinde de gerçeklenip gerçeklenmeyeceği problemi gelecek çalışmalar için bir ışık tutmaktadır. Örneğin yaklaşımlar teorisinde yine önemli bir yer tutan q-Bernstein operatörlerinin yaklaşımında regüler toplanabilme metotlarının nasıl uygulanabileceği üzerinde düşünülmesi gelecekteki öncelikli çalışmalarımız arasında olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] **Altomare, F. ve Campiti, M.,** A reciprocal series of Fibonacci numbers, Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994. Quart. 12 (1974), 346.

[2] **Altomare, F.,** Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators, Surveys in Approximation Theory, 5 (2010), 92–164.

[3] **Aslan, I. ve Duman, O.,** A summability process on Baskakov-type approximation, Period. Math. Hung. 72 (2016), 186–199.

[4] **Aslan, I. ve Duman, O.,** Summability on Mellin-type nonlinear integral operators, Integral Transforms Spec. Funct. 30, no. 6, (2019), 492-511.

[5] **Aslan, I. ve Duman, O.,** Approximation by nonlinear integral operators via summability process, Math. Nachr. 293 (2020), no. 3, 430-448.

[6] **Atlihan, O. G. ve Orhan, C.,** Summation process of positive linear operators, Comput. Math. Appl. 56 (2008), 1188–1195.

[7] **Boos, J.,** Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, UK, 2000.

[8] **Chlodovsky I.,** Sur le développment des fonctions définies dans un interval infini en séries de polynômes de M. S. Bernstein, Compos. Math. 4 (1937), 380–393.

[9] **Gokcer, T. Y. ve Duman, O.,** Approximation by max-min operators: A general theory and its applications, Fuzzy Sets Syst. (2019), accepted for publication.

[10] **Hardy, G. H.,** Divergent Series, Oxford University Press, 1949

[11] **Holhoş, A.,** The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 55 (2010), no. 2, 133–142.

[12] **Ibikli, E.,** On approximation for functions of two variables on a triangular domain, Rocky Mountain J. Math. 35 (2005), no. 5, 1523–1531.

[13] **Korovkin, P. P.,** Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.

[14] **Lorentz, G. G.,** Bernstein polynomials. Mathematical Expositions, no. 8. University of Toronto Press, Toronto, 1953.

[15] **Mohapatra, R. N.,** Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators, J. Approx. Theory 20 (1977), 239–250.

[16] **Sakaoglu, I. ve Orhan, C.,** Strong summation process in Lp spaces. Nonlinear Anal. 86 (2013), 89–94.

[17] **Swetits, J. J.,** On summability and positive linear operators, J. Approx. Theory 25 (1979), 186-188.

EKLER

TÜRKÇE-İNGİLİZCE MATEMATİK TERİMLERİ SÖZLÜĞÜ

Türkçe terim	İngilizce Terim
Ağırlıklı Uzay	Weighted Space
Dizi	Sequence
Düzgün Yakınsaklık	Uniform Convergence
Fonksiyon	Function
Lineer	Linear
Matris	Matrix
Noktasal Yakınsaklık	Pointwise Convergence
Operatör	Operator
Pozitif	Positive
Seri	Series
Süreklilik Modülü	Modulus of Continuity
Toplam	Sum
Toplanabilme	Summability
Yakınsaklık Oranı	Rate of Convergence
Yaklaşım	Approximation

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Meryem Ece ALEMDAR

Uyruğu : T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri : 30.03.1993, Sakarya

E-posta : m.ece.alemdar@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Yüksek Lisans** : 2020, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Analiz, Yaklaşımlar Teorisi
- **Lisans** : 2017, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2018-2020	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	İdari Personel SPM Merkez Asistanı
2017-2018	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	İdari Personel Yazılım Birimi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Alemdar, M. E.,** Duman, O., (2019) On the Approximation by Bernstein-Chlodovsky type Operators, 8th International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2019), July 22-25, Brussels, Belgium.
- **Alemdar, M. E.,** Duman, O., (2019) Bernstein-Chlodovsky Tipi Operatörlerin Yaklaşımı, Ankara Matematik Günleri (AMG 2019), July 22-25, Gazi Üniversitesi, Ankara.