TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL MÜDAHALELİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ İÇİN ASİMTOTİK YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

Özlem SEVİNÇ

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

TEMMUZ 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Özlem Sevinç

İMZA

ÖZET

Doktora Tezi

GENEL MÜDAHALELİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ İÇİN

ASİMTOTİK YAKLAŞIM

Özlem Sevinç

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniveritesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tahir Hanalioğlu

Tarih: Temmuz 2020

Bu çalışmada, genel müdahaleli rasgele yürüyüş süreci ele alınmıştır. İncelenen sürecin temel özelliği bazı durumlar dışında genel ifadeler elde edilmesidir. Süreç matematiksel olarak inşa edildikten sonra süreç için genel ergodik teorem ispat edilmiş ve sürecin ergodik dağılımı elde edilmiştir. Bu dağılıma ait karakteristik fonksiyonunun aşikâr şekli rasgele yürüyüşün temel özdeşliği yardımıyla bulunmuştur. Daha sonra sürecin sınır fonksiyonelinin momentleri için kesin ifadeler ve üç terimli asimtotik açılımlar bulunmuştur. Standartlaştırılmış sürecin karakteristik fonksiyonu için iki terimli asimtotik açılımı elde edilmiş ve bulunan açılım yardımıyla zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Karakteristik fonksiyonlar için süreklilik teoremine göre standartlaştırılmış sürecin ergodik dağılımının müdahaleye karşılık gelen rasgele değişkenler dizisi tarafından üretilen yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımına yakınsadığı ispatlanmıştır. Ergodik dağılımın ilk beş momenti için kesin ifadeler bulunmuştur. Sürecin ilk beş ergodik momenti için üç terimli, ilk dört ergodik momenti için ise dört terimli asimtotik açılımlar sürecin sınır fonksiyonelleri için bulunan asimtotik açılımlar yardımıyla elde edilmiştir. Ergodik momentler için elde edilen asimtotik açılımlar yardımıyla sürecin değişim katsayısı, basıklık ve çarpıklık gibi karakteristikleri için yaklaşık formüller bulunmuştur. Ayrıca, literatürde özel durumlar için ulaşılan sonuçlar bu çalışmada bulunan genel asimtotik ifadeler yardımıyla farklı dağılımlara sahip müdahaleler (Weibull, simetrik üçgensel, üstel, Gamma) için hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Rasgele yürüyüş süreci, Ergodik dağılım, Zayıf yakınsama, Sınır Fonksiyoneli, Ergodik moment, Asimtotik açılım.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

ASYMPTOTIC APPROACH FOR RANDOM WALK PROCESS WITH GENERAL INTERFERENCE OF CHANCE

Özlem Sevinç

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Industrial Engineering Science Programme

Supervisor: Prof. Dr. Tahir Hanalioğlu

Date: July 2020

In this study, a random walk process with general interference of chance is investigated. The main feature of the examined process is that general formulas are obtained, except for some special cases. The process is mathematically constructed, after that the general ergodic theorem is proved and the ergodic distribution of the process is obtained. The exact form of the characteristic function of this distribution is found with the help of the basic identity of random walk. Then, exact expressions and three-term asymptotic expansions are found for the moments of the boundary function of the process. Two term asymptotic expansion for the characteristic function of the standardized process is found and the weak convergence theorem is proved by using this expansion. It is been proved that the ergodic distribution of the standardized process according to the continuity theorem for characteristic functions converges to the limit distribution of the residual waiting time of the renewal process generated by a sequence of random variables expressing the discrete interference of chance. Exact expressions are found for the first five moments of the ergodic distribution. Three term asymptotic expansions for the first five ergodic moments and four term asymptotic expansions for the first four ergodic moments of the process are obtained with the help of asymptotic expansions for the boundary functionals of the process. Approximate

formulas are found for the characteristics of the process such as coefficient of variation, kurtosis and skewness with obtained asymptotic expansions of ergodic moments. In addition, the results obtained in the literature for special cases are calculated for the discrete interference of chances with different distributions (Weibull, symmetric triangular, exponential, Gamma) with the help of found general asymptotic expressions in this study.

Keywords: Random walk process, Ergodic distribution, Weak convergence, Boundary functional, Ergodic moment, Asymptotic expansion.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Tahir Hanalioğlu (Khaniyev)'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmalarım süresince her zaman destek olan tez izleme hocalarım Prof. Dr. Fikri Gökpınar ve Dr. Öğr. Üyesi Salih Tekin'e değerli tavsiyeleri için teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, Prof. Dr. Vilda Purutçuoğlu ve Doç. Dr. Kumru Didem Atalay'a tez savunma jürimde olmayı kabul ettikleri ve kıymetli geri dönüşleri için teşekkür ederim. Değerli yöneticim Dr. Cevriye Aysoy'a bu süreçteki anlayışlı ve destekleyici tutumundan ve Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası'na doktora tez çalışmalarımı tamamlayabilmem için sağladığı imkanlardan ötürü teşekkürü bir borç bilirim. Maddi destekleri için TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim. Kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine çok teşekkür ederim. Aileme hayatımın her alanında yanımda oldukları, uzakta olsalar dahi sevgilerini her zaman bana hissettirdikleri için sonsuz sevgimi sunarım. Çıkmaza girdiğim anlarda beni yüreklendiren, devam etme gücünü bana veren, her sıkıştığım anda yardımıma koşan sevgili eşim Orhun'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
Ω	Bir stokastik deneyin örnek uzayı
$\mathcal{F}$	Bir Ω'nın alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş bir σ cebir
$P(A)$	A olayının olasılığı
$E(X)$	X rasgele değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	X rasgele değişkeninin varyansı
$\sigma(X)$	X rasgele değişkeninin standart sapması
$\gamma_3(X)$	Çarpıklık katsayısı
$\gamma_4(X)$	Basıklık katsayısı
$X(t)$	Sürecin t anında aldığı değer
$Q_X(x)$	$X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu
$\varphi_X(\theta)$	$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu
ξ_n	Sıçramalar arasında geçen süre
η_n	Sıçrama miktarı
ζ_n	Müdahale miktarı
$\Phi(t)$	ξ_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu
$F(x)$	η_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu
$\pi(z)$	ζ_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu
τ_n	$n.$ periyotta sürecin sıfıra düşme anı
$\nu(t)$	t anına kadar olan sıçrama sayısı
m_n	η_n'lerin $n.$ momenti
$\widehat{m}_n$	η_n'lerin kalan ömrünün momentleri
β_n	ζ_n'lerin $n.$ momenti
$\hat{\beta}_n$	ζ_n'lerin kalan ömrünün momentleri
S	Maksimum stok seviyesi
s	Minimum stok seviyesi
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
ν_1^+	Birinci basamak anı
χ_1^+	Birinci basamak yüksekliği
μ_n	χ_n^+'lerin $n.$ momenti
$\hat{\mu}_n$	χ_n^+'lerin kalan ömrünün momentleri
$p(n)$	Parçalanış fonksiyonu
φ_ζ	ζ_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu
$\hat{\varphi}_\zeta$	ζ_n'lerin kalan ömrünün limit dağılımının karakteristik fonk.
$M_n(\lambda z)$	$S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin $n.$ momenti
$U(t)$	Yenileme fonksiyonu
$U_2(t)$	Yenileme sürecinin ikinci momenti

$\forall$	Her
:	Öyle ki
$a < \infty$	a sonludur
R	Reel sayılar kümesi
$\widetilde{M}(s)$	$M(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$M^*(s)$	$M(t)$ fonksiyonunun Laplace–Stiltijes dönüşümü
$M_1(x) * M_2(x)$	$\int_0^x M_2(x-y)dM_1(y)$'e eşit olan konvolüsyon çarpım
$F^{*n}(x) \equiv F_n(x)$	$F(x)$ fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
$g(x) = o\big(h(x)\big)$	$\lim_{x\to\infty}[g(x)/h(x)] = 0$

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Stokastik süreç, temelde zaman içinde gelişen rasgele bir olayı tanımlayan matematiksel bir araçtır. Matematiksel bir bakış açısından, stokastik süreçler teorisi 1950 civarında literatüre yerleşmeye başlamıştır. O zamandan beri stokastik süreçler; matematikçiler, fizikçiler, finansçılar, mühendisler için yaygın bir araç haline gelmiş ve bu teori geniş bir uygulama alanına sahip olmuştur. Kapsamlı bir şekilde incelenen ilk stokastik süreç, 1828'de parçacıkların sıvı veya gazdaki rastgele hareketini gözlemleyen ve ifade eden botanikçi Robert Brown (1773-1858) onuruna kendi adı ile adlandırılan Brown hareketi olarak anılmaktadır. Stokastik süreçlerin ilk matematiksel çalışmalarından biri, 1900 yılında hisse senedi ve opsiyon piyasalarının stokastik bir modellemesini yapan Louis Bachelier'e (1870–1946) dayanmaktadır. Bununla birlikte, o yıllarda olasılık teorisinin güçlü bir temelinin olmaması nedeniyle, Bachelier'in çalışması bir süre göz ardı edilmiştir. Diğer yandan, Albert Einstein (1879-1955) atomların ve moleküllerin varlığını dolaylı olarak doğrulamanın bir yolu olarak stokastik süreçleri fizikçilerin dikkatine sunmuştur. Stokastik süreçler ile ilgili çalışmalar ciddi bir biçimde matematikçi Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) ile başlamıştır. 1933'te Rusça olarak yayınlanan çalışmasında, olasılık teorisini temel aksiyomlarını oluşturmuştur ve bu çalışma teoride çok önem taşımaktadır (Kolmogorov, 1956). Kolmogorov, bu aksiyomatik yaklaşım ile stokastik süreçlerin kesin bir tanımını vermiştir. Joseph Doob (1910–2004), Kolmogorov’la tutarlı ve Paul Lévy (1886–1971) tarafından yapılan çalışmalara paralel olacak şekilde günümüzde yaygın olarak kullanılan stokastik süreç tanımını vermiştir. Markov zincirleri en önemli stokastik süreçler arasındadır. Yarı Markov süreçleri, Markov zincirlerinin ve varyasyonlarının doğal ve önemli genellemeleridir. Ayrıca, yarı-Markov süreçlerinin Markov süreçlerinin bir genelleştirilmesi olduğu bilinmektedir. Bu genelleştirme, zaman aralıklarının üstel dağılımı yerine rasgele bir dağılım kullanılmasına imkân sağlanmasıyla gerçekleşmektedir. Zaman aralıklarındaki üstel dağılım koşulunu zayıflatan ve dolayısıyla yarı-Markov süreçlerin tanımı ilk olarak literatüre kazandıran çalışmalar Lévy (1954), Smith (1955) ve Takács (1954) tarafından verilmiştir. Markov zincirlerinin bu genelleştirilmesi, Markov özelliği olan üstel dağılımın hafıza eksikliğine alternatif bulmak için gerçekleştirilmiştir. Diğer yandan, Markov yenileme süreci, ilk önce Pyke (1961) tarafından tanımlanmıştır. Yarı Markov süreçleri, birçok rastgele süreç sınıfının tanımlanmasına yardımcı olan çeşitli modifikasyonların ve genellemelerin yolunu açmaktadır. Yenileme süreçleri, ödüllü yenileme süreçleri, rasgele yürüyüş süreçleri, Markov ve yarı Markov süreçleri; servis sistemleri, yedek sistemleri, stok kontrol, matematiksel sigorta, kuyruk teorisi, matematiksel biyoloji, güvenirlilik, stokastik finans ve fizik gibi alanlardaki problemleri modellemek için doğal bir yol sunmaktadır. Bu süreçlerle ilgili birçok değerli çalışma bulunmaktadır (Aliyev vd., 2016a; Alsmeyer, 1991; Brown ve Solomon, 1975; Borovkov, 1984; Chang ve Peres, 1997; Feller, 1971; Gihman ve Skorokhod, 1975; Hanalioglu ve Khaniyev, 2019; Janseen ve Leeuwarden, 2007; Khaniyev ve Mammadova, 2006; Lotov, 1996; Siegmund, 1979; vb.). Daha eski çalışmalarda süreçlerin incelenmesi daha çok analitik ve teorik iken, ilerleyen yıllardaki çalışmalar uygulamaya yatkın yaklaşımlar içermektedir. Bahsi geçen süreçlerle ilgili çalışmalar genelde, yenileme fonksiyonu, rasgele yürüyüşün maksimumu, limitteki davranış, sınır fonksiyonelleri ve ergodiklik gibi konular üzerine yoğunlaşmaktadır.

Yenileme fonksiyonu; yenileme süreçleri, ödüllü yenileme süreçleri ve rasgele yürüyüş süreçleri gibi süreçlerde önemli bir rol oynamaktadır. Feller (1971), Laplace-Stieltjes dönüşümü yardımıyla kullanımı daha kolay olan Markov yenileme denklemini vermiştir. Brown ve Solomon (1975), yenileme sürecinin varyansı için asimtotik açılım elde etmiştir. Yenileme fonksiyonu ile ilgili detaylı bir araştırma ve çalışma tezin EK A bölümünde bulunmaktadır. $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ rasgele değişkenleri $-\beta < 0$ negatif beklenen değer ve 1 varyansı ile Normal dağılsın. $S_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n, S_0 = 0$ olsun. $\{S_n : n \geq 0\}$ süreci Gauss rasgele yürüyüş süreci olarak tanımlanmaktadır. Janssen ve Leeuwaarden (2007a), rasgele yürüyüşün maksimumunun $M = \max\{S_n : n \geq 0\}$ beklenen değeri ve varyansı için kesin ifadeler elde etmiştir. Buldukları ifadeler, katsayıları Riemann zeta fonksiyonlarını barındıran $\beta = 0$'a göre Taylor serisi şeklindedir. Janssen ve Leeuwaarden (2007b), maksimumun tüm kümülantları için kesin ve asimtotik sonuçlar elde etmiştir. Ancak bulduğu asimtotik açılımlar ile kesin ifadeler arasındaki farkların $\beta > 0.5$ olduğu takdirde arttığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda, Gökpınar vd. (2013), $\beta \in (0.5, 3.2]$ olduğu durumda meta modelleme tekniğiyle Gauss rasgele yürüyüşünün maksimumunun ilk dört momenti için yaklaşık ifadeler elde etmiştir. Ayrıca, $Y(\beta) \equiv 2\beta M$ dönüşümünün dağılımı için zayıf yakınsama teoremini ispatlamış ve limit dağılımının kesin ifadesini bulmuştur. M'nin dağılımı, uygulamalı olasılığın çeşitli alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle kuyruk teorisinde, yük kritik seviyenin hemen altında olduğu, yoğun trafik diye adlandırılan durumlarda kullanılmaktadır. M'nin kuyruk dağılımı ise sıralı analiz ve risk teorisinde önemlidir. Khorsunov (1997), rasgele yürüyüşün maksimumunun kuyruk dağılımı ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. Diğer yandan, rasgele yürüyüşün maksimumu ve ilk merdiven yüksekliği, özel bir durum olan Gauss rasgele yürüyüşün dışında keyfi dağılıma sahip artışlı rasgele yürüyüşler için de incelenmiştir. Blanchet ve Glynn (2006), Gauss olmayan rasgele yürüyüş süreçlerinin ilk basamak yüksekliği ve maksimumun beklenen değeri için Taylor serisi açılımları vermiştir. Bulduğu sonuçlar, bir bakıma Siegmund (1979) ve Chang ve Peres (1997)'in bulgularının genelleştirilmişidir. Blanchet ve Glynn (2006)'nın sonuçlarının en büyük katkısı rasgele yürüyüşün maksimumunun yaklaşık formüllerinin kesin ifadelere yakınlığıdır. $\{S_n: n \geq 0\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ilk defa pozitif değer aldığı zaman $\nu_1^+ = \min\{n \geq 1: S_n > 0\}$ birinci basamak anı olarak adlandırılmaktadır. Bu takdirde, $\chi_1^+ \equiv S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i$ birinci basamak yüksekliği olarak tanımlanmaktadır. Birinci basamak yüksekliği kavramı rasgele yürüyüş süreçlerinin teorisi ve uygulaması ile ilgili literatüründe önemli bir yere sahiptir (Rogozin, 1964; Feller, 1971; Siegmund, 1979). Bahsedilen çalışmaların önemli bir kısmında temel yaklaşım olarak Wiener-Hopf faktorizasyon yöntemi kullanılmaktadır. Bazı bilinmeyen fonksiyonlar $r_{z\pm}(\lambda) = 1 - E\left\{z^{\nu_1^\pm} \exp\left(\lambda\chi_1^\pm\right); \nu_1^\pm < \infty\right\}$ şeklinde yine bilinmeyen faktorizasyon bileşenleri olarak ifade edilebilmektedir. Burada $\nu_1^\pm$ ve $\chi_1^\pm$, sırasıyla birinci basamak anı ve yüksekliğidir. $r_{z\pm}(\lambda)$ fonksiyonu, $Re(\lambda) = 0$, $|z| \leq 1$ koşullarını ve Wiener-Hopf faktorizasyonu olarak adlandırılan $r_{z+}(\lambda) r_{z-}(\lambda) = r_z(\lambda) \equiv 1 - zE\{\exp(\lambda\eta_1)\}$ ilişkiyi sağlamaktadır. Bu bağlamda, Spitzer (1964) literatüre Spitzer Özdeşliğini kazandırmış ve aşağıdaki ifadeyi elde etmiştir:

$$r_{z\pm}(\lambda) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} E\{\exp(\lambda S_n);\ \pm S_n \geq 0\}\right\}, Re(\lambda) = 0, |z| \leq 1.$$

Alsmeyer (1991) ve Grübel (1988), $r_{z\pm}(\lambda)$'nın gösterimini kolaylaştıran çalışmalar yapmış ve harmonik yenileme ölçütleri ile Wiener-Hopf faktorizasyonu üzerine sonuçlar bulmuşturlar. Alsmeyer (1991), $E(\eta_1 > 0)$ iken ve x sonsuza giderken

$U_{\mathrm{H}}(x) = \log(x/\mu) + \gamma + o(1)$ asimtotik açılımını bulmuştur. Burada, $U_{\mathrm{H}}(x)$ harmonik yenileme fonksiyonu ve γ Euler katsayısıdır. Lotov (1996), Wiener-Hopf faktorizasyonu gösterimi üzerine değerli bir çalışma yapmış ve normal dağılıma sahip ($\eta_n \in Normal(a, \sigma^2)$) toplamlardan oluşan rasgele yürüyüş süreci için gösterimi sonsuz çarpım ile ifade etmiştir. Hadamard teoreminin uygulayarak bulduğu ifade aşağıdaki gibidir:

$$r_z\left(\frac{\lambda}{\sigma} - \frac{a}{\sigma^2}\right) \equiv 1 - zexp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) = \exp(b_0 + b_1\lambda^2)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2(z)}\right)\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2(z)}\right).$$

Faktorizasyon bileşenleri için bulduğu yeni gösterim birinci basamak yüksekliği χ_1^+'nin momentlerini bulmak konusunda kolaylık sağlamaktadır. Bu şekilde Lotov (1996), Gauss rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak yüksekliğinin momentleri ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. Özellikle Gauss rasgele yürüyüş süreçlerinin birinci basamak yüksekliğinin momentleri ile ilgili birçok değerli çalışma bulunmaktadır. Siegmund (1979)'un bu konu üzerine önemli bir bulgusu bulunmaktadır. Birinci basamak yüksekliğinin momentleri için $\alpha \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılımı elde etmiştir:

$$\mu_k(\alpha) \equiv E_\alpha\left(S_{\nu_1^+}^k\right) = E_0\left(S_{\nu_1^+}^k\right) + \frac{k}{k+1}E_0\left(S_{\nu_1^+}^{k+1}\right)\alpha + o(\alpha).$$

Burada,

$$\mu_k(0) \equiv E_0\left(S_{\nu_1^+}^k\right) = E_0\left(\chi_1^{+k}\right), \chi_1^+ \equiv S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+}\eta_i\,, \nu_1^+ \equiv \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}.$$

Lotov (1996), Hadamard açılımlarını kullanarak Gauss rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak yüksekliğinin ilk üç momenti için aşağıdaki kesin ifadeleri elde etmiştir:

$$\mu_1(0) \equiv E_0\left(S_{\nu_1^+}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106\ldots, \mu_2(0) \equiv E_0\left(S_{\nu_1^+}^2\right) = \frac{L}{\sqrt{\pi}} = 0.823916\ldots,$$

$$\mu_3(0) \equiv E_0\left(S_{\nu_1^+}^3\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8\pi}(\pi + 2L^2) = 1.250307\ldots$$

Burada $L = \lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n} - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = 1.460313\ldots$'tür.

Chang ve Peres (1997), Riemann zeta fonksiyonunu kullanarak Gauss rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak yüksekliğinin ilk dört momenti için aşağıdaki kesin ifadeleri elde etmiştir:

$$\mu_1(0) \equiv E_0\left(S_{\nu_1^+}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106\ldots;$$

$$\mu_2(0) \equiv E_0\left(S^2_{\nu_1^+}\right) = -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 0.823916\ldots;$$

$$\mu_3(0) \equiv E_0\left(S^3_{\nu_1^+}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4} + \frac{\zeta^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\right) = 1.250347\ldots;$$

$$\mu_4(0) \equiv E_0\left(S^4_{\nu_1^+}\right) = \frac{\zeta(3/2)}{\pi^{3/2}} - \frac{\zeta^3(1/2)}{\pi^{3/2}} - \frac{3\zeta(1/2)}{2\sqrt{\pi}} = 2.264330\ldots$$

Burada $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ Riemann zeta fonksiyonu, $\zeta(1/2) = -1.460313\ldots$ ve $\zeta(3/2) = 2.612226\ldots$'dır.

Nagaev (2010) ise bir adım daha ileriye taşımış ve Gauss rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak yüksekliğinin ilk beş momenti için kesin ifadeleri bulmuştur.

Yenileme süreçleri, ödüllü yenileme süreçleri, rasgele yürüyüş süreçleri, Markov ve yarı Markov süreçlerin limitteki davranışları stokastik süreçler teorisinin temel problemlerinden biridir. $X_n, n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenlerinin dağılımının X rasgele değişkeninin dağılımına yakınsaması, olasılık teorisinde zayıf yakınsama olarak adlandırılmaktadır. Hem pratik hem de teorik bakımdan yarı-Markov süreçler için ergodik teoremler ve süreçlerin ergodik dağılımları oldukça önemlidir. Gihman ve Skorohod (1975), yarı Markov süreçleri için genel ergodik teoremi ispatlamıştır.

Bu çalışmada, genel müdahaleli rasgele yürüyüş süreci incelenmiştir. Literatürde bu süreçlerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalar, farklı dağılımlara sahip müdahaleli rasgele yürüyüş süreçlerin limitteki davranışlarını ve asimtotik yaklaşımlarla elde edilen olasılıksal karakteristiklerini incelemek üzerinedir. Kesemen vd. (2013), Weibull dağılımına sahip müdahaleli rasgele yürüyüş sürecini, Aliyev vd. (2016b), yansıtan bariyerli rasgele yürüyüş sürecini ele alarak, zayıf yakınsama teoremini ispatlamış ve ergodik dağılımın limitteki formunu bulmuştur. Gökpınar vd. (2013), Gauss rasgele yürüyüş sürecinin maksimumunun dağılımı için zayıf yakınsama teoremini ispatlamıştır. Hanalioglu vd. (2015), normal dağılımlı müdahaleli rasgele yürüyüş sürecini ele almış, standartlaştırılmış sürecin ergodik dağılımının düzgün dağılıma zayıf yakınsadığını ispatlamıştır. Özel müdahalelerin ele alındığı diğer çalışmalar genel olarak ergodik momentlerin asimtotik açılımları üzerinedir. Khaniyev ve Kucuk (2004), $\beta > 0$ ve 0 şeklinde iki bariyerli ve normal dağılımlı toplamlara sahip rasgele yürüyüş sürecini ele almışlardır. Burada, β herhangi bir pozitif reel sayıdır. $\beta \to \infty$ iken ergodik dağılımın ilk dört momenti için asimtotik sonuçlar elde etmiş ve Monte Carlo simülasyon yöntemiyle bulunan yaklaşık formüllerin kesin ifadelerle yakınlığını test etmişlerdir. Khaniyev ve Mammadova (2006), genelleştirilmiş (s,S) tipli modeli Normal dağılıma sahip müdahaleli rasgele yürüyüş süreci ile incelemiştir. $S-s\to\infty$ iken sürecin ilk dört ergodik momenti için asimtotik açılımlar elde etmiş, Monte Carlo simülasyon denemeleriyle $S-s$ küçük değerler aldığında dahi kesin ifadelere çok yakın sonuçlar bulduklarını göstermişlerdir. Khaniyev vd. (2008), müdahalenin üstel dağılımına, Aliyev vd. (2009), müdahalenin Gamma dağılıma sahip olduğu durumda yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini ele almışlar ve ergodik momentler için asimtotik açılımlar elde etmişlerdir. Aliyev vd. (2010), (s,S) tipli kesikli şans karışımlı bir yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini incelemişlerdir. Kesikli şans karışımlı rasgele değişkeninin simetrik üçgensel dağıldığı, $[s,S]$ aralığında değer aldığı ve merkezinin $(S+s)/2$ olduğu durumu ele almışlardır. $(S-s)/2\to\infty$ iken ergodik dağılımın ilk dört momenti için üç terimli asimtotik açılımlar elde ederek gerçek formüllerle de oldukça yakın olduklarını tespit etmişlerdir. Aliyev vd. (2014), müdahalenin Weibull dağılımına sahip olduğu durumda yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini incelemiş ve sürecin ergodikliğini ispat etmişlerdir. Basit özdeşliği kullanarak sürecin karakteristik fonksiyonunu, $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristikleri yardımıyla ifade etmişlerdir. Ayrıca, sürecin ilk dört momentinin asimtotik açılımlarını elde etmişlerdir. Bu çalışmada, bahsi geçen çalışmaların hepsinin bir çatı altında toplanması amaçlanmaktadır. Böylece, diğer çalışmalar bazı özel durumlar (normal dağılım gibi) dışında bizim çalışmamızın özel bir durumu haline gelmektedir.

2. $X(t)$ SÜRECİNİN MATEMATİKSEL KURULUŞU

$\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$ aynı $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız rasgele değişken dizileri olsunlar. ξ_n ve ζ_n rasgele değişkenleri sadece pozitif değerler alabilirken, η_n rasgele değişkeni hem pozitif hem de negatif değerler alabilsin. ξ_n, η_n ve ζ_n rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}; F(x) = P\{\eta_1 \leq x\};$$

$$\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}; t \geq 0; z > 0; x \in (-\infty, \infty).$$

$\{T_n\}$ yenileme dizisini aşağıdaki tanımlansın:

$$T_0 = 0; T_1 = \xi_1; T_2 = \xi_1 + \xi_2; \dots; T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, , n = 1,2, \dots$$

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecini aşağıdaki tanımlansın:

$$S_0 = 0; S_1 = \eta_1; S_2 = \eta_1 + \eta_2; \dots; S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, ; \; n = 1,2, \dots$$

Ayrıca aşağıdaki tam değerli rasgele değişkenler dizisi tanımlansın:

$$N_0 = 0; N_1 = N(\lambda z) = inf\{n \geq 1: \lambda z - S_k > 0, k = \overline{1, n-1}; \lambda z - S_n \leq 0\};$$

$$N_2 = N_2(\lambda\zeta_1) = inf\{n \geq 1: \lambda\zeta_1 - \left(S_{N_1+k} - S_{N_1}\right) > 0, k = \overline{1, n-1};$$

$$\lambda\zeta_1 - \left(S_{N_1+n} - S_{N_1}\right) \leq 0\};$$

$$N_{m+1} = N_{m+1}(\lambda\zeta_m) = inf\{n \geq 1: \lambda\zeta_m - \left(S_{L_m+k} - S_{L_m}\right) > 0, k = \overline{1, n-1};$$

$$\lambda\zeta_m - \left(S_{L_m+n} - S_{L_m}\right) \leq 0\},$$

burada $L_m = N_1 + N_2 + \dots + N_m; m = 1,2, \dots$' dir ve $inf(\emptyset) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir. N_m rasgele değişkeninden yararlanarak aşağıdaki pozitif rasgele değişkenler inşa edilsin:

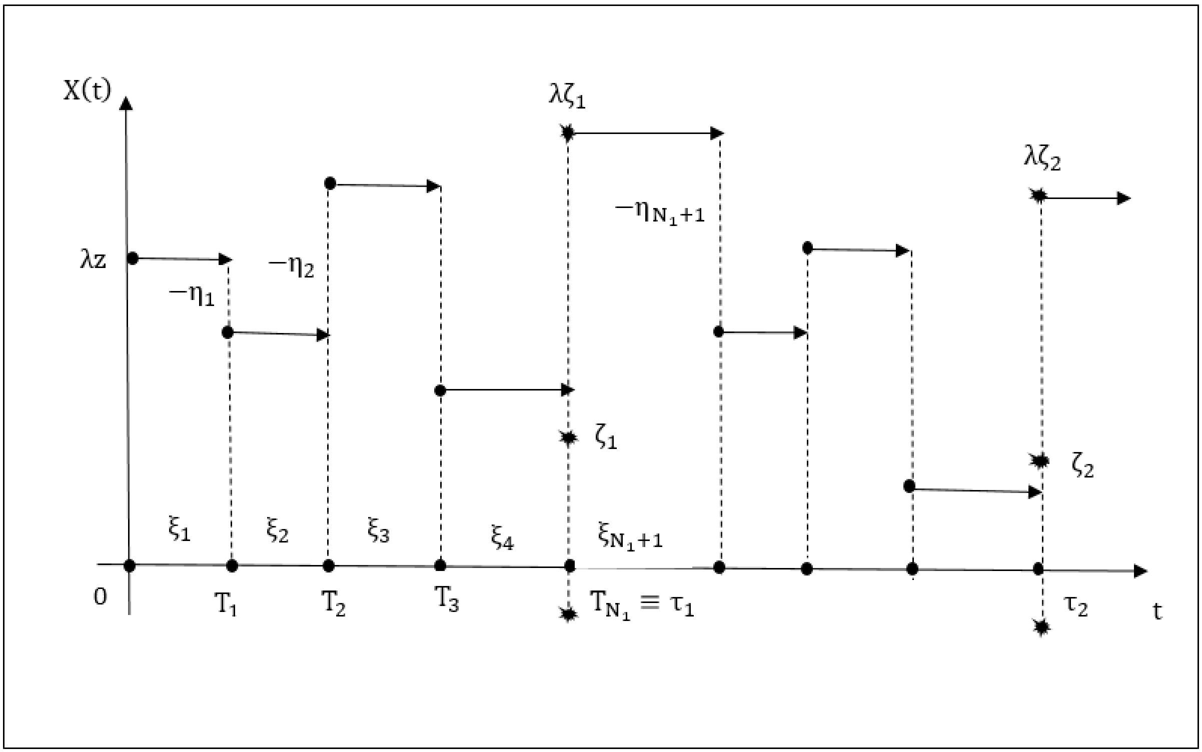
$$\tau_0 = 0; \tau_1 = \tau_1(\lambda z) = T_{N(\lambda z)} = \sum_{i=1}^{N(\lambda z)} \xi_i \,; \tau_m = T_{L_m} = \sum_{i=1}^{L_m} \xi_i \,; m = 1,2, \ldots$$

Ayrıca, $\nu(t) = max\{n \geq 0: T_n \leq t\}, t > 0$ olsun. Burada $\nu(t)$, t anına kadar olan sıçrama sayısına karşılık gelir. $\nu(t)$'ye $\{\xi_n\}$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme süreci de denir.

Verilen tanımlarla $X(t)$ stokastik sürecini aşağıdaki gibi vermek mümkündür:

$$X(t) = \lambda\zeta_{m-1} - \left(S_{\nu(t)} - S_{L_{m-1}}\right), \tau_{m-1} \leq t < \tau_m;\ m = 1,2, \ldots$$

Burada, $S_{\nu(\tau_m)} = S_{N_m}, \zeta_0 = z$ ve $\lambda > 0$'dır. $X(t)$ sürecinin bir görünümü Şekil 2.1' deki gibidir:



Şekil 2.1. $X(t)$ sürecinin bir görünümü

Bu çalışmada, $\{\zeta_n\}, n = 1,2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi keyfi bir dağılıma sahip olabileceği için $X(t)$ stokastik süreci "Genel Müdahaleli Rasgele Yürüyüş Süreci" olarak adlandırılmaktadır.

3. $X(t)$ SÜRECİNİN ERGODİKLİĞİ

$t \to \infty$ iken bir boyutlu dağılımın davranışını incelemek için $X(t)$ sürecinin ergodik karakteristikleri bu bölümde incelenecektir. Bu nedenle sürecin bazı koşullar altında ergodik olduğu ispatlanacaktır.

Yardımcı Teorem 3.1. (Aliyev vd. 2016a) Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $g(x)$ sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun,

(ii) $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olsun.

Bu takdirde $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik ilişki yazılabilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} g(\lambda z)\, d\pi(z) \longrightarrow 0.$$

İspat. İspata geçmeden önce kısalık için aşağıdaki notasyon verilsin:

$$G(\lambda) = \int_{z=0}^{\infty} g(\lambda z)\, d\pi(z). \tag{3.1}$$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ koşulu göz önüne alındığında her $\varepsilon > 0$ için öyle bir sonlu T değeri seçmek mümkündür ki, $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliği her $x \geq T$ için sağlansın. $z^* \equiv \frac{T}{\lambda}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde,

(3.1) eşitliği işlemlerde kolaylık açısından aşağıdaki gibi ikiye ayrılsın:

$$G(\lambda) = \int_{0}^{z^*} g(\lambda z) d\pi(z) + \int_{z^*}^{\infty} g(\lambda z) d\pi(z). \tag{3.2}$$

$G_1(\lambda) = \int_0^{z^*} g(\lambda z) d\pi(z)$ ve $G_2(\lambda) = \int_{z^*}^{\infty} g(\lambda z) d\pi(z)$ olsun.

(3.2) eşitliğindeki $\mathrm{G}_2(\lambda)$ ifadesi aşağıdaki gibi incelenebilir:

$$|G_2(\lambda)| \leq \int_{z^*}^{\infty} |g(\lambda z)| d\pi(z) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{z^*}^{\infty} d\pi(z) = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \pi(z^*)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

(3.2) eşitliğindeki $G_1(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$|G_1(\lambda)| \leq \int_0^{z^*} |g(\lambda z)| d\pi(z) \leq H \int_0^{z^*} d\pi(z).$$

Burada $\pi(0) = 0, T$ sabit ve $\lambda \to \infty$ olduğu için λ'yı o kadar büyük seçmek mümkündür ki $\pi(T/\lambda) \leq \varepsilon/2H$ olur. Bu takdirde,

$$|G_1(\lambda)| \leq H\pi(z^*) = H\pi\left(\frac{T}{\lambda}\right) \leq H\frac{\varepsilon}{2H} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Burada $H = \sup_{x \in R^+} |g(x)| < \infty$'dur.

(3.3) ve (3.4) eşitlikleri (3.2) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$|G(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dolayısıyla $\lim_{\lambda \to \infty} G(\lambda) = 0$ olur veya $\lambda \to \infty$ iken $\int_{z=0}^{\infty} g(\lambda z)\, d\pi(z) \longrightarrow 0$ olur.

Böylece Yardımcı Teorem 3.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1. $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$ başlangıç rasgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları sağlasın:

i) $0 < E(\xi_1) < \infty$;

ii) $E(\eta_1) > 0$;

iii) $E(\eta_1^2) < \infty$;

iv) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişken;

v) $E(\zeta_1) < \infty$.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat. İncelenen $X(t)$ süreci literatürde "Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler sınıfı" olarak bilinen geniş bir sınıfın üyesidir. Bu önemli kavramın literatüre kazandırılması A. N. Kolmogorov tarafından yapılmış ve birçok değerli araştırmacı tarafından çalışılmış ve geliştirilmiştir. Bu süreçlerin ergodikliği büyük önem arz etmektedir. Bahsedilen sınıf için genel ergodik teoremi Gihman ve Skorohod (1975) tarafından ispat edilmiştir. Genel ergodik teoremine göre aşağıdaki iki varsayımın verilen koşullar altında ispatlanması gerekmektedir (Gihman ve Skorohod, 1975, s. 243).

Varsayım 1. Bu varsayımda $X(t)$ sürecinin içine gömülü bir ergodik Markov zinciri olmalıdır. Böyle bir Markov zinciri oluşturabilmek için monoton artan bir rasgele değişkenler dizisi tanımlamak önceliktir. Sürecin kuruluşunda verilen τ_n rasgele değişkeni bu bağlamda kullanılabilir çünkü tanımı gereği 1 olasılığı ile $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \tau_{n+1} < \cdots < \infty$'dur. Burada τ_n rasgele değişkeni $X(t)$ sürecinin ardışık şekilde sıfıra düşme anlarına karşılık gelmektedir. $X(t)$ sürecinin bu rasgele artan zaman anlarında aldığı değerler $X(\tau_n) = \lambda\zeta_n$'dir. Rasgele artan zaman anları $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \tau_{n+1} < \cdots < \infty)$ dizisi seçildiği takdirde, bu anlarda sürecin aldığı değerler $(X(\tau_1) = \lambda\zeta_1;\ X(\tau_2) = \lambda\zeta_2; \ldots; X(\tau_n) = \lambda\zeta_n; \ldots)$ ergodik Markov zinciri oluşturur. Çünkü $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi sürecin tanımı gereği ergodik Markov zinciridir. Böylece Teorem 1'in koşulları altında birinci varsayım sağlanmış olur.

Varsayım 2. Teorem 3.1'in koşulları altında $\{\tau_n\}, n = 1,2, \ldots$ Markov momentleri arasında geçen sürenin beklenen değeri sonlu olmalıdır. Yani,

$$E(\tau_1) \equiv E\big(\tau_1(\lambda z)\big) < \infty;\ E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty, n = 2, 3 \ldots \tag{3.5}$$

olmalıdır. Bir diğer deyişle,

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv E\big(\tau_1(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty E\big(\tau_1(\lambda z)\big) d\pi(z)\,, n = 2,3, \ldots \tag{3.6}$$

olmalıdır.

Wald özdeşliği (Feller, 1971) kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$E(\tau_1) \equiv E\big(\tau_1(\lambda z)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{N(\lambda z)} \xi_i\right) = E(\xi_1)E\big(N(\lambda z)\big). \tag{3.7}$$

(3.7) eşitliği (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv E\big(\tau_1(\lambda\zeta_1)\big) = E(\xi_1) \int_0^\infty E\big(N(\lambda z)\big)\, d\pi(z), n = 2,3, \ldots \tag{3.8}$$

Teorem 3.1'in varsayımları incelenecek olursa $E(\xi_1) < \infty$'dur. (3.5) koşulunun sağlanması için (3.7) ve (3.8) eşitlikleri dikkate alınmalıdır. Bu nedenle aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması gerekmektedir:

$$E\big(N(\lambda z)\big) < \infty, \int_0^{\infty} E\big(N(\lambda z)\big)\, d\pi(z) < \infty. \tag{3.9}$$

Bu aşamada bazı tanımlar vermek gerekmektedir. $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı (ν_1^+) ve birinci basamak yüksekliği (χ_1^+) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}\,;\ \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i$$

$\{(\nu_n^+; \chi_n^+), n = 2,3, \dots\}$ rasgele değişken çiftleri $(\nu_1^+; \chi_1^+)$ rasgele değişken çifti ile aynı dağılıma sahip ve bağımsız rasgele değişkenler olsunlar (Feller, 1971). Bu tanımların ışığında Dynkin prensibine (Rogozin, 1964) göre $N(\lambda z)$ ve $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$N(\lambda z) = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \nu_i^+\,;\ S_{N(\lambda z)} = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+. \tag{3.10}$$

Burada, $H(\lambda z) = \min\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > \lambda z\}, z > 0$' tir. $H(x)$ fonksiyonu $\{\chi_i^+\}, i \geq 1$ basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme sürecidir. (3.10) eşitliğinden faydalanarak $E\big(N(\lambda z)\big)$'ye Wald özdeşliği uygulandığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E\big(N(\lambda z)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \nu_i^+\right) = E(\nu_1^+)E\big(H(\lambda z)\big) = E(\nu_1^+)U_+(\lambda z). \tag{3.11}$$

Burada $U_+(\lambda z) \equiv E\big(H(\lambda z)\big)$'dir.

Her sonlu z için $E\big(H(\lambda z)\big) \equiv U_+(\lambda z)$ sonludur (Feller, 1971, s. 359). Teorem 3.1'in $E(\eta_1) > 0$ koşuluna göre $E(\nu_1^+) < \infty$ 'dur. $U_+(\lambda z)$ yenileme fonksiyonu da sonlu olduğu için $E\big(N(\lambda z)\big)$ de sonludur.

(3.9) eşitliğindeki ikinci eşitsizliğin de sağlandığını göstermek için aşağıdaki eşitsizliğin ispatlanması gerekmektedir:

$$E\big(U_+(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^{\infty} U_+(\lambda z)\, d\pi(z) < \infty. \tag{3.12}$$

Teorem 3.1'in varsayımları altında $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$'dur. Bu bilgiler ışığında yenileme teoremine (Feller, 1971) göre $\lambda \to \infty$ iken $U_+(\lambda z)$ yenileme fonksiyonunun açılımı aşağıdaki gibidir:

$$U_+(\lambda z) = \frac{\lambda z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + g(\lambda z). \tag{3.13}$$

Burada, $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2$ ve $g(x)$ fonksiyonu Yardımcı Teorem 3.1'de ifade edildiği gibidir.

(3.13) eşitliği (3.12) eşitliğinde yerine koyulduğunda,

$$E\big(U_+(\lambda\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty U_+(\lambda z)\, d\pi(z) = \int_0^\infty \frac{\lambda z}{\mu_1} d\pi(z) + \int_0^\infty \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} d\pi(z) + \int_0^\infty g(\lambda z)\, d\pi(z)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1'den faydalanıldığında $\lambda \to \infty$ iken $\int_0^\infty g(\lambda z)\, d\pi(z) = o(1)$ olduğu bilinmektedir. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $E\big(U_+(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$E\big(U_+(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{\lambda\beta_1}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1).$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta_1)$'dir.

Teorem 3.1'in varsayımların birinin $\beta_1 \equiv E(\zeta_1) < \infty$ olduğu görülmektedir. Ayrıca $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$ olduğu bilinmektedir. Bu takdirde, $E\big(U_+(\lambda\zeta_1)\big)$ de sonludur. Dolayısıyla, $E(\tau_1) \equiv E\big(\tau_1(\lambda z)\big)$ ve $E(\tau_n - \tau_{n-1}), n = 2, 3 \ldots$ sonludur. Böylelikle ikinci varsayım sağlanmış olur. İki varsayım da sağlandığına göre genel erdodiklik teoremi ispatlanmış olur. Sonuç olarak $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem 3.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1'in koşulları altında $X(t)$ sürecinin zaman ortalamasının durum ortalamasına 1 olasılığı ile yakınsadığı gösterilebilmektedir. Bu özellik aşağıdaki teorem yardımıyla ifade edilebilir.

Teorem 3.2. Teorem 3.1' in koşulları sağlansın. Bu takdirde her sınırlı ve ölçülebilir $f(x)(f\colon [0,\infty) \to R)$ fonksiyonu için aşağıdaki ilişki 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)\, du = \frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)} \int_0^\infty f(x)\, d_x\Big(E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big)\Big).$$

Burada,

$$E\big(N(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty E\big(N(\lambda z)\big)\, d\pi(z);$$

$$E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty A(x,\lambda z) d\pi(z)\,;\; A(x,\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,\lambda z)\,;$$

$$a_n(x,\lambda z) = P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \le x\}; n \ge 1; x,z > 0.$$

İspat. Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler için genel ergodik teoremine (Gihman ve Skorohod, 1975, s. 243) göre her sınırlı ve ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile sağlanır:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)\, du = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z)$$

$$= \frac{1}{E(\tau_1)}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) d_x G(t,x,\lambda z) dt d\pi(z). \qquad (3.14)$$

Burada $G(t,x,\lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\} \equiv P\{\tau_1 > t; X(t) \le x | X(0) = \lambda z\}$'dir ve $G(t,x,\lambda z)$ için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$G(t,x,\lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\big\{\nu(t) = n; T_{N(\lambda z)} > t; X(t) \le x\big\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\big\{T_n \le t < T_{n+1}; T_{N(\lambda z)} > t; X(t) \le x\big\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\big\{T_n \le t < T_{n+1}; N(\lambda z) > n; T_{N(\lambda z)} > t; X(t) \le x\big\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}; N(\lambda z) > n; \lambda z - S_n \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t < T_{n+1}; \lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Phi^{*n}(t) - \Phi^{*(n+1)}(t)\right) a_n(x, \lambda z). \tag{3.15}$$

Burada,

$$a_n(x, \lambda z) = P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \leq x\};\ a_0(x, \lambda z) = \varepsilon(x - \lambda z);$$

$$\Phi^{*n}(t) = P\{T_n \leq t\};\ \Phi^{*0}(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, n = 1,2, \ldots$$

(3.15) eşitliğine t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulandığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tilde{G}(\gamma, x, \lambda z) = \frac{1 - \varphi(\gamma)}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi(\gamma)\right)^n a_n(x, \lambda z), \gamma > 0. \tag{3.16}$$

Burada,

$$\tilde{G}(\gamma, x, \lambda z) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} G(t, x, \lambda z)\, dt \text{ ve } \varphi(\gamma) \equiv E\left(e^{-\gamma \xi_1}\right), (\gamma > 0).$$

Not edelim ki, $\tilde{G}(\gamma, x, \lambda z)$, $G(t, x, \lambda z)$'nin Laplace dönüşümünü; $\varphi(\gamma)$ ise $\Phi(t)$ dağılımının Laplace Stiltijes dönüşümünü göstermektedir.

Teorem 3.1'in varsayımlarına göre $E(\xi_1) < \infty$ olduğu için $\lim_{\gamma \to 0} \frac{1-\varphi(\gamma)}{\gamma} = E(\xi_1)$ şeklinde yazılabilmektedir. (3.16) eşitliğinin her iki tarafında $\gamma \to 0$ iken limite geçildiği taktirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tilde{G}(0, x, \lambda z) \equiv \int_0^{\infty} G(t, x, \lambda z)\, dt = E(\xi_1) A(x, \lambda z). \tag{3.17}$$

Teorem 3.1'in koşulları altında her $x > 0$, $z > 0$ ve $\lambda > 0$ için $A(x, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, \lambda z) \leq E\left(N(\lambda z)\right) < \infty$'dur. (3.17) eşitliğinin her iki tarafının 0'dan ∞'a kadar $\pi(z)$'ye göre integrali alındığı takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^\infty \tilde{G}(0,x,\lambda z)d\pi(z) = E(\xi_1)\int_0^\infty A(x,\lambda z)\,d\pi(z).$$

Bu aşamada $\int_0^\infty A(x,\lambda z)\,d\pi(z) = E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big)$ bilgisi yardımıyla aşağıdaki eşitlik verilebilir:

$$\int_0^\infty \tilde{G}(0,x,\lambda z)d\pi(z) = E(\xi_1)E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big). \tag{3.18}$$

(3.18) eşitliği (3.14) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\xi_1)E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)}\int_0^\infty f(x)\,E(\xi_1)d_x\left(E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big)\right)$$

$$= \frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)}\int_0^\infty f(x)\,d_x\left(E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big)\right). \tag{3.19}$$

Teorem 3.2’nin ispatı tamamlanmış olur. ∎

Teorem 3.2’de elde edilen ifade birçok değerli bilgiye ulaşılmasına yardımcı olmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda sonuç olarak verilmiştir.

Sonuç 3.1. Teorem 3.1’in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ aşağıdaki gibi verilebilir:

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t)\le x\} = \frac{E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big)}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)}. \tag{3.20}$$

Burada,

$$E\big(N(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty E\big(N(\lambda z)\big)\,d\pi(z);$$

$$E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty A(x,\lambda z)d\pi(z)\,;\ A(x,\lambda z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x,\lambda z)\,;$$

$$a_n(x,\lambda z) = P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \le x\}; n\ge 1; x,z>0.$$

İspat. Teorem 3.2 yardımıyla ispat edilebilir. (3.19) eşitliğinde $f(x)$ fonksiyonu yerine indikatör fonksiyonu koyularak (3.20) eşitliği elde edilebilmektedir.

Sonuç 3.2. Teorem 3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta)$ aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\theta X(t)}\right) = \frac{E\left(A^*(\theta,\lambda\zeta_1)\right)}{E\left(N(\lambda\zeta_1)\right)}. \tag{3.21}$$

Burada,

$$E\left(A^*(\theta,\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^\infty e^{i\theta x}\, d_x\left(E\left(A(x,\lambda\zeta_1)\right)\right).$$

İspat. Teorem 3.2 yardımıyla ispat edilebilir. (3.19) eşitliğinde $f(x)$ fonksiyonu yerine sırasıyla $\cos(\theta x)$ ve $\sin(\theta x)$ fonksiyonu koyularak ve $\cos(\theta x) + i\sin(\theta x) = e^{i\theta x}$ şeklinde Euler eşitliği uygulanarak (3.21) eşitliği elde edilebilmektedir.

Not 3.1. Görüldüğü gibi $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$'in ve $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta)$'nın sırasıyla (3.20) ve (3.21) eşitliklerindeki ifadelerinde ortak olarak $A(x,z)$ fonksiyonu görülmektedir. Bu fonksiyon özel ve kolay durumlarda bile elde edilmesi güç bir fonksiyondur. İfadeyi daha rahatlatmak amacıyla rasgele yürüyüş sürecinin temel özdeşliği (Feller, 1971, s. 600) kullanılabilmektedir. Bu bağlamda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta)$, sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu yardımıyla Önerme 3.1 ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

Önerme 3.1. (Khaniyev, 2003) Teorem 3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir ($\theta \in \backslash\{0\}$):

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\theta X(t)}\right) = \frac{1}{E\left(N(\lambda\zeta_1)\right)}\int_0^\infty e^{i\theta\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}\, d\pi(z). \tag{3.22}$$

Burada,

$$S_{N(\lambda\zeta_1)} = \sum_{i=1}^{N(\lambda\zeta_1)} \eta_i\, ; E\left(N(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^\infty E\left(N(\lambda z)\right) d\pi(z);$$

$$\varphi_\eta(-\theta) = E\left(e^{-i\theta\eta_1}\right);\ \varphi_{S_{N(\lambda\zeta_1)}}(-\theta) = E\left(e^{-i\theta S_{N(\lambda\zeta_1)}}\right); \pi(z) = P\{\zeta_1 \le z\}, z > 0.$$

İspat. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le x\} = \frac{E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big)}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)}.$$

Burada,

$$E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty A(x,\lambda z)d\pi(z)\,;\; A(x,\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,\lambda z)\,;$$

$$a_n(x,\lambda z) = P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \le x\}; n \ge 1; x, z > 0.$$

Bu durumda,

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f\big(X(u)\big)du = \lim_{t\to\infty} E\left(f\big(X(t)\big)\right) =$$

$$= \frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)} \int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} f(x)\, P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \in dx\}\, d\pi(z) \quad (3.23)$$

elde edilir.

(3.23) eşitliğinde $f(x)$ yerine $e^{-i\theta x}$ yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lim_{t\to\infty} E\big(e^{-i\theta X(t)}\big) = \frac{E\big(A^*(\theta,\lambda\zeta_1)\big)}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)}$$

$$= \frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)} \int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\theta x}\, P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \in dx\}\, d\pi(z). \quad (3.24)$$

Burada $E\big(A^*(\theta,\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty e^{i\theta x}\, d_x\left(E\big(A(x,\lambda\zeta_1)\big)\right)$ 'dir.

Bu aşamada aşağıdaki notasyonları dahil etmek gerekmektedir:

$$E_{\lambda z} = (-\infty; \lambda z];$$

$$d_n(I,\lambda z) = P\{S_k \in E_{\lambda z}; k = \overline{1, n-1}; S_n \in I\}; I \subseteq E'_{\lambda z};$$

$$d_0(I,\lambda z) = 0; I \subset E_{\lambda z};$$

$$c_n(I,\lambda z) = P\{S_1 \in E_{\lambda z}; \dots; S_{n-1} \in E_{\lambda z}; S_n \in I\}; I \subset E_{\lambda z};$$

$$c_0(I,\lambda z) = 0; I \subseteq E'_{\lambda z}. \tag{3.25}$$

Burada $E'_{\lambda z}$, $E_{\lambda z}$ kümesinin tümleyicisi olarak ifade edilmektedir.

(3.25) eşitliğindeki $d_n(I,\lambda z)$ ve $c_n(I,\lambda z)$ ifadelerinin $\{S_n\}, n \geq 1$ rasgele yürüyüşü ile yakından ilişkilidir. $d_n(I,\lambda z)$ aynı zamanda $d_n(I,\lambda z) = P\{N(\lambda z) = n; S_{N(\lambda z)} \in I\}; I \subseteq E'_{\lambda z}$ olarak ifade edilebilmektedir. Burada $N(\lambda z)$ rasgele yürüyüş ile doğrudan alakalıdır; $\{S_n\}, n \geq 1$ rasgele yürüyüşünün $E_{\lambda z} = (-\infty; \lambda z]$ zaman aralığından ilk çıkış anına karşılık gelir. $d_n(I,\lambda z)$ ve $c_n(I,\lambda z)$ arasındaki ilişkiyi daha iyi görebilmek adına aşağıda dönüşümleri verilmiştir:

$$\tilde{d}^*(s,-\theta,\lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{\lambda z}^{\infty} e^{-i\theta x} d_n(dx,\lambda z);$$

$$\tilde{c}^*(s,-\theta,\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{-\infty}^{\lambda z} e^{-i\theta v} c_n(dv,\lambda z). \tag{3.26}$$

Burada $\theta \in (-\infty,\infty)$ ve $s \in [-1,1]$'dir.

Bu aşamada kilit bir köprü görevi gören rasgele yürüyüş sürecinin temel özdeşliği kullanıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir (Feller, 1971, s. 600):

$$1 - \tilde{d}^*(s,-\theta,\lambda z) = \tilde{c}^*(s,-\theta,\lambda z)\left(1 - s\varphi_\eta(-\theta)\right). \tag{3.27}$$

Burada $\varphi_\eta(-\theta) = E\left(e^{-i\theta\eta_1}\right)$, η_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonudur. (3.27) eşitliğine göre,

$$\tilde{c}^*(s,-\theta,\lambda z) = \frac{1 - \tilde{d}^*(s,-\theta,\lambda z)}{1 - s\varphi_\eta(-\theta)} \tag{3.28}$$

elde edilir. $E(\eta_1) > 0$ ve z sonlu olduğuna göre aşağıdaki eşitsizlikler verilebilir:

$$\left|\tilde{d}^*(1,-\theta,\lambda z)\right| \leq 1;$$

$$|\tilde{c}^*(1,-\theta,\lambda z)| \leq E\left(N(\lambda z)\right) < +\infty.$$

Burada,

$$\tilde{d}^*(1,-\theta,\lambda z) = \lim_{s\to 1} \tilde{d}^*(s,-\theta,\lambda z)\tilde{c}^*(1,-\theta,\lambda z) = \lim_{s\to 1} \tilde{c}^*(1,-\theta,\lambda z).$$

Bu bilgiye dayanarak, (3.28) eşitliğinin $s \to 1$ iken limiti alındığı takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tilde{c}^*(1,\theta,\lambda z) = \frac{1-\tilde{d}^*(1,\theta,\lambda z)}{1-\varphi_\eta(\theta)}. \qquad (3.29)$$

Bu takdirde (3.26) eşitliğinin yardımıyla,

$$\tilde{d}^*(1,-\theta,\lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-i\theta x} P\{N(\lambda z)=n; S_{N(\lambda z)} \in dx\}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-i\theta x} P\{S_{N(\lambda z)} \in dx\} = E\left(e^{-i\theta S_{N(\lambda z)}}\right) = \varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta). \qquad (3.30)$$

(3.30) eşitliği (3.29) eşitliğinde dikkate alındığı takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tilde{c}^*(1,\theta,\lambda z) = \frac{1-\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)}{1-\varphi_\eta(\theta)}. \qquad (3.31)$$

(3.31) eşitliği (3.24) eşitliğinde yerine koyulduğunda,

$$E\left(A^*(\theta,\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^{\infty} e^{i\theta\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1} d\pi(z)$$

elde edilir.

Önerme 3.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

4. $X(t)$ SÜRECİNİN SINIR FONKSİYONELİNİN MOMENT ÇIKARAN FONKSİYONU VE MOMENTLERİ

Sınır fonksiyonelleri, stokastik süreçlerin önemli karakteristiklerindendir ve diğer karakteristiklerin bulunmasına yardımcı olur. Literatürde sınır fonksiyonelleri ile ilgili çalışmalar, birinci basamak yüksekliği ve anı, birinci basamak yüksekliğinin dağılımı, belirli bir seviyeyi ilk geçiş süresi, sürecin maksimum değeri, bazı sınırların aşılması gibi konular üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu bölümde, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonu ve momentleri için kesin ifadelerin yanında asimtotik açılımlar da elde edilmiştir. $\{S_n\}, n \geq 0$ rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı $\nu_1^+ = \min\{n \geq 1: S_n > 0\}$ ve birinci basamak yüksekliği $\chi_1^+ = S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i$ şeklinde ifade edilmektedir (Feller, 1971, s.391). Dynkin prensibine göre $N(z)$ ve $S_{N(z)}$,

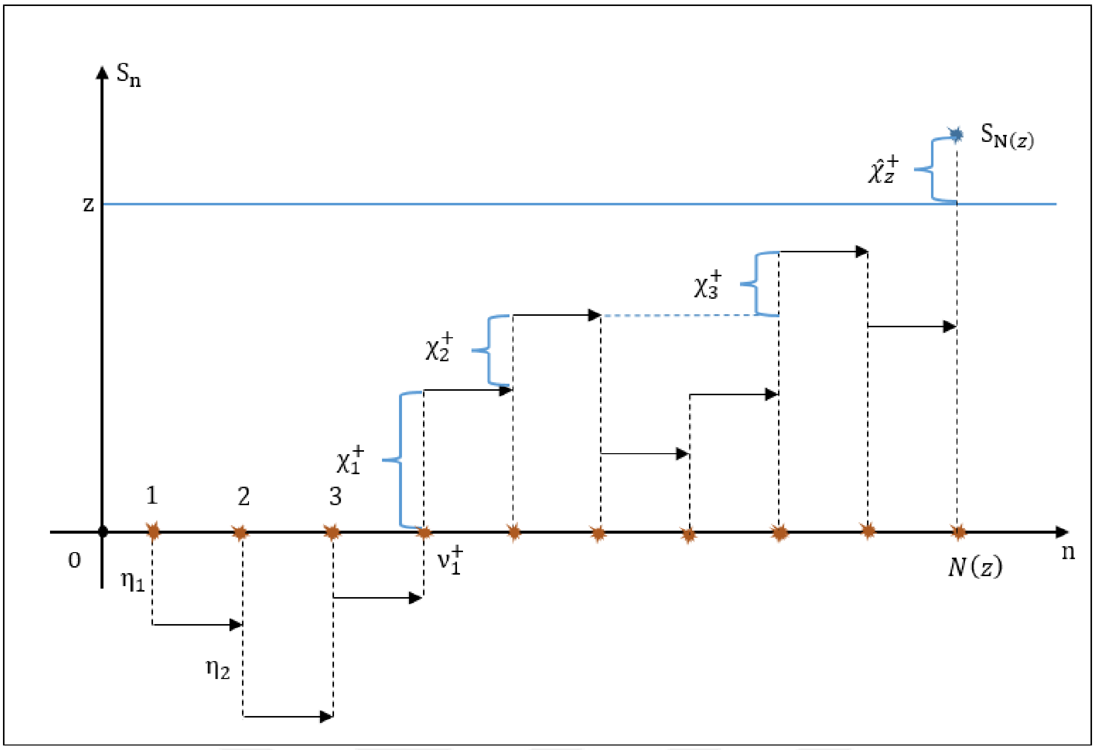
$$N(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+ \,; S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+$$

olarak gösterilmektedir (Rogozin, 1964). $H(z)$ fonksiyonu, $H(z) = \min\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > z\}, z > 0$ şeklinde gösterilen basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme sürecidir. $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi χ_1^+ rasgele değişkeniyle aynı dağılıma sahiptir. $\hat{\chi}_z^+$ ise $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrüdür ve $\hat{\chi}_z^+ = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ - z$ olarak gösterilir. $\hat{\chi}_z^+$'nin k. momenti $E(\hat{\chi}_z^{+k})$, $z \to \infty$ iken aşağıdaki limite sahiptir (Rogozin, 1964):

$$\lim_{z\to\infty} E(\hat{\chi}_z^{+k}) \equiv \hat{\mu}_k = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\mu_1}.$$

Burada $\hat{\mu}_k$, $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün momentleridir ve $\mu_k \equiv E\left(\chi_1^{+\mathrm{k}}\right), k = 1,2, \ldots$'dır.

Bahsedilen değişkenlerin görselleri Şekil 4.1'de verilmiştir:



Şekil 4.1: $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin bir görünümü

Verilen tanımlar yardımıyla $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki teorem yardımıyla verilmiştir. Bu aşamada, Khaniyev (2005) çalışmasından uyarlanan teoremin geniş ve açık ispatı aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.1. (Khaniyev, 2005) $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\Psi(\gamma,k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(e^{-kS_{N(z)}}\right)dz = \frac{\varphi(k)-\varphi(\gamma+k)}{\gamma\{1-\varphi(\gamma+k)\}}.$$

Burada, $\varphi(k)$ ve $\varphi(\gamma+k)$ Laplace Stieltjes dönüşümleri $\varphi(k) = E\left(e^{-k\chi_1^+}\right)$ ve $\varphi(\gamma+k) = E\left(e^{-\gamma\chi_1^+}e^{-k\chi_1^+}\right)$ şeklinde ifade edilmektedir.

İspat. $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\Psi(\gamma,k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(e^{-kS_{N(z)}}\right)dz =$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} \int_{x=z}^{\infty} e^{-kx} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s=0}^{z} P\{S_{n-1} \in ds\} P\{s < z < s+\chi_1^+; s+\chi_1^+ \in dx\}$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} \int_{s=0}^{z} dU_+(s) \int_{s=0}^{z} e^{-kx} f_{\chi_1^+}(x-s)dx = \overline{\overline{\mathrm{G}}}_{\mathrm{k}}(\gamma)\mathrm{A}_{\mathrm{k}}^*(\gamma). \quad (4.1)$$

Burada, $\overline{\mathrm{G}}_{\mathrm{k}}(\mathrm{z}) = \int_z^{\infty} e^{-kx} dF_{\chi_1^+}(x)$, $A_k\{dz\} = e^{-kz} dU_+(z)$, $E(H(z)) \equiv U_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\chi_1^+}^{*n}(z)$ ve $F_{\chi_1^+}(z) = P\{\chi_1^+ \le z\}$'tir. Ayrıca $\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{\mathrm{k}}(\gamma)$, $\overline{\mathrm{G}}_{\mathrm{k}}(\mathrm{z})$'nin γ parametresine göre Laplace dönüşümü ve $\mathrm{A}_{\mathrm{k}}^*(\gamma)$, $A_k\{dz\}$'nin γ parametresine göre Laplace Stieltjes dönüşümüne karşılık gelmektedir.

(4.1) eşitliğindeki $\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{\mathrm{k}}(\gamma)$ terimi için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$\overline{\overline{G}}_k(\gamma) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}\, \overline{G}_k(z)dz$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} \left[\int_{v=0}^{\infty} e^{-kv} dF_{\chi_1^+}(v) - \int_{v=0}^{z} e^{-kv} dF_{\chi_1^+}(v) \right] dz$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} \left[\varphi(k) - G_k(z)\right]dz$$

$$= \varphi(k) \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}\, dz - \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} \int_{v=0}^{z} e^{-kv} dF_{\chi_1^+}(v)dz$$

$$= \frac{\varphi(k)}{\gamma} - \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} \int_{v=0}^{z} e^{-kv} dF_{\chi_1^+} dz$$

$$= \frac{\varphi(k)}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}\, e^{-kz} dF_{\chi_1^+}(z)$$

$$= \frac{\varphi(k)}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \int_{z=0}^{\infty} e^{-z(\gamma+k)}\, dF_{\chi_1^+}(z)$$

$$\overline{\overline{G}}_k(\gamma) = \frac{\varphi(k)}{\gamma} - \frac{\varphi(\gamma+k)}{\gamma} = \frac{\varphi(k) - \varphi(\gamma+k)}{\gamma}. \quad (4.2)$$

Burada,

$$G_k(x) = \int_0^x e^{-kv} dF_{\chi_1^+}(v)\,, F_{\chi_1^+}(z) = P\{\chi_1^+ \le z\},$$

$\varphi(k) = E\left(e^{-k\chi_1^+}\right)$ ve $\varphi(\gamma+k) = E\left(e^{-(\gamma+k)\chi_1^+}\right), \gamma > 0, k > 0$'dır.

(4.1) eşitliğindeki $A_k^*(\gamma)$ terimi için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$A_k^*(\gamma) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} dA_k(z) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} e^{-kz} dU_+(z)$$

$$= \int_{z=0}^{\infty} e^{-z(\gamma+k)} dU_+(z) = U_+^*(\gamma + k) = \frac{1}{1-\varphi(\gamma+k)}. \qquad (4.3)$$

Burada, $dA_k(u) = e^{-ku} dU_+(u)$ ve $U_+^*(\gamma)$ ise $U_+(z)$'nin γ parametresine göre Laplace Stieltjes dönüşümüdür.

Sonuç olarak, (4.2) ve (4.3) eşitlikleri (4.1) eşitliğinde yerine koyulduğu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\Psi(\gamma, k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(e^{-kS_{N(z)}}\right) dz = \tilde{\tilde{G}}_k(\gamma) A_k^*(\gamma)$$

$$= \left[\frac{\varphi(k)}{\gamma} - \frac{\varphi(\gamma+k)}{\gamma}\right] \frac{1}{1-\varphi(\gamma+k)} = \frac{\varphi(k) - \varphi(\gamma+k)}{\gamma\{1-\varphi(\gamma+k)\}}. \qquad (4.4)$$

Böylece Teorem 4.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

Khaniyev (2005), Teorem 4.1'de verilen $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonunun Laplace dönüşümüyle $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde etmiştir. Bu çalışmada bulunan sonuçlar genişletilerek $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar bulunmuştur. Öncelikle aşağıdaki teorem ile $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümleri verilmiştir.

Teorem 4.2. $\mu_6 \equiv E(\chi_1^{+6}) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde, her sonlu z için $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}\right) dz = \mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^2\right) dz = 2\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^3\right) dz = 6\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) + 3\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+3\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^4\right) dz =$$

$$= 24\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) + 24\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+4\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_3^*(\gamma) + 12\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) +$$

$$+6\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) + 4\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_4 \widetilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^5\right) dz =$$

$$= 120\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*4}(\gamma) + 180\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+40\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_3^*(\gamma) + 30\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^{*2}(\gamma) +$$

$$+5\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_4^*(\gamma) + 60\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) +$$

$$+60\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma) + 10\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_3^*(\gamma) +$$

$$+20\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) + 10\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+5\mu_4 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_5 \widetilde{U}_+(\gamma),$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^6\right) dz =$$

$$= 720\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*5}(\gamma) D_1^{*5}(\gamma) + 1440\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+360\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_3^*(\gamma) + 540\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^{*2}(\gamma) +$$

$$+60\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_4^*(\gamma) + 120\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma) D_3^*(\gamma) +$$

$$+6\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_5^*(\gamma) + 360\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*4}(\gamma) +$$

$$+540\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma) + 120\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_3^*(\gamma) +$$

$$+90\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^{*2}(\gamma) + 15\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_4^*(\gamma) +$$

$$+120\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) + 120\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+20\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_3^*(\gamma) + 30\mu_4 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) +$$

$$+15\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+6\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma).$$

Burada $\widetilde{U}_+(\gamma)$, $U_+(z)$ yenileme fonksiyonunun γ parametresine göre Laplace dönüşümü, $U_+^*(\gamma)$ ise $U_+(z)$ yenileme fonksiyonunun γ parametresine göre Laplace Stieltjes dönüşümüdür. Ayrıca,

$$U_+^{*k}(\gamma)=\left(U_+^*(\gamma)\right)^k, U_+^*(\gamma)=\frac{1}{1-\varphi(\gamma)}, U_+^*(\gamma)=\gamma\,\widetilde{U}_+(\gamma), \varphi(\gamma)=E\left(e^{-\gamma\chi_1^+}\right),$$

$$E\left(H(z)\right)\equiv U_+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{\chi_1^+}^{*n}(z), F_{\chi_1^+}(z)=P\{\chi_1^+\leq z\},$$

$$D_n^{*k}(\gamma)=\left(D_n^*(\gamma)\right)^k, D_n^*(\gamma)=E\left(\chi_1^{+n}e^{-\gamma\chi_1^+}\right), \mu_n=E(\chi_1^{+n}), n=1,2,3,4,5,6.$$

İspat. Teorem 4.1'den faydalanarak $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonunun asimtotik açılımı elde edilmeye çalışılacaktır. Bu bağlamda, $\gamma>0$ ve $k\to 0$ iken aşağıdaki Taylor açılımı verilmiştir:

$$\int_{z=0}^{\infty}e^{-\gamma z}E\left(e^{-kS_{N(z)}}\right)dz=\frac{1}{\gamma}-k\int_{z=0}^{\infty}e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}\right)dz+$$

$$+\frac{k^2}{2!}\int_{z=0}^{\infty}e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^2\right)dz-\frac{k^3}{3!}\int_{z=0}^{\infty}e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^3\right)dz+$$

$$+\frac{k^4}{4!}\int_{z=0}^{\infty}e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^3\right)dz-\frac{k^5}{5!}\int_{z=0}^{\infty}e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^5\right)dz+$$

$$+\frac{k^6}{6!}\int_{z=0}^{\infty}e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^6\right)dz+o(k^6). \tag{4.5}$$

(4.4) eşitliğinin açılımı elde edilip (4.5) eşitliğiyle birebir karşılaştırma yapılarak $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümü elde edilecektir. Öncelikle, (4.4) eşitliğindeki $\varphi(k)$ ve $\varphi(\gamma+k)$'nın asimtotik açılımları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$k\to 0$ iken $\varphi(k)$'nın açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(k)=E\left(e^{-k\chi_1^+}\right)=1-k\mu_1+\frac{k^2}{2!}\mu_2-\frac{k^3}{3!}\mu_3+\frac{k^4}{4!}\mu_4-\frac{k^5}{5!}\mu_5+\frac{k^6}{6!}\mu_6+o(k^6).$$

Burada, $\mu_n=E(\chi_1^{+n}), n=1,2,3,4,5,6$'dır.

$\gamma>0$ ve $k\to 0$ iken $\varphi(\gamma+k)$'nın açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(\gamma+k)=E\left(e^{-\gamma\chi_1^+}e^{-k\chi_1^+}\right)=\varphi(\gamma)-kE\left(\chi_1^+e^{-\gamma\chi_1^+}\right)+\frac{k^2}{2!}E\left(\chi_1^{+2}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)-$$

$$-\frac{k^3}{3!}E\left(\chi_1^{+3}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)+\frac{k^4}{4!}E\left(\chi_1^{+4}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)-\frac{k^5}{5!}E\left(\chi_1^{+5}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)+$$

$$+\frac{k^6}{6!}E\left(\chi_1^{+6}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)+o(k^6).$$

$D_n^*(\gamma)=E\left(\chi_1^{+n}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)$ notasyonu dâhil edildiği takdirde $1-\varphi(\gamma+k)$ aşağıdaki gibidir:

$$1-\varphi(\gamma+k)=\left(1-\varphi(\gamma)\right)\left\{1+kU_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)-\frac{k^2}{2!}U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+\right.$$

$$\left.+\frac{k^3}{3!}U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)-\frac{k^4}{4!}U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+\frac{k^5}{5!}U_+^*(\gamma)D_5^*(\gamma)-\frac{k^6}{6!}U_+^*(\gamma)D_6^*(\gamma)\right\}+o(k^6).$$

Burada, $U_+^*(\gamma)=\frac{1}{1-\varphi(\gamma)}$ ve $\varphi(\gamma)=E\left(e^{-\gamma\chi_1^+}\right)$'dır.

$$[1-\varphi(\gamma+k)]^{-1}=\frac{1}{1-\varphi(\gamma)}\{1-kU_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+$$

$$+\frac{k^2}{2!}[2U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)]-$$

$$-\frac{k^3}{3!}[6U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+6U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)]+$$

$$+\frac{k^4}{4!}[24U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+36U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)+8U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+6U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma)]-$$

$$-\frac{k^5}{5!}[120U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)+240U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)+60U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+90U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+10U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+20U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+U_+^*(\gamma)D_5^*(\gamma)]+$$

$$+\frac{k^6}{6!}[720U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)+1800U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^*(\gamma)+480U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+1080U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+90U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)+360U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+20U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+90U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+30\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+20U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+U_+^*(\gamma)D_6^*(\gamma)]\}+o(k^6). \tag{4.6}$$

Burada,

$$U_+^{*k}(\gamma)=\left(U_+^*(\gamma)\right)^k, D_n^{*k}(\gamma)=\left(D_n^*(\gamma)\right)^k,$$

$$U_+^*(\gamma)=\frac{1}{1-\varphi(\gamma)}, D_n^*(\gamma)=E\left(\chi_1^{+n}e^{-\gamma\chi_1^+}\right), n=1,2,3,4,5,6.$$

(4.4) eşitliğinin payı $\varphi(k) - \varphi(\gamma + k)$ için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(k) - \varphi(\gamma + k) = 1 - k\mu_1 + \frac{k^2}{2!}\mu_2 - \frac{k^3}{3!}\mu_3 + \frac{k^4}{4!}\mu_4 - \frac{k^5}{5!}\mu_5 + \frac{k^6}{6!}\mu_6 - \varphi(\gamma) +$$

$$+kD_1^*(\gamma) - \frac{k^2}{2!}D_2^*(\gamma) + \frac{k^3}{3!}D_3^*(\gamma) - \frac{k^4}{4!}D_4^*(\gamma) + \frac{k^5}{5!}D_5^*(\gamma) - \frac{k^6}{6!}D_6^*(\gamma) + o(k^6) =$$

$$= \left(1 - \varphi(\gamma)\right)\left\{1 - k\left(\mu_1 - D_1^*(\gamma)\right)U_+^*(\gamma) + \frac{k^2}{2!}\left(\mu_2 - D_2^*(\gamma)\right)U_+^*(\gamma) - \right.$$

$$- \frac{k^3}{3!}\left(\mu_3 - D_3^*(\gamma)\right)U_+^*(\gamma) + \frac{k^4}{4!}\left(\mu_4 - D_4^*(\gamma)\right)U_+^*(\gamma) -$$

$$\left. - \frac{k^5}{5!}\left(\mu_5 - D_5^*(\gamma)\right)U_+^*(\gamma) + \frac{k^6}{6!}\left(\mu_6 - D_6^*(\gamma)\right)U_+^*(\gamma)\right\} + o(k^6). \quad (4.7)$$

(4.6) ve (4.7) eşitlikleri (4.4) eşitliğinde yerine koyulursa $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonunun Laplace dönüşümü için açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Psi(\gamma, k) \equiv \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(e^{-kS_{N(z)}}\right)dz = \frac{\varphi(k) - \varphi(\gamma + k)}{\gamma[1 - \varphi(\gamma + k)]} = \frac{1}{\gamma} - k\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma) +$$

$$+ \frac{k^2}{2!}\left[2\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma) + \mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)\right] -$$

$$- \frac{k^3}{3!}\left[6\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma) + 3\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma) + \right.$$

$$\left. +3\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma) + \mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)\right] +$$

$$+ \frac{k^4}{4!}\left[24\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma) + 24\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma) + \right.$$

$$+4\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma) + 12\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma) +$$

$$\left. +6\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma) + 4\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma) + \mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)\right] -$$

$$- \frac{k^5}{5!}\left[120\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma) + 180\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma) + \right.$$

$$+40\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma) + 30\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma) +$$

$$+5\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma) + 60\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma) +$$

$$+60\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma) + 10\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma) +$$

$$+20\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+10\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+5\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_4^{*}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)+\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)\Big]+$$

$$+\frac{k^6}{6!}\Big[720\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)+1440\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+360\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+540\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+60\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+120\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+6\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_5^{*}(\gamma)+360\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+$$

$$+540\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+120\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+90\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+15\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+$$

$$+120\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+120\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+20\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+30\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+$$

$$+15\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+6\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)+\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)\Big]+o(k^6). \quad (4.8)$$

Burada,

$$U_+^{*k}(\gamma)=\left(U_+^{*}(\gamma)\right)^k, U_+^{*}(\gamma)=\frac{1}{1-\varphi(\gamma)}, U_+^{*}(\gamma)=\gamma\ \widetilde{U}_+(\gamma), \varphi(\gamma)=E\left(e^{-\gamma\chi_1^+}\right),$$

$$D_n^{*k}(\gamma)=\left(D_n^{*}(\gamma)\right)^k, D_n^{*}(\gamma)=E\left(\chi_1^{+n}e^{-\gamma\chi_1^+}\right), \mu_n=E(\chi_1^{+n}), n=1,2,3,4,5,6.$$

(4.8) eşitliği (4.5) eşitliği ile birebir eşleştirildiği takdirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümleri elde edilir.

Böylece Teorem 4.2'nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.2'de elde edilen $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümlerine ters Laplace dönüşümü uygulandığı takdirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti için kesin ifadeler bulunabilmektedir. Aşağıdaki sonuç yardımıyla kesin ifadeler verilmiştir.

Sonuç 4.1. Teorem 4.2'nin koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin kesin ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$E\left(S_{N(z)}\right)=\mu_1 U_+(z),$$

$$E\left(S_{N(z)}^{2}\right)=2\mu_1 U_+^{*2}(z)*D_1(z)+\mu_2 U_+(z),$$

$$E\left(S_{N(z)}^{3}\right)=6\mu_1 U_+^{*3}(z)*D_1^{*2}(z)+3\mu_1 U_+^{*2}(z)*D_2(z)+$$

$$+3\mu_2 U_+^{*2}(z)*D_1(z)+\mu_3 U_+(z),$$

$$E\left(S_{N(z)}^{4}\right)=24\mu_1 U_+^{*4}(z)*D_1^{*3}(z)+24\mu_1 U_+^{*3}(z)*D_1(z)*D_2(z)+$$

$$+4\mu_1 U_+^{*2}(z)*D_3(z)+12\mu_2 U_+^{*3}(z)*D_1^{*2}(z)+$$

$$+6\mu_2 U_+^{*2}(z)*D_2(z)+4\mu_3 U_+^{*2}(z)*D_1(z)+\mu_4 U_+(z),$$

$$E\left(S_{N(z)}^{5}\right)=120\mu_1 U_+^{*5}(z)*D_1^{*4}(z)+180\mu_1 U_+^{*4}(z)*D_1^{*2}(z)*D_2(z)+$$

$$+40\mu_1 U_+^{*3}(z)*D_1(z)*D_3(z)+30\mu_1 U_+^{*3}(z)*D_2^{*2}(z)+$$

$$+5\mu_1 U_+^{*2}(z)*D_4(z)+60\mu_2 U_+^{*4}(z)*D_1^{*3}(z)+$$

$$+60\mu_2 U_+^{*3}(z)*D_1(z)*D_2(z)+10\mu_2 U_+^{*2}(z)*D_3(z)+$$

$$+20\mu_3 U_+^{*3}(z)*D_1^{*2}(z)+10\mu_3 U_+^{*2}(z)*D_2(z)+$$

$$+5\mu_4 U_+^{*2}(z)*D_1(z)+\mu_5 U_+(z),$$

$$E\left(S_{N(z)}^{6}\right)=720\mu_1 U_+^{*6}(z)*D_1^{*5}(z)+1440\mu_1 U_+^{*5}(z)*D_1^{*3}(z)*D_2^{*}(z)+$$

$$+360\mu_1 U_+^{*4}(z)*D_1^{*2}(z)*D_3^{*}(z)+540\mu_1 U_+^{*4}(z)*D_1^{*}(z)*D_2^{*2}(z)+$$

$$+60\mu_1 U_+^{*3}(z)*D_1^{*}(z)*D_4^{*}(z)+120\mu_1 U_+^{*3}(z)*D_2^{*}(z)*D_3^{*}(z)+$$

$$+6\mu_1 U_+^{*2}(z)*D_5^{*}(z)+360\mu_2 U_+^{*5}(z)*D_1^{*4}(z)+$$

$$+540\mu_2 U_+^{*4}(z)*D_1^{*2}(z)*D_2^{*}(z)+120\mu_2 U_+^{*3}(z)*D_1^{*}(z)*D_3^{*}(z)+$$

$$+90\mu_2 U_+^{*3}(z)*D_2^{*2}(z)+15\mu_2 U_+^{*2}(z)*D_4^{*}(z)+$$

$$+120\mu_3 U_+^{*4}(z)*D_1^{*3}(z)+120\mu_3 U_+^{*3}(z)*D_1^{*}(z)*D_2^{*}(z)+$$

$$+20\mu_3 U_+^{*2}(z)*D_3^{*}(z)+30\mu_4 U_+^{*3}(z)*D_1^{*2}(z)+$$

$$+15\mu_4 U_+^{*2}(z) * D_2^*(z) + 6\mu_5 U_+^{*2}(z) * D_1^*(z) + \mu_6 U_+(z).$$

Burada,

$$E\big(H(z)\big) \equiv U_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\chi_1^+}^{*n}(z), D_k(z) = \int_0^z s^n dF(s),$$

$$F_{\chi_1^+}(z) = P\{\chi_1^+ \le z\}, \mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3,4,5,6.$$

Not 4.1. $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti için kesin ifadelerde bulunan $U_+(z)$ yenileme fonksiyonunun kesin ifadeleri birkaç dağılım (üstel dağılım, 2. dereceden Erlang dağılımı, vb.) dışında elde etmek çok zordur. $U_+(z)$'nin yanında $D_k(z)$ ve konvolüsyonları da kesin ifadelerde bulunmaktadır. Bu durum $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin kesin ifadesinin elde edilmesini imkânsız hale getirmektedir. Bu nedenle $U_+(z)$ yenileme fonksiyonunun asimtotik özelliklerinden yararlanılarak $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti için üç terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki teorem yardımıyla verilmiştir. Bu teorem ile Khaniyev (2005)'in çalışması genişletilmiştir.

Teorem 4.3. $\mu_3 \equiv E(\chi_1^{+3}) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde, her sonlu z için $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti için asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E\big(S_{N(z)}\big) = z + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$E\big(S_{N(z)}^2\big) = z^2 + 2\hat{\mu}_1 z + \hat{\mu}_2 + o(1),$$

$$E\big(S_{N(z)}^3\big) = z^3 + 3\hat{\mu}_1 z^2 + 3\hat{\mu}_2 z + o(z),$$

$$E\big(S_{N(z)}^4\big) = z^4 + 4\hat{\mu}_1 z^3 + 6\hat{\mu}_2 z^2 + o(z^2),$$

$$E\big(S_{N(z)}^5\big) = z^5 + 5\hat{\mu}_1 z^4 + 10\hat{\mu}_2 z^3 + o(z^3),$$

$$E\big(S_{N(z)}^6\big) = z^6 + 6\hat{\mu}_1 z^5 + 15\hat{\mu}_2 z^4 + o(z^4).$$

Burada, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}, \mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3.$

İspat. Teorem 4.2'deki $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümlerinin yerine açılımlar koyularak ters Laplace dönüşümü uygulanacaktır.

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin birinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}\right) dz = \mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma). \tag{4.9}$$

(4.9) eşitliğinde bulunan $\widetilde{U}_+(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_+(\gamma) = \frac{1}{\gamma\big(1-\varphi(\gamma)\big)} = \frac{1}{\gamma\left\{1-\left(1-\gamma\mu_1+\frac{\gamma^2}{2!}\mu_2-\frac{\gamma^3}{3!}\mu_3+o(\gamma^3)\right)\right\}}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2\mu_1}\left\{1+\gamma\hat{\mu}_1+\gamma^2\left(\hat{\mu}_1^2-\frac{\hat{\mu}_2}{2}\right)+o(\gamma^2)\right\}. \tag{4.10}$$

(4.10) eşitliği (4.9) eşitliğinde yerine koyulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}\right) dz = \mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2}+\frac{\hat{\mu}_1}{\gamma}+\left(\hat{\mu}_1^2-\frac{\hat{\mu}_2}{2}\right)+o(1). \tag{4.11}$$

(4.11) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\big(S_{N(z)}\big)$ için $z \to \infty$ iken asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\big(S_{N(z)}\big) = z + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ikinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^2\right) dz = 2\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma). \tag{4.12}$$

(4.12) eşitliğinde bulunan $D_1^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_1^*(\gamma) \equiv E\left(\chi_1^+ e^{-\gamma\chi_1^+}\right) = \mu_1 - \gamma\mu_2 + \frac{\gamma^2}{2!}\mu_3 + o(\gamma^2). \tag{4.13}$$

(4.10) ve (4.13) eşitlikleri ile gerekli hesaplamalar yapılarak (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^2\right) dz = \frac{2}{\gamma^3}+\frac{2\hat{\mu}_1}{\gamma^2}+\frac{\hat{\mu}_2}{\gamma}+o\left(\frac{1}{\gamma}\right). \tag{4.14}$$

(4.14) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $z \to \infty$ iken $E\big(S_{N(z)}^2\big)$ için üç terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\big(S_{N(z)}^2\big) = z^2 + 2\hat{\mu}_1 z + \hat{\mu}_2 + o(1).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin üçüncü momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^3\right) dz = 6\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) + 3\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+3\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma). \tag{4.15}$$

(4.15) eşitliğinde bulunan $D_2^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_2^*(\gamma) \equiv E\left(\chi_1^{+2} e^{-\gamma \chi_1^+}\right) = \mu_2 - \gamma\mu_3 + \frac{\gamma^2}{2!}\mu_4 + o(\gamma^2). \qquad (4.16)$$

(4.10), (4.13) ve (4.16) eşitlikleri ile gerekli hesaplamalar yapılarak (4.15) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^3\right) dz = \left\{\frac{6}{\gamma^4} - \frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3} + \frac{9\hat{\mu}_2}{\gamma^2} - \frac{12\hat{\mu}_1^2}{\gamma^2}\right\} +$$

$$+\left\{\frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3} + \frac{12\hat{\mu}_1^2}{\gamma^2} - \frac{9\hat{\mu}_2}{\gamma^2}\right\} + \left\{\frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3}\right\} + \left\{\frac{3\hat{\mu}_2}{\gamma^2}\right\} + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$= \frac{6}{\gamma^4} + \frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3} + \frac{3\hat{\mu}_2}{\gamma^2} + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right). \qquad (4.17)$$

(4.17) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}^3\right)$ için $z \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^3\right) = z^3 + 3\hat{\mu}_1 z^2 + 3\hat{\mu}_2 z + o(z).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin dördüncü momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^4\right) dz =$$

$$= 24\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) + 24\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+4\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_3^*(\gamma) + 12\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) +$$

$$+6\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) + 4\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_4 \widetilde{U}(\gamma). \qquad (4.18)$$

(4.18) eşitliğinde bulunan $D_3^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_3^*(\gamma) \equiv E\left(\chi_1^{+3} e^{-\gamma \chi_1^+}\right) = \mu_3 - \gamma\mu_4 + \frac{\gamma^2}{2!}\mu_5 + o(\gamma^2). \qquad (4.19)$$

(4.10), (4.13), (4.16) ve (4.19) eşitlikleri ile gerekli hesaplamalar yapılarak (4.18) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^4\right) dz = \left\{\frac{24}{\gamma^5} - \frac{48\hat{\mu}_1}{\gamma^4} + \frac{60\hat{\mu}_2}{\gamma^3} - \frac{48\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3}\right\} + \left\{\frac{48\hat{\mu}_1}{\gamma^4} + \frac{48\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3} - \frac{72\hat{\mu}_2}{\gamma^3}\right\} +$$

$$+\left\{\frac{12\hat{\mu}_2}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{24\hat{\mu}_1}{\gamma^4}-\frac{24\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{24\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{12\hat{\mu}_2}{\gamma^3}\right\}+o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right)$$

$$=\frac{24}{\gamma^5}+\frac{24\hat{\mu}_1}{\gamma^4}+\frac{12\hat{\mu}_2}{\gamma^3}+o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right). \qquad (4.20)$$

(4.20) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}^4\right)$ için $z\to\infty$ iken üç terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^4\right)=z^4+4\hat{\mu}_1 z^3+6\hat{\mu}_2 z^2+o(z^2).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin beşinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\lambda z}E\left(S_{N(z)}^5\right)dz=$$

$$=120\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+180\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+40\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+30\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+5\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+60\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+$$

$$+60\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+10\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+20\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+10\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+5\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.21)$$

(4.21) eşitliğinde bulunan $D_4^*(\gamma)$'nın $\gamma\to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_4^*(\gamma)\equiv E\left(\chi_1^{+4}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)=\mu_4-\gamma\mu_5+\frac{\gamma^2}{2!}\mu_6+o(\gamma^2). \qquad (4.22)$$

(4.10), (4.13), (4.16), (4.19) ve (4.22) eşitlikleri ile gerekli hesaplamalar yapılarak (4.21) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^5\right)dz=\left\{\frac{120}{\gamma^6}-\frac{360\hat{\mu}_1}{\gamma^5}+\frac{420\hat{\mu}_2}{\gamma^4}-\frac{120\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}\right\}+\left\{\frac{360\hat{\mu}_1}{\gamma^5}-\frac{540\hat{\mu}_2}{\gamma^4}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{120\hat{\mu}_2}{\gamma^4}\right\}+\left\{\frac{120\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}\right\}+\left\{\frac{120\hat{\mu}_1}{\gamma^5}-\frac{240\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}\right\}+\left\{\frac{240\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}\right\}+\left\{\frac{60\hat{\mu}_2}{\gamma^4}\right\}+o\left(\frac{1}{\gamma^4}\right)$$

$$=\frac{120}{\gamma^6}+\frac{120\hat{\mu}_1}{\gamma^5}+\frac{60\hat{\mu}_2}{\gamma^4}+o\left(\frac{1}{\gamma^4}\right). \qquad (4.23)$$

(4.23) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}^5\right)$ için $z \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^5\right) = z^5 + 5\hat{\mu}_1 z^4 + 10\hat{\mu}_2 z^3 + o(z^3).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin altıncı momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^6\right) dz =$$

$$= 720\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*5}(\gamma) D_1^{*5}(\gamma) + 1440\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+360\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_3^*(\gamma) + 540\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^{*2}(\gamma) +$$

$$+60\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_4^*(\gamma) + 120\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma) D_3^*(\gamma) +$$

$$+6\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_5^*(\gamma) + 360\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*4}(\gamma) D_1^{*4}(\gamma) +$$

$$+540\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) D_2^*(\gamma) + 120\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_3^*(\gamma) +$$

$$+90\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_2^{*2}(\gamma) + 15\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_4^*(\gamma) +$$

$$+120\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) + 120\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+20\mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_3^*(\gamma) + 30\mu_4 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) +$$

$$+15\mu_4 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) + 6\mu_5 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_6 \widetilde{U}_+(\gamma). \quad (4.24)$$

(4.24) eşitliğinde bulunan $D_5^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_5^*(\gamma) \equiv E\left(\chi_1^{+5} e^{-\gamma \chi_1^+}\right) = \mu_5 - \gamma\mu_6 + \frac{\gamma^2}{2!}\mu_7 + o(\gamma^2). \quad (4.25)$$

(4.10), (4.13), (4.16), (4.19), (4.22) ve (4.25) eşitlikleri ile gerekli hesaplamalar yapılarak (4.24) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^6\right) dz = \left\{\frac{720}{\gamma^7} - \frac{2880\hat{\mu}_1}{\gamma^6} + \frac{3240\hat{\mu}_2}{\gamma^5} - \frac{720\hat{\mu}_1^2}{\gamma^5}\right\} +$$

$$+\left\{\frac{2880\hat{\mu}_1}{\gamma^6} - \frac{4320\hat{\mu}_2}{\gamma^5} - \frac{2880\hat{\mu}_1^2}{\gamma^5}\right\} + \left\{\frac{1080\hat{\mu}_2}{\gamma^5}\right\} + \left\{\frac{2160\hat{\mu}_1^2}{\gamma^5}\right\} +$$

$$+\left\{\frac{720\hat{\mu}_1}{\gamma^6}-\frac{2160\hat{\mu}_1^2}{\gamma^5}\right\}+\left\{\frac{2160\hat{\mu}_1^2}{\gamma^5}\right\}+\left\{\frac{360\hat{\mu}_2}{\gamma^5}\right\}+o\left(\frac{1}{\gamma^5}\right)$$

$$=\frac{720}{\gamma^7}+\frac{720\hat{\mu}_1}{\gamma^6}+\frac{360\hat{\mu}_2}{\gamma^5}+o\left(\frac{1}{\gamma^5}\right). \qquad (4.26)$$

(4.26) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}^6\right)$ için $z\to\infty$ iken üç terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^6\right)=z^6+6\hat{\mu}_1 z^5+15\hat{\mu}_2 z^4+o(z^4).$$

Böylece Teorem 4.3'ün ispatı tamamlanmış olur. ■

Not 4.2. Teorem 4.2'de $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümleri elde ediliyorken bulunan ifadelerde bir kural olduğu yapılan denemelerle tespit edilmiştir. Bu bağlamda, ilk altı momente ek olarak $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin onuncu momentine kadar Laplace dönüşümleri hesaplanmıştır.

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin yedinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^7\right)dz=$$

$$=5040\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)+12600\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+840\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_3^*(\gamma)+5670\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+630\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)+630\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+210\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+2520\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+140\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+84\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+7\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_6^*(\gamma)+2520\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)+$$

$$+5040\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)+1260\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+1890\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+210\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+420\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+21\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+840\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+1260\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+280\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+210\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+35\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma) + 210\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma) +$$

$$+210\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma) + 35\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma) +$$

$$+42\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma) + 21\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma) +$$

$$+7\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma) + \mu_7\widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.27)$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin sekizinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int\limits_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^8\right) dz =$$

$$= \frac{7!}{7!}\frac{8!}{(1!)(1!)^7}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*7}(\gamma)D_1^{*7}(\gamma) +$$

$$+\frac{6!}{(5!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(1!)^5(2!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)D_2^*(\gamma) +$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(1!)^4(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_3^*(\gamma) +$$

$$+\frac{5!}{(3!)(2!)}\frac{8!}{(1!)(1!)^3(2!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma) +$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(1!)^3(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_4^*(\gamma) +$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(1!)^2(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_5^*(\gamma) +$$

$$+\frac{4!}{(1!)(3!)}\frac{8!}{(1!)(1!)(2!)^3}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*3}(\gamma) +$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{8!}{(1!)(1!)(3!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^{*2}(\gamma) +$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(1!)(6!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_6^*(\gamma) +$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(3!)(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)D_4^*(\gamma) +$$

$$+\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(1!)^2(2!)(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma) +$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(1!)(2!)(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma) +$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(2!)^2(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma) +$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(1!)(2!)(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{8!}{(1!)(7!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_7^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{6!}\frac{8!}{(2!)(1!)^6}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{8!}{(2!)(1!)^4(2!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{8!}{(2!)(1!)^3(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(2!)}\frac{8!}{(2!)(1!)^2(2!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{8!}{(2!)(1!)^2(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{3!}\frac{8!}{(2!)(2!)^3}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{8!}{(2!)(3!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(2!)(2!)(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{8!}{(2!)(1!)(2!)(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(2!)(1!)(5!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{8!}{(2!)(6!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{5!}\frac{8!}{(3!)(1!)^5}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{8!}{(3!)(1!)^3(2!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{8!}{(3!)(1!)^2(3!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{8!}{(3!)(1!)(2!)^2}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(3!)(1!)(4!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(3!)(2!)(3!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{8!}{(3!)(5!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{4!}\frac{8!}{(4!)(1!)^4}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{8!}{(4!)(1!)^2(2!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(4!)(1!)(3!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{8!}{(4!)(2!)^2}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{8!}{(4!)(4!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{3!}\frac{8!}{(5!)(1!)^3}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{8!}{(5!)(1!)(2!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{8!}{(5!)(3!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{8!}{(6!)(1!)^2}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{8!}{(6!)(2!)}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{8!}{(7!)(1!)}\mu_7\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\mu_8\widetilde{U}_+(\gamma). \tag{4.28}$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin dokuzuncu momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^9\right)dz =$$

$$=\frac{8!}{8!}\frac{9!}{(1!)(1!)^8}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*8}(\gamma)D_1^{*8}(\gamma)+$$

$$+\frac{7!}{(6!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^6(2!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*7}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(5!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^5(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(4!)(2!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^4(2!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^4(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^3(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(3!)(1!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^3(2!)(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(2!)(3!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^2(2!)^3}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(2!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^2(3!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^2(2!)(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)^2(6!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)(7!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_7^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(1!)(2!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)(2!)^2(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)(2!)(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(1!)(3!)(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{4!}\frac{9!}{(1!)(2!)^4}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_2^{*4}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(2!)^2(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{9!}{(1!)(2!)(3!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(2!)(6!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{9!}{(1!)(4!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_4^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(1!)(3!)(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(1!)(8!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_8^*(\gamma)+$$

$$+\frac{7!}{7!}\frac{9!}{(2!)(1!)^7}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*7}(\gamma)D_1^{*7}(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(5!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(1!)^5(2!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(1!)^4(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(3!)(2!)}\frac{9!}{(2!)(1!)^3(2!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(1!)^3(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(1!)^2(5!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(1!)(3!)}\frac{9!}{(2!)(1!)(2!)^3}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{9!}{(2!)(1!)(3!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(1!)(6!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(3!)(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(1!)^2(2!)(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(1!)(2!)(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(2!)^2(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(2!)(2!)(5!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(2!)(7!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_7^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{6!}\frac{9!}{(3!)(1!)^6}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{9!}{(3!)(1!)^4(2!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{9!}{(3!)(1!)^3(3!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(2!)}\frac{9!}{(3!)(1!)^2(2!)^2}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{9!}{(3!)(1!)^2(4!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{3!}\frac{9!}{(3!)(2!)^3}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{9!}{(3!)(3!)^2}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(3!)(1!)(5!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_5^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(3!)(2!)(4!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{9!}{(3!)(1!)(2!)(3!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(3!)(6!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_6^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{5!}\frac{9!}{(4!)(1!)^5}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{9!}{(4!)(1!)^3(2!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{9!}{(4!)(1!)^2(3!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{9!}{(4!)(1!)(2!)^2}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(4!)(1!)(4!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(4!)(2!)(3!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(4!)(5!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_5^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{4!}\frac{9!}{(5!)(1!)^4}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{9!}{(5!)(1!)^2(2!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(5!)(1!)(3!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{9!}{(5!)(2!)^2}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(5!)(4!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{3!}\frac{9!}{(6!)(1!)^3}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{9!}{(6!)(1!)(2!)}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(6!)(3!)}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{9!}{(7!)(1!)^2}\mu_7\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(7!)(2!)}\mu_7\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{9!}{(8!)(1!)}\mu_8\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\frac{9!}{9!}\mu_9\widetilde{U}_+(\gamma). \tag{4.29}$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin onuncu momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^{10}\right)dz=$$

$$=\frac{9!}{9!}\frac{10!}{(1!)(1!)^9}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*9}(\gamma)D_1^{*9}(\gamma)+$$

$$+\frac{8!}{(7!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^7(2!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*8}(\gamma)D_1^{*7}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{7!}{(6!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^6(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*7}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{7!}{(5!)(2!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^5(2!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*7}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(5!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^5(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(4!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^4(2!)(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^4(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(3!)(3!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^3(2!)^3}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(3!)(2!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^3(3!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^3(6!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(3!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^3(2!)(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(2!)(2!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^2(2!)^2(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^2(2!)(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^2(3!)(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)^2(7!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_7^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(1!)(4!)}\frac{10!}{(1!)(1!)(2!)^4}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*4}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(1!)(2!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)(2!)^2(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(1!)(1!)(2!)}\frac{10!}{(1!)(1!)(2!)(3!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)(2!)(6!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)(3!)(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{10!}{(1!)(1!)(4!)^2}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_4^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(1!)(8!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_8^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(2!)^3(3!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(2!)^2(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(2!)(3!)(4!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(2!)(7!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_7^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{3!}\frac{10!}{(1!)(3!)^3}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_3^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(3!)(6!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(1!)(4!)(5!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{9!}{9!}\frac{10!}{(1!)(9!)}\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_9^*(\gamma)+$$

$$+\frac{8!}{8!}\frac{10!}{(2!)(1!)^8}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*8}(\gamma)D_1^{*8}(\gamma)+$$

$$+\frac{7!}{(6!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^6(2!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*7}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(5!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^5(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(4!)(2!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^4(2!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^4(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^3(5!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(3!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^3(2!)(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(2!)(3!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^2(2!)^3}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(2!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^2(3!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^2(2!)(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)^2(6!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)(7!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_7^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(1!)(2!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)(2!)^2(3!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)(2!)(5!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(1!)(3!)(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{4!}\frac{10!}{(2!)(2!)^4}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_2^{*4}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(2!)^2(4!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{10!}{(2!)(2!)(3!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(2!)(6!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{10!}{(2!)(4!)^2}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_4^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(2!)(3!)(5!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(2!)(8!)}\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_8^*(\gamma)+$$

$$+\frac{7!}{7!}\frac{10!}{(3!)(1!)^7}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*7}(\gamma)D_1^{*7}(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{(5!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(1!)^5(2!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(1!)^4(3!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(3!)(2!)}\frac{10!}{(3!)(1!)^3(2!)^2}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(1!)^3(4!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(1!)^2(5!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(1!)(3!)}\frac{10!}{(3!)(1!)(2!)^3}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{10!}{(3!)(1!)(3!)^2}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(1!)(6!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_6^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(3!)(4!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(1!)^2(2!)(3!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(1!)(2!)(4!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(2!)^2(3!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(3!)(2!)(5!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_5^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(3!)(7!)}\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_7^*(\gamma)+$$

$$+\frac{6!}{6!}\frac{10!}{(4!)(1!)^6}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*6}(\gamma)D_1^{*6}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{(4!)(1!)}\frac{10!}{(4!)(1!)^4(2!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{10!}{(4!)(1!)^3(3!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(2!)(2!)}\frac{10!}{(4!)(1!)^2(2!)^2}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(4!)(1!)^2(4!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{3!}\frac{10!}{(4!)(2!)^3}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_2^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{10!}{(4!)(3!)^2}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_3^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(4!)(1!)(5!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_5^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(4!)(2!)(4!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(1!)(1!)}\frac{10!}{(4!)(1!)(2!)(3!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(4!)(6!)}\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_6^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{5!}{5!}\frac{10!}{(5!)(1!)^5}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{(3!)(1!)}\frac{10!}{(5!)(1!)^3(2!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(5!)(1!)^2(3!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(1!)(2!)}\frac{10!}{(5!)(1!)(2!)^2}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(5!)(1!)(4!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_4^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(5!)(2!)(3!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(5!)(5!)}\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_5^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{4!}{4!}\frac{10!}{(6!)(1!)^4}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{(2!)(1!)}\frac{10!}{(6!)(1!)^2(2!)}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(6!)(1!)(3!)}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*}(\gamma)D_3^{*}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{10!}{(6!)(2!)^2}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(6!)(4!)}\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+\frac{3!}{3!}\frac{10!}{(7!)(1!)^3}\mu_7\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{(1!)(1!)}\frac{10!}{(7!)(1!)(2!)}\mu_7\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(7!)(3!)}\mu_7\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+\frac{2!}{2!}\frac{10!}{(8!)(1!)^2}\mu_8\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(8!)(2!)}\mu_8\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+\frac{1!}{1!}\frac{10!}{(9!)(1!)}\mu_9\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\frac{10!}{10!}\mu_{10}\widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.30)$$

Not 4.3. $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk on momentinin Laplace dönüşümleri elde ediliyorken bulunan ifadelerde tespit edilen kural yardımıyla $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin onuncu momentine kadar Laplace dönüşümleri hesaplanmıştır ve kuralların doğruluğu test edilmiştir. Bir sonraki momenti oluşturmak için kurallar aşağıdaki gibi listelenebilmektedir:

1) $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin birinci momentinden başlayarak her momentte yeni terimler eklenmektedir. Yani her momentin terim sayısı kümülatif olarak artmaktadır. İlk on moment için birinci moment dâhil olacak şekilde her bir momentte eklenen terim sayısı sırasıyla $1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30$'dur. Eklenen terimlerin içerdiği ifadelerin $(D_n^*(\gamma), U_+^*(\gamma))$ de bir kurala göre oluşturulduğu göz önüne alındığında $1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30$ serisinin sayı teorisinde $p(n)$ parçalanış fonksiyonuna (partition function) karşılık geldiği literatür taraması sonucunda fark edilmiştir. $p(n), n = 0,1,2, \dots$ parçalanış fonksiyonu n'nin sıralanış düzenine bağlı olmaksızın tamsayı toplamlarına ayrılma sayısına karşılık gelmektedir (Abramowitz ve Stegun, 1972, s.825). Örneğin, $p(4) = 5$ yani toplamı 4 olan sayıların kombinasyonu aşağıdaki gibidir:

$$1+1+1+1,$$
$$1+1+2,$$
$$1+3,$$
$$2+2,$$

4. Ayrıca, Abramowitz ve Stegun (1972) $p(n)$ fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşık formülü vermiştir:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

2) Teorem 4.2'de ve (4.27) – (4.30) eşitliklerinde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk on momentinin Laplace dönüşümleri bulunmaktadır. Bir önceki maddede $p(n)$ fonksiyonunun kümülatif toplamları ile ifade edilebilen terim sayısı açıkça anlatılmıştı. Bu terimlerin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$(C)(K)\mu_i \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*v}(\gamma) D_j^{*s}(\gamma) D_k^{*m}(\gamma) \dots D_l^{*y}(\gamma). \qquad (4.31)$$

Burada,

$$i = n - sj - mk - \cdots - yl, j \neq k \neq \cdots \neq l, D_0^*(\gamma) = 1,$$
$$sj + mk + \cdots + yl \leq n - 1, v = s + m + \cdots + y.$$

(4.31) eşitliğindeki i ve v; $j, k, \dots, l$ ve $s, m, \dots, y$ ile elde edilebilmektedir. Bu nedenle $j, k, \dots, l$ ve $s, m, \dots, y$'yi bulmak önemlidir. (4.31) eşitliğindeki C ve K katsayılardır ve ayrıca incelenecektir.

$p(n)$ parçalanış fonksiyonu n'nin tamsayı toplamlarına ayrılma sayısına karşılık geldiği bilinmektedir. $j, k, \dots, l$ ve $s, m, \dots, y$ indisleri de $p(n)$ ile ilişkilidir. Bu ilişki örnek olarak $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentinin Laplace dönüşümleri ele alınarak gösterilecektir:

$$p(0) = 1; \int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}\right) dz = \mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.32)$$

(4.32) eşitliğinde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin birinci momentinin Laplace dönüşümü verilmiştir ve bir terime sahip olduğu görülmektedir. $p(0)$ fonksiyonu ile aynı terim sayısına sahiptir. Burada $D_n^*(\gamma)$ içeren terim bulunmamaktadır çünkü $D_0^*(\gamma) = 1$'dir. (4.31) eşitliğinden $i = n = 1$ ve $v = 0$'dır. Böylece, μ_1 terimi de elde edilmiş olur.

$$p(1) = 1, p(0) + p(1) = 2,$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^2\right) dz = 2\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.33)$$

(4.33) eşitliğinde $p(1) = 1$ olduğu için (4.32) eşitliğindeki terim sayısına bir terim daha eklenmiştir. $p(1)$ tanımı gereği toplamı 1 yapan sayıların kombinasyonunu belirtmektedir. Bu nedenle eklenen terim $D_1^*(\gamma)$ içermektedir. Bu durumda (4.31) eşitliğinden yola çıkılarak (4.33) eşitliğinin birinci teriminde $j = 1$ ve $s = 1$ olduğu görülmektedir. Ayrıca $i = n - sj = 2 - 1 = 1$ ve $v = s = 1$'dir. Böylece, μ_1 ve $U_+^*(\gamma)$ terimleri de elde edilmiş olur. Yine (4.31) eşitliğinden yola çıkılarak (4.33) eşitliğinin ikinci teriminde $i = n - sj = 2 - 0 = 2$'dir, bu da μ_2'yi açıklamaktadır. Not edelim ki, bir önceki momentten gelen terimlerde μ_i'nin indisi bir artmaktadır, geriye kalan parçalar aynı kalmaktadır.

$$p(2) = 2, p(0) + p(1) + p(2) = 4,$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^3\right) dz = 6\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) + 3\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+3\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_3 \widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.34)$$

(4.34) eşitliğine $p(2) = 2$ olduğu için (4.33) eşitliğindeki terim sayısına iki terim daha eklenmiştir ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin üçüncü momentinin Laplace dönüşümünün terim sayısı dörde çıkmıştır. $p(2)$ tanımı gereği toplamı 2 yapan sayıların kombinasyonunu belirtmektedir $(1 + 1{,}2)$. Bu nedenle eklenen terimler $D_1^{*2}(\gamma) = D_1^*(\gamma) D_1^*(\gamma)$ ve $D_2^*(\gamma)$ içermektedir. Bu durumda (4.31) eşitliğinden yola çıkılarak (4.34) eşitliğinin birinci teriminde $j = 1$ ve $s = 2$ olduğu görülmektedir. Ayrıca $i = n - sj = 3 - 2 = 1$ ve $v = s = 2$'dir. Böylece, μ_1 ve $U_+^{*2}(\gamma)$ terimleri de elde edilmiş olur. (4.34) eşitliğinin ikinci teriminde ise $j = 2$ ve $s = 1$ olduğu görülmektedir. Bu durumda, $i = n - sj = 3 - 2 = 1$ ve $v = s = 1$'dir. Böylece, μ_1 ve $U_+^*(\gamma)$ terimleri de elde edilmiş olur. (4.34) eşitliğinin üçüncü ve dördüncü terimleri ise önceki momentlerden gelmiştir. Bu nedenle sadece μ_i'lerinin indisi bir artırılmıştır.

$$p(3) = 3, p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 7,$$

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^4\right) dz =$$

$$= 24\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*3}(\gamma) D_1^{*3}(\gamma) + 24\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+4\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_3^*(\gamma) + 12\mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) +$$

$$+6\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+4\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.35)$$

(4.35) eşitliğinde $p(3)=3$ olduğu için (4.34) eşitliğindeki terim sayısına üç terim daha eklenmiştir ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin dördüncü momentinin Laplace dönüşümünün terim sayısı yediye çıkmıştır. $p(3)$ tanımı gereği toplamı 3 yapan sayıların kombinasyonunu belirtmektedir $(1+1+1,1+2,3)$. Bu nedenle eklenen terimler $D_1^{*3}(\gamma)=D_1^*(\gamma)D_1^*(\gamma)D_1^*(\gamma)$, $D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)$ ve $D_3^*(\gamma)$ içermektedir. Bu durumda (4.31) eşitliğinden yola çıkılarak (4.35) eşitliğinin birinci teriminde $j=1$ ve $s=3$ olduğu görülmektedir. Bu durumda, $i=n-sj=4-3=1$ ve $v=s=3$'tür. Böylece, μ_1 ve $U_+^{*3}(\gamma)$ terimleri de elde edilmiş olur. (4.35) eşitliğinin ikinci teriminde $j=1$, $s=1$ ve $k=2$, $m=1$ olduğu görülmektedir. Ayrıca $i=n-sj-mk=4-1-2=1$ ve $v=s+m=1+1=2$'dir. Böylece, μ_1 ve $U_+^{*2}(\gamma)$ terimleri de elde edilmiş olur. (4.35) eşitliğinin üçüncü teriminde ise $j=3$ ve $s=1$ olduğu görülmektedir. Bu durumda, $i=n-sj=4-3=1$ ve $v=s=1$'dir. Böylece, μ_1 ve $U_+^*(\gamma)$ terimleri de elde edilmiş olur. (4.35) eşitliğinin dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci terimleri ise önceki momentlerden gelmiştir. Bu nedenle sadece μ_i'lerinin indisleri üçüncü momentteki indislerine göre bir artırılmıştır.

3) Son olarak, ilk on moment hesaplanırken C ve K katsayıları için elde edilen kurallar aşağıdaki gibidir:

$$C=\frac{v!}{s!\,m!\dots y!},K=\frac{n!}{i!\,(j!)^s(k!)^m\dots(l!)^y}. \qquad (4.36)$$

Burada

$$i=n-sj-mk-\cdots-yl, j\neq k\neq\cdots\neq l,$$
$$sj+mk+\cdots+yl\leq n-1, v=s+m+\cdots+y.$$

(4.31) eşitliğindeki C ve K katsayılarının elde edilişleri $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin altıncı momentinin Laplace dönüşümü örneği ile verilecektir.

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^6\right)dz=$$

$$=(C_1)(K_1)\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*5}(\gamma)D_1^{*5}(\gamma)+(C_2)(K_2)\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+(C_3)(K_3)\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_3^*(\gamma)+(C_4)(K_4)\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+(C_5)(K_5)\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+(C_6)(K_6)\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+(C_7)(K_7)\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_5^*(\gamma)+(C_8)(K_8)\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+$$

$$+(C_9)(K_9)\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)+(C_{10})(K_{10})\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)$$

$$+(C_{11})(K_{11})\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+(C_{12})(K_{12})\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_4^*(\gamma)+$$

$$+(C_{13})(K_{13})\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+(C_{14})(K_{14})\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+(C_{15})(K_{15})\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_3^*(\gamma)+(C_{16})(K_{16})\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+$$

$$+(C_{17})(K_{17})\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_2^*(\gamma)+(C_{18})(K_{18})\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*}(\gamma)D_1^*(\gamma)+$$
$$+(C_{19})(K_{19})\mu_6\widetilde{U}_+(\gamma). \qquad (4.37)$$

(4.36) eşitliği yardımıyla (4.37) eşitliğindeki (C, K) değerleri aşağıdaki gibi kolaylıkla hesaplanabilmektedir:

$$C_1=\frac{5!}{5!}=1, K_1=\frac{6!}{(1!)(1!)^5}=720, C_1K_1=720,$$

$$C_2=\frac{4!}{3!\,1!}=4, K_2=\frac{6!}{(1!)(1!)^3(2!)}=360, C_2K_2=1440,$$

$$C_3=\frac{3!}{2!\,1!}=3, K_3=\frac{6!}{(1!)(1!)^2(3!)}=120, C_3K_3=360,$$

$$C_4=\frac{3!}{1!\,2!}=3, K_4=\frac{6!}{(1!)(1!)(2!)^2}=180, C_4K_4=540,$$

$$C_5=\frac{2!}{1!\,1!}=2, K_5=\frac{6!}{(1!)(1!)(4!)}=30, C_5K_5=60,$$

$$C_6=\frac{2!}{1!\,1!}=2, K_6=\frac{6!}{(1!)(2!)(3!)}=60, C_6K_6=120,$$

$$C_7=\frac{1!}{1!}=1, K_7=\frac{6!}{(1!)(5!)}=6, C_7K_7=6,$$

$$C_8=\frac{4!}{4!}=1, K_8=\frac{6!}{(2!)(1!)^4}=360, C_8K_8=360,$$

$$C_9=\frac{3!}{2!\,1!}=3, K_9=\frac{6!}{(2!)(1!)^2(2!)}=180, C_9K_9=540,$$

$$C_{10}=\frac{2!}{1!\,1!}=2, K_{10}=\frac{6!}{(2!)(1!)(3!)}=60, C_{10}K_{10}=120,$$

$$C_{11}=\frac{2!}{2!}=1, K_{11}=\frac{6!}{(2!)(2!)^2}=90, C_{11}K_{11}=90,$$

$$C_{12}=\frac{1!}{1!}=1, K_{12}=\frac{6!}{(2!)(4!)}=15, C_{12}K_{12}=15,$$

$$C_{13}=\frac{3!}{3!}=1, K_{13}=\frac{6!}{(3!)(1!)^3}=120, C_{13}K_{13}=120,$$

$$C_{14}=\frac{2!}{1!\,1!}=2, K_{14}=\frac{6!}{(3!)(1!)(2!)}=60, C_{14}K_{14}=120,$$

$$C_{15}=\frac{1!}{1!}=1, K_{15}=\frac{6!}{(3!)(3!)}=20, C_{15}K_{15}=20,$$

$$C_{16}=\frac{2!}{2!}=1, K_{16}=\frac{6!}{(4!)(1!)^2}=30, C_{16}K_{16}=30,$$

$$C_{17}=\frac{1!}{1!}=1, K_{17}=\frac{6!}{(4!)(2!)}=15, C_{17}K_{17}=15,$$

$$C_{18}=\frac{1!}{1!}=1, K_{18}=\frac{6!}{(5!)(1!)}=6, C_{18}K_{18}=6,$$

$$C_{19}=\frac{0!}{0!}=1, K_{19}=\frac{6!}{6!}=1, C_{19}K_{19}=1. \tag{4.38}$$

(4.38) eşitliğindeki (C,K) değerlerini (4.37) eşitliğinde yerine koyduğumuz takdirde Teorem 4.2'de verilen $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin 6. momentinin Laplace dönüşümü elde edilmektedir.

Not 4.4. Yukarıdaki üç kural uygulandığı takdirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin n. momentinin Laplace dönüşümü, dolayısıyla da kesin ifadesi elde edilebilmektedir. Bulunan kuralların geçerliliği $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk on momentinin Laplace dönüşümü hesaplanarak test edilmiştir. Bu bağlamda, kurallar dâhilinde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin n. momentinin Laplace dönüşümü için genel formül aşağıdaki gibidir:

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^{n}\right) dz =$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\cdots\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1}(C)(K)\,\mu_i \widetilde{U}_{+}(\gamma)U_{+}^{*v}(\gamma)D_j^{*s}(\gamma)D_k^{*m}(\gamma)\ldots D_l^{*y}(\gamma),$$

Burada,

$$C=\frac{v!}{s!\,m!\ldots y!}, K=\frac{n!}{i!\,(j!)^s(k!)^m\ldots(l!)^y},$$

$$i=n-sj-mk-\cdots-yl, j\neq k\neq\cdots\neq l, D_0^*(\gamma)=1,$$

$$sj+mk+\cdots+yl\leq n-1, v=s+m+\cdots+y.$$

5. $X(t)$ SÜRECİNİN ZAYIF YAKINSAMA TEOREMİ

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\theta X(t)}\right)$’nin kesin ifadesinin kullanımı zordur. Zor olmasının nedeni, $\varphi_X(\theta)$’nın kesin ifadesinin matematiksel olarak kompleks bir yapıya sahip olmasıdır. Bu zorluktan kurtulmanın etkili bir yolu $\lambda \to \infty$ iken $\varphi_X(\theta)$ için asimtotik açılım elde etmektir. Bu bölümde $\varphi_X(\theta)$ için iki terimli asimtotik elde edilmiştir. Fakat asimtotik yöntemi kullanmadan önce $X(t)$ sürecini standartlaştırmak gerekmektedir. $X(t)$ sürecinin lineer bir dönüşümü olan $W(t)$ süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$W(t) = \frac{X(t)}{\lambda}.$$

Bu bölümde ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu $\varphi_W(\theta)$ için asimtotik açılım bulunacak ve zayıf yakınsama teoremi ispatlanacaktır. Bu bölümün geri kalan kısmında 4. Bölümde ayrıntılı olarak incelenen $\{S_n\}, n \geq 0$ rasgele yürüyüş sürecinin basamak anları ve basamak yüksekliklerinden faydalanılacaktır. Özetle, bu bölümün temel amacı $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin lineer bir dönüşümü olan $W(t)$ sürecinin limitteki ifadesini bulmaktır. Bu nedenle, aşağıdaki iki önermeyi vermek gerekmektedir.

Önerme 5.1. $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$ koşulu altında $\lambda \to \infty$ iken $M_1(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}\right)$’nin iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_1(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}\right) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + o(1).$$

Burada $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right)$, k = 1,2’dir.

İspat. $E\left(S_{N(\lambda z)}\right)$ tanımı gereği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_1(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+\right).$$

Wald özdeşliği yardımıyla aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$E\left(\sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+\right) = \mu_1 E\big(H(\lambda z)\big) = \mu_1 U_+(\lambda z). \tag{5.1}$$

Burada $U_+(\lambda z) = E\big(H(\lambda z)\big)$' tir.

$U_+(\lambda z)$'nin asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir (Feller, 1971):

$$U_+(\lambda z) = \frac{\lambda z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + g(\lambda z). \tag{5.2}$$

(5.2) eşitliğini (5.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$M_1(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}\big) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + g(\lambda z)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1'den faydalanılarak, $z \to 0$ ve $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$M_1(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}\big) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + o(1). \tag{5.3}$$

Burada $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big)$, k = 1,2'dir.

Böylece Önerme 5.1'in ispatı tamamlanmış olur. ∎

Önerme 5.1'in yardımıyla Önerme 5.2 aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 5.2. $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < \infty$ ve $\beta_1 \equiv E(\zeta_1) < \infty$ koşulları altında $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım yazılabilir:

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1).$$

Burada, $\beta_1 \equiv E(\zeta_1)$, $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big)$, k = 1,2'dir.

İspat. Önerme 5.1'den faydalanılarak $M_1(\lambda z)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_1(\lambda z) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + g(\lambda z). \tag{5.4}$$

Burada $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$'dır.

(5.4) eşitliğinin her iki tarafı $d\pi(z)$ ile çarpılarak 0'dan ∞'a kadar integral uygulandığında takdirde aşağıdaki ifade elde edilir:

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty \big(\lambda z + \hat{\mu}_1 + g(\lambda z)\big)\, d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \lambda z \, d\pi(z) + \int_0^\infty \hat{\mu}_1 \, d\pi(z) + \int_0^\infty g(\lambda z) \, d\pi(z).$$

$\int_0^\infty g(\lambda z) \, d\pi(z)$ terimi için Yardımcı Teorem 3.1'den faydalanıldığı takdirde $E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)$'nin iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1).$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta_1)$, $\hat{\mu}_1 \equiv E(\hat{\chi}_1) = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big), k = 1,2$'dir.

Böylece Önerme 5.2'nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.1. $E(\chi_1^{+2}) < \infty$, $E(\eta_1^2) < +\infty$ ve $E(\zeta_1) < \infty$ koşulları sağlanmış olsun. $\lambda \to \infty$ iken $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_W(\theta)$'nın iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_W(\theta) = \hat{\varphi}_\zeta(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\hat{\varphi}_\zeta(\theta) D_1(\theta) + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}\right] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada,

$$\hat{\varphi}_\zeta(\theta) = \frac{\varphi_\zeta(\theta) - 1}{i\theta\beta_1}, \varphi_\zeta(\theta) = E\big(e^{i\theta\zeta_1}\big), D_1(\theta) = i\theta\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1},$$

$$\widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}, \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}, m_k = E\big(\eta_1^k\big), \mu_k = E\big(\chi_1^{+k}\big), k = 1{,}2 \text{ ve } \beta_1 = E(\zeta_1)'\text{dir.}$$

İspat. 3. Bölümde elde edilen $X(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonunun alternatif şekli aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\big(e^{i\theta X(t)}\big) = \frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)} \int_0^\infty e^{i\theta\lambda z} \frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta) - 1}{\varphi_\eta(-\theta) - 1} d\pi(z), \theta \neq 0.$$

$W(t) = X(t)/\lambda$, $X(t)$ sürecinin doğrusal bir dönüşümü şeklinde ifade edilsin. Bu durumda $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_W(\theta)$ aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\varphi_W(\theta) \equiv E\big(e^{i\theta W(t)}\big) = E\left(e^{i\frac{\theta}{\lambda}X(t)}\right) = \varphi_X\left(\frac{\theta}{\lambda}\right).$$

Bu takdirde,

$$\varphi_W(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\big(e^{i\theta W(t)}\big) =$$

$$= \frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)} \int_0^{\infty} e^{i\theta z} \frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}\left(-\frac{\theta}{\lambda}\right) - 1}{\varphi_\eta\left(-\frac{\theta}{\lambda}\right) - 1} d\pi(z), \theta \neq 0. \tag{5.5}$$

(5.5) eşitliğinin paydasını ve payını sırasıyla $I_1(\lambda)$ ve $I_2(\lambda)$ şeklinde parçalara ayırarak asimtotik açılımları elde edilsin.

$$\varphi_W(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\big(e^{i\theta W(t)}\big) = \int_0^{\infty} \frac{I_2(\lambda)}{I_1(\lambda)} d\pi(z). \tag{5.6}$$

Burada, $I_1(\lambda) \equiv E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)\left[\varphi_\eta\left(-\frac{\theta}{\lambda}\right) - 1\right]$ ve $I_2(\lambda) \equiv e^{i\theta z}\left[\varphi_{S_{N(\lambda z)}}\left(-\frac{\theta}{\lambda}\right) - 1\right]$'dir. $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < +\infty$ koşulunun altında $I_1(\lambda)$ aşağıdaki gibi verilebilir (Feller, 1971):

$$I_1(\lambda) \equiv E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)\left[\varphi_\eta\left(-\frac{\theta}{\lambda}\right) - 1\right]$$

$$= E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)\left\{1 - \frac{i\theta}{\lambda} m_1 + \frac{(i\theta)^2}{2\lambda^2} m_2 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) - 1\right\}$$

$$= -m_1 E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)\frac{i\theta}{\lambda}\left\{1 - \frac{i\theta}{2\lambda}\frac{m_2}{m_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}.$$

Wald özdeşliğine göre $E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = m_1 E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda,

$$I_1(\lambda) = -E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\frac{i\theta}{\lambda}\left\{1 - \frac{i\theta}{\lambda}\widehat{m}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}. \tag{5.7}$$

Önerme 5.2'de verilen $E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)$'nin iki terimli asimtotik açılımını (5.7) eşitliğinde yerine koyarsak $I_1(\lambda)$'nın asimtotik açılımı için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$I_1(\lambda) = -\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1)\}\frac{i\theta}{\lambda}\left\{1 - \frac{i\theta}{\lambda}\widehat{m}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= -\left\{i\theta\beta_1 + \frac{\theta^2\beta_1}{\lambda}\widehat{m}_1 + \frac{i\theta}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= -i\theta\beta_1\left\{1 - \frac{i\theta\widehat{m}_1}{\lambda} + \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} = -i\theta\beta_1\left\{1 - \frac{1}{\lambda}D_1(\theta) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}. \quad (5.8)$$

Burada,

$$D_1(\theta) = i\theta\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}, \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}, \widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}, \mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right),$$

$$m_k = E\left(\eta_1^k\right), k = 1{,}2 \text{ ve } \beta_1 = E(\zeta_1)'\text{dir.}$$

(5.6) eşitliğinin payı $I_2(\lambda)$’nın asimtotik açılımı için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$I_2(\lambda) = e^{i\theta z}\left[\varphi_{S_{N(\lambda z)}}\left(-\frac{\theta}{\lambda}\right) - 1\right] = e^{i\theta z}\left[E\left(e^{-i\frac{\theta}{\lambda}S_{N(\lambda z)}}\right) - 1\right]$$

$\hat{S}_{N(\lambda z)} \equiv S_{N(\lambda z)} - \lambda z$ olsun. Bu durumda,

$$I_2(\lambda) = e^{i\theta z}\left[E\left(e^{-i\frac{\theta}{\lambda}\left(\lambda z + \hat{S}_{N(\lambda z)}\right)}\right) - 1\right]$$

$$= e^{i\theta z}\left[\left\{e^{-i\theta z}E\left(e^{-i\frac{\theta}{\lambda}\hat{S}_{N(\lambda z)}}\right)\right\} - 1\right] = E\left(e^{-i\frac{\theta}{\lambda}\hat{S}_{N(\lambda z)}}\right) - e^{i\theta z}. \quad (5.9)$$

$\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2})$ koşulu altında $\lambda \to \infty$ iken $\hat{S}_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin birinci momenti sonludur (Rogozin, 1964). Bu takdirde, sınır fonksiyoneli $\hat{S}_{N(\lambda z)}$’nin karakteristik fonksiyonunun Taylor açılımı (5.9) eşitliğinde yerine koyularak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I_2(\lambda) = \left[1 - i\frac{\theta}{\lambda}E\left(\hat{S}_{N(\lambda z)}\right) + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z)\right] - e^{i\theta z}$$

$$= 1 - e^{i\theta z} - i\frac{\theta}{\lambda}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z). \quad (5.10)$$

Burada, $E\left(\hat{S}_{N(\lambda z)}\right) = \hat{\mu}_1 + o(1), \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right), k = 1{,}2'\text{dir.}$

(5.10) eşitliğinin her iki tarafını $d\pi(z)$ ile çarpılıp 0’dan ∞’a kadar integrali alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^\infty I_2(\lambda)\,d\pi(z) = \int_0^\infty \left[1 - e^{i\theta z} - i\frac{\theta}{\lambda}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda}g(\lambda z)\right]d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - e^{i\theta z}\right)\, d\pi(z) - i\frac{\theta}{\lambda}\int_0^\infty \hat{\mu}_1\, d\pi(z) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty g(\lambda z)\, d\pi(z). \qquad (5.11)$$

(5.11) eşitliğinin son terimi Yardımcı Teorem 3.1'e göre sıfıra gittiği $\int_0^\infty g(\lambda z)\, d\pi(z) = o(1)$ bilinmektedir. Bu takdirde,

$$\int_0^\infty I_2(\lambda)\, d\pi(z) = \int_0^\infty \left(1 - e^{i\theta z}\right) d\pi(z) - i\frac{\theta}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \left(1 - \varphi_\zeta(\theta)\right) - i\frac{\theta}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (5.12)$$

Burada $\varphi_\zeta(\theta) = E\left(e^{i\theta\zeta_1}\right) = \int_0^\infty e^{i\theta z} d\pi(z)\,, \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$ ve $\mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right), k = 1{,}2'$dir. (5.8) ve (5.12) eşitlikleri (5.6) eşitliğinde yerine koyulduğunda $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_W(\theta)$'nın iki terimli asimtotik açılımı $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi_W(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\theta W(t)}\right) = \int_0^\infty \frac{I_2(\lambda)}{I_1(\lambda)} d\pi(z)$$

$$= \frac{\left(1 - \varphi_\zeta(\theta)\right) - i\frac{\theta}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{-i\theta\beta_1\left\{1 - \frac{1}{\lambda}D_1(\theta) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}}$$

$$= \frac{1}{-i\theta\beta_1}\left\{\left(1 - \varphi_\zeta(\theta)\right) - i\frac{\theta}{\lambda}\hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{1 + \frac{1}{\lambda}D_1(\theta) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= \frac{\varphi_\zeta(\theta) - 1}{i\theta\beta_1} + \frac{1}{\lambda i\theta\beta_1}\left[\left(\varphi_\zeta(\theta) - 1\right)D_1(\theta) + i\theta\hat{\mu}_1\right] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\varphi_W(\theta) = \hat{\varphi}_\zeta(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\hat{\varphi}_\zeta(\theta)D_1(\theta) + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}\right] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada

$$\hat{\varphi}_\zeta(\theta) = \frac{\varphi_\zeta(\theta) - 1}{i\theta\beta_1}, \varphi_\zeta(\theta) = E\left(e^{i\theta\zeta_1}\right), D_1(\theta) = i\theta\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1},$$

$$\hat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}, \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \text{ ve } \beta_1 = E(\zeta_1)'\text{dir.}$$

Böylece Teorem 5.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.1'in yardımıyla $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunun limit şekli aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 5.2. Teorem 5.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_W(\theta)$, $\hat{\varphi}_\zeta(\theta)$ karakteristik fonksiyonuna yakınsar:

$$\varphi_W(\theta) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \hat{\varphi}_\zeta(\theta).$$

Burada,

$$\hat{\varphi}_\zeta(\theta) = \frac{\varphi_\zeta(\theta) - 1}{i\theta\beta_1}, \varphi_\zeta(\theta) = E\left(e^{i\theta\zeta_1}\right) \text{ ve } \beta_1 = E(\zeta_1)'\text{dir.}$$

İspat. Teorem 5.1'de elde edilen $W(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonunun iki terimli asimtotik açılımı $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_W(\theta) = \hat{\varphi}_\zeta(\theta) + \frac{1}{\lambda}R(\theta) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{5.13}$$

Notasyon kısalığı için $R(\theta) = \hat{\varphi}_\zeta(\theta)D_1(\theta) + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}$ verilsin.

Burada

$$D_1(\theta) = i\theta\hat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}, \hat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}, \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \text{ ve } \beta_1 = E(\zeta_1)'\text{dir.}$$

(5.13) eşitliğindeki $R(\theta)$ aşağıdaki gibi ele alınsın:

$$|R(\theta)| = \left|\hat{\varphi}_\zeta(\theta)D_1(\theta) + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}\right| = \left|\hat{\varphi}_\zeta(\theta)\left(i\theta\hat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}\right|$$

$$\leq \theta\hat{m}_1 + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1} + \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1} = \theta\hat{m}_1 + \frac{2\hat{\mu}_1}{\beta_1} = C_1(\theta).$$

Burada $C_1(\theta) \equiv \theta\hat{m}_1 + \frac{2\hat{\mu}_1}{\beta_1}$'dir.

Teorem 5.1'in koşulları altında her sonlu θ için $m_2 < \infty$, $\mu_2 < \infty$ ve $0 < \beta_1 < \infty$'dur. Böylece $C_1(\theta)$ sonludur. Dolayısıyla $C_1(\theta)$ olduğu için $R(\theta)$ de sonludur. Özetle her sonlu θ, $(\forall\theta \in \mathcal{R})$ için $\lambda \to \infty$ iken $\frac{R(\theta)}{\lambda} \to 0$ olur. Yani,

$$\varphi_W(\theta) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \hat{\varphi}_\zeta(\theta)$$

olur. Burada,

$$\hat{\varphi}_\zeta(\theta) = \frac{\varphi_\zeta(\theta) - 1}{i\theta\beta_1}, \varphi_\zeta(\theta) = E\left(e^{i\theta\zeta_1}\right), D_1(\theta) = i\theta\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\beta_1}, \widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}, \hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}.$$

Böylece Teorem 5.2'nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Not 5.1. $\hat{\varphi}_\zeta(\theta)$, $\{\zeta_n\}, n = 1,2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi tarafından üretilen yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımının karakteristik fonksiyonudur. Teorem 5.2'de $\lambda \to \infty$ iken $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_W(\theta)$'nın $\hat{\varphi}_\zeta(\theta)$ karakteristik fonksiyonuna yakınsadığı gösterilmiştir. Karakteristik fonksiyonlar için süreklilik teoremine (Feller, 1971; Lukacs, 1970) göre $X(t)$ sürecinin doğrusal bir dönüşümü olan $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımı, $\{\zeta_n\}, n = 1,2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi tarafından üretilen yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımına zayıf yakınsamaktadır. Bu açıklama aşağıdaki teorem yardımıyla verilmiştir.

Teorem 5.3. Teorem 5.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_W(x)$, her $x > 0$ için $R(x)$ limit dağılımına zayıf yakınsar:

$$Q_W(x) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} R(x) \equiv \frac{1}{\beta_1}\int_0^x \left(1 - \pi(v)\right) dv.$$

Burada

$$Q_W(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{W(t) \leq x\}, \beta_1 = E(\zeta_1) \text{ ve } \pi(v) = P\{\zeta_1 \leq v\}, v > 0,$$

$R(x)$, $\{\zeta_n\}, n = 1,2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi tarafından üretilen yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımıdır.

6. $X(t)$ SÜRECİNİN ERGODİK DAĞILIMININ MOMENTLERİ İÇİN KESİN İFADELER

Çalışmanın 3. Bölümünde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_X(\theta)$ karakteristik fonksiyonun kesin ifadesi, 4. Bölümde ise $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Bu bölümde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunun kesin ifadesi yardımıyla sürecin ilk beş ergodik momentinin kesin ifadesi $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti ile elde edilmiştir. Ayrıca, ilk dört moment için bulunan kesin ifadeler yardımıyla $E(X^n)$ için genel bir form elde edilmiştir. Bu genel formun geçerliliğini test etmek için beşinci ergodik momentin kesin ifadesi de hesaplanmış, genel formun doğruluğu bir bakıma onaylanmıştır.

Teorem 6.1. Teorem 3.1'in koşullarına ek olarak $E(|\eta_1|^{n+1}) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $n.$ momenti $E(X^n)$ mevcuttur ve $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri ile aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E(X^n)$$
$$= \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{C_{n+1-m}}{m} \binom{n}{n+1-m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} E\Big((\lambda\zeta_1)^{m-k} M_k(\lambda\zeta_1)\Big). \quad (6.1)$$

Burada $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S^k_{N(\lambda z)}\big)$, $\widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$ ve $m_k = E\big(\eta_1^k\big), k = 1,2,3,4,5,6$'dır,

$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z) d\pi(z)\,, n = 1,2,3,4,5, k = 1,2,3,4,5$'tir.

Ek olarak,

$$C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} (-1)^{k(i+1)}(-1)^{s(j+1)} \frac{(s+k)!}{s!\,k!} \frac{n!}{(i!)^k (j!)^s} \widehat{m}_i^k \widehat{m}_j^s,$$

$$C_0 \equiv 1, \widehat{m}_0 = 1, i \neq j, ik + js = n.$$

Not 6.1. C_n, 4. Bölümdeki $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin $n.$ momentinin Laplace dönüşümü için genel formüle benzer bir bakış açısıyla ifade edilmiştir. C_n'nin terim sayısı 4. Bölümde tanımı verilen $p(n), n = 0,1,2, \ldots$ parçalanış fonksiyonuna eşittir. Ayrıca, $\widehat{m}_i^k$'lerin indisleri de $p(n)$'e göre oluşturulmaktadır. $p(n)$'nin n'nin sıralanış düzenine bağlı olmaksızın tamsayı toplamlarına ayrılma sayısına ve dizilişine karşılık geldiği bilinmektedir. Örneğin, $C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3$ ele alınsın. $p(3) = 3$'tür, yani C_3'ün terim sayısı üçtür. $p(3)$ diğer yandan $i)\ 3, ii)\ 1+2, iii)\ 1+1+1$ dizilimini vermektedir. Bu durumda, $p(3)$'ün dizilimdeki $i)\ 3$ alternatifinin $\widehat{m}_3$'e, $ii)\ 1+2$ alternatifinin $\widehat{m}_1\widehat{m}_2$'e ve $iii)\ 1+1+1$ alternatifinin $\widehat{m}_1\widehat{m}_1\widehat{m}_1 \equiv \widehat{m}_1^3$'e karşılık geldiği açıkça görülmektedir. $\widehat{m}_i^k\widehat{m}_j^s$ terimlerinin katsayıları ise yine 4. Bölümde verilen C ve K katsayıları gibi hesaplanmaktadır.

İspat. Önerme 3.1'de kesin ifadesi elde edilen $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonunun $\theta \to 0$ iken Taylor açılımından faydalanılacaktır. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\theta X(t)}\right) = \frac{1}{E\left(N(\lambda\zeta_1)\right)} \int_0^\infty e^{i\theta\lambda z} \frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta) - 1}{\varphi_\eta(-\theta) - 1} d\pi(z), \theta \neq 0. \quad (6.2)$$

$\varphi_X(\theta)$'nin Taylor açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_X(\theta) = 1 + i\theta E(X) + \frac{(i\theta)^2}{2!}E(X^2) + \frac{(i\theta)^3}{3!}E(X^3) +$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}E(X^4) + \frac{(i\theta)^5}{5!}E(X^5) + o(\theta^5). \quad (6.3)$$

(6.3) ifadesinde $E(X^k), k = 1,2,3,4,5$, $X(t)$ sürecinin ilk beş momentidir.

η_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonun $\theta \to 0$ iken Taylor açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_\eta(-\theta) \equiv E\left(e^{-i\theta\eta_1}\right) = 1 - i\theta m_1 + \frac{(i\theta)^2}{2!}m_2 - \frac{(i\theta)^3}{3!}m_3 +$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}m_4 - \frac{(i\theta)^5}{5!}m_5 + \frac{(i\theta)^6}{6!}m_6 + o(\theta^6). \quad (6.4)$$

Burada $m_k = E\left(\eta_1^k\right), k = 1,2, \ldots$ 'dir.

$$\frac{1}{\varphi_\eta(-\theta) - 1} =$$

$$= \frac{1}{-i\theta m_1 + \frac{(i\theta)^2}{2!}m_2 - \frac{(i\theta)^3}{3!}m_3 + \frac{(i\theta)^4}{4!}m_4 - \frac{(i\theta)^5}{5!}m_5 + \frac{(i\theta)^6}{6!}m_6 + o(\theta^6)}$$

$$= \frac{1}{-i\theta m_1\left(1 - \frac{i\theta}{2!}\frac{m_2}{m_1} + \frac{(i\theta)^2}{3!}\frac{m_3}{m_1} - \frac{(i\theta)^3}{4!}\frac{m_4}{m_1} + \frac{(i\theta)^4}{5!}\frac{m_5}{m_1} - \frac{(i\theta)^5}{6!}\frac{m_6}{m_1} + o(\theta^5)\right)}$$

$$= \frac{1}{-i\theta m_1\left(1 - i\theta\widehat{m}_1 + \frac{(i\theta)^2}{2!}\widehat{m}_2 - \frac{(i\theta)^3}{3!}\widehat{m}_3 + \frac{(i\theta)^4}{4!}\widehat{m}_4 - \frac{(i\theta)^5}{5!}\widehat{m}_5 + o(\theta^5)\right)}$$

$$= \frac{1}{-i\theta m_1}\left\{1 + i\theta\widehat{m}_1 + \frac{(i\theta)^2}{2!}[2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2] + \frac{(i\theta)^3}{3!}[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3] + \right.$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_1\widehat{m}_3 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2 + 24\widehat{m}_1^4] + \frac{(i\theta)^5}{5!}[\widehat{m}_5 - 20\widehat{m}_2\widehat{m}_3 +$$

$$\left. +60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3 - 10\widehat{m}_1\widehat{m}_4 + 90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2 - 240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2 + 120\widehat{m}_1^5] + o(\theta^5)\right\}. \quad (6.5)$$

Burada $\widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}, k = 1,2,...$’dir. $\widehat{m}_k$, $\{\eta_n\}, n = 1,2,...$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün ergodik momentleri olarak adlandırılmaktadır.

$S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonun $\theta \to 0$ iken Taylor açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta) \equiv E\left(e^{-i\theta S_{N(\lambda z)}}\right) =$$

$$= 1 - i\theta M_1(\lambda z) + \frac{(i\theta)^2}{2!}M_2(\lambda z) - \frac{(i\theta)^3}{3!}M_3(\lambda z) + \frac{(i\theta)^4}{4!}M_4(\lambda z) -$$

$$-\frac{(i\theta)^5}{5!}M_5(\lambda z) + \frac{(i\theta)^6}{6!}M_6(\lambda z) + o(\theta^6). \quad (6.6)$$

Burada $M_k(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^k\right), k = 1,2,3,4,5,6$’dır.

$$\varphi_{S_{N(\lambda z)}} - 1 =$$

$$= -i\theta M_1(\lambda z)\left\{1 - \frac{i\theta}{2!}\frac{M_2(\lambda z)}{M_1(\lambda z)} + \frac{(i\theta)^2}{3!}\frac{M_3(\lambda z)}{M_1(\lambda z)} - \frac{(i\theta)^3}{4!}\frac{M_4(\lambda z)}{M_1(\lambda z)} + \right.$$

$$\left. +\frac{(i\theta)^4}{5!}\frac{M_5(\lambda z)}{M_1(\lambda z)} - \frac{(i\theta)^5}{6!}\frac{M_6(\lambda z)}{M_1(\lambda z)} + o(\theta^5)\right\}$$

$$= -i\theta M_1(\lambda z)\left\{1 - i\theta\widehat{M}_1(\lambda z) + \frac{(i\theta)^2}{2!}\widehat{M}_2(\lambda z) - \frac{(i\theta)^3}{3!}\widehat{M}_3(\lambda z)\right.$$

$$\left.+\frac{(i\theta)^4}{4!}\widehat{M}_4(\lambda z) - \frac{(i\theta)^5}{5!}\widehat{M}_5(\lambda z) + o(\theta^5)\right\}. \tag{6.7}$$

Burada $\widehat{M}_k(\lambda z) = \frac{M_{k+1}(\lambda z)}{(k+1)M_1(\lambda z)}, k = 1,2, \ldots$'dir.

(6.5) ve (6.7) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta) - 1}{\varphi_\eta(-\theta) - 1} =$$

$$= \frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\left\{1 - i\theta\widehat{M}_1(\lambda z) + \frac{(i\theta)^2}{2!}\widehat{M}_2(\lambda z) - \frac{(i\theta)^3}{3!}\widehat{M}_3(\lambda z)\right.$$

$$\left.+\frac{(i\theta)^4}{4!}\widehat{M}_4(\lambda z) - \frac{(i\theta)^5}{5!}\widehat{M}_5(\lambda z) + o(\theta^5)\right\}$$

$$\left\{1 + i\theta\widehat{m}_1 + \frac{(i\theta)^2}{2!}[2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2] + \frac{(i\theta)^3}{3!}[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3]\right.$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_1\widehat{m}_3 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2 + 24\widehat{m}_1^4] + \frac{(i\theta)^5}{5!}[\widehat{m}_5 - 20\widehat{m}_2\widehat{m}_3 +$$

$$\left.+60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3 - 10\widehat{m}_1\widehat{m}_4 + 90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2 - 240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2 + 120\widehat{m}_1^5] + o(\theta^5)\right\}$$

$$= \frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\left\{1 + i\theta\widehat{m}_1 + \frac{(i\theta)^2}{2!}[2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2] + \frac{(i\theta)^3}{3!}[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3] +\right.$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_1\widehat{m}_3 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2 + 24\widehat{m}_1^4] + \frac{(i\theta)^5}{5!}[\widehat{m}_5 - 20\widehat{m}_2\widehat{m}_3 +$$

$$+60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3 - 10\widehat{m}_1\widehat{m}_4 + 90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2 - 240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2 + 120\widehat{m}_1^5] -$$

$$-i\theta\widehat{M}_1(\lambda z) - (i\theta)^2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z) -$$

$$-\frac{(i\theta)^3}{2!}[2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2]\widehat{M}_1(\lambda z) - \frac{(i\theta)^4}{3!}[\widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3]\widehat{M}_1(\lambda z) -$$

$$-\frac{(i\theta)^5}{4!}[-\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_1\widehat{m}_3 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2 + 24\widehat{m}_1^4]\widehat{M}_1(\lambda z) + \frac{(i\theta)^2}{2!}\widehat{M}_2(\lambda z) +$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{2!}\hat{m}_1\hat{M}_2(\lambda z)+\frac{(i\theta)^4}{4}[2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2]\hat{M}_2(\lambda z)+$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{12}[\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3]\hat{M}_2(\lambda z)-\frac{(i\theta)^3}{3!}\hat{M}_3(\lambda z)-\frac{(i\theta)^4}{3!}\hat{m}_1\hat{M}_3(\lambda z)-$$

$$-\frac{(i\theta)^5}{12}[2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2]\hat{M}_3(\lambda z)+\frac{(i\theta)^4}{4!}\hat{M}_4(\lambda z)+$$

$$\left.+\frac{(i\theta)^5}{4!}\hat{m}_1\hat{M}_4(\lambda z)-\frac{(i\theta)^5}{4!}\hat{M}_5(\lambda z)+o(\theta^5)\right\}$$

$$\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}=$$

$$=\frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\left\{1+i\theta\left[\hat{m}_1-\hat{M}_1(\lambda z)\right]+\frac{(i\theta)^2}{2!}\left[2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2-2\hat{m}_1\hat{M}_1(\lambda z)+\hat{M}_2(\lambda z)\right]+\right.$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{3!}\left[\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3-3(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_1(\lambda z)+3\hat{m}_1\hat{M}_2(\lambda z)-\hat{M}_3(\lambda z)\right]+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}[-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4-$$

$$-4(\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3)\hat{M}_1(\lambda z)+6(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_2(\lambda z)-4\hat{m}_1\hat{M}_3(\lambda z)+\hat{M}_4(\lambda z)\Big]$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{5!}[\hat{m}_5-20\hat{m}_2\hat{m}_3+60\hat{m}_1^2\hat{m}_3-10\hat{m}_1\hat{m}_4+90\hat{m}_1\hat{m}_2^2-240\hat{m}_1^3\hat{m}_2+$$

$$+120\hat{m}_1^5-5(-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4)\hat{M}_1(\lambda z)+$$

$$+10(\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3)\hat{M}_2(\lambda z)-10(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_3(\lambda z)+$$

$$\left.+5\hat{m}_1\hat{M}_4(\lambda z)-\hat{M}_5(\lambda z)\Big]+o(\theta^5)\right\}. \tag{6.8}$$

$e^{i\theta\lambda z}$'nin $\theta\to 0$ iken Taylor açılımı aşağıdaki gibidir:

$$e^{i\theta\lambda z}=1+i\theta\lambda z+\frac{(i\theta)^2}{2!}(\lambda z)^2+\frac{(i\theta)^3}{3!}(\lambda z)^3+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}(\lambda z)^4+\frac{(i\theta)^5}{5!}(\lambda z)^5+o(\theta^5). \tag{6.9}$$

(6.8) ve (6.9) açılımları yardımıyla aşağıdaki açılım elde edilir:

$$e^{i\theta\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}=$$

$$=\frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\Big\{1+i\theta\big[\hat{m}_1-\hat{M}_1(\lambda z)\big]+\frac{(i\theta)^2}{2!}\big[2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2-2\hat{m}_1\hat{M}_1(\lambda z)+\hat{M}_2(\lambda z)\big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{3!}\big[\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3-3(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_1(\lambda z)+3\hat{m}_1\hat{M}_2(\lambda z)-\hat{M}_3(\lambda z)\big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}[-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4-$$

$$-4(\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3)\hat{M}_1(\lambda z)+$$

$$+6(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_2(\lambda z)-4\hat{m}_1\hat{M}_3(\lambda z)+\hat{M}_4(\lambda z)\big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{5!}[\hat{m}_5-20\hat{m}_2\hat{m}_3+60\hat{m}_1^2\hat{m}_3-10\hat{m}_1\hat{m}_4+90\hat{m}_1\hat{m}_2^2-240\hat{m}_1^3\hat{m}_2+$$

$$+120\hat{m}_1^5-5(-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4)\hat{M}_1(\lambda z)+$$

$$+10(\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3)\hat{M}_2(\lambda z)-10(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_3(\lambda z)+$$

$$+5\hat{m}_1\hat{M}_4(\lambda z)-\hat{M}_5(\lambda z)\big]+i\theta\lambda z+(i\theta)^2\lambda z\big[\hat{m}_1-\hat{M}_1(\lambda z)\big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{2!}\lambda z\big[2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2-2\hat{m}_1\hat{M}_1(\lambda z)+\hat{M}_2(\lambda z)\big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{3!}\lambda z\big[\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3-3(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_1(\lambda z)+3\hat{m}_1\hat{M}_2(\lambda z)-\hat{M}_3(\lambda z)\big]$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{4!}\lambda z[-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4-$$

$$-4(\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3)\hat{M}_1(\lambda z)+6(2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2)\hat{M}_2(\lambda z)-4\hat{m}_1\hat{M}_3(\lambda z)+$$

$$+\hat{M}_4(\lambda z)\big]+\frac{(i\theta)^2}{2!}(\lambda z)^2+\frac{(i\theta)^3}{2!}(\lambda z)^2\big[\hat{m}_1-\hat{M}_1(\lambda z)\big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4}(\lambda z)^2\left[2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2-2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z)+\widehat{M}_2(\lambda z)\right]+$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{12}(\lambda z)^2\left[\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3-3(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)\widehat{M}_1(\lambda z)+3\widehat{m}_1\widehat{M}_2(\lambda z)-\right.$$

$$\left.-\widehat{M}_3(\lambda z)\right]+\frac{(i\theta)^3}{3!}(\lambda z)^3+\frac{(i\theta)^4}{3!}(\lambda z)^3\left[\widehat{m}_1-\widehat{M}_1(\lambda z)\right]+\frac{(i\theta)^5}{12}(\lambda z)^3[2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2-$$

$$-2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z)+\widehat{M}_2(\lambda z)]+\frac{(i\theta)^4}{4!}(\lambda z)^4+\frac{(i\theta)^5}{4!}(\lambda z)^4\left[\widehat{m}_1-\widehat{M}_1(\lambda z)\right]+$$

$$\left.+\frac{(i\theta)^5}{5!}(\lambda z)^5+o(\theta^5)\right\}$$

$$e^{i\theta\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}=\frac{M_1(\lambda z)}{m_1}\left\{1+i\theta\left[\widehat{m}_1-\widehat{M}_1(\lambda z)+\lambda z\right]+\right.$$

$$+\frac{(i\theta)^2}{2!}\left[2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2-2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z)+\widehat{M}_2(\lambda z)+2\lambda z\left(\widehat{m}_1-\widehat{M}_1(\lambda z)\right)+(\lambda z)^2\right]+$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{3!}\left[\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3-3(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)\widehat{M}_1(\lambda z)+3\widehat{m}_1\widehat{M}_2(\lambda z)-\widehat{M}_3(\lambda z)+\right.$$

$$\left.+3\lambda z\left(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2-2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z)+\widehat{M}_2(\lambda z)\right)+3(\lambda z)^2\left(\widehat{m}_1-\widehat{M}_1(\lambda z)\right)+(\lambda z)^3\right]+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}[-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4-$$

$$-4(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)\widehat{M}_1(\lambda z)+$$

$$+6(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)\widehat{M}_2(\lambda z)-4\widehat{m}_1\widehat{M}_3(\lambda z)+\widehat{M}_4(\lambda z)+$$

$$+4\lambda z\left(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3-3(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)\widehat{M}_1(\lambda z)+3\widehat{m}_1\widehat{M}_2(\lambda z)-\widehat{M}_3(\lambda z)\right)+$$

$$+6(\lambda z)^2\left(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2-2\widehat{m}_1\widehat{M}_1(\lambda z)+\widehat{M}_2(\lambda z)\right)+$$

$$\left.+4(\lambda z)^3\left(\widehat{m}_1-\widehat{M}_1(\lambda z)\right)+(\lambda z)^4\right]+$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{5!}[\hat{m}_5 - 20\hat{m}_2\hat{m}_3 + 60\hat{m}_1^2\hat{m}_3 - 10\hat{m}_1\hat{m}_4 + 90\hat{m}_1\hat{m}_2^2 - 240\hat{m}_1^3\hat{m}_2 +$$

$$+120\hat{m}_1^5 - 5(-\hat{m}_4 + 8\hat{m}_1\hat{m}_3 + 6\hat{m}_2^2 - 36\hat{m}_1^2\hat{m}_2 + 24\hat{m}_1^4)\hat{M}_1(\lambda z) +$$

$$+10(\hat{m}_3 - 6\hat{m}_1\hat{m}_2 + 6\hat{m}_1^3)\hat{M}_2(\lambda z) - 10(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2)\hat{M}_3(\lambda z) +$$

$$+5\hat{m}_1\hat{M}_4(\lambda z) - \hat{M}_5(\lambda z) + 5\lambda z(-\hat{m}_4 + 8\hat{m}_1\hat{m}_3 + 6\hat{m}_2^2 - 36\hat{m}_1^2\hat{m}_2 + 24\hat{m}_1^4 -$$

$$-4(\hat{m}_3 - 6\hat{m}_1\hat{m}_2 + 6\hat{m}_1^3)\hat{M}_1(\lambda z) + 6(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2)\hat{M}_2(\lambda z) - 4\hat{m}_1\hat{M}_3(\lambda z) +$$

$$+\hat{M}_4(\lambda z)\Big) + 10(\lambda z)^2\big(\hat{m}_3 - 6\hat{m}_1\hat{m}_2 + 6\hat{m}_1^3 - 3(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2)\hat{M}_1(\lambda z) +$$

$$+3\hat{m}_1\hat{M}_2(\lambda z) - \hat{M}_3(\lambda z)\Big) + 10(\lambda z)^3\left(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2 - 2\hat{m}_1\hat{M}_1(\lambda z) + \hat{M}_2(\lambda z)\right) +$$

$$+5(\lambda z)^4\left(\hat{m}_1 - \hat{M}_1(\lambda z)\right) + (\lambda z)^5\Big] + o(\theta^5)\Big\}$$

$$e^{i\theta\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta) - 1}{\varphi_\eta(-\theta) - 1} = \frac{1}{m_1}\Big\{M_1(\lambda z) + i\theta\left[\hat{m}_1 M_1(\lambda z) - \frac{1}{2}M_2(\lambda z) + \lambda z M_1(\lambda z)\right]$$

$$+\frac{(i\theta)^2}{2!}\Big[2\hat{m}_1^2 M_1(\lambda z) - \hat{m}_2 M_1(\lambda z) - \hat{m}_1 M_2(\lambda z) + \frac{1}{3}M_3(\lambda z) + 2\lambda z\hat{m}_1 M_1(\lambda z) -$$

$$-\lambda z M_2(\lambda z) + (\lambda z)^2 M_1(\lambda z)] + \frac{(i\theta)^3}{3!}[(\hat{m}_3 - 6\hat{m}_1\hat{m}_2 + 6\hat{m}_1^3)M_1(\lambda z) -$$

$$-\frac{3}{2}(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2)M_2(\lambda z) + \hat{m}_1 M_3(\lambda z) - \frac{1}{4}M_4(\lambda z) + 3\lambda z(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2)M_1(\lambda z) -$$

$$-3\lambda z\hat{m}_1 M_2(\lambda z) + \lambda z M_3(\lambda z) + 3(\lambda z)^2\hat{m}_1 M_1(\lambda z) - \frac{3}{2}(\lambda z)^2 M_2(\lambda z) + (\lambda z)^3 M_1(\lambda z)\Big]$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}[(-\hat{m}_4 + 8\hat{m}_1\hat{m}_3 + 6\hat{m}_2^2 - 36\hat{m}_1^2\hat{m}_2 + 24\hat{m}_1^4)M_1(\lambda z) -$$

$$-2(\hat{m}_3 - 6\hat{m}_1\hat{m}_2 + 6\hat{m}_1^3)M_2(\lambda z) + 2(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2)M_3(\lambda z) -$$

$$-\hat{m}_1 M_4(\lambda z) + \frac{1}{5}M_5(\lambda z) +$$

$$+4\lambda z(\hat{m}_3 - 6\hat{m}_1\hat{m}_2 + 6\hat{m}_1^3)M_1(\lambda z) - 6\lambda z(2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2)M_2(\lambda z) + 4\lambda z\hat{m}_1 M_3(\lambda z) -$$

$$-\lambda z M_4(\lambda z)+6(\lambda z)^2(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)M_1(\lambda z)-6(\lambda z)^2\widehat{m}_1 M_2(\lambda z)+2(\lambda z)^2 M_3(\lambda z)+$$

$$+4(\lambda z)^3\widehat{m}_1 M_1(\lambda z)-2(\lambda z)^3 M_2(\lambda z)+(\lambda z)^4 M_1(\lambda z)]+$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{5!}[(\widehat{m}_5-20\widehat{m}_2\widehat{m}_3+60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3-10\widehat{m}_1\widehat{m}_4+90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2-240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2+$$

$$+120\widehat{m}_1^5)M_1(\lambda z)-\frac{5}{2}(-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4)M_2(\lambda z)+$$

$$+\frac{10}{3}(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)M_3(\lambda z)-\frac{5}{2}(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)M_4(\lambda z)+\widehat{m}_1 M_5(\lambda z)-$$

$$-\frac{1}{6}M_6(\lambda z)+5\lambda z\big((-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4)M_1(\lambda z)-$$

$$-2(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)M_2(\lambda z)+2(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)M_3(\lambda z)-\widehat{m}_1 M_4(\lambda z)+$$

$$+\frac{1}{5}M_5(\lambda z)\Bigg)+10(\lambda z)^2\big((\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)M_1(\lambda z)-\frac{3}{2}(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)M_2(\lambda z)+$$

$$+\widehat{m}_1 M_3(\lambda z)-\frac{1}{4}M_4(\lambda z)\Bigg)+10(\lambda z)^3\big((2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)M_1(\lambda z)-\widehat{m}_1 M_2(\lambda z)+$$

$$+\frac{1}{3}M_3(\lambda z)\Bigg)+5(\lambda z)^4\left(\widehat{m}_1 M_1(\lambda z)-\frac{1}{2}M_2(\lambda z)\right)+(\lambda z)^5 M_1(\lambda z)\Bigg]+o(\theta^5)\}. \quad (6.10)$$

(6.10) açılımı $d\pi(z)$ ile çarpılıp 0'dan ∞'a kadar integrali alınırsa aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\int_0^\infty e^{i\theta\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}d\pi(z)=$$

$$=\frac{1}{m_1}\Big\{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)+i\theta\left[\widehat{m}_1 E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big)\right]+$$

$$+\frac{(i\theta)^2}{2!}\Big[(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\widehat{m}_1 E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2\widehat{m}_1 E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big)\Big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{3!}[(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{3}{2}(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+\widehat{m}_1E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+3(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-3\widehat{m}_1E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)+3\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)\Big]+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!}\big[(-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-2(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)-\widehat{m}_1E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)+4(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-6(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+4\widehat{m}_1E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-E\big(\lambda\zeta_1M_4(\lambda\zeta_1)\big)+6(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-6\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+2E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)+4\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)]+$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{5!}[(\widehat{m}_5-20\widehat{m}_2\widehat{m}_3+60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3-10\widehat{m}_1\widehat{m}_4+90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2-240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2+$$

$$+120\widehat{m}_1^5)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}(-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+$$

$$+24\widehat{m}_1^4)E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{10}{3}(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{5}{2}(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+\widehat{m}_1E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{6}E\big(M_6(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+5(-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4)E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-10(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+10(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-5\widehat{m}_1 E\big(\lambda\zeta_1 M_4(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1 M_5(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+10(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-15(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+10\widehat{m}_1 E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_3(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{5}{2}\,E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_4(\lambda\zeta_1)\big)+10(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-10\widehat{m}_1 E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{10}{3}E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_3(\lambda\zeta_1)\big)+5\widehat{m}_1 E\big((\lambda\zeta_1)^4 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{5}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^4 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big((\lambda\zeta_1)^5 M_1(\lambda\zeta_1)\big)\Big]+o(\theta^5)\Big\}. \qquad (6.11)$$

(6.11) açılımının her iki tarafı $E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)$'e bölünürken Wald özdeşliği yardımıyla $E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)=m_1 E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)$ eşitliği dikkate alındığında aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\varphi_X(\theta)=\frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)}\int_0^\infty e^{i\theta\lambda z}\,\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}\,d\pi(z)=$$

$$=1+\frac{i\theta}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\widehat{m}_1 E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\Big\}+$$

$$+\frac{(i\theta)^2}{2!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2\widehat{m}_1 E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\widehat{m}_1 E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\}+$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{3!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\{E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+3\widehat{m}_1 E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-3\widehat{m}_1 E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\widehat{m}_1 E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)$$

$$+3(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{3}{2}(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\}+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\{E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)-2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+2E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)$$

$$-E\big(\lambda\zeta_1M_4(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)+4\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-6\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+4\widehat{m}_1E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\widehat{m}_1E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+6(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-6(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+2(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+4(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-2(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)$$

$$+(-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\}+$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{5!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\{E\big((\lambda\zeta_1)^5M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^4M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+\frac{10}{3}E\big((\lambda\zeta_1)^3M_3(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}\,E\big((\lambda\zeta_1)^2M_4(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1M_5(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{1}{6}E\big(M_6(\lambda\zeta_1)\big)+5\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)-10\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+10\widehat{m}_1E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)-5\widehat{m}_1E\big(\lambda\zeta_1M_4(\lambda\zeta_1)\big)+\widehat{m}_1E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+10(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-15(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+10(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}(2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2)E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+10(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-10(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+\frac{10}{3}(\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3)E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+5(-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4)E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{5}{2}(-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4)E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+(\hat{m}_5-20\hat{m}_2\hat{m}_3+60\hat{m}_1^2\hat{m}_3-10\hat{m}_1\hat{m}_4+90\hat{m}_1\hat{m}_2^2-$$

$$-240\hat{m}_1^3\hat{m}_2+120\hat{m}_1^5)E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\big\}+o(\theta^5). \qquad (6.12)$$

(6.12) açılımını kısaltmak amacıyla aşağıdaki notasyonları verelim:

$$C_1\equiv\hat{m}_1;\ C_2\equiv 2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2;\ C_3\equiv\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3;$$

$$C_4\equiv-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4;$$

$$C_5\equiv\hat{m}_5-20\hat{m}_2\hat{m}_3+60\hat{m}_1^2\hat{m}_3-10\hat{m}_1\hat{m}_4+90\hat{m}_1\hat{m}_2^2-240\hat{m}_1^3\hat{m}_2+120\hat{m}_1^5.$$

Burada $\hat{m}_n\equiv\frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$ ve $m_n\equiv E(\eta_1^n), n=1,2,3,4,5,6$’dır.

Bu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\varphi_X(\theta)=\frac{1}{E\big(N(\lambda\zeta_1)\big)}\int_0^\infty e^{i\theta\lambda z}\frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}d\pi(z)=$$

$$=1+\frac{i\theta}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)+C_1E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\Big\}+$$

$$+\frac{(i\theta)^2}{2!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+C_1\big[2E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big]+C_2E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\big\}+$$

$$+\frac{(i\theta)^3}{3!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\big\{E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+C_1\big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-3E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\big]+$$

$$+3C_2\Big[E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\Big]+C_3E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\Big\}+$$

$$+\frac{(i\theta)^4}{4!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\big\{E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)-2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_3(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(\lambda\zeta_1 M_4(\lambda\zeta_1)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+C_1\big[4E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 6E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+4E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)\big] +$$

$$+2C_2\big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 3E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\big] +$$

$$+2C_3\big[2E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big] + C_4 E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\big\} +$$

$$+\frac{(i\theta)^5}{5!\,E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\big\{E\big((\lambda\zeta_1)^5 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{5}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^4 M_2(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+\frac{10}{3}E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_3(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{5}{2}\,E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_4(\lambda\zeta_1)\big) + E\big(\lambda\zeta_1 M_5(\lambda\zeta_1)\big) -$$

$$-\frac{1}{6}E\big(M_6(\lambda\zeta_1)\big) + 5C_1\big[E\big((\lambda\zeta_1)^4 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 2E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_2(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+2E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_3(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(\lambda\zeta_1 M_4(\lambda\zeta_1)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)\Big] +$$

$$+5C_2\big[2E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 3E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big) + 2E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big) -$$

$$-\frac{1}{2}E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)\Big] + 10C_3\left[E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\right]$$

$$+5C_4\left[E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\right] + C_5 E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)\Big\} + o(\theta^5). \quad (6.13)$$

Burada,

$$E\big(\lambda\zeta_1^n M_k(\lambda\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty \lambda z^n M_k(\lambda z)d\pi(z)\,; n = 0,1,2,\ldots; k = 1,2,\ldots;$$

$$M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big);$$

$$C_1 \equiv \widehat{m}_1;\ C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2;\ C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3;$$

$$C_4 \equiv -\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_1\widehat{m}_3 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2 + 24\widehat{m}_1^4;$$

$$C_5 \equiv \widehat{m}_5 - 20\widehat{m}_2\widehat{m}_3 + 60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3 - 10\widehat{m}_1\widehat{m}_4 + 90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2 - 240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2 + 120\widehat{m}_1^5.$$

(6.3) açılımıyla (6.13) açılımı ilgili terimleriyle eşleştirildiği takdirde $X(t)$ sürecinin ilk beş momentinin kesin ifadesi elde edilir.

Yapılan işlemlerde gözlenen kurallar ile $X(t)$ sürecinin $n.$ momentinin kesin ifadesinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\left\{\frac{C_0}{n+1}\binom{n}{0}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k}E\Big((\lambda\zeta_1)^{n+1-k}M_k(\lambda\zeta_1)\Big) + \right.$$

$$+\frac{C_1}{n}\binom{n}{1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}E\Big((\lambda\zeta_1)^{n-k}M_k(\lambda\zeta_1)\Big) +$$

$$\left. +\frac{C_2}{n-1}\binom{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}E\Big((\lambda\zeta_1)^{n-k-1}M_k(\lambda\zeta_1)\Big) + \cdots\right\}$$

Burada $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big)$, $\widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$ ve $m_k = E\big(\eta_1^k\big), k = 1,2,3,4,5,6$’dır.

Ayrıca,

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z)d\pi(z)\,, n = 1,2,3,4,5, k = 1,2,3,4,5.$$

Ek olarak,

$$C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{k(i+1)}(-1)^{s(j+1)}\frac{(s+k)!}{s!\,k!}\frac{n!}{(i!)^k(j!)^s}\widehat{m}_i^k\widehat{m}_j^s,$$

$$C_0 \equiv 1, \widehat{m}_0 = 1, i \neq j, ik + js = n.$$

Böylece Teorem 6.1’in ispatı tamamlanmış olur. ■

$X(t)$ sürecinin ilk beş momentinin kesin ifadeleri aşağıdaki sonuç ile verilmiştir. Ayrıca aynı sonuçlar (6.1) eşitliği ile verilen $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $n.$ momenti $E(X^n)$’nin kesin ifadesinde n yerine 1,2,3,4,5 değerleri sırasıyla verilerek elde edilebilir.

Sonuç 6.1. Teorem 3.1’in koşullarına ek olarak $E(|\eta_1|^6) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti mevcuttur ve $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\Big\} + C_1,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+C_1\big[2E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big]\Big\}+C_2,$$

$$E(X^3)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\{E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+C_1\big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-3E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\big]+$$

$$+3C_2\left[E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\right]\Big\}+C_3,$$

$$E(X^4)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\{E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)-2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1M_4(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+C_1\big[4E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-6E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+4E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)\big]+$$

$$+2C_2\big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-3E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\big]+$$

$$+2C_3\big[2E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big]\}+C_4,$$

$$E(X^5)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\{E\big((\lambda\zeta_1)^5M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^4M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+\frac{10}{3}E\big((\lambda\zeta_1)^3M_3(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}\,E\big((\lambda\zeta_1)^2M_4(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1M_5(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{1}{6}E\big(M_6(\lambda\zeta_1)\big)+5C_1\big[E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)-2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1M_4(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)\Big]+$$

$$+5C_2\left[2E\left((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\right) - 3E\left((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\right) + 2E\left(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}E\left(M_4(\lambda\zeta_1)\right)\right] + 10C_3\left[E\left((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\right) - E\left(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3(\lambda\zeta_1)\right)\right]$$

$$\left.+5C_4\left[E\left(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\lambda\zeta_1)\right)\right]\right\} + C_5.$$

Burada $M_k(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^k\right)$, $C_1 \equiv \widehat{m}_1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3$, $C_4 \equiv -\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_1\widehat{m}_3 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2 + 24\widehat{m}_1^4$,$C_5 \equiv \widehat{m}_5 - 20\widehat{m}_2\widehat{m}_3 + 60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3 - 10\widehat{m}_1\widehat{m}_4 + 90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2 - 240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2 + 120\widehat{m}_1^5$, $\widehat{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$ ve $m_k = E\left(\eta_1^k\right)$, $k = 1,2,3,4,5$'dir. Ayrıca, $E\left((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\right) \equiv \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z) d\pi(z)$, $n = 1,2,3,4,5$, $k = 1,2,3,4,5$'tir. $\widehat{m}_k$, $\{\eta_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün ergodik momentleri olarak adlandırılmaktadır.

7. $X(t)$ SÜRECİNİN ERGODİK DAĞILIMININ MOMENTLERİ İÇİN ÜÇ TERİMLİ ASİMTOTİK AÇILIMLAR

Bu bölümde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk beş momenti için üç terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ergodik dağılımın momentlerinin kesin formülünde (Teorem 6.1) basamak yüksekliklerinin momentleri bulunmaktadır, dolayısıyla ergodik dağılımın momentlerinin asimtotik açılımlarında da basamak yüksekliklerinin momentleri bize yardımcı olacaktır. Bu nedenle, hatırlatma amaçlı basamak değişkenlerinin tanımları aşağıdaki gibidir:

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı $\nu_1^+ = \min\{n \geq 1: S_n > 0\}$ ve birinci basamak yüksekliği $\chi_1^+ = S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i$ şeklinde ifade edilebilir. $\{(\nu_n^+; \chi_n^+), n = 2,3, \dots\}$ rasgele değişken çiftleri $(\nu_1^+; \chi_1^+)$ rasgele değişken çifti ile aynı dağılıma sahip ve bağımsız rasgele değişkenlerdir (Feller, 1971). Dynkin prensibine göre $N(\lambda z)$ ve $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelleri $N(\lambda z) = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \nu_i^+$ ve $S_{N(\lambda z)} = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+$ şeklinde ifade edilebilir (Rogozin, 1964). $H(x)$ fonksiyonu, $H(x) = \min\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > x\}, x > 0$ şeklinde gösterilebilen basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme fonksiyonudur.

Teorem 6.1'de ergodik dağılımın momentleri için bulunan kesin ifadelerin gerçek hayatta kullanımının zorluğu aşikardır. Diğer yandan, $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin $\lambda \to \infty$ iken asimtotik açılımları yardımıyla $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk beş momenti için asimtotik açılım elde etmek mümkündür. Bu bölümün temel amacı, $X(t)$ sürecinin n. dereceden ergodik momentleri için $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımlarını elde etmektir. Bu bağlamda, aşağıdaki yardımcı teoremin verilmesi gerekmektedir.

Yardımcı Teorem 7. 1. (Aliyev vd. 2016a) Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $g(x)$ sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon ve $\sup_x |g(x)| \equiv H < \infty$ olsun,

(ii) $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$,

(iii) $\pi(0) = 0$,

(iv) $E(\zeta_1^n) < \infty$ olsun.

Bu takdirde aşağıdaki asimtotik ilişki yazılabilir:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{z=0}^{\infty} z^n g(\lambda z)\, d\pi(z) = 0, n = 0,1,2, \dots \tag{7.1}$$

İspat. Koşullara bakıldığında x sonsuza giderken $g(x)$ sıfıra yakınsamaktadır. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $T_1 \equiv T_1(\varepsilon)$ seçmek mümkündür ki $(0 < T_1 < \infty)$, $\pi(T_1) \leq \varepsilon$ olsun. Her $z \in (0, T_1)$ için $\pi(z) \leq \varepsilon$ olur. (7.1) eşitliği $I_1(\lambda)$ ve $I_2(\lambda)$ şeklinde aşağıdaki gibi iki parçaya ayrılsın:

$$\int_{0}^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi(z) = \int_{0}^{T_1} z^n g(\lambda z) d\pi(z) + \int_{T_1}^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi(z). \tag{7.2}$$

$I_1(\lambda) = \int_0^{T_1} z^n g(\lambda z) d\pi(z)$ ve $I_2(\lambda) = \int_{T_1}^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi(z)$ olsun.

$\sup\limits_{x\in R^+} |g(x)| \equiv H < \infty$ koşulunun yardımıyla (7.3) eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$|I_1(\lambda)| = \left| \int_{0}^{T_1} z^n g(\lambda z) d\pi(z) \right| \leq H \int_{0}^{T_1} z^n d\pi(z)$$

$$\leq H T_1^n \int_{0}^{T_1} d\pi(z) = H T_1^n \pi(T_1) \leq H T_1^n \varepsilon. \tag{7.3}$$

Şimdi ikinci kısım olan $I_2(\lambda)$ ele alınsın. Öyle bir $\mathrm{T}_2 < \infty$ sayısı vardır ki, her $x \geq \mathrm{T}_2$ için $|g(x)| \leq \varepsilon$ eşitsizliği yazılabilir. $z \geq T_1$ ise $\lambda \to \infty$ iken $\lambda z \geq \lambda \mathrm{T}_1 \gg 1$ olur. $\lambda \mathrm{T}_1 \geq T_2$ ise $|g(\lambda T_1)| \leq \varepsilon$ olacaktır. Yani, her $z \geq T_1$ ve her $\lambda \geq \lambda(\varepsilon) \equiv \frac{T_2(\varepsilon)}{T_1(\varepsilon)}$ için $|g(\lambda z)| < \varepsilon$ olur.

$$|I_2(\lambda)| = \left| \int_{T_1}^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi(z) \right| \leq \int_{T_1}^{\infty} z^n |g(\lambda z)| d\pi(z)$$

$$\leq \varepsilon \int_{T_1}^{\infty} z^n d\pi(z) \leq \varepsilon \int_{0}^{\infty} z^n d\pi(z) = \varepsilon \beta_n. \tag{7.4}$$

Burada, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$'dir.

(7.3) ve (7.4) ifadeleri (7.2)'de yerine koyulursa aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur:

$$\left|\int_0^\infty z^n g(\lambda z) d\pi(z)\right| \leq HT_1^n \varepsilon + \beta_n \varepsilon = \varepsilon(HT_1^n + \beta_n).$$

Burada H ve $\beta_n = E(\zeta_1^n)$ sonludur. Her $\varepsilon > 0$, $\left|\int_0^\infty z^n g(\lambda z) d\pi(z)\right| \leq \varepsilon$'dur. $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty z^n g(\lambda z)\pi(z) = 0$ sağlanmış olur.

Böylece Yardımcı Teorem 7.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

Önerme 7.1. $X(t)$ sürecinin birinci basamak yüksekliğinin ilk üç momenti sonlu, yani $E(\chi_1^{+3}) < +\infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde, $M_k(\lambda z), k = \overline{1,6}$'in $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımının genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$M_k(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^k\right) = \binom{k}{0}(\lambda z)^k + \binom{k}{1}\hat{\mu}_1(\lambda z)^{k-1} +$$

$$+\binom{k}{2}\hat{\mu}_2(\lambda z)^{k-2} + o(\lambda^{k-2}), k = \overline{1,6}.$$

Burada, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3,$'tür.

İspat. Teorem 4.3 ile 4. Bölümde verilmiştir.

Sonuç 7.1. Önerme 7.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimtotik açılımlar yazılabilir:

$$M_1(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}\right) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$M_2(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^2\right) = (\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1 \lambda z + \hat{\mu}_2 + o(1),$$

$$M_3(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^3\right) = (\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + 3\hat{\mu}_2 \lambda z + o(\lambda),$$

$$M_4(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^4\right) = (\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + 6\hat{\mu}_2(\lambda z)^2 + o(\lambda^2),$$

$$M_5(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^5\right) = (\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1(\lambda z)^4 + 10\hat{\mu}_2(\lambda z)^3 + o(\lambda^3),$$

$$M_6(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^6\right) = (\lambda z)^6 + 6\hat{\mu}_1(\lambda z)^5 + 15\hat{\mu}_2(\lambda z)^4 + o(\lambda^4).$$

Burada, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3$’tür.

Önerme 7.2. $E(\chi_1^{+3}) < +\infty$ ve $E(\zeta_1^{n+1}) < \infty; n = 0,1,2,\ldots$ koşulları sağlansın. Bu takdirde, $E\left((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\right)$’in üç terimli asimtotik açılımı $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\right) = \binom{k}{0}\lambda^{n+k}\beta_{n+k} + \binom{k}{1}\hat{\mu}_1\lambda^{n+k-1}\beta_{n+k-1} +$$

$$+\binom{k}{2}\hat{\mu}_2\lambda^{n+k-2}\beta_{n+k-2} + o(\lambda^{n+k-2}), k = \overline{1,6}.$$

Burada, $M_k(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^k\right), k = \overline{1,5}, \beta_n = E(\zeta_1^n), \hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}, \mu_n = E(\chi_1^{+n}), n =$ 1,2,3’tür.

İspat. Sonuç 7.1’deki $M_1(\lambda z)$’nin açılımı yardımıyla her $n = 0,1,2,\ldots$ için $E\left((\lambda\zeta_1)^n M_1(\lambda\zeta_1)\right)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M_1(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}\right) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda z} g_1(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} g_1(\lambda z) = 0$’dır.

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_1(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^\infty (\lambda z)^n \left(\lambda z + \hat{\mu}_1 + \frac{1}{\lambda z} g_1(\lambda z)\right) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1}\, d\pi(z) + \hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^n\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n-1} g_1(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+1}E(\zeta_1^{n+1}) + \hat{\mu}_1\lambda^n E(\zeta_1^n) + 0.\lambda^{n-1}E(\zeta_1^{n-1}) + o(\lambda^{n-1})$$

$$= \lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_1\lambda^n\beta_n + o(\lambda^{n-1}).$$

Yardımcı Teorem 7.1’in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n-1} g_1(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n-1})$ olduğu görülmektedir.

Sonuç 7.1’deki $M_2(\lambda z)$’nin açılımı yardımıyla her $n = 0,1,2,\ldots$ için $E\left((\lambda\zeta_1)^n M_2(\lambda\zeta_1)\right)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M_2(\lambda z) \equiv E\left(S^2_{N(\lambda z)}\right) = (\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1 \lambda z + \hat{\mu}_2 + g_2(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} g_2(\lambda z) = 0$'dır.

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_2(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^\infty (\lambda z)^n \left((\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1\lambda z + \hat{\mu}_2 + g_2(\lambda z)\right) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2}\, d\pi(z) + 2\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1}\, d\pi(z) +$$

$$+\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^n\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^n g_2(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+2} E(\zeta_1^{n+2}) + 2\hat{\mu}_1 \lambda^{n+1} E(\zeta_1^{n+1}) + \hat{\mu}_2 \lambda^n E(\zeta_1^n) + o(\lambda^n)$$

$$= \lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 2\hat{\mu}_1\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_2\lambda^n\beta_n + o(\lambda^n).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^n g_2(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^n)$ olduğu görülmektedir.

Sonuç 7.1'deki $M_3(\lambda z)$'nin açılımı yardımıyla her $n = 0,1,2,\ldots$ için $E\left((\lambda\zeta_1)^n M_3(\lambda\zeta_1)\right)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M_3(\lambda z) \equiv E\left(S^3_{N(\lambda z)}\right) = (\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + 3\hat{\mu}_2\lambda z + \lambda z g_3(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} g_3(\lambda z) = 0$'dır.

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_3(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^\infty (\lambda z)^n \left((\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + 3\hat{\mu}_2\lambda z + \lambda z g_3(\lambda z)\right) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+3}\, d\pi(z) + 3\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2}\, d\pi(z) +$$

$$+3\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1}\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1} g_3(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+3} E(\zeta_1^{n+3}) + 3\hat{\mu}_1 \lambda^{n+2} E(\zeta_1^{n+2}) + 3\hat{\mu}_2 \lambda^{n+1} E(\zeta_1^{n+1}) + o(\lambda^{n+1})$$

$$= \lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 3\hat{\mu}_1\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 3\hat{\mu}_2\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + o(\lambda^{n+1}).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n+1} g_3(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n+1})$ olduğu görülmektedir.

Sonuç 7.1'deki $M_4(\lambda z)$'nin açılımı yardımıyla her $n = 0,1,2,\dots$ için $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_4(\lambda\zeta_1)\big)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M_4(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^4\big) = (\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + 6\hat{\mu}_2(\lambda z)^2 + (\lambda z)^2 g_4(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} g_4(\lambda z) = 0$'dır.

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_4(\lambda\zeta_1)\big) =$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n \big((\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + 6\hat{\mu}_2(\lambda z)^2 + (\lambda z)^2 g_4(\lambda z)\big)\, d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+4}\, d\pi(z) + 4\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+3}\, d\pi(z) +$$

$$+6\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2}\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2} g_4(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+4}E(\zeta_1^{n+4}) + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}E(\zeta_1^{n+3}) + 6\hat{\mu}_2\lambda^{n+2}E(\zeta_1^{n+2}) + o(\lambda^{n+2})$$

$$= \lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 6\hat{\mu}_2\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + o(\lambda^{n+2}).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n+2} g_4(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n+2})$ olduğu görülmektedir.

Sonuç 7.1'deki $M_5(\lambda z)$'nin açılımı yardımıyla her $n = 0,1,2,\dots$ için $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_5(\lambda\zeta_1)\big)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M_5(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^5\big) = (\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1(\lambda z)^4 + 10\hat{\mu}_2(\lambda z)^3 + (\lambda z)^3 g_5(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} g_5(\lambda z) = 0$'dır.

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_5(\lambda\zeta_1)\big) =$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n \big((\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1(\lambda z)^4 + 10\hat{\mu}_2(\lambda z)^3 + (\lambda z)^3 g_5(\lambda z)\big)\, d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+5}\, d\pi(z) + 5\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+4}\, d\pi(z) +$$

$$+10\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+3}\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n+3} g_5(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+5} E(\zeta_1^{n+5}) + 5\hat{\mu}_1 \lambda^{n+4} E(\zeta_1^{n+4}) + 10\hat{\mu}_2 \lambda^{n+3} E(\zeta_1^{n+3}) + o(\lambda^{n+3})$$

$$= \lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 5\hat{\mu}_1\lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 10\hat{\mu}_2\lambda^{n+3}\beta_{n+3} + o(\lambda^{n+3}).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n+3} g_5(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n+3})$ olduğu görülmektedir.

Burada, $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, $\mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2$; $\beta_r = E(\zeta_1^r), r = 0,1,2, \ldots$'dir.

Sonuç 7.1'deki $M_6(\lambda z)$'nin açılımı yardımıyla her $n = 0,1,2, \ldots$ için $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_6(\lambda\zeta_1)\big)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M_6(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^6\big) = (\lambda z)^6 + 6\hat{\mu}_1(\lambda z)^5 + 15\hat{\mu}_2(\lambda z)^4 + (\lambda z)^4 g_6(\lambda z).$$

Burada, $\lim_{z\to\infty} g_6(\lambda z) = 0$'dır.

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_6(\lambda\zeta_1)\big) =$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n \big((\lambda z)^6 + 6\hat{\mu}_1(\lambda z)^5 + 15\hat{\mu}_2(\lambda z)^4 + (\lambda z)^4 g_6(\lambda z)\big)\, d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+6}\, d\pi(z) + 6\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+5}\, d\pi(z) +$$

$$+15\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+4}\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n+4} g_6(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+6} E(\zeta_1^{n+6}) + 6\hat{\mu}_1 \lambda^{n+5} E(\zeta_1^{n+5}) + 15\hat{\mu}_2 \lambda^{n+4} E(\zeta_1^{n+4}) + o(\lambda^{n+4})$$

$$= \lambda^{n+6}\beta_{n+6} + 6\hat{\mu}_1\lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 15\hat{\mu}_2\lambda^{n+4}\beta_{n+4} + o(\lambda^{n+4}).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n+4} g_6(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n+4})$ olduğu görülmektedir.

Burada, $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, $\mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2;$ $\beta_r = E(\zeta_1^r), r = 0,1,2,\ldots$'dir.

Böylece Önerme 7.2'nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Sonuç 7.2. Önerme 7.2'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in $k = \overline{1,6}$ için $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_1\lambda^n\beta_n + 0.\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1});$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 2\hat{\mu}_1\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_2\lambda^n\beta_n + o(\lambda^n);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 3\hat{\mu}_1\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 3\hat{\mu}_2\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + o(\lambda^{n+1});$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_4(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 6\hat{\mu}_2\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + o(\lambda^{n+2});$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_5(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 5\hat{\mu}_1\lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 10\hat{\mu}_2\lambda^{n+3}\beta_{n+3} + o(\lambda^{n+3});$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_6(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+6}\beta_{n+6} + 6\hat{\mu}_1\lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 15\hat{\mu}_2\lambda^{n+4}\beta_{n+4} + o(\lambda^{n+4}).$$

Burada, $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = \overline{1,6};$ $\beta_n = E(\zeta_1^n);$ $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1};$ $\mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3$'tür.

Teorem 7.1. $E(\eta_1) > 0$, $E(\eta_1^2) < 0$, $E(\chi_1^{+3}) < \infty$ ve $E(\zeta_1^{n+1}) < \infty; n = 0,1,2,\ldots$ koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden $(n = 1,2,3,4,5)$ momentinin üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X) = \lambda\hat{\beta}_1 + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$E(X^n) = \binom{n}{0}\lambda^n\hat{\beta}_n + \lambda^{n-1}\left[\binom{n}{1}\widehat{m}_1\hat{\beta}_{n-1} - \binom{n}{0}\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_n}{\beta_1}\right] +$$

$$+\lambda^{n-2}\left[\binom{n}{2}C_2\hat{\beta}_{n-2} - \binom{n}{1}\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_{n-1}}{\beta_1} + \binom{n}{0}\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_n}{\beta_1^2}\right] + o(\lambda^{n-2}), n = 2,3,4,5.$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2, \dots$'dir.

İspat. Çalışmanın 6. Bölümünde elde edilen $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\left\{E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\right\} + C_1. \qquad (7.5)$$

Burada, $E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty \lambda z M_1(\lambda z)\, d\pi(z)$, $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = 1,2$ ve $C_1 \equiv \widehat{m}_1$, $\widehat{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$'dir.

Sonuç 7.2'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1);$$

$$E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1);$$

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (7.6)$$

(7.5) eşitliğinde (7.6) eşitliği yerine koyulduğunda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E(X) = \frac{1}{\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1/\lambda)\}}\{[\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1)] -$$

$$-\frac{1}{2}[\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1)]\right\} + \widehat{m}_1 =$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^2\beta_2}{2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2} + o(1)\right\} + \widehat{m}_1$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^2\beta_2}{2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2} - \frac{\lambda\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^2} + o(1)\right\} + \widehat{m}_1$$

$$= \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1} + \left(\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1^2}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$E(X) = \lambda\hat{\beta}_1 + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $\hat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n})$, $n = 1,2,\ldots$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^2) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+C_1\big[2E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big]\Big\} + C_2. \qquad (7.7)$$

Burada, $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z)\, d\pi(z), n = 1,2,$ $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = 1,2,3,$ $C_1 \equiv \hat{m}_1$ ve $C_2 \equiv 2\hat{m}_1^2 - \hat{m}_2$'dir.

Sonuç 7.2'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1);$$

$$E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1);$$

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (7.8)$$

(7.7) eşitliğinde (7.8) eşitliğindeki ifadeleri yerine koyarsak,

$$E(X^2) = \frac{1}{\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1/\lambda)\}}\{[\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda)] -$$

$$-[\lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda)] + \frac{1}{3}[\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda)]$$

$$+2\hat{m}_1[\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1)] - \hat{m}_1[\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1)]\} + C_2$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \hat{m}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda)\right\} + C_2$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \widehat{m}_1\lambda^2\beta_2 - \frac{\lambda^2\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\lambda\hat{\mu}_1\beta_2}{\beta_1} + \frac{\lambda\hat{\mu}_1^2\beta_3}{3\beta_1^2} + o(\lambda)\right\} + C_2$$

$$= \frac{\lambda^2\beta_3}{3\beta_1} + \lambda\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_2}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1^2}\right) + \left(C_2 - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_2}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_3}{3\beta_1^3}\right) + o(1)$$

$$E(X^2) = \lambda^2\hat{\beta}_2 + \lambda\left(2\widehat{m}_1\hat{\beta}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1}\right) + \left(C_2 - 2\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1^2}\right) + o(1).$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,...$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^3) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{3}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{1}{4}E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+C_1\big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 3E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\big]$$

$$+3C_2\left[E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\right]\Big\} + C_3. \tag{7.9}$$

Burada, $E\big((\lambda\zeta_1)^nM_k(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty(\lambda z)^nM_k(\lambda z)\,d\pi(z), n = 1,2,3,$ $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = 1,2,3,4$, $C_1 \equiv \widehat{m}_1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$ ve $C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3$'tür. Sonuç 7.2'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^nM_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^2);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1);$$

$$E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1);$$

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{7.10}$$

(7.9) eşitliğinde (7.10) eşitliğindeki ifadeler yerine koyulduğu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E(X^3) = \frac{1}{\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1/\lambda)\}}\{[\lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^2)] -$$

$$-\frac{3}{2}[\lambda^4\beta_4 + 2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)] + [\lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)]$$

$$-\frac{1}{4}[\lambda^4\beta_4 + 4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)] + 3\widehat{m}_1[\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda)] -$$

$$-3\widehat{m}_1[\lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda)] +$$

$$+\widehat{m}_1[\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda)] +$$

$$+3C_2[\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1)] - \frac{3}{2}C_2[\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1)]\Big\} + C_3$$

$$E(X^3) = \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + \widehat{m}_1\lambda^3\beta_3 + \frac{3}{2}C_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + \widehat{m}_1\lambda^3\beta_3 + \frac{3C_2\lambda^2\beta_2}{2} - \frac{\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_4}{4\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_3}{\beta_1} + \frac{\hat{\mu}_1^2\lambda^2\beta_4}{4\beta_1^2} + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta_1} + \lambda^2\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_3}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1^2}\right) + \lambda\left(\frac{3C_2\beta_2}{2\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_4}{4\beta_1^3}\right) + o(\lambda)$$

$$E(X^3) = \lambda^3\hat{\beta}_3 + \lambda^2\left(3\widehat{m}_1\hat{\beta}_2 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1}\right) + \lambda\left(3C_2\hat{\beta}_1 - 3\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1^2}\right) + o(\lambda).$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n})$, $n = 1,2,\ldots$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^4) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^4 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 2E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_2(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+2E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_3(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(\lambda\zeta_1 M_4(\lambda\zeta_1)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+C_1\big[4E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 6E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+4E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)\big] +$$

$$+2C_2\big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 3E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\big]$$

$$+2C_3\big[2E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big]\Big\} + C_4. \tag{7.11}$$

Burada, $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z)\, d\pi(z), n = 1,2,3,4,$ $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = 1,2,3,4,5,$ $C_1 \equiv \widehat{m}_1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3$ ve $C_4 \equiv -\widehat{m}_4 + 8\widehat{m}_1\widehat{m}_3 + 6\widehat{m}_2^2 - 36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2 + 24\widehat{m}_1^4$'tür.

Sonuç 7.2'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E\big((\lambda\zeta_1)^4 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^5\beta_5 + \hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + o(\lambda^3);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^5\beta_5 + 2\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^5\beta_5 + 3\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_4(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^5\beta_5 + 4\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 6\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3);$$

$$E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^5\beta_5 + 5\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 10\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^2);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1);$$

$$E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1);$$

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{7.12}$$

(7.11) eşitliğinde (7.12) eşitliğindeki ifadeler yerine koyulduğu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E(X^4) = \frac{1}{\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1/\lambda)\}}\{[\lambda^5\beta_5 + \hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + o(\lambda^3)] -$$

$$-2[\lambda^5\beta_5 + 2\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3)] + 2[\lambda^5\beta_5 + 3\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3)]$$

$$-[\lambda^5\beta_5 + 4\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 6\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3)] + \frac{1}{5}[\lambda^5\beta_5 + 5\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 10\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3)]$$

$$+4\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4+\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+o(\lambda^2)]-6\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4+2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2+o(\lambda^2)]+$$

$$+4\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4+3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2+o(\lambda^2)]-$$

$$-\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4+4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2+o(\lambda^2)]+$$

$$+6C_2[\lambda^3\beta_3+\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2+o(\lambda)]-6C_2[\lambda^3\beta_3+2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2+\hat{\mu}_2\lambda\beta_1+o(\lambda)]+$$

$$+C_2[\lambda^3\beta_3+3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2+3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1+o(\lambda)]+$$

$$+4C_3[\lambda^2\beta_2+\hat{\mu}_1\lambda\beta_1+o(1)]-C_3[\lambda^2\beta_2+2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1+\hat{\mu}_2+o(1)]\}+C_4$$

$$E(X^4)=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1-\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+\widehat{m}_1\lambda^4\beta_4+2C_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3)\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+\widehat{m}_1\lambda^4\beta_4+2C_2\lambda^3\beta_3-\frac{\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_5}{5\beta_1}-\frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_4}{\beta_1}+\frac{\hat{\mu}_1^2\lambda^3\beta_5}{5\beta_1^2}+o(\lambda^3)\right\}$$

$$=\frac{\lambda^4\beta_5}{5\beta_1}+\lambda^3\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_4}{\beta_1}-\frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1^2}\right)+\lambda^2\left(\frac{2C_2\beta_3}{\beta_1}-\frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_4}{\beta_1^2}+\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_5}{5\beta_1^3}\right)+o(\lambda^2)$$

$$E(X^4)=\lambda^4\hat{\beta}_4+\lambda^3\left(4\widehat{m}_1\hat{\beta}_3-\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1}\right)+\lambda^2\left(6C_2\hat{\beta}_2-4\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1}+\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1^2}\right)+o(\lambda^2).$$

Burada $\hat{\beta}_n\equiv\frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0\equiv 1, C_2\equiv 2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n=\frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n=\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n\equiv E(\zeta_1^n), m_n\equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n\equiv E(\chi_1^{+n}), n=1,2,...$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının beşinci momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^5)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\{E\big((\lambda\zeta_1)^5M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^4M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+\frac{10}{3}E\big((\lambda\zeta_1)^3M_3(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{5}{2}E\big((\lambda\zeta_1)^2M_4(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(\lambda\zeta_1M_5(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{1}{6}E\big(M_6(\lambda\zeta_1)\big)+5C_1\big[E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)-2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1M_4(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)\Big]+$$

$$+5C_2\big[2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-3E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+2E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-$$

$$-\frac{1}{2}E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)\Big]+10C_3\left[E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\right]$$

$$+5C_4\left[E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\right]\Big\}+C_5. \qquad (7.13)$$

Burada, $E\big((\lambda\zeta_1)^nM_k(\lambda\zeta_1)\big)=\int_0^\infty(\lambda z)^nM_k(\lambda z)\,d\pi(z), n=1,2,3,4,5,$ $M_k(\lambda z)\equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k=1,2,3,4,5,6, C_1\equiv\widehat{m}_1, C_2\equiv 2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2, C_3\equiv\widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3$ ve $C_4\equiv-\widehat{m}_4+8\widehat{m}_1\widehat{m}_3+6\widehat{m}_2^2-36\widehat{m}_1^2\widehat{m}_2+24\widehat{m}_1^4,$ $C_5\equiv\widehat{m}_5-20\widehat{m}_2\widehat{m}_3+60\widehat{m}_1^2\widehat{m}_3-10\widehat{m}_1\widehat{m}_4+90\widehat{m}_1\widehat{m}_2^2-240\widehat{m}_1^3\widehat{m}_2+120\widehat{m}_1^5$’tir.

Sonuç 7.2’de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^nM_k(\lambda\zeta_1)\big)$’in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k’nın yerine verildiği takdirde açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E\big((\lambda\zeta_1)^5M_1(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^6\beta_6+\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+o(\lambda^4);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^4M_2(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^6\beta_6+2\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^3M_3(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^6\beta_6+3\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+3\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2M_4(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^6\beta_6+4\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+6\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1M_5(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^6\beta_6+5\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+10\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4);$$

$$E\big(M_6(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^6\beta_6+6\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+15\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^5\beta_5+\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+o(\lambda^3);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^5\beta_5+2\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)=\lambda^5\beta_5+3\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+3\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_4(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^5\beta_5 + 4\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 6\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3);$$

$$E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^5\beta_5 + 5\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 10\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^2);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^4\beta_4 + 4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2);$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(\lambda);$$

$$E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1);$$

$$E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1);$$

$$E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{7.14}$$

(7.13) eşitliğinde (7.14) eşitliğindeki ifadeler yerine koyulduğu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E(X^5) = \frac{1}{\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1/\lambda)\}}\{[\lambda^6\beta_6 + \hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5 + o(\lambda^4)] -$$

$$-\frac{5}{2}[\lambda^6\beta_6 + 2\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5 + \hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4 + o(\lambda^4)] +$$

$$+\frac{10}{3}[\lambda^6\beta_6 + 3\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5 + 3\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4 + o(\lambda^4)] -$$

$$-\frac{5}{2}[\lambda^6\beta_6 + 4\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5 + 6\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4 + o(\lambda^4)] +$$

$$+[\lambda^6\beta_6+5\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+10\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4)]-$$

$$-\frac{1}{6}[\lambda^6\beta_6+6\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_5+15\hat{\mu}_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4)]+$$

$$+5\widehat{m}_1[\lambda^5\beta_5+\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+o(\lambda^3)]-10\widehat{m}_1[\lambda^5\beta_5+2\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3)]+$$

$$+10\widehat{m}_1[\lambda^5\beta_5+3\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+3\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3)]-$$

$$-5\widehat{m}_1[\lambda^5\beta_5+4\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+6\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3)]+$$

$$+\widehat{m}_1[\lambda^5\beta_5+5\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+10\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^3)]+$$

$$+10C_2[\lambda^4\beta_4+\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+o(\lambda^2)]-15C_2[\lambda^4\beta_4+2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2+o(\lambda^2)]+$$

$$+10C_2[\lambda^4\beta_4+3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2+o(\lambda^2)]-$$

$$-\frac{5}{2}C_2[\lambda^4\beta_4+4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3+6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2+o(\lambda^2)]+$$

$$+10C_3[\lambda^3\beta_3+\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2+o(\lambda)]-10C_3[\lambda^3\beta_3+2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2+\hat{\mu}_2+o(\lambda)]+$$

$$+\frac{10}{3}C_3[\lambda^3\beta_3+3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2+\hat{\mu}_2+o(\lambda)]+5C_4[\lambda^2\beta_2+\hat{\mu}_1\lambda\beta_1+o(1)]-$$

$$\left.+\frac{5}{2}C_4[\lambda^2\beta_2+2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1+\hat{\mu}_2+o(1)]\right\}+C_5.$$

$$E(X^5)=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1-\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^6\beta_6}{6}+\widehat{m}_1\lambda^5\beta_5+\frac{5}{2}C_2\lambda^4\beta_4+o(\lambda^4)\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^6\beta_6}{6}+\widehat{m}_1\lambda^5\beta_5+\frac{5}{2}C_2\lambda^4\beta_4-\frac{\hat{\mu}_1\lambda^5\beta_6}{6\beta_1}-\frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_5}{\beta_1}+\frac{\hat{\mu}_1^2\lambda^4\beta_6}{6\beta_1^2}+o(\lambda^4)\right\}$$

$$=\frac{\lambda^5\beta_6}{6\beta_1}+\lambda^4\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_5}{\beta_1}-\frac{\hat{\mu}_1\beta_6}{6\beta_1^2}\right)+\lambda^3\left(\frac{5C_2\beta_4}{2\beta_1}-\frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_5}{\beta_1^2}+\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_6}{6\beta_1^3}\right)+o(\lambda^3)$$

$$E(X^5) = \lambda^5 \hat{\beta}_5 + \lambda^4 \left(5\widehat{m}_1 \hat{\beta}_4 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_5}{\beta_1} \right) +$$

$$+\lambda^3 \left(10 C_2 \hat{\beta}_3 - 5\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_5}{\beta_1^2} \right) + o(\lambda^3).$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$’dir.

Böylece Teorem 7.1’in ispatı tamamlanmış olur. ■

Sonuç 7.3. Teorem 7.1’in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk beş dereceden momentinin üç terimli asimtotik açılımları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X) = \lambda \hat{\beta}_1 + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(\hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$E(X^2) = \lambda^2 \hat{\beta}_2 + \lambda \left(2\widehat{m}_1 \hat{\beta}_1 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1} \right) + \left(C_2 - 2\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1^2} \right) + o(1),$$

$$E(X^3) = \lambda^3 \hat{\beta}_3 + \lambda^2 \left(3\widehat{m}_1 \hat{\beta}_2 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1} \right) + \lambda \left(3 C_2 \hat{\beta}_1 - 3\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1^2} \right) + o(\lambda),$$

$$E(X^4) = \lambda^4 \hat{\beta}_4 + \lambda^3 \left(4\widehat{m}_1 \hat{\beta}_3 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1} \right) + \lambda^2 \left(6 C_2 \hat{\beta}_2 - 4\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1^2} \right) + o(\lambda^2),$$

$$E(X^5) = \lambda^5 \hat{\beta}_5 + \lambda^4 \left(5\widehat{m}_1 \hat{\beta}_4 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_5}{\beta_1} \right) +$$

$$+\lambda^3 \left(10 C_2 \hat{\beta}_3 - 5\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_5}{\beta_1^2} \right) + o(\lambda^3).$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$’dir.

Sonuç 7.4. Teorem 7.1’in koşulları sağlansın. Bu takdirde, varyans, standart sapma, değişim, basıklık ve çarpıklık katsayıları için yaklaşık ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Var(X) \approx \lambda^2\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2\right);\ \sigma(X) \approx \lambda\sqrt{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2};$$

$$DK(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \approx \frac{\sqrt{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2}}{\hat{\beta}_1};$$

$$\gamma_3(X) = \frac{E\left(X - E(X)\right)^3}{\left(\sigma(X)\right)^3} \approx \frac{\hat{\beta}_3 - 3\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_1^3}{\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\gamma_4(X) = \frac{E\left(X - E(X)\right)^4}{\left(\sigma(X)\right)^4} \approx \frac{\hat{\beta}_4 - 4\hat{\beta}_3\hat{\beta}_1 + 6\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1^2 - 3\hat{\beta}_1^4}{\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2\right)^2}.$$

Burada, $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\beta_n = E(\zeta_1^n)$, $n = 1,2, \ldots$’dir.

8. GENEL FORMÜLLERİN FARKLI DAĞILIMLARA SAHİP MÜDAHALELİ SÜREÇLER İÇİN UYGULAMASI

Çalışmanın 7. Bölümünde $X(t)$ sürecinin $n.$ dereceden ergodik momentleri için $\lambda \to \infty$ iken üç terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Bir bakıma keyfi dağılıma (Normal dağılım v.b. dışında) sahip müdahaleler için genel formüller bulunmuştur. Diğer bir deyişle, bu tez çalışması daha önce farklı dağılımlara sahip müdahalelere sahip benzer süreçleri ele alan çalışmaları bir çatı altında toplamaktadır. Bu bağlamda Khaniyev vd. (2008), Aliyev vd. (2009), (2010), (2014) çalışmaları özel durumlar olarak alınıp sonuçları bu çalışmadaki genel formüllerle elde edilmiştir.

Uygulama 8.1. Aliyev vd. (2010) simetrik üçgensel dağılıma sahip kesikli şans karışımlı müdahaleli bir stok kontrol problemini ele almıştır. s stok kontrol seviyesi, S maksimum stok seviyesi ve $(S+s)/2$ ise dağılımın tepe noktasına karşılık gelecek şekilde bir simetrik üçgensel dağılım kullanılmıştır. Bu çalışmada, üçgensel müdahalenin seçilme amacı ζ_1 rasgele değişkeninin alacağı değerlerin s stok kontrol seviyesi ve S maksimum stok seviyesine yakın olma olasılıklarının düşük olmasının istenmesidir. Çünkü ζ_1'in S'ye yakın değer alması ortalama stok seviyesinin yüksek olması anlamına gelmektedir. Stok seviyesinin S'ye yakın değer almasının istenmeme nedeni, stoktaki ürünlerin daha uzun süre kalması stok tutma maliyetinin artmasına neden olmaktadır. Diğer yandan, ζ_1 rasgele değişkeni s'ye yakın değerler aldığında ortalama stok seviyesi düşük olacağından daha sık sipariş verme gerekliliği doğacaktır. Böylelikle, sipariş ve taşıma maliyetlerinin artması ve müşterilerin bekleme sürelerin artmasıyla müşteri kaybı gibi problemlerin ortaya çıkması öngörülmektedir. Bu nedenle, üçgensel dağılıma sahip müdahalenin uygun olacağı düşünülmüş ve ergodik momentler için sonuçlar elde edilmiştir. Teorem 7.1'de verilen $X(t)$ sürecinin ergodik momentlerin asimtotik açılımları için genel ifade yardımıyla, Aliyev vd. (2010) çalışmasında simetrik üçgensel dağılım için bulunan özel ifadeler elde edilebilmektedir.

Bizim çalışmamızda, stok kontrol seviyesi $s=0$ olduğu durum için hesaplamalar yapılmıştır. Bu durumda, kesikli şans karışımlı müdahaleye karşılık gelen $\lambda\zeta_1 \in$

Üçgensel$(0, S/2, S)$'ya denk olan $\zeta_1 \in$ Üçgensel$(0;1;2)$ ve $\lambda \equiv S/2$ parametreleri kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır.

İlk dört ergodik momentin asimtotik açılımları hesaplanmıştır. Teorem 7.1'e göre $E(X^n)$'nin asimtotik açılımının genel ifadesinden yola çıkılmıştır. Hesaplamalarda kullanılacak olan üçgensel dağılım fonksiyonu ve momentleri aşağıdaki gibidir:

$$P\{\zeta_1 \leq z\} \equiv \pi(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{2}, & 0 < z \leq 1 \\ 1 - \dfrac{(2-z)^2}{2}, & 1 < z < 2 \end{cases},$$

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \frac{7}{6}, \beta_3 = \frac{3}{2}, \beta_4 = \frac{31}{15}, \beta_5 = 3.$$

Bu durumda $E(X)$'in asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1} + \left(\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1^2}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2, \ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni simetrik üçgensel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv S/2$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X)$'in üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X) = \left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{\frac{7}{6}}{1}\right) + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\frac{7}{6}}{2}\right) + \left(\frac{2}{S}\right)\left(\hat{\mu}_1^2\frac{\frac{7}{6}}{2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{S}\right)$$

$$= \frac{7}{12}S + \left(\widehat{m}_1 - \frac{7}{12}\hat{\mu}_1\right) + \frac{2}{S}\left(\frac{7}{12}\hat{\mu}_1^2 - \frac{\hat{\mu}_2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{S}\right).$$

$E(X^2)$'nin asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^2) = \frac{\lambda^2\beta_3}{3\beta_1} + \lambda\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_2}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1^2}\right) + \left(C_2 - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_2}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_3}{3\beta_1^3}\right) + o(1).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$; $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2, \ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni üçgensel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv S/2$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^2)$'nin üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^2) = \left(\frac{S}{2}\right)^2 \frac{\frac{3}{2}}{3} + \frac{S}{2}\left(\widehat{m}_1 \frac{\frac{7}{6}}{1} - \hat{\mu}_1 \frac{\frac{3}{2}}{3}\right) + \left(C_2 - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{\frac{7}{6}}{1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\frac{3}{2}}{3}\right) + o(1)$$

$$= \frac{1}{8}S^2 + S\left(\frac{7}{12}\widehat{m}_1 - \frac{1}{4}\hat{\mu}_1\right) + \left(C_2 - \frac{7}{6}\widehat{m}_1\hat{\mu}_1 + \frac{1}{2}\hat{\mu}_1^2\right) + o(1).$$

$E(X^3)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^3) = \frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta_1} + \lambda^2\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_3}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1^2}\right) + \lambda\left(\frac{3C_2\beta_2}{2\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_4}{4\beta_1^3}\right) + o(\lambda).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,...$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni üçgensel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv S/2$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^3)$'ün üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^3) = \left(\frac{S}{2}\right)^3 \frac{\frac{31}{15}}{4} + \left(\frac{S}{2}\right)^2 \left(\widehat{m}_1 \frac{\frac{3}{2}}{1} - \hat{\mu}_1 \frac{\frac{31}{15}}{4}\right) +$$

$$+ \frac{S}{2}\left(3C_2 \frac{\frac{7}{6}}{2} - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{\frac{3}{2}}{1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\frac{31}{15}}{4}\right) + o(S)$$

$$= \frac{31}{480}S^3 + S^2\left(\frac{3}{8}\widehat{m}_1 - \frac{31}{240}\hat{\mu}_1\right) + S\left(\frac{7}{8}C_2 - \frac{3}{4}\widehat{m}_1\hat{\mu}_1 + \frac{31}{120}\hat{\mu}_1^2\right) + o(S).$$

$E(X^4)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^4) = \frac{\lambda^4\beta_5}{5\beta_1} + \lambda^3\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_4}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1^2}\right) + \lambda^2\left(\frac{2C_2\beta_3}{\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_4}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_5}{5\beta_1^3}\right) + o(\lambda^2).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,...$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni üçgensel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv S/2$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^4)$'ün üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^4) = \left(\frac{S}{2}\right)^4 \frac{3}{5} + \left(\frac{S}{2}\right)^3 \left(\hat{m}_1 \frac{\frac{31}{15}}{1} - \hat{\mu}_1 \frac{3}{5}\right) +$$

$$+ \left(\frac{S}{2}\right)^2 \left(2C_2 \frac{\frac{3}{2}}{1} - \hat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{\frac{31}{15}}{1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{3}{5}\right) + o(S^2)$$

$$= \frac{3}{20}S^4 + S^3\left(\frac{31}{120}\hat{m}_1 - \frac{3}{40}\hat{\mu}_1\right) + S^2\left(\frac{3}{4}C_2 - \frac{31}{60}\hat{m}_1\hat{\mu}_1 + \frac{3}{20}\hat{\mu}_1^2\right) + o(S^2).$$

Uygulama 8.2. Aliyev vd. (2014), kesikli şans karışımlı müdahalenin Weibull dağılımına sahip olduğu bir sigorta modelini ele almıştır. Kesikli şans karışımlı müdahale için Weibull dağılımının seçilme motivasyonu, Weibull dağılımının genellikle bir nesnenin davranışının "en zayıf halka" ile tanımlandığı durumu ifade eden olasılık modellerinin inşasında kullanılmasıdır. $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. Ayrıca, $\zeta_{(1)} = \min\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ ve $\zeta_{(n)} = \max\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ olarak ifade edilsin. Bu durumda, $\zeta_{(1)}$ ve $\zeta_{(n)}$ rasgele değişkenleri literatürde "en zayıf halka" olarak tanımlanmaktadır. n'nin büyük değerleri için $\zeta_{(1)}$ ve $\zeta_{(n)}$'nin dağılımları için Weibull dağılımının uygun düşebileceği belirtilmiştir. İfade edilen durumlar için kesikli şans karışımlı müdahale için Weibull dağılımı kullanılmıştır.

Teorem 7.1'de verilen $X(t)$ sürecinin ergodik momentlerin asimtotik açılımları için genel ifade yardımıyla, Aliyev vd. (2014) çalışmasında Weibull dağılım için bulunan özel ifadeler elde edilebilmektedir. Bu durumda, kesikli şans karışımlı müdahaleye karşılık gelen $\lambda\zeta_1 \in \text{Weibull}(\alpha;\beta)$'ya denk olan $\zeta_1 \in \text{Weibull}(\alpha; 1), \alpha > 1$ ve $\lambda = 1/\beta$ parametreleri kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır. İlk dört ergodik momentin asimtotik açılımları hesaplanmıştır. Teorem 7.1'e göre $E(X^n)$'nin asimtotik açılımının genel ifadesinden yola çıkılmıştır. Hesaplamalarda kullanılacak olan Weibull dağılım fonksiyonu ve momentleri aşağıdaki gibidir:

$$P\{\zeta_1 \le z\} \equiv \pi(z) = 1 - \exp(-z^\alpha), \alpha > 1, z \ge 0,$$

$$\beta_n \equiv E(\zeta_1^n) = \Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right), n = 1,2,\dots$$

Bu durumda $E(X)$'in asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1} + \left(\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1^2}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\dots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Weibull dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda = \frac{1}{\beta}$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X)$'in üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X) = \frac{1}{\beta}\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} + \left[\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{2\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}\right] +$$

$$+\beta\left[\hat{\mu}_1^2\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{2\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right] + o(\beta)$$

$$E(X) = \frac{1}{\beta}W_{21} + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{W_{21}}{W_1}\right) + \beta\left(\hat{\mu}_1^2\frac{W_{21}}{W_1^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2W_1}\right) + o(\beta).$$

Burada $W_{k1} = W_k/kW_1$ ve $W_k = \Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right), k = 1,2$'dir.

$E(X^2)$'nin asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^2) = \frac{\lambda^2\beta_3}{3\beta_1} + \lambda\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_2}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1^2}\right) + \left(C_2 - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_2}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_3}{3\beta_1^3}\right) + o(1).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$; $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\dots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Weibull dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda = 1/\beta$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^2)$'in üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^2)=\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{3\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}+\frac{1}{\beta}\left[\widehat{m}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}-\hat{\mu}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{3\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}\right]+$$

$$+\left[C_2-\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}+\hat{\mu}_1^2\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{3\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^3}\right]+o(1)$$

$$E(X^2)=\frac{1}{\beta^2}W_{31}+\frac{1}{\beta}\left(2\widehat{m}_1W_{21}-\hat{\mu}_1\frac{W_{31}}{W_1}\right)+\left(C_2-2\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{W_{21}}{W_1}+\hat{\mu}_1^2\frac{W_{31}}{W_1^2}\right)+o(1).$$

Burada $W_{k1}=W_k/kW_1$ ve $W_k=\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right), k=1,2,3$'tür.

$E(X^3)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^3)=\frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta_1}+\lambda^2\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_3}{\beta_1}-\frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1^2}\right)+\lambda\left(\frac{3C_2\beta_2}{2\beta_1}-\frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_3}{\beta_1^2}+\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_4}{4\beta_1^3}\right)+o(\lambda).$$

Burada, $C_2\equiv 2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n=\frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n=\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n\equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n\equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n\equiv E(\chi_1^{+n}), n=1,2,...$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Weibull dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda=1/\beta$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^3)$'in üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda\to\infty$):

$$E(X^3)=\left(\frac{1}{\beta}\right)^3\frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)}{4\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\left[\widehat{m}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}-\hat{\mu}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)}{4\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta}\left[3C_2\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}-\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}+\hat{\mu}_1^2\frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)}{4\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^3}\right]+o\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

$$E(X^3)=\frac{1}{\beta^3}W_{41}+\frac{1}{\beta^2}\left(3\widehat{m}_1W_{31}-\hat{\mu}_1\frac{W_{41}}{W_1}\right)+$$

$$+\frac{1}{\beta}\left(3C_2W_{21}-3\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{W_{31}}{W_1}+\hat{\mu}_1^2\frac{W_{41}}{W_1^2}\right)+o\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Burada $W_{k1} = W_k/kW_1$ ve $W_k = \Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right), k = 1,2,3,4$'tür.

$E(X^4)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^4) = \frac{\lambda^4\beta_5}{5\beta_1} + \lambda^3\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_4}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1^2}\right) + \lambda^2\left(\frac{2C_2\beta_3}{\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_4}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_5}{5\beta_1^3}\right) + o(\lambda^2).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Weibull dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda = 1/\beta$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^4)$'in üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^4) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^4 \frac{\Gamma\left(1+\frac{5}{\alpha}\right)}{5\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^3\left[\widehat{m}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} - \hat{\mu}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{5}{\alpha}\right)}{5\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2}\right] +$$

$$+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\left[2C_2\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)}{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2} + \hat{\mu}_1^2\frac{\Gamma\left(1+\frac{5}{\alpha}\right)}{5\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^3}\right] + o\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$E(X^4) = \frac{1}{\beta^4}W_{51} + \frac{1}{\beta^3}\left(4\widehat{m}_1W_{41} - \hat{\mu}_1\frac{W_{51}}{W_1}\right) +$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\left(6C_2W_{31} - 4\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{W_{41}}{W_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{W_{51}}{W_1^2}\right) + o\left(\frac{1}{\beta^2}\right).$$

Burada $W_{k1} = W_k/kW_1$ ve $W_k = \Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right), k = 1,2,3,4,5$'tir.

Uygulama 8.3. Khaniyev vd. (2008) üstel dağılıma sahip kesikli şans karışımlı müdahaleli rasgele yürüyüş sürecini ele almıştır. Teorem 7.1'de verilen ergodik momentlerin asimtotik açılımları için genel ifade yardımıyla, Khaniyev vd. (2008) çalışmasında üstel dağılım için bulunan özel ifadeler elde edilebilmektedir.

Bu durumda, kesikli şans karışımlı müdahaleye karşılık gelen $\lambda\zeta_1 \in \text{Üstel}(\alpha)$'ya denk olan $\zeta_1 \in \text{Üstel}(1)$ ve $\lambda \equiv 1/\alpha$ parametreleri kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır.

İlk dört ergodik momentin asimtotik açılımları hesaplanmıştır. Teorem 7.1'e göre $E(X^n)$'nin asimtotik açılımının genel ifadesinden yola çıkılmıştır. Hesaplamalarda kullanılacak olan üstel dağılım fonksiyonu ve momentleri aşağıdaki gibidir:

$$P\{\zeta_1 \leq z\} \equiv \pi(z) = 1 - e^{-z}, z \geq 0,$$

$$\beta_n \equiv E(\zeta_1^n) = n!, n = 1,2, \dots.$$

Bu durumda $E(X)$'in asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1} + \left(\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1^2}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2, \dots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni üstel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv 1/\alpha$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X)$'in üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}\frac{2}{2} + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{2}{2}\right) + \alpha\left(\hat{\mu}_1^2\frac{2}{2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2}\right) + o(\alpha)$$

$$= \frac{1}{\alpha} + (\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1) + \alpha\left(\hat{\mu}_1^2 - \frac{\hat{\mu}_2}{2}\right) + o(\alpha).$$

$E(X^2)$'nin asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^2) = \frac{\lambda^2\beta_3}{3\beta_1} + \lambda\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_2}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1^2}\right) + \left(C_2 - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_2}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_3}{3\beta_1^3}\right) + o(1).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$; $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2, \dots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni üstel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv 1/\alpha$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^2)$'nin üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^2) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\frac{6}{3} + \frac{1}{\alpha}\left(\widehat{m}_1\frac{2}{1} - \hat{\mu}_1\frac{6}{3}\right) + \left(C_2 - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{2}{1} + \hat{\mu}_1^2\frac{6}{3}\right) + o(1)$$

$$= \frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}(2\widehat{m}_1 - 2\hat{\mu}_1) + (C_2 - 2\widehat{m}_1\hat{\mu}_1 + 2\hat{\mu}_1^2) + o(1).$$

$E(X^3)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^3) = \frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta_1} + \lambda^2\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_3}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1^2}\right) + \lambda\left(\frac{3C_2\beta_2}{2\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_4}{4\beta_1^3}\right) + o(\lambda).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni üstel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv 1/\alpha$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^3)$'ün üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^3) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \frac{24}{4} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(\widehat{m}_1 \frac{6}{1} - \hat{\mu}_1 \frac{24}{4}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(3C_2 \frac{2}{2} - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{6}{1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{24}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{6}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2}(6\widehat{m}_1 - 6\hat{\mu}_1) + \frac{1}{\alpha}(3C_2 - 6\widehat{m}_1\hat{\mu}_1 + 6\hat{\mu}_1^2) + o\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

$E(X^4)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^4) = \frac{\lambda^4\beta_5}{5\beta_1} + \lambda^3\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_4}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1^2}\right) + \lambda^2\left(\frac{2C_2\beta_3}{\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_4}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_5}{5\beta_1^3}\right) + o(\lambda^2).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni üstel dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv 1/\alpha$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^4)$'ün üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^4) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 \frac{120}{5} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \left(\widehat{m}_1 \frac{24}{1} - \hat{\mu}_1 \frac{120}{5}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(2C_2 \frac{6}{1} - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{24}{1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{120}{5}\right) + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) =$$

$$= \frac{24}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^3}(24\widehat{m}_1 - 24\hat{\mu}_1) + \frac{1}{\alpha^2}(12C_2 - 24\widehat{m}_1\hat{\mu}_1 + 24\hat{\mu}_1^2) + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Uygulama 8.4. Aliyev vd. (2009), Gamma dağılıma sahip kesikli şans karışımlı müdahaleli rasgele yürüyüş sürecini ele almıştır. Teorem 7.1'de verilen ergodik momentlerin asimtotik açılımları için genel ifade yardımıyla, Aliyev vd. (2009) çalışmasında Gamma dağılım için bulunan özel ifadeler elde edilebilmektedir.

Bu durumda, kesikli şans karışımlı müdahaleye karşılık gelen $\lambda\zeta_1 \in \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$'ya denk olan $\zeta_1 \in \mathrm{Gamma}(\alpha, 1)$ ve $\lambda \equiv 1/\beta$ parametreleri kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır.

İlk dört ergodik momentin asimtotik açılımları hesaplanmıştır. Teorem 7.1'e göre $E(X^n)$'nin asimtotik açılımının genel ifadesinden yola çıkılmıştır. Hesaplamalarda kullanılacak olan Gamma dağılım fonksiyonu ve momentleri aşağıdaki gibidir:

$$\pi'(z) = \frac{z^{\alpha-1}e^{-\alpha z}}{\Gamma(\alpha)}, \alpha > 0, z \geq 0,$$

$$\beta_n \equiv E(\zeta_1^n) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)\alpha, n = 1,2,\ldots$$

Bu durumda $E(X)$'in asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1} + \left(\widehat{m}_1 - \frac{\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1^2}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Gamma dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv 1/\beta$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X)$'in üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X) = \frac{1}{\beta}\frac{(\alpha+1)\alpha}{2\alpha} + \left[\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{(\alpha+1)\alpha}{2\alpha^2}\right] + \beta\left[\hat{\mu}_1^2\frac{(\alpha+1)\alpha}{2\alpha^3} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\alpha}\right] + o(\beta)$$

$$= \frac{\alpha+1}{2\beta} + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right) + \beta\left(\hat{\mu}_1^2\frac{\alpha+1}{2\alpha^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\alpha}\right) + o(\beta).$$

$E(X^2)$'nin asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^2) = \frac{\lambda^2\beta_3}{3\beta_1} + \lambda\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_2}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1^2}\right) + \left(C_2 - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_2}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_3}{3\beta_1^3}\right) + o(1).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$; $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Gamma dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv 1/\beta$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^2)$'nin üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^2) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{3\alpha} + \frac{1}{\beta}\left[\widehat{m}_1\frac{(\alpha+1)\alpha}{\alpha} - \hat{\mu}_1\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{3\alpha^2}\right] +$$

$$+\left[C_2 - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{(\alpha+1)\alpha}{\alpha^2} + \hat{\mu}_1^2\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{3\alpha^3}\right] + o(1)$$

$$E(X^2)=\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}\left[\widehat{m}_1(\alpha+1)-\hat{\mu}_1\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{3\alpha}\right]+$$

$$+\left[C_2-\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{(\alpha+1)}{\alpha}+\hat{\mu}_1^2\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{3\alpha^2}\right]+o(1).$$

$E(X^3)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^3)=\frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta_1}+\lambda^2\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_3}{\beta_1}-\frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1^2}\right)+\lambda\left(\frac{3C_2\beta_2}{2\beta_1}-\frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_3}{\beta_1^2}+\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_4}{4\beta_1^3}\right)+o(\lambda).$$

Burada, $C_2\equiv 2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n=\frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n=\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n\equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n\equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n\equiv E(\chi_1^{+n}), n=1,2,\dots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Gamma dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda\equiv 1/\beta$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^3)$'ün üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda\to\infty$):

$$E(X^3)=\left(\frac{1}{\beta}\right)^3\frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{4\alpha}+$$

$$+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\left[\widehat{m}_1\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\alpha}-\hat{\mu}_1\frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{4\alpha^2}\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta}\left[3C_2\frac{(\alpha+1)\alpha}{2\alpha}-\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\alpha^2}\right.$$

$$\left.+\hat{\mu}_1^2\frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{4\alpha^3}\right]+o\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

$$E(X^3)=\frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{4\beta^3}+$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\left[\widehat{m}_1(\alpha+1)(\alpha+2)-\hat{\mu}_1\frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{4\alpha}\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta}\left[C_2\frac{3(\alpha+1)}{2}-\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{\alpha}+\hat{\mu}_1^2\frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{4\alpha^2}\right]+o\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

$E(X^4)$'ün asimtotik açılımı genel durumda aşağıdaki gibidir:

$$E(X^4)=\frac{\lambda^4\beta_5}{5\beta_1}+\lambda^3\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_4}{\beta_1}-\frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1^2}\right)+\lambda^2\left(\frac{2C_2\beta_3}{\beta_1}-\frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_4}{\beta_1^2}+\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_5}{5\beta_1^3}\right)+o(\lambda^2).$$

Burada, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2, \ldots$'dir.

ζ_1 rasgele değişkeni Gamma dağılımına sahip olduğu durumda ve $\lambda \equiv 1/\beta$ iken momentleri yerine koyulduğunda $E(X^4)$'ün üç terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur ($\lambda \to \infty$):

$$E(X^4) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^4 \frac{(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{5\alpha} +$$

$$+\left(\frac{1}{\beta}\right)^3 \left[\widehat{m}_1 \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\alpha} - \hat{\mu}_1 \frac{(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{5\alpha^2}\right] +$$

$$+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \left[2C_2 \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\alpha} - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\alpha^2} +\right.$$

$$\left. +\hat{\mu}_1^2 \frac{(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{5\alpha^3}\right] o\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$E(X^4) = \frac{(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{5\beta^4} +$$

$$+\frac{1}{\beta^3}\left[\widehat{m}_1(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - \hat{\mu}_1 \frac{(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{5\alpha}\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\left[2C_2(\alpha+2)(\alpha+1) - \widehat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{\alpha} +\right.$$

$$\left. +\hat{\mu}_1^2 \frac{(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}{5\alpha^2}\right] + o\left(\frac{1}{\beta^2}\right).$$

9. $X(t)$ SÜRECİNİN ERGODİK DAĞILIMININ MOMENTLERİ İÇİN DÖRT TERİMLİ ASİMTOTİK AÇILIMLAR

Şimdiye kadar yapılan benzer çalışmalarda en fazla ilk dört ergodik moment için üç terimli asimtotik açılımlar elde edilirken, bu çalışmanın 7. Bölümünde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk beş momenti için üç terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, yine yenilik olarak bu bölümde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için dört terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Bu bağlamda, ergodik dağılımın momentlerinin kesin formülünün elde edildiği 6. Bölüm ve $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin momentlerinin asimtotik açılımlarının bulunduğu 4. Bölüm hesaplamalarda yardımcı olacaktır. Özetle, bu bölümün temel amacı $X(t)$ sürecinin $n.$ dereceden ergodik momentleri için $\lambda \to \infty$ iken dört terimli asimtotik açılımlarını elde etmektir.

Teorem 9.1. $\mu_4 \equiv E(\chi_1^{+4}) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde, her sonlu z için $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin $n.$ dereceden $(n = 1,2,3,4,5)$ momentinin dört terimli asimtotik açılımlarının genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$M_n(z) \equiv E\left(S_{N(z)}^n\right) = \binom{n}{0} z^n + \binom{n}{1} \hat{\mu}_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} \hat{\mu}_2 z^{n-2} + \binom{n}{3} \hat{\mu}_3 z^{n-3} + o(z^{n-3}).$$

Burada, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}, \mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3,4.$

İspat. 4. Bölümde Teorem 4.2'de $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin Laplace dönüşümleri ve Teorem 4.3'te de üç terimli asimtotik açılımları bulunmuştur. Bu teoremin ispatında, asimtotik açılımlara bir terim daha ekleyerek ve Laplace dönüşümlerinin her bir kısmında açılımlar yerine koyulup ters Laplace dönüşümü uygulanarak $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin dört terimli asimtotik açılımları elde edilecektir.

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin birinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}\right) dz = \mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma). \tag{9.1}$$

(9.1) eşitliğinde bulunan $\widetilde{U}_+(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken dört terimli Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_+(\gamma) = \frac{1}{\gamma(1-\varphi(\gamma))} = \frac{1}{\gamma\left\{1-\left(1-\gamma\mu_1+\frac{\gamma^2}{2!}\mu_2-\frac{\gamma^3}{3!}\mu_3+\frac{\gamma^4}{4!}\mu_4+o(\gamma^4)\right)\right\}}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2\mu_1}\left\{1+\gamma\hat{\mu}_1+\gamma^2\left(\hat{\mu}_1^2-\frac{\hat{\mu}_2}{2}\right)+\gamma^3\left(\frac{\hat{\mu}_3}{6}-\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1^3\right)+o(\gamma^3)\right\}. \quad (9.2)$$

(9.2) eşitliği (9.1) eşitliğinde yerine koyulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}\right) dz = \mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma)$$

$$= \frac{1}{\gamma^2}+\frac{\hat{\mu}_1}{\gamma}+\left(\hat{\mu}_1^2-\frac{\hat{\mu}_2}{2}\right)-\gamma\left(\frac{\hat{\mu}_3}{6}-\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1^3\right)+o(\gamma). \quad (9.3)$$

(9.3) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}\right)$'nin dört terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}\right) = z+\hat{\mu}_1+0.\frac{1}{z}+0.\frac{1}{z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ikinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^2\right) dz = 2\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_1^*(\gamma) + \mu_2 \widetilde{U}_+(\gamma). \quad (9.4)$$

(9.4) eşitliğinde bulunan $D_1^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken dört terimli Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_1^*(\gamma) \equiv E\left(\chi_1^+ e^{-\gamma\chi_1^+}\right) = \mu_1-\gamma\mu_2+\frac{\gamma^2}{2!}\mu_3-\frac{\gamma^3}{3!}\mu_4+o(\gamma^3). \quad (9.5)$$

(9.2) ve (9.5) açılımları ile gerekli hesaplamalar yapılarak (9.4) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^2\right) dz = \frac{2}{\gamma^3}+\frac{2\hat{\mu}_1}{\gamma^2}+\frac{\hat{\mu}_2}{\gamma}-\left(\frac{2\hat{\mu}_3}{3}-3\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+2\hat{\mu}_2^3\right)+o(1). \quad (9.6)$$

(9.6) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $z \to \infty$ iken $E\left(S_{N(z)}^2\right)$'nin dört terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^2\right) = z^2+2\hat{\mu}_1 z+\hat{\mu}_2+0.\frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin üçüncü momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z} E\left(S_{N(z)}^3\right) dz = 6\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^{*2}(\gamma) D_1^{*2}(\gamma) + 3\mu_1 \widetilde{U}_+(\gamma) U_+^*(\gamma) D_2^*(\gamma) +$$

$$+3\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma). \quad (9.7)$$

(9.7) eşitliğinde bulunan $D_2^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_2^*(\gamma) \equiv E\left(\chi_1^{+2}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)=\mu_2-\gamma\mu_3+\frac{\gamma^2}{2!}\mu_4-\frac{\gamma^3}{3!}\mu_5+o(\gamma^3). \quad (9.8)$$

(9.2), (9.5) ve (9.8) açılımları ile gerekli hesaplamalar yapılarak (9.8) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^3\right)dz=\left\{\frac{6}{\gamma^4}-\frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3}+\frac{9\hat{\mu}_2}{\gamma^2}-\frac{12\hat{\mu}_1^2}{\gamma^2}-\frac{5\hat{\mu}_3}{\gamma}+\frac{18\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma}-\frac{12\hat{\mu}_1^3}{\gamma}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3}+\frac{12\hat{\mu}_1^2}{\gamma^2}-\frac{9\hat{\mu}_2}{\gamma^2}+\frac{6\hat{\mu}_3}{\gamma}-\frac{24\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma}+\frac{18\hat{\mu}_1^3}{\gamma}\right\}+\left\{\frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3}+\frac{3\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma}-\frac{6\hat{\mu}_1^3}{\gamma}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{3\hat{\mu}_2}{\gamma^2}+\frac{3\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma}\right\}+o\left(\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{6}{\gamma^4}+\frac{6\hat{\mu}_1}{\gamma^3}+\frac{3\hat{\mu}_2}{\gamma^2}+\frac{\hat{\mu}_3}{\gamma}+o\left(\frac{1}{\gamma}\right). \quad (9.9)$$

(9.9) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}^3\right)$ için $z \to \infty$ iken dört terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^3\right)=z^3+3\hat{\mu}_1z^2+3\hat{\mu}_2z+\hat{\mu}_3+o(1).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin dördüncü momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^4\right)dz=$$

$$=24\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+24\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+4\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+12\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+$$

$$+6\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+4\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\mu_4\widetilde{U}(\gamma). \quad (9.10)$$

(9.10) eşitliğinde bulunan $D_3^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_3^*(\gamma) \equiv E\left(\chi_1^{+3}e^{-\gamma\chi_1^+}\right)=\mu_3-\gamma\mu_4+\frac{\gamma^2}{2!}\mu_5-\frac{\gamma^3}{3!}\mu_6+o(\gamma^3). \quad (9.11)$$

(9.2), (9.5), (9.8) ve (9.11) eşitlikleri ile gerekli hesaplamalar yapılarak (9.10) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^4\right)dz=\left\{\frac{24}{\gamma^5}-\frac{48\hat{\mu}_1}{\gamma^4}+\frac{60\hat{\mu}_2}{\gamma^3}-\frac{48\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3}+\frac{48\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^2}-\frac{32\hat{\mu}_3}{\gamma^2}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{48\hat{\mu}_1}{\gamma^4}+\frac{48\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3}-\frac{72\hat{\mu}_2}{\gamma^3}-\frac{72\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^2}+\frac{48\hat{\mu}_3}{\gamma^2}\right\}+\left\{\frac{12\hat{\mu}_2}{\gamma^3}+\frac{24\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^2}-\frac{16\hat{\mu}_3}{\gamma^2}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{24\hat{\mu}_1}{\gamma^4}-\frac{24\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3}+\frac{36\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^2}-\frac{48\hat{\mu}_1^3}{\gamma^2}\right\}+\left\{\frac{24\hat{\mu}_1^2}{\gamma^3}-\frac{36\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^2}+\frac{48\hat{\mu}_1^3}{\gamma^2}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{12\hat{\mu}_2}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{4\hat{\mu}_3}{\gamma^2}\right\}+o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$=\frac{24}{\gamma^5}+\frac{24\hat{\mu}_1}{\gamma^4}+\frac{12\hat{\mu}_2}{\gamma^3}+\frac{4\hat{\mu}_3}{\gamma^2}+o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right). \tag{9.12}$$

(9.12) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}^4\right)$ için $z \to \infty$ iken dört terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^4\right)=z^4+4\hat{\mu}_1 z^3+6\hat{\mu}_2 z^2+4\hat{\mu}_3 z+o(z).$$

$S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin beşinci momentinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^5\right)dz=$$

$$=120\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*4}(\gamma)D_1^{*4}(\gamma)+180\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+40\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+30\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_2^{*2}(\gamma)+$$

$$+5\mu_1\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_4^*(\gamma)+60\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*3}(\gamma)D_1^{*3}(\gamma)+$$

$$+60\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+10\mu_2\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_3^*(\gamma)+$$

$$+20\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^{*2}(\gamma)D_1^{*2}(\gamma)+10\mu_3\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_2^*(\gamma)+$$

$$+5\mu_4\widetilde{U}_+(\gamma)U_+^*(\gamma)D_1^*(\gamma)+\mu_5\widetilde{U}_+(\gamma). \tag{9.13}$$

(9.13) eşitliğinde bulunan $D_4^*(\gamma)$'nın $\gamma \to 0$ iken Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$D_4^*(\lambda)\equiv E\left(\chi_1^{+4}e^{-\lambda\chi_1^+}\right)=\mu_4-\lambda\mu_5+\frac{\lambda^2}{2!}\mu_6-\frac{\lambda^3}{3!}\mu_7+o(\lambda^3). \tag{9.14}$$

(9.2), (9.5), (9.8), (9.11) ve (9.14) eşitlikleri ile gerekli hesaplamalar yapılarak (9.13) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\gamma z}E\left(S_{N(z)}^5\right)dz=$$

$$=\left\{\frac{120}{\gamma^6}-\frac{360\hat{\mu}_1}{\gamma^5}+\frac{420\hat{\mu}_2}{\gamma^4}-\frac{120\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}-\frac{220\hat{\mu}_3}{\gamma^3}-\frac{120\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}+\frac{360\hat{\mu}_1^3}{\gamma^3}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{360\hat{\mu}_1}{\gamma^5}-\frac{540\hat{\mu}_2}{\gamma^4}+\frac{360\hat{\mu}_3}{\gamma^3}+\frac{360\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}-\frac{720\hat{\mu}_1^3}{\gamma^3}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{120\hat{\mu}_2}{\gamma^4}-\frac{160\hat{\mu}_3}{\gamma^3}+\frac{120\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{120\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}-\frac{360\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}+\frac{360\hat{\mu}_1^3}{\gamma^3}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{120\hat{\mu}_1}{\gamma^5}-\frac{240\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}+\frac{300\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}-\frac{240\hat{\mu}_1^3}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{240\hat{\mu}_1^2}{\gamma^4}-\frac{360\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}+\frac{240\hat{\mu}_1^3}{\gamma^3}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{20\hat{\mu}_3}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{60\hat{\mu}_2}{\gamma^4}-\frac{60\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{60\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\gamma^3}\right\}+\left\{\frac{20\hat{\mu}_3}{\gamma^3}\right\}+o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right)$$

$$=\frac{120}{\gamma^6}+\frac{120\hat{\mu}_1}{\gamma^5}+\frac{60\hat{\mu}_2}{\gamma^4}+\frac{20\hat{\mu}_3}{\gamma^3}+o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right). \tag{9.15}$$

(9.15) eşitliğine Tauber Abel teoremi yardımıyla ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $E\left(S_{N(z)}^5\right)$ için $z \to \infty$ iken dört terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(S_{N(z)}^5\right) = z^5 + 5\hat{\mu}_1 z^4 + 10\hat{\mu}_2 z^3 + 10\hat{\mu}_3 z^2 + o(z^2).$$

Böylece Teorem 9.1'in ispatı tamamlanmış olur. ∎

Sonuç 9.1. Teorem 9.1'in koşulu sağlansın. Bu takdirde, $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momentinin dört terimli asimtotik açılımları aşağıdaki gibidir:

$$M_1(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}\right) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$M_2(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(z\lambda)}^2\right) = (\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1\lambda z + \hat{\mu}_2 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$M_3(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^3\right) = (\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + 3\hat{\mu}_2\lambda z + \hat{\mu}_3 + o(1),$$

$$M_4(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^4\right) = (\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + 6\hat{\mu}_2(\lambda z)^2 + 4\hat{\mu}_3\lambda z + o(\lambda),$$

$$M_5(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^5\right) = (\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1(\lambda z)^4 + 10\hat{\mu}_2(\lambda z)^3 + 10\hat{\mu}_3(\lambda z)^2 + o(\lambda^2).$$

Burada, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}, \mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,3,4.$

Önerme 9.1. $E(\chi_1^{+4}) < +\infty$ ve $E(\zeta_1^{n+1}) < \infty; n = 0,1,2,\ldots$ koşulları sağlansın. Bu takdirde, $E\left((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\right)$'in dört terimli asimtotik açılımları $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_1(\lambda\zeta_1)\right) = \lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_1\lambda^n\beta_n + o(\lambda^{n-2}),$$

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_2(\lambda\zeta_1)\right) = \lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 2\hat{\mu}_1\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_2\lambda^n\beta_n + o(\lambda^{n-1}),$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 3\hat{\mu}_1\lambda^{n+2}\beta_{n+2} +$$

$$+3\hat{\mu}_2\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_3\lambda^n\beta_n + o(\lambda^n),$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_4(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}\beta_{n+3} +$$

$$+6\hat{\mu}_2\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 4\hat{\mu}_3\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + o(\lambda^{n+1}),$$

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_5(\lambda\zeta_1)\big) = \lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 5\hat{\mu}_1\lambda^{n+4}\beta_{n+4} +$$

$$+10\hat{\mu}_2\lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 10\hat{\mu}_3\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + o(\lambda^{n+2}).$$

Burada, $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = \overline{1,5}, \beta_n = E(\zeta_1^n), \hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}, \mu_n = E(\chi_1^{+n}), n =$ 1,2,3,4'tür.

İspat. Teorem 9.1 yardımıyla $M_1(\lambda z)$'nin açılımı aşağıdaki gibidir:

$$M_1(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}\big) = \lambda z + \hat{\mu}_1 + 0.\frac{1}{\lambda z} + \frac{1}{(\lambda z)^2}g_1(\lambda z).$$

Burada, $\lim\limits_{z\to\infty} g_1(\lambda z) = 0$'dır.

Bu takdirde,

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_1(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n\left(\lambda z + \hat{\mu}_1 + 0.\frac{1}{\lambda z} + \frac{1}{(\lambda z)^2}g_1(\lambda z)\right)d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1}\,d\pi(z) + \hat{\mu}_1\int_0^\infty (\lambda z)^n\,d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n-2}g_1(\lambda z)\,d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+1}E(\zeta_1^{n+1}) + \hat{\mu}_1\lambda^n E(\zeta_1^n) + 0.\lambda^{n-2}E(\zeta_1^{n-2}) + o(\lambda^{n-2})$$

$$= \lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_1\lambda^n\beta_n + o(\lambda^{n-2}).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n-2}g_1(\lambda z)\,d\pi(z) = o(\lambda^{n-2})$ olduğu görülmektedir.

Teorem 9.1 yardımıyla $M_2(\lambda z)$'nin açılımı aşağıdaki gibidir:

$$M_2(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^2\big) = (\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1\lambda z + \hat{\mu}_2 + \frac{1}{\lambda z}g_2(\lambda z).$$

Burada, $\lim\limits_{z\to\infty} g_2(\lambda z) = 0$’dır.

Bu takdirde,

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_2(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n \left((\lambda z)^2 + 2\hat{\mu}_1\lambda z + \hat{\mu}_2 + \frac{1}{\lambda z} g_2(\lambda z)\right) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2}\, d\pi(z) + 2\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1}\, d\pi(z) +$$

$$+\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^n\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n-1} g_2(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+2}E(\zeta_1^{n+2}) + 2\hat{\mu}_1\lambda^{n+1}E(\zeta_1^{n+1}) + \hat{\mu}_2\lambda^n E(\zeta_1^n) + 0.\lambda^{n-1}E(\zeta_1^{n-1}) + o(\lambda^{n-1})$$

$$= \lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 2\hat{\mu}_1\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_2\lambda^n\beta_n + o(\lambda^{n-1}).$$

Yardımcı Teorem 7.1’in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n-1} g_2(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n-1})$ olduğu görülmektedir.

Teorem 9.1 yardımıyla $M_3(\lambda z)$’nin açılımı aşağıdaki gibidir:

$$M_3(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^3\big) = (\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + 3\hat{\mu}_2\lambda z + \hat{\mu}_3 + g_3(\lambda z).$$

Burada, $\lim\limits_{z\to\infty} g_3(\lambda z) = 0$’dır.

Bu takdirde,

$$E\big((\lambda\zeta_1)^n M_3(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n \big((\lambda z)^3 + 3\hat{\mu}_1(\lambda z)^2 + 3\hat{\mu}_2\lambda z + \hat{\mu}_3 + g_3(\lambda z)\big)\, d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+3}\, d\pi(z) + 3\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2}\, d\pi(z) + 3\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1}\, d\pi(z) +$$

$$+\hat{\mu}_3 \int_0^\infty (\lambda z)^n\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^n g_3(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+3}E(\zeta_1^{n+3}) + 3\hat{\mu}_1\lambda^{n+2}E(\zeta_1^{n+2}) + 3\hat{\mu}_2\lambda^{n+1}E(\zeta_1^{n+1}) + \hat{\mu}_3\lambda^n E(\zeta_1^n) + o(\lambda^n)$$

$$= \lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 3\hat{\mu}_1\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 3\hat{\mu}_2\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \hat{\mu}_3\lambda^n\beta_n + o(\lambda^n).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^n g_3(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^n)$ olduğu görülmektedir.

Teorem 9.1 yardımıyla $M_4(\lambda z)$'nin açılımı aşağıdaki gibidir:

$$M_4(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^4\right) = (\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + 6\hat{\mu}_2(\lambda z)^2 + 4\hat{\mu}_3\lambda z + \lambda z g_4(\lambda z).$$

Burada, $\lim\limits_{z\to\infty} g_4(\lambda z) = 0$'dır.

Bu takdirde,

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_4(\lambda\zeta_1)\right) =$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n\left((\lambda z)^4 + 4\hat{\mu}_1(\lambda z)^3 + 6\hat{\mu}_2(\lambda z)^2 + 4\hat{\mu}_3\lambda z + \lambda z g_4(\lambda z)\right) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+4}\, d\pi(z) + 4\hat{\mu}_1\int_0^\infty (\lambda z)^{n+3}\, d\pi(z) +$$

$$+6\hat{\mu}_2\int_0^\infty (\lambda z)^{n+2}\, d\pi(z) + 4\hat{\mu}_3\int_0^\infty (\lambda z)^{n+1}\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1} g_4(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+4}E(\zeta_1^{n+4}) + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}E(\zeta_1^{n+3}) + 6\hat{\mu}_2\lambda^{n+2}E(\zeta_1^{n+2}) +$$

$$+4\hat{\mu}_3\lambda^{n+1}E(\zeta_1^{n+1}) + o(\lambda^{n+1})$$

$$= \lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 4\hat{\mu}_1\lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 6\hat{\mu}_2\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 4\hat{\mu}_3\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + o(\lambda^{n+1}).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n+1} g_4(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n+1})$ olduğu görülmektedir.

Teorem 9.1 yardımıyla $M_5(\lambda z)$'nin açılımı aşağıdaki gibidir:

$$M_5(\lambda z) \equiv E\left(S_{N(\lambda z)}^5\right) =$$

$$= (\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1(\lambda z)^4 + 10\hat{\mu}_2(\lambda z)^3 + 10\hat{\mu}_3(\lambda z)^2 + (\lambda z)^2 g_5(\lambda z).$$

Burada, $\lim\limits_{z\to\infty} g_5(\lambda z) = 0$'dır.

$$E\left((\lambda\zeta_1)^n M_5(\lambda\zeta_1)\right) =$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n \big((\lambda z)^5 + 5\hat{\mu}_1 (\lambda z)^4 + 10\hat{\mu}_2 (\lambda z)^3 + 10\hat{\mu}_3 (\lambda z)^2 + (\lambda z)^2 g_5(\lambda z)\big)\, d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+5}\, d\pi(z) + 5\hat{\mu}_1 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+4}\, d\pi(z) +$$

$$+10\hat{\mu}_2 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+3}\, d\pi(z) + 10\hat{\mu}_3 \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2}\, d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2} g_5(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+5} E(\zeta_1^{n+5}) + 5\hat{\mu}_1 \lambda^{n+4} E(\zeta_1^{n+4}) + 10\hat{\mu}_2 \lambda^{n+3} E(\zeta_1^{n+3}) +$$

$$+10\hat{\mu}_3 \lambda^{n+2} E(\zeta_1^{n+2}) + o(\lambda^{n+2})$$

$$= \lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 5\hat{\mu}_1 \lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 10\hat{\mu}_2 \lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 10\hat{\mu}_3 \lambda^{n+2}\beta_{n+2} + o(\lambda^{n+2}).$$

Yardımcı Teorem 7.1'in yardımıyla $\int_0^\infty (\lambda z)^{n+2} g_5(\lambda z)\, d\pi(z) = o(\lambda^{n+2})$ olduğu görülmektedir.

Burada, $\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$, $\mu_n = E(\chi_1^{+n}), n = 1,2;\ \beta_r = E(\zeta_1^r), r = 0,1,2,\ldots$'dir.

Böylece Önerme 9.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 9.2. $E(\eta_1) > 0,\ E(\eta_1^4) < \infty,\ E(\chi_1^{+4}) < \infty$ ve $E(\zeta_1^{n+1}) < \infty; n = 0,1,2,\ldots$ koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden $(n = 1,2,3,4)$ momentinin dört terimli asimtotik açılımının genel ifadesi aşağıdaki gibi gibidir:

$$E(X) = \lambda\hat{\beta}_1 + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{2\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_1}{\beta_1^3}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$E(X^2) = \lambda^2\hat{\beta}_2 + \lambda\left(2\widehat{m}_1\hat{\beta}_1 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1}\right) + \left(C_2 - 2\widehat{m}_1\hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_3}{3\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_2}{\beta_1} + \frac{2\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_2}{\beta_1^3}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$E(X^n) = \binom{n}{0}\lambda^n\hat{\beta}_n + \lambda^{n-1}\left[\binom{n}{1}\widehat{m}_1\hat{\beta}_{n-1} - \binom{n}{0}\hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_1}\right] +$$

$$+\lambda^{n-2}\left[\binom{n}{2}C_2\hat{\beta}_{n-2}-\binom{n}{1}\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_{n-1}}{\beta_1}+\binom{n}{0}\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_n}{\beta_1^2}\right]+$$

$$+\lambda^{n-3}\left[\binom{n}{3}C_3\hat{\beta}_{n-3}-\binom{n}{2}C_2\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_{n-2}}{\beta_1}+\binom{n}{1}\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_{n-1}}{\beta_1^2}-\binom{n}{0}\hat{\mu}_1^3\frac{\hat{\beta}_n}{\beta_1^3}\right]+$$

$$+o(\lambda^{n-3}), n=3,4.$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2-\widehat{m}_2$, $C_3 \equiv \widehat{m}_3-6\widehat{m}_1\widehat{m}_2+6\widehat{m}_1^3$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n})$, $n=1,2,\ldots$'dir.

İspat. Çalışmanın 6. Bölümünde elde edilen $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\left\{E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-\frac{1}{2}E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\right\}+C_1. \quad (9.16)$$

Burada, $E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)=\int_0^\infty \lambda zM_1(\lambda z)\,d\pi(z)$, $M_k(\lambda z)\equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k=1,2$ ve $C_1 \equiv \widehat{m}_1$, $\widehat{m}_1=\frac{m_2}{2m_1}$'dir.

Önerme 9.1'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^nM_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde bulunan açılımlar (9.16) eşitliğinde yerine koyulduğu takdirde,

$$E(X)=\frac{1}{\{\lambda\beta_1+\hat{\mu}_1+o(1/\lambda^2)\}}\{[\lambda^2\beta_2+\hat{\mu}_1\lambda\beta_1+o(1/\lambda)]-$$

$$-\frac{1}{2}[\lambda^2\beta_2+2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1+\hat{\mu}_2+o(1/\lambda)]\Big\}+\widehat{m}_1$$

$$=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1-\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2-\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^3+o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right\}\left\{\frac{\lambda^2\beta_2}{2}-\frac{\hat{\mu}_2}{2}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}+\widehat{m}_1$$

$$=\frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^2\beta_2}{2}-\frac{\hat{\mu}_2}{2}-\frac{\lambda\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{2\lambda\beta_1}+\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^2}-\frac{\hat{\mu}_1^3\beta_2}{2\lambda\beta_1^3}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}+\widehat{m}_1$$

$$=\frac{\lambda\beta_2}{2\beta_1}+\left(\widehat{m}_1-\frac{\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1^2}\right)+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_1^2\beta_2}{2\beta_1^3}-\frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right)+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{2\beta_1^2}-\frac{\hat{\mu}_1^3\beta_2}{2\beta_1^4}\right)+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$E(X) = \lambda\hat{\beta}_1 + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{2\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_1}{\beta_1^3}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

elde edilir. Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^2) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+C_1\big[2E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big]\Big\} + C_2. \tag{9.17}$$

Burada, $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z)\, d\pi(z), n = 1,2,$ $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = 1,2,3,$ $C_1 \equiv \widehat{m}_1$ ve $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$'dir.

Önerme 9.1'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde bulunan açılımlar (9.17) eşitliğinde yerine koyulduğu takdirde,

$$E(X^2) = \frac{1}{\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1/\lambda^2)\}}\{[\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(1)] -$$

$$-[\lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(1)] + \frac{1}{3}[\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_3 + o(1)]$$

$$+2\widehat{m}_1[\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1/\lambda)] - \widehat{m}_1[\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1/\lambda)]\} + C_2$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^3 + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \widehat{m}_1\lambda^2\beta_2 + \frac{\hat{\mu}_3}{3} - \widehat{m}_1\hat{\mu}_2 + o(1)\right\} + C_2$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + \widehat{m}_1\lambda^2\beta_2 + \frac{\hat{\mu}_3}{3} - \widehat{m}_1\hat{\mu}_2 - \frac{\lambda^2\hat{\mu}_1\beta_3}{3\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\lambda\hat{\mu}_1\beta_2}{\beta_1} +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda\hat{\mu}_1^2\beta_3}{3\beta_1^2} + \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\beta_2}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\beta_3}{3\beta_1^3} + o(1)\right\} + C_2$$

$$= \frac{\lambda^2 \beta_3}{3\beta_1} + \lambda \left(\frac{\widehat{m}_1 \beta_2}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1 \beta_3}{3\beta_1^2} \right) + \left(C_2 - \frac{\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1 \beta_2}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2 \beta_3}{3\beta_1^3} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hat{\mu}_3}{3\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1 \hat{\mu}_2}{\beta_1} + \frac{\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1^2 \beta_2}{\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_1^3 \beta_3}{3\beta_1^4} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$E(X^2) = \lambda^2 \hat{\beta}_2 + \lambda \left(2\widehat{m}_1 \hat{\beta}_1 - \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1} \right) + \left(C_2 - 2\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1 \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2 \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hat{\mu}_3}{3\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1 \hat{\mu}_2}{\beta_1} + \frac{2\widehat{m}_1 \hat{\mu}_1^2 \hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3 \hat{\beta}_2}{\beta_1^3} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

elde edilir. Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1, C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n), m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\ldots$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^3) = \frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)} \Big\{ E\big((\lambda\zeta_1)^3 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{3}{2} E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_2(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+ E\big(\lambda\zeta_1 M_3(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{1}{4} E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big) +$$

$$+ C_1 \big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - 3E\big(\lambda\zeta_1 M_2(\lambda\zeta_1)\big) + E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big) \big] +$$

$$+ 3C_2 \left[E\big(\lambda\zeta_1 M_1(\lambda\zeta_1)\big) - \frac{1}{2} E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big) \right] \Big\} + C_3. \tag{9.18}$$

Burada, $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_k(\lambda z)\, d\pi(z), n = 1,2,3,$ $M_k(\lambda z) \equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k = 1,2,3,4, C_1 \equiv \widehat{m}_1, C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$ ve $C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3$'tür. Önerme 9.1'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^n M_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde bulunan açılımlar (9.18) eşitliğinde yerine koyulduğu takdirde,

$$E(X^3) = \frac{1}{\{\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_1 + o(1/\lambda)\}} \{[\lambda^4 \beta_4 + \hat{\mu}_1 \lambda^3 \beta_3 + o(\lambda)] -$$

$$-\frac{3}{2}[\lambda^4\beta_4 + 2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda)] +$$

$$+[\lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_3\lambda\beta_1 + o(\lambda)] -$$

$$-\frac{1}{4}[\lambda^4\beta_4 + 4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + 4\hat{\mu}_3\lambda\beta_1 + o(\lambda)] +$$

$$+3\widehat{m}_1[\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(1)] -$$

$$-3\widehat{m}_1[\lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(1)] +$$

$$+\widehat{m}_1[\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_3 + o(1)] +$$

$$+3C_2\left[\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] - \frac{3}{2}C_2\left[\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\right\} + C_3$$

$$E(X^3) = \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^3 + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + \widehat{m}_1\lambda^3\beta_3 + \frac{3}{2}C_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda)\right\} + C_3$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + \widehat{m}_1\lambda^3\beta_3 + \frac{3C_2\lambda^2\beta_2}{2} - \frac{\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_4}{4\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_3}{\beta_1} - \frac{3C_2\hat{\mu}_1\lambda\beta_2}{2\beta_1} +\right.$$

$$\left.+\frac{\hat{\mu}_1^2\lambda^2\beta_4}{4\beta_1^2} + \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\lambda\beta_3}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\lambda\beta_4}{4\beta_1^3} + o(\lambda)\right\} + C_3$$

$$= \frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta_1} + \lambda^2\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_3}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_4}{4\beta_1^2}\right) + \lambda\left(\frac{3C_2\beta_2}{2\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_4}{4\beta_1^3}\right) +$$

$$+\left(C_3 - \frac{3C_2\hat{\mu}_1\beta_2}{2\beta_1^2} + \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\beta_3}{\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_1^3\beta_4}{4\beta_1^4}\right) + o(1)$$

$$E(X^3) = \lambda^3\hat{\beta}_3 + \lambda^2\left(3\widehat{m}_1\hat{\beta}_2 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1}\right) + \lambda\left(3C_2\hat{\beta}_1 - 3\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1^2}\right) +$$

$$+\left(C_3-\frac{3C_2\hat{\mu}_1\hat{\beta}_1}{\beta_1}+\frac{3\hat{m}_1\hat{\mu}_1^2\hat{\beta}_2}{\beta_1^2}-\frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_3}{\beta_1^3}\right)+o(1)$$

elde edilir. Burada $\hat{\beta}_n\equiv\frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0\equiv 1$, $C_2\equiv 2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2$, $C_3\equiv\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3$, $\hat{m}_n=\frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n=\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n\equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n\equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n\equiv E(\chi_1^{+n}), n=1,2,\ldots$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(X^4)=\frac{1}{E\big(M_1(\lambda\zeta_1)\big)}\Big\{E\big((\lambda\zeta_1)^4M_1(\lambda\zeta_1)\big)-2E\big((\lambda\zeta_1)^3M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+2E\big((\lambda\zeta_1)^2M_3(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(\lambda\zeta_1M_4(\lambda\zeta_1)\big)+\frac{1}{5}E\big(M_5(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+C_1\big[4E\big((\lambda\zeta_1)^3M_1(\lambda\zeta_1)\big)-6E\big((\lambda\zeta_1)^2M_2(\lambda\zeta_1)\big)+$$

$$+4E\big(\lambda\zeta_1M_3(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(M_4(\lambda\zeta_1)\big)\big]+$$

$$+2C_2\big[3E\big((\lambda\zeta_1)^2M_1(\lambda\zeta_1)\big)-3E\big(\lambda\zeta_1M_2(\lambda\zeta_1)\big)+E\big(M_3(\lambda\zeta_1)\big)\big]+$$

$$+2C_3\big[2E\big(\lambda\zeta_1M_1(\lambda\zeta_1)\big)-E\big(M_2(\lambda\zeta_1)\big)\big]\Big\}+C_4. \qquad (9.19)$$

Burada, $E\big((\lambda\zeta_1)^nM_k(\lambda\zeta_1)\big)=\int_0^\infty(\lambda z)^nM_k(\lambda z)\,d\pi(z), n=1,2,3,4,$ $M_k(\lambda z)\equiv E\big(S_{N(\lambda z)}^k\big), k=1,2,3,4,5,$ $C_1\equiv\hat{m}_1$, $C_2\equiv 2\hat{m}_1^2-\hat{m}_2$, $C_3\equiv\hat{m}_3-6\hat{m}_1\hat{m}_2+6\hat{m}_1^3$ ve $C_4\equiv-\hat{m}_4+8\hat{m}_1\hat{m}_3+6\hat{m}_2^2-36\hat{m}_1^2\hat{m}_2+24\hat{m}_1^4$'tür.

Önerme 9.1'de elde edilen $E\big((\lambda\zeta_1)^nM_k(\lambda\zeta_1)\big)$'in asimtotik açılımında ilgili rakamlar n ve k'nın yerine verildiği takdirde bulunan açılımlar (9.19) eşitliğinde yerine koyulduğu takdirde,

$$E(X^4)=\frac{1}{\{\lambda\beta_1+\hat{\mu}_1+o(1/\lambda)\}}\{[\lambda^5\beta_5+\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+o(\lambda^2)]-$$

$$-2[\lambda^5\beta_5+2\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4+\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3+o(\lambda^2)]+$$

$$+2[\lambda^5\beta_5 + 3\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_3\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)] +$$

$$-[\lambda^5\beta_5 + 4\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 6\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + 4\hat{\mu}_3\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)] +$$

$$+\frac{1}{5}[\lambda^5\beta_5 + 5\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_4 + 10\hat{\mu}_2\lambda^3\beta_3 + 10\hat{\mu}_3\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)] +$$

$$+4\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4 + \hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + o(\lambda)] - 6\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4 + 2\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda)] +$$

$$+4\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4 + 3\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_3\lambda\beta_1 + o(\lambda)] -$$

$$-\widehat{m}_1[\lambda^4\beta_4 + 4\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_3 + 6\hat{\mu}_2\lambda^2\beta_2 + 4\hat{\mu}_3\lambda\beta_1 + o(\lambda)] +$$

$$+6C_2[\lambda^3\beta_3 + \hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + o(1)] - 6C_2[\lambda^3\beta_3 + 2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + o(1)] +$$

$$+2C_2[\lambda^3\beta_3 + 3\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_2 + 3\hat{\mu}_2\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_3 + o(1)] +$$

$$+4C_3[\lambda^2\beta_2 + \hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + o(1/\lambda)] - 2C_3[\lambda^2\beta_2 + 2\hat{\mu}_1\lambda\beta_1 + \hat{\mu}_2 + o(1/\lambda)]\} + C_4$$

$$E(X^4) = \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1} + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\lambda\beta_1}\right)^3 + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{\lambda^5\beta_5}{5} + \widehat{m}_1\lambda^4\beta_4 + 2C_2\lambda^3\beta_3 + 2C_3\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta_1}\left\{\frac{\lambda^5\beta_5}{5} + \widehat{m}_1\lambda^4\beta_4 + 2C_2\lambda^3\beta_3 + 2C_3\lambda^2\beta_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\hat{\mu}_1\lambda^4\beta_5}{5\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\lambda^3\beta_4}{\beta_1} - \frac{2C_2\hat{\mu}_1\lambda^2\beta_3}{\beta_1} + \frac{\hat{\mu}_1^2\lambda^3\beta_5}{5\beta_1^2} + \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\lambda^2\beta_4}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\lambda^2\beta_5}{5\beta_1^3} + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{\lambda^4\beta_5}{5\beta_1} + \lambda^3\left(\frac{\widehat{m}_1\beta_4}{\beta_1} - \frac{\hat{\mu}_1\beta_5}{5\beta_1^2}\right) + \lambda^2\left(\frac{2C_2\beta_3}{\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\beta_4}{\beta_1^2} + \frac{\hat{\mu}_1^2\beta_5}{5\beta_1^3}\right) +$$

$$+\lambda\left(\frac{2C_3\beta_2}{\beta_1} - \frac{2C_2\hat{\mu}_1\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\beta_4}{\beta_1^3} - \frac{\hat{\mu}_1^3\beta_5}{5\beta_1^4}\right) + o(\lambda)$$

$$E(X^4) = \lambda^4\hat{\beta}_4 + \lambda^3\left(4\widehat{m}_1\hat{\beta}_3 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1}\right) + \lambda^2\left(6C_2\hat{\beta}_2 - 4\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1^2}\right) +$$

$$+\lambda\left(4C_3\hat{\beta}_1 - \frac{6C_2\hat{\mu}_1\hat{\beta}_2}{\beta_1} + \frac{4\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\hat{\beta}_3}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_4}{\beta_1^3}\right) + o(\lambda)$$

elde edilir. Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n}), n = 1,2,\dots$'dir.

Böylece Teorem 9.2'nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Sonuç 9.2. Teorem 9.2'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentinin dört terimli asimtotik açılımları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X) = \lambda\hat{\beta}_1 + \left(\widehat{m}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_2}{2\beta_1}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{2\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_1}{\beta_1^3}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$E(X^2) = \lambda^2\hat{\beta}_2 + \lambda\left(2\widehat{m}_1\hat{\beta}_1 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1}\right) + \left(C_2 - 2\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\hat{\mu}_3}{3\beta_1} - \frac{\widehat{m}_1\hat{\mu}_2}{\beta_1} + \frac{2\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\hat{\beta}_1}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_2}{\beta_1^3}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$E(X^3) = \lambda^3\hat{\beta}_3 + \lambda^2\left(3\widehat{m}_1\hat{\beta}_2 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1}\right) + \lambda\left(3C_2\hat{\beta}_1 - 3\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_2}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1^2}\right) +$$

$$+\left(C_3 - \frac{3C_2\hat{\mu}_1\hat{\beta}_1}{\beta_1} + \frac{3\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\hat{\beta}_2}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_3}{\beta_1^3}\right) + o(1),$$

$$E(X^4) = \lambda^4\hat{\beta}_4 + \lambda^3\left(4\widehat{m}_1\hat{\beta}_3 - \hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1}\right) + \lambda^2\left(6C_2\hat{\beta}_2 - 4\widehat{m}_1\hat{\mu}_1\frac{\hat{\beta}_3}{\beta_1} + \hat{\mu}_1^2\frac{\hat{\beta}_4}{\beta_1^2}\right) +$$

$$+\lambda\left(4C_3\hat{\beta}_1 - \frac{6C_2\hat{\mu}_1\hat{\beta}_2}{\beta_1} + \frac{4\widehat{m}_1\hat{\mu}_1^2\hat{\beta}_3}{\beta_1^2} - \frac{\hat{\mu}_1^3\hat{\beta}_4}{\beta_1^3}\right) + o(\lambda).$$

Burada $\hat{\beta}_n \equiv \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $\hat{\beta}_0 \equiv 1$, $C_2 \equiv 2\widehat{m}_1^2 - \widehat{m}_2$, $C_3 \equiv \widehat{m}_3 - 6\widehat{m}_1\widehat{m}_2 + 6\widehat{m}_1^3$, $\widehat{m}_n = \frac{m_{n+1}}{(n+1)m_1}$, $\hat{\mu}_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_1}$, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\mu_n \equiv E(\chi_1^{+n})$, $n = 1,2,\ldots$’dir.

10. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında stokastik süreçlerin önemli bir modifikasyonu olan genel müdahaleli rasgele yürüyüş süreci ele alınmıştır. İncelenen $X(t)$ süreci literatürde “Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler sınıfı” olarak bilinen geniş bir sınıfın üyesidir. Bu çalışmada ele alınan süreçle bir bakıma daha önce yapılan kesikli şans karışımlı rasgele yürüyüş süreçlerinin genellemesi yapılmıştır. Önceki çalışmalarda müdahaleler sadece özel dağılımlar (simetrik üçgensel dağılım, Gamma dağılımı, üstel dağılım, Weibull dağılım…) alabilmekteyken bu çalışmada müdahale keyfi bir dağılıma sahip olabilmektedir. Bulunan sonuçlar yardımıyla bazı durumlar dışında (normal dağılım gibi) önceki çalışmalar, bu çalışmanın özel durumu haline gelmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürün bir kısmını bir çatı altına toplamaktadır. Analitik sonuçlar literatürde büyük önem taşımaktadır, ancak uygulamada kullanımları zorluk yaratmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada yaklaşım yöntemi olarak asimtotik yöntem kullanılmıştır. Bazı asimtotik açılımların ve kesin ifadelerin genel formülleri bulunmuştur. Rasgele yürüyüş süreçleri sınıfı için literatürdeki çalışmalar süreçlerin durağan karakteristikleri, yenileme fonksiyonu, sınır fonksiyonelleri ve limit dağılımları olarak gruplanabilmektedir. Bu çalışmada, bu temel konularla ilgili bulgular elde edilmiştir.

İlk olarak, genel müdahaleli rasgele yürüyüş sürecine karşılık gelen $X(t)$ süreci matematiksel olarak inşa edilmiştir. Çalışmanın 3. Bölümünde, genel ergodik teoremi iki önemli varsayımın sağlandığı gösterilerek ispatlanmıştır (Gihman ve Skorohod, 1975, s. 243). $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ve karakteristik fonksiyonunun kesin ifadeleri bulunmuştur. Rasgele yürüyüş süreçlerinde $X(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonu büyük önem taşımaktadır. Sürecin durağan karakteristiklerinin kesin ifadelerinin ve asimtotik açılımlarının elde edilmesinde güçlü bir rolü vardır. Bu nedenle kullanımı daha kolay olan köprü görevi görecek olan karakteristik fonksiyonu ihtiyacı doğmaktadır. Bu bağlamda, Khaniyev (2003)’in bu alanda değerli çalışmasının ışığında, rasgele yürüyüş sürecinin temel özdeşliği (Feller, 1971, s. 600) yardımıyla $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonları ile ifade edilebildiği gösterilmiştir. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu bu çalışmanın ağırlık merkezini oluşturmaktadır. Bu nedenle, çalışmanın geriye kalan kısmında etkili bir biçimde kullanılmış ve sonuçların elde edilmesinde yardımcı olmuştur.

4. Bölümde sınır fonksiyonelleri stokastik süreçlerin önemli karakteristiklerinden olması sebebiyle ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonu ve momentleri için kesin ifadelerin yanında asimtotik açılımlar da elde edilmiştir. Bu çalışmada, Laplace ve Laplace Stieltjes dönüşümleri kesin ve asimtotik ifadelerin elde edilmesinde etkin olarak kullanılmış, önemli birer matematiksel araç olmuştur. $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk on momentinin Laplace dönüşümlerinin kesin ifadeleri elde edilmiş, elde edilen ifadeler ve parçalanış fonksiyonu (Abramowitz ve Stegun, 1972, s.825) yardımıyla genel bir formül bulunmuştur. Bulunan kesin ifadeler yardımıyla $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momentinin üç terimli asimtotik açılımları elde edilmiş, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentlerinin asimtotik açılımlarının hesaplanmasına zemin sağlanmıştır.

Çalışmanın 5. Bölümünde, $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin lineer bir dönüşümü olan $W(t)$ sürecinin limitteki ifadesini bulunmuş, zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Özetle, $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunun $\hat{\varphi}_{\zeta}(\theta)$ karakteristik fonksiyonuna yakınsadığı gösterilmiştir. Bu aşamada, karakteristik fonksiyonlar için süreklilik teoremi (Feller, 1971; Lukacs, 1970) yardımıyla $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının, müdahaleye karşılık gelen rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımına zayıf yakınsadığı ispatlanmıştır.

6. Bölümde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk beş momenti, $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk altı momenti ile ifade edilmiştir. Bu aşamada, daha önce önemi vurgulanan $X(t)$ sürecinin karakterisitik fonksiyonun momentler üzerinden Taylor açılımı kullanılarak elde edilen açılımların birebir eşleştirilmesiyle sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca, şimdiye kadar yapılan benzer çalışmalarda en fazla ilk dört ergodik moment için kesin ifade elde edilmiştir. Bu bölümde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $n.$ momenti için genel bir ifade elde edilmiş ve genel ifadenin geçerliliği beşinci ergodik moment hesaplanarak gösterilmiştir. Bu bağlamda, daha yüksek dereceli ergodik momentlerin kesin ifadelerinin bulunmasının yolu açılmıştır. Çünkü, ergodik momentlerin hesaplanmasında yardımcı olan ve temel bir önem taşıyan $S_{N(\lambda z)}$

sınır fonksiyonelinin yüksek dereceli momentleri için kesin ifadeler hali hazırda çalışmanın 4. Bölümünde elde edilmiş bulunmaktadır.

Çalışmanın 7. Bölümünde, bir önceki bölüm ve 4. Bölümün bulguları yardımıyla $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk beş momentinin üç terimli asimtotik açılımları elde edilmiş, $E(X^n)$'in üç terimli asimtotik açılımı için genel bir formül bulunmuştur. Ergodik momentlerin kesin ifadeleriyle benzer şekilde, şimdiye kadar yapılan çalışmalarda en fazla ilk dört ergodik moment için üç terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Çalışmanın bu bölümünde, asimtotik açılımlar yine üç terimli alınarak ergodik momentlerin derecesi bir adım ileriye taşınmıştır.

8. Bölümde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentinin üç terimli asimtotik açılımları ile çalışmamızın özel durumları olan Khaniyev vd. (2008), Aliyev vd. (2009), (2010), (2014) makalelerinin sonuçları karşılaştırılmıştır. Genel durumda bulmuş olduğumuz açılımların doğruluğu ve kullanışlılığı gösterilmiştir. Böylece, çalışmamızın farklı dağılımlara sahip müdahaleli rasgele yürüyüş süreçleri ile ilgili çalışmaların bir bakıma genellemesi olduğu anlaşılmaktadır.

Çalışmanın 9. Bölümünde ise, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için dört terimli asimtotik açılımlar elde edilmiş ve $E(X^n)$'in dört terimli asimtotik açılımı için genel bir formül bulunmuştur. Bu aşamada, hesaplamalarda yardımcı olması açısından $S_{N(\lambda z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momentinin dört terimli asimtotik açılımları bulunmuştur. Sınır fonksiyonelinin dört terimli asimtotik açılımının hesaplanması ergodik mometlerin dört terimli asimtotik açılımların elde edilmesinin önünü açmaktadır. Dört terimli asimtorik açılımların bulunması, bu konunun literatüründe yeniliktir. Çünkü, daha önceki çalışmalarda ilk dört ergodik moment için en fazla üç terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Bu bağlamda, dört terimli asimtotik açılım elde etmek önem taşımaktadır. Ergodik momentlerin üç terimli asimtotik açılımlarının kesin ifadelere yakınlığı bu çalışmanın özel bir durumu olan Aliyev vd. (2010) çalışmasında gösterilmiştir. Bu durum, dört terimli asimtotik açılımların kesin ifadelere çok daha yakın sonuçlar vereceğinin işaretidir.

Çalışmanın Ek Bölümünde, yenileme ve ödüllü yenileme süreçleri ve rasgele yürüyüş süreçleri gibi süreçlerde büyük önem taşıyan yenileme fonksiyonunun özel bir durumu incelenmiştir. Bu çalışmanın hesaplamalarında çokça kez yenileme fonksiyonu kullanılmıştır. Bu bağlamda, $n.$ dereceden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonu için genel ve kesin ifadeler elde edilmiştir.

Ayrıca, ilk üç dereceden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından oluşturulan yenileme sürecinin varyansı için kesin ifadeler bulunmuştur.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M., Stegun, I.A.,(1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover.

Aliyev, R., Ardic, O., Khaniyev, T.,(2016a). Asymptotic approach for a renewal-reward process with a general interference of chance, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 45(14), 4237-4248.

Aliyev, R., Kesemen, T., Khaniyev, T.,(2014). Some Asymptotic Results for a Semi-Markovian Random Walk with a Special Barrier, *Pak. J. Statist.*, 30(3), 411-428.

Aliyev, R., Khaniyev, T., Gever, B.(2016b). Weak Convergence Theorem for Ergodic Distribution of Stochastic Processes with Discrete Interference of Chance and Generalized Reflecting Barrier, *Theory Probab. Appl.*, 60(3), 502–513.

Aliyev, R., Khaniyev, T., Kesemen, T.,(2009). Asymptotic expansions for the moments of the semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 39(1), 130-143.

Aliyev, R., Kucuk, Z., Khaniyev, T.,(2010). Three-term asymptotic expansions for the moments of the random walk with triangular distributed interference of chance, *Applied Mathematical Modelling*, 34(11), 3599-3607.

Alsmeyer, G.,(1991). Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, *Statistics and Probability Letters*, 12(1), 19-27.

Baxter, L.A., Scheuer, E.M.,(1982). On the Tabulation of the Renewal Function, *Technometrics*, 24(2), 151-156.

Blanchet, J., Glynn, P.,(2006). Complete corrected diffusion approximations for the maximum of a random walk, *The Annals of Applied Probability*, 16(2), 951-983.

Borovkov, A.A.,(1984) Asymptotic Methods in Queuing Theory, John Wiley, New York.

Brown, M., Solomon, H.A.,(1975). Second-order approximation for the variance of a renewal-reward process, *Stochastic Processes and Their Applications*, 3(3), 301–314.

Chang, J.T., Peres, Y.,(1997). Ladder heights, Gaussian random walks and the Riemann zeta function, *Annals of Probability*, 25(2), 787-802.

Chaudhry, M.L., Yang, X., Ong, B.,(2013). Computing the Distribution Function of the Number of Renewals, *American Journal of Operations Research*, 3, 380-386.

Cui, L., Xie, M.,(2003). Some normal approximations for renewal function of large Weibull shape parameter, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 32(1), 1–16.

Feller, W.,(1971) Introduction to Probability Theory and Its Applications II, John Wiley, New York.

Frees, E.W.,(1986). Nonparametric Renewal Function Estimation, *The Annals of Statistics*, 14(4), 1366-1378.

Gihman, I.I., Skorohod, A.V.,(1975) Theory of Stochastic Processes II. Springer-Verlag, Berlin.

Gökpınar, F., Khaniyev, T., Mammadova, Z.,(2013). The weak convergence theorem for the distribution of the maximum of a Gaussian random walk and approximation formulas for its moments, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 15, 333-347.

Gökpinar, F., Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T.,(2019). Approximation formulas for the moments of the boundary functional of a Gaussian random walk with positive drift by using Siegmund's formula, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 48(9), 2679-2688.

Grübel, R.,(1988). Harmonic renewal sequences and first positive sum, *Journal of London Mathematical Society*, 38(2), 179-192.

Hanalioglu, Z., Khaniyev, T., Agakishiyev, I.,(2015). Weak convergence theorem for the ergodic distribution of a random walk with normal distributed interference of chance, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 5(1), 61-73.

Hanalioglu, Z., Khaniyev, T.,(2019). Limit theorem for a semi-Markovian stochastic model of type (s,S), *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(2), 605-615.

Janseen, A.J.E.M., Van Leeuwarden, J.S.H.,(2007a). On Lerch's transcendent and the Gaussian random walk, *Annals of Applied Probability*, 17(2), 421-439.

Janseen, A.J.E.M., Van Leeuwarden, J.S.H.,(2007b). Cumulants of the maximum of the Gaussian random walk, *Stochastic Processes and Their Applications*, 117(12), 1928–1959.

Jiang, R.,(2008). A Gamma-normal Series Truncation Approximation for Computing the Weibull Renewal Function, *Reliability Engineering & System Safety*, 93, 616-626.

Kesemen, T., Aliyev, R., Khaniyev, T.,(2013). Limit distribution for a semi-Markovian random walk with Weibull distributed interference of chance, *Journal of Inequalities and Applications*, doi.org/10.1186/1029-242X-2013-134.

Khaniyev T. A.,(2005). About moments of generalized renewal process, *Transactions of NAS of Azerbaijan*, 25(1), 95–100.

Khaniyev, T., Kesemen, T., Aliyev, R., Kokangul, A.,(2008). Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with exponential distributed interference of chance, *Statistics and Probability Letters*, 78(6), 785-793.

Khaniyev, T., Mammadova, Z.,(2006). On the stationary characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 76(10), 861–874.

Khaniyev, T.,(2003). Some asymptotic results for the semi-Markovian random walk with a special barrier, *Turkish Journal of Mathematics*, 27, 251-272.

Khaniyev, T.A., Kucuk Z.,(2004). Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, *Statistics and Probability Letters*, 69(1), 91–103.

Khorsunov, D.,(1997). On distribution tail of the maximum of a random walk, *Stochastic Processes and Their Applications*, 72, 97–103.

Kolmogorov, A. N.,(1956) Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publishing, New York.

Lévy, P.,(1954). Processus semi-Markoviens, *Proc. Int. Congress Math.*, 3, 416-426.

Lotov, V.I.,(1996). On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, *Annals of Probability*, 24(4), 2154–2171.

Lukacs, E.,(1970) Characteristic Functions, Griffin, London.

Nagaev, S.V.,(2010). Exact expressions for the moments of ladder heights, *Siberian Mathematical Journal*, 51(4), 675–695.

Pyke, R.,(1961). Markov renewal processes: definitions and preliminary properties, *Ann. Math. Stat.*, 322(4), 1231-1242.

Rogozin, B.A.,(1964). On the distribution of the first jump, *Theory of Probability and Its Applications*, 9(3), 450-465.

Sadooghi-Alvandi, S.M.,(1993). A Proof of the Continuity Theorem for Characteristic Functions, *Statistics and Probability Letters*, 16, 27–28.

Siegmund, D.,(1979). Corrected diffusion approximations in certain random walk problems, *Advances in Applied Probability*, 11(4), 701-719.

Smeitink, E., Dekker, R.,(1990). A Simple Approximation to the Renewal Function, *IEEE Transactions on Reliability*, 39(1), 71-75.

Smith, W.L., Leadbetter, M.R.,(1963). On the Renewal Function for the Weibull Distribution, *Technometrics*, 5(3), 393-396.

Smith, W.L.,(1955). Regenerative stochastic processes, *Proc. Roy. Soc.*, A232, 6-31.

Spitzer, F.,(1964). Principles of Random Walk, Van Nostrand, Princeton.

Takács, L.,(1954). Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet*, 3, 115-128.

Xie, M.,(1989). On the Solution of Renewal-Type Integral Equations, *Communication in Statistics – Simulation and Computation*, 18(1), 281-293.

EKLER

EK A: Özel Bir Durumda Yenileme Sürecinin Beklenen Değeri ve Varyansı için Kesin İfadeler

EK A: ÖZEL BİR DURUMDA YENİLEME SÜRECİNİN BEKLENEN DEĞERİ VE VARYANSI İÇİN KESİN İFADELER

Laplace dönüşümü yöntemi yenileme süreçlerinde yenileme sayılarının olasılıksal karakteristiklerini bulmak için sıkça kullanılmaktadır. Yenileme sayılarının beklenen değeri olan yenileme fonksiyonu bu süreçler için büyük önem arz etmektedir. Bu çalışmada Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonu için genel ve yenileme sürecinin varyansı kesin ifadeler elde edilmiştir. Stok kontrol, güvenilirlik, kuyruk ve sigorta gibi süreçler önemli ve yaygın stokastik süreçlerdir. Bu süreçler için toplam maliyet, döngü süreleri, eksiklik gibi temel hesaplamalarda yenilemelerin sayısı yani yenileme fonksiyonu kullanılmaktadır. Literatürde yenileme fonksiyonlarının kesin ve yaklaşık ifadeleri üzerine birçok değerli çalışma bulunmaktadır. Smith ve Leadbetter (1963), Weibull dağılımına sahip rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonu için kapalı bir formda asimtotik açılım elde etmiştir. Baxter ve Scheuer (1982), genelleştirilmiş kübik döndürme algoritması yardımıyla çeşitli dağılım fonksiyonları için yinelemeli konvolüsyon integralleri hesaplamışlardır. Bu algoritmayla yenileme fonksiyonu, varyans fonksiyonu ve farklı parametrelerle bazı dağılımların (Gamma, ters Gauss, Lognormal, kesik normal) yenileme fonksiyonu integralleri için yaklaşımlar elde etmişlerdir. Smeitink ve Dekker (1990), çalışmasında önerdikleri yaklaşımın ana fikri, yenileme fonksiyonunun, gelişler arasında geçen sürenin küçük olduğu durumda dağılım fonksiyonuna neredeyse eşit olmasıdır. Buna ek olarak, gelişler arasında geçen süre arttığında yenileme fonksiyonunun rasgele değişkenin birinci ve ikinci momentleri yardımıyla asimtotik yollarla ifade edilebilmesidir. Ayrıca, daha yakın sonuçlar elde etmek için, güç serisi açılımları ve kübik döndürme algoritmasını da çalışmalarında tavsiye etmektedirler (Baxter ve Scheuer, 1982). Frees (1986), yenileme fonksiyonu için farklı bir yaklaşım izlemiştir. Frees (1986) yenileme fonksiyonu için parametrik olmayan bir tahminci önermiş ve tahmin edicinin tutarlılığını ve asimptotik normalliğini kanıtlamıştır. Xie (1989), yenileme fonksiyonu ile ilgili çalışmasında RS yöntemini kullanmıştır. Bu yöntem numerik Reimann-Stiltjes integrasyonu üzerine kurulmuş yenileme tipli integral denklemleri çözmek üzerinedir. Kullanımındaki kolaylık, yakınsama ve uygulanabilirlik bakımından önemli bir yöntemdir. RS yönteminin özellikle olasılık yoğunluk fonksiyonunun aykırı olduğu durumlarda kullanışlı olduğu söylenebilir. Yenileme denklemi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-s)\, dF(s).$$

Burada, $F(t)$ yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenin dağılım fonksiyonudur. RS yönetiminin temelinde $\int_a^b f(x)dg(x)$ integralinin çözümü için yaklaşımlar yatmaktadır. Xie (1989), güvenilirlik teorisinde de sık kullanılan Weibull dağılımı için farklı parametrelerle RS yöntemiyle nümerik çalışmalar yapmıştır. Bulduğu sonuçların performansı iyi olmakla birlikte, kesin ifadeler elde etmemiştir. Jiang (2008), Weibull dağılımına sahip rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonu hesaplamak için seri kesme yaklaşım yöntemi önermiştir. Önerilen modelde, Weibull dağılım fonksiyonunun n katlı konvolüsyonu yaklaşık olarak Gamma ve Normal dağılım fonksiyonlarının bir karması olarak ifade edilmiştir. Üç çeşit modeli ele almıştır. Bu modeller sırasıyla, Normal seri modeli (NS), Gamma seri modeli (GS) ve Gamma-Normal seri modeli (GNS) şeklindedir. Cui ve Xie (2003), Normal seri (NS) yaklaşım modelini aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

$$F^n(t) \approx \Phi\left[\frac{t-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right], M(t) \approx \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \Phi\left[\frac{t-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right].$$

Burada, $\mu = \alpha\Gamma(1+1/\beta), \sigma^2 = \alpha^2[\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta)], F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]$, α ve β ise Weibull dağılımının parametreleridir.

$$N_\varepsilon = \inf\left\{n: \Phi\left[\frac{t-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] < \varepsilon\right\}.$$

Burada, ε literatürde genellikle 10^{-6} veya 10^{-7} şeklinde kullanılmaktadır. N_ε ise seri modelinin yakınsama hızını göstermektedir. Gamma seri modelindeki (GS) motivasyon ise Gamma dağılımının Weibull dağılımına benzerlikleridir. Bu benzerlikler, iki dağılımın da çarpık olması ve $(0, \infty)$ arasında tanımlı olması, parametreleri 1'e eşit olunca iki dağılımın da üstel dağılıma indirgenmesi ve olasılık yoğunluk fonksiyonlarının azalan ve tek tepeli olması şeklinde listelenebilmektedir. Gamma serilerinden Weibull serilerine ulaşmaktaki ana fikir ise bağımsız n tane

Gamma rasgele değişkeninin toplamının bağımsız n tane Weibull rasgele değişkeninin toplamına yakınsamasıdır. Jiang (2008), NS ve GS yaklaşımlarının bir kombinasyonu olan Gamma-Normal seri modelini (GNS) önermiş ve farklı parametrelerle Weibull dağılımına sahip rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonu için daha yakın yaklaşımlar elde etmiştir. Yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü bazı durumlar için rasyonel olarak ifade edilebiliyorken, bazı durumlarda rasyonel olarak ifade edilememektedir. Chaudhry v.d. (2013), yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümünün rasyonel olmadığı durum için Pade yaklaşım yöntemini kullanmış ve diğer çalışmalarla karşılaştırma analizleri yapmışlardır. $\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dF(t)$ Laplace dönüşümünün rasyonel olmadığı durum için Pade yöntemini aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} M_n s^n.$$

Burada $M_n = \int_0^{+\infty} x^n dF(x)$, $F(x)$ yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenin dağılım fonksiyonudur. Bu tanımlar yardımıyla rasyonel yaklaşım fonksiyonunu aşağıdaki gibi vermişlerdir:

$$\hat{f}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{K} b_n s^n}{\sum_{n=0}^{L} a_n s^n}.$$

Erlang, Gamma, Weibull, Lognormal gibi dağılımlara sahip rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonları için parametre varsayımlarıyla yaklaşık formüller elde etmişlerdir. Görülebileceği gibi şimdiye kadar belirli dağılımlara sahip rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonları için yaklaşık ifadeler elde edilmiş, ancak kesin ifadeler elde edilememiştir. Bu çalışmada, özel bir durum olarak Erlang dağılımına sahip X_n rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonu için kesin ve açık formüller elde edilmiştir. Ayrıca yenileme sürecinin iki momenti ve varyansı için bazı durumlarda kesin ifadeler bulunmuştur.

Yenileme fonksiyonunun tanımı aşağıdaki gibidir (Feller, 1971):

$$U(t) = E\big(N(t)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t). \qquad (A.1)$$

Burada, $N(t)$ bir yenileme sürecidir ve $N(t) = \min\{n \geq 1: T_n > t\}$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; $F(t) = P\{X_i \leq t\}$ ve $F_n(t) = P\{T_n \leq t\}$'dir. $F_n(t)$, $F(t)$ dağılım fonksiyonun kendisiyle n katlı konvolüsyon çarpımıdır.

(A.1) eşitliğinden görülebileceği gibi yenileme fonksiyonu sonsuz seriden ve kesin ifadesinin elde edilmesi oldukça zor olan n katlı konvolüsyonu içermektedir. Yenileme fonksiyonları ile ilgili çalışmalarda kullanılan birçok yöntemin içerisinde Laplace yöntemi de bulunmaktadır. Bu çalışmada, kesin ifadeleri elde ederken de Laplace yöntemi kullanılmıştır. Bu bağlamda, (A.1) eşitliğinde t'ye göre Laplace dönüşümü uygulandığı takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\widetilde{U}(\gamma) \equiv \mathcal{L}_{\gamma}\big(U(t)\big) = \frac{1}{\gamma} + \tilde{F}(\gamma) + \tilde{F}(\gamma)F^{*}(\gamma) + \tilde{F}(\gamma)\big(F^{*}(\gamma)\big)^{2} + \cdots$$

$$\widetilde{U}(\gamma) = \frac{1}{\gamma\big(1 - F^{*}(\gamma)\big)}. \qquad (A.2)$$

Burada, $\widetilde{U}(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U(t)dt$ yenileme fonksiyonu $U(t)$'nin Laplace dönüşümüdür. Ayrıca, $F^{*}(\gamma)$ Laplace Stieltjes dönüşümüne karşılık gelmektedir ve $F^{*}(\gamma) \equiv E(e^{-\gamma X_1}) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dF(t)$ şeklinde gösterilmektedir. Ek olarak, $F^{*}(\gamma) = \gamma\tilde{F}(\gamma)$'dir ve $\tilde{F}(\gamma)$, $F(t)$ dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür.

Yenileme fonksiyonunun kesin ifadesinin kullanımı zor olduğu için asimtotik açılımların elde edildiği çalışmalar yapılmıştır. Bu bağlamda, $\mu_2 \equiv E(X_1^2) < \infty$ varsayımı altında yenileme fonksiyonunun $t \to \infty$ iken asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir (Feller, 1971):

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1).$$

Burada $\mu_n = E(X_1^n), n = 1, 2, \ldots$'dir.

Alsmeyer (1991) harmonik yenileme süreçlerini incelemiş ve $\mu_1 \equiv E(X_1) < \infty$ varsayımı altında $t \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik açılımı elde etmiştir:

$$U_H(t) = log\left(\frac{t}{\mu_1}\right) + \gamma + o(1).$$

Burada, $U_H(t)$ bir harmonik yenileme fonksiyonudur. $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - ln(n)\right)$ Euler katsayısıdır ve yaklaşık değeri 0,557'dir.

Yenileme sürecinin beklenen değeri olan yenileme fonksiyonunun yanında, yenileme sürecinin varyansı üzerine de değerli çalışmalar bulunmaktadır. Yenileme sürecinin varyansını incelemek için $N(t)$ sürecinin ikinci momentini yenileme fonksiyonu $U(t)$'nin yardımıyla elde edilebilmektedir. Yenileme sürecinin tanımına göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$U_2(t) \equiv E\left(N^2(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P\{T_{n-1} \leq t < T_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \{F_{n-1}(t) - F_n(t)\}. \qquad (A.3)$$

Burada, $F_n(t)$, $F(t)$ dağılım fonksiyonun kendisiyle n katlı konvolüsyon çarpımıdır. (A.3) eşitliğinin her iki tarafına t'ye göre Laplace dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\widetilde{U}_2(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{\lambda} \{F^*(\gamma)^{n-1} - F^*(\gamma)^n\} = \frac{1 - F^*(\gamma)}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F^*(\gamma)^{n-1}$$

$$= \left\{\frac{1 - F^*(\gamma)}{\gamma}\right\} \left\{\frac{1 + F^*(\gamma)}{\left(1 - F^*(\gamma)\right)^3}\right\} = \frac{1 + F^*(\gamma)}{\gamma\left(1 - F^*(\gamma)\right)^2}. \qquad (A.4)$$

Burada, $\widetilde{U}_2(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U_2(t) dt$, $U_2(t) \equiv E\left(N^2(t)\right)$ ve $F^*(\gamma) \equiv E(e^{-\gamma X_1}) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dF(t)$'dir.

(A.1) eşitliği (A.4) eşitliğinde dikkate alındığı takdirde $N(t)$ yenileme sürecinin ikinci momentinin Laplace dönüşümü $\widetilde{U}_2(\gamma)$ aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_2(\gamma) = 2\widetilde{U}(\gamma) U^*(\gamma) + \widetilde{U}(\gamma). \qquad (A.5)$$

(A.5) eşitliğine ters Laplace dönüşümü uygulandığı takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$U_2(t) \equiv E\left(N^2(t)\right) = 2U(t) * U(t) + U(t). \qquad (A.6)$$

Burada, $U(t) * U(t) \equiv \int_0^t U(t-s) dU(s)$ ve $U(t) \equiv E\left(N(t)\right)$'dir.

(A.6)'nın yardımıyla $N(t)$ yenileme sürecinin varyansı $Var\left(N(t)\right)$'nın kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$Var\big(N(t)\big) = 2U(t) * U(t) + U(t) - U^2(t).$$

$\mu_3 \equiv E(X_1^3) < \infty$ varsayımı altında $Var\big(N(t)\big)$'nin t → ∞ iken iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir (Feller, 1971):

$$Var\big(N(t)\big) = \frac{\sigma_X^2}{\mu_1^3}t + 5\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\right)^2 - \frac{2\mu_3}{3\mu_1^3} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1).$$

Burada $\mu_k = E\big(X_1^k\big), k = 1, 2, \dots$ ve $\sigma_X^2 = Var(X_1)$'dir.

Bu çalışmada, temel olarak (A.2) eşitliği kullanılarak n. dereceden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonu için kesin ve genel ifadeler elde edilmiştir. Bu özel durum için, yenileme fonksiyonu Erlang dağılımının derecesi artırılarak hesaplanmış ve çıkan ifadelerde benzerlikler fark edilmiştir. Çalışmanın özünde yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü kullanılmıştır. Yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü rasyonel olarak ifade edildikten sonra ters Laplace dönüşümüyle yenileme fonksiyonunun kesin ifadesi elde edilmiştir. Öncelikle ilk 5. dereceden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümleri ve kendileri için kesin ifadeler aşağıdaki gibi hesaplanmıştır. n. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip X_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_X(t) = \frac{\alpha^n t^{n-1} e^{-\alpha x}}{(n-1)!}, x \geq 0.$$

$F^*(\gamma)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$F^*(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma x} f_X(x)dx = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^n.$$

Bu takdirde, (A.2) eşitliğinden faydalanıldığında 1. dereceden α parametreli Erlang dağılımına (Üstel(α)) sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{(1)}(\gamma) = \frac{1}{\gamma\{1 - F^*(\gamma)\}} = \frac{1}{\gamma\left\{1 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right\}} = \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}. \qquad (A.7)$$

(A.7) eşitliğine γ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{(1)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{(1)}(t) = \alpha t + 1.$$

Burada $U_{(1)}(t)$, 1. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur.

(A.2) eşitliğinden faydalanıldığında 2. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{(2)}(\gamma) = \frac{1}{\gamma\{1 - F^*(\gamma)\}} = \frac{1}{\gamma\left\{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^2\right\}} = \frac{3}{4\gamma} + \frac{1}{4(\gamma + 2\alpha)} + \frac{\alpha}{2\gamma^2}. \quad (A.8)$$

(A.8) eşitliğine γ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{(2)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{(2)}(t) = \frac{\alpha t}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\alpha t}.$$

Burada $U_{(2)}(t)$, 2. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur.

(A.2) eşitliğinden faydalanıldığında 3. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{(3)}(\gamma) = \frac{1}{\gamma\{1 - F^*(\gamma)\}} = \frac{1}{\gamma\left\{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^3\right\}}$$

$$= \frac{2}{3\gamma} + \frac{\alpha}{3\gamma^2} + \frac{\gamma + 2\alpha}{3(\gamma^2 + 3\alpha\gamma + 3\gamma^2)}$$

$$\widetilde{U}_{(3)}(\gamma) = \frac{2}{3\gamma} + \frac{\alpha}{3\gamma^2} + \frac{\gamma + \frac{3\alpha}{2}}{3\left[\left(\gamma + \frac{3\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right)^2\right]} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right)}{3\left[\left(\gamma + \frac{3\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right)^2\right]}$$

$(A.9)$.

(A.9) eşitliğine γ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{(3)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{(3)}(t) = \frac{\alpha t}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\left[\cos\left(\sqrt{3}\alpha t/2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}\alpha t/2\right)\right].$$

Burada $U_{(3)}(t)$, 3. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur.

(A.2) eşitliğinden faydalanıldığında 4. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{(4)}(\gamma) = \frac{1}{\gamma\{1 - F^*(\gamma)\}} = \frac{1}{\gamma\left\{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^4\right\}}$$

$$= \frac{5}{8\gamma} + \frac{1}{8(\gamma + 2\alpha)} + \frac{\alpha}{4\gamma^2} + \frac{\gamma + 2\alpha}{4(\gamma^2 + 2\alpha\gamma + 2\alpha^2)}$$

$$\widetilde{U}_{(4)}(\gamma) = \frac{5}{8\gamma} + \frac{1}{8(\gamma + 2\alpha)} + \frac{\alpha}{4\gamma^2} + \frac{\gamma + \alpha}{4[(\gamma + \alpha)^2 + \alpha^2]} + \frac{\alpha}{4[(\gamma + \alpha)^2 + \alpha^2]}. \quad (A.10)$$

(A.10) eşitliğine γ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{(4)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{(4)}(t) = \frac{\alpha t}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8}e^{-2\alpha t} + \frac{1}{4}e^{-\alpha t}\ [\cos(\alpha t) + \sin(\alpha t)].$$

Burada $U_{(4)}(t)$, 4. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur.

(A.2) eşitliğinden faydalanıldığında 5. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{(5)}(\gamma) = \frac{1}{\gamma\{1 - F^*(\gamma)\}} = \frac{1}{\gamma\left\{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^5\right\}}$$

$$= \frac{(\gamma + \alpha)^5}{\gamma^2\{\gamma^4 + 5\gamma^3\alpha + 10\gamma^2\alpha^2 + 10\gamma\alpha^3 + 5\alpha^4\}}$$

$$= \frac{3}{5\gamma} + \frac{\alpha}{5\gamma^2} + \frac{\gamma + 2\alpha}{5(\gamma^2 + a\alpha\gamma + a\alpha^2)} + \frac{\gamma + 2\alpha}{5(\gamma^2 + b\alpha\gamma + b\alpha^2)}$$

$$= \frac{3}{5\gamma} + \frac{\alpha}{5\gamma^2} + \frac{\gamma + 2\alpha}{5\left\{\left(\gamma + \frac{a\alpha}{2}\right)^2 - \frac{a^2\alpha^2}{4} + a\alpha^2\right\}} + \frac{\gamma + 2\alpha}{5\left\{\left(\gamma + \frac{b\alpha}{2}\right)^2 - \frac{b^2\alpha^2}{4} + b\alpha^2\right\}}$$

$$= \frac{3}{5\gamma} + \frac{\alpha}{5\gamma^2} + \frac{\gamma + \frac{a\alpha}{2}}{5\left\{\left(\gamma + \frac{a\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{b}}{2}\right)^2\right\}} + \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)\alpha}{5\left\{\left(\gamma + \frac{a\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{b}}{2}\right)^2\right\}}$$

$$+ \frac{\gamma + \frac{b\alpha}{2}}{5\left\{\left(\gamma + \frac{b\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{a}}{2}\right)^2\right\}} + \frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)\alpha}{5\left\{\left(\gamma + \frac{b\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{a}}{2}\right)^2\right\}}. \qquad (A.11)$$

Burada $a = \left(5 - \sqrt{5}\right)/2$ ve $b = \left(5 + \sqrt{5}\right)/2$'dir.

(A.11) eşitliğine γ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{(5)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{(5)}(x) = \frac{\alpha t}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} e^{-\frac{a\alpha t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{b}\alpha t}{2}\right) + \frac{3 + \sqrt{5}}{5\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \sin\left(\frac{\sqrt{b}\alpha t}{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{5} e^{-\frac{b\alpha t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{a}\alpha t}{2}\right) + \frac{3 - \sqrt{5}}{5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \sin\left(\frac{\sqrt{a}\alpha t}{2}\right)\right].$$

Burada $U_{(5)}(t)$, 5. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur.

Not A.1. 4. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümüne kadar rasyonel kesirlere ayırmanın nispeten daha kolay olduğu gözlenmektedir. Ancak 5. dereceden α parametreli Erlang dağılımına rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümüne gelindiğinde kompleks köklerle karşı karşıya kalınmaktadır. Bu durum yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümünü rasyonel kesirlere ayırırken güçlük yaratmaktadır. Bu bağlamda ilk 4. dereceden α parametreli Erlang dağılım için bulunan ifadelerdeki ortaklıklar gözlenmiş ve rasyonel kesirlere ayrılırken bir yol bulunmuştur. Bu aşamadaki işlemler aşağıdaki gibidir:

$$P_n(z) = \frac{(z+1)^n - 1}{z} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^k - 1}{z} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{k-1} = 0$$

$$(z+1)^n = 1 = e^{i2\pi k}$$

$$z + 1 = e^{i\frac{2\pi}{n}k}, k = 1, \dots, n-1$$

$$z_k^{(n)} = -1 + e^{i\frac{2\pi}{n}k} = -1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$$

$$c = \min\{|Re(z_i^n)|, i = 1, \dots, n-1\}$$

$$\chi_k^{(n)} = Re(z_i^n) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) - 1 = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}k\right), k = 1, \dots, n-1. \quad (A.12)$$

Burada $\chi_k^{(n)}$ denklemin kökleridir.

Örneğin, (A.9) eşitliğinin son iki rasyonel kesrinin paydasında bulunan $\left(\gamma + \frac{3\alpha}{2}\right)^2$ ifadesindeki α'nın katsayısı olan $3/2$'yi bulmak önem arz etmektedir, bu sayede geri kalan kısımlar için genel bir formül verilebilmektedir. Bu bağlamda, (A.12) eşitliğinden faydalanılarak bu katsayı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\chi_1^{(3)} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}, \chi_2^{(3)} = 2\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}; c = \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2}.$$

Benzer şekilde (A.10) son iki rasyonel kesrinin paydasında bulunan $(\gamma + \alpha)^2$ ifadesindeki α'nın katsayısı olan 1 (A.12) eşitliği ile aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\chi_1^{(4)} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \chi_2^{(4)} = 2\sin^2\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 2,$$

$$\chi_3^{(4)} = 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1, c = \min\{1,2,1\} = 1.$$

(A.10) son dört rasyonel kesrinin paydasında bulunan $\left(\gamma + \frac{a\alpha}{2}\right)$ ve $\left(\gamma + \frac{b\alpha}{2}\right)$ ifadelerinki α'nın katsayısıları $\frac{a}{2} = \frac{(5-\sqrt{5})}{4}$ ve $\frac{b}{2} = \frac{(5+\sqrt{5})}{4}$, (A.12) eşitliği ile aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\chi_1^{(5)} = \chi_4^{(5)} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{4}, \chi_2^{(5)} = \chi_2^{(5)} = \frac{5+\sqrt{5}}{4}.$$

Not A.2. Yapılan hesaplamalarda n. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü ve kendisi için bulunan formül n. derece tek değerler aldığında ve çift değerler aldığında farklılık göstermektedir. Öncelikle, Laplace dönüşümü için genel formüller aşağıdaki gibidir:

(A.12) eşitliğinin yardımıyla Erlang dağılımının derecesi olan n tek değerler aldığında yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü için kesin ifade aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{(n)}(\gamma) = \frac{n+1}{2n\gamma} + \frac{\alpha}{n\gamma^2} + \sum_{m=1}^{r} \frac{\gamma + 2\alpha}{n(\gamma^2 + A_{nm}\alpha\gamma + A_{nm}\alpha^2)}. \qquad (A.13)$$

Burada, $\sum_{m=1}^{r} A_{nm} = n$; $A_{nm} = 4\sin^2\left(\frac{\pi m}{n}\right), m = 1,2,\ldots,r$ ve $r = (n-1)/2$'dir.

(A.12) eşitliğinin yardımıyla Erlang dağılımının derecesi olan n çift değerler aldığında yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü için kesin ifade aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{(n)}(\gamma) = \frac{n+1}{2n\gamma} + \frac{1}{2n(\gamma + 2\alpha)} + \frac{\alpha}{n\gamma^2} + \sum_{m=1}^{r} \frac{\gamma + 2\alpha}{n(\gamma^2 + A_{nm}\alpha\gamma + A_{nm}\alpha^2)}. \quad (A.14)$$

Burada, $\sum_{m=1}^{r} A_{nm} = n - 2$; $A_{nm} = 4\sin^2\left(\frac{\pi m}{n}\right), m = 1,2,\ldots,r$ ve $r = (n-1)/2$'dir.

(A.13) ve (A.14) eşitliklerinin ters Laplace dönüşümleri alındığı takdirde n. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonu elde edilebilir. Bu takdirde, Erlang dağılımının derecesi olan n tek değerler aldığında yenileme fonksiyonunun kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U_{(n)}(t) = \frac{\alpha t}{n} + \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r} e^{-A_{nm}\alpha t/2}\left[\cos(\omega_{nm}\alpha t) + Q_{nm}\sin(\omega_{nm}\alpha t)\right]. \qquad (A.15)$$

Burada, $Q_{nm} = (4 - A_{nm})/2\omega_{nm}$; $\omega_{nm} = A_{nm}\sqrt{(1/A_{nm}) - (1/4)}$; $\sum_{m=1}^{r} A_{nm} = n$; $A_{nm} = 4\sin^2\left(\frac{\pi m}{n}\right), m = 1,2,\ldots,r$ ve $r = (n-1)/2$'dir.

Erlang dağılımının derecesi olan n çift değerler aldığında yenileme fonksiyonunun kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U_{(n)}(t) = \frac{\alpha t}{n} + \frac{n+1}{2n} + \frac{e^{-2\alpha t}}{2n} +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r} e^{-A_{nm}\alpha t/2}\left[\cos(\omega_{nm}\alpha t) + Q_{nm}\sin(\omega_{nm}\alpha t)\right]. \qquad (A.16)$$

Burada, $Q_{nm} = (4 - A_{nm})/2\omega_{nm}$; $\omega_{nm} = A_{nm}\sqrt{(1/A_{nm}) - (1/4)}$; $\sum_{m=1}^{r} A_{nm} = n - 2$; $A_{nm} = 4\sin^2\left(\frac{\pi m}{n}\right), m = 1,2,\ldots,r$ ve $r = (n-1)/2$'dir.

İlk 5. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonları yukarıda elde edilmiştir. Bu aşamada, (A.15) ve (A.16) eşitliklerinde kesin ifadeler yardımıyla 10. dereceye kadar α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonları elde edilmiştir. (A.16) eşitliği kullanılarak hesaplanan 6. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenin oluşturduğu yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$U_{(6)}(t) = \frac{\alpha t}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{12}e^{-2\alpha t} + \frac{1}{6}e^{-\mathrm{A}_{61}\alpha t/2}[\cos(\omega_{61}\alpha t) + Q_{61}\sin(\omega_{61}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{6}e^{-\mathrm{A}_{62}\alpha t/2}[\cos(\omega_{62}\alpha t) + Q_{62}\sin(\omega_{62}\alpha t)].$$

Burada $Q_{6m} = (4 - A_{6m})/2\omega_{6m}$; $\omega_{6m} = A_{6m}\sqrt{(1/A_{6m}) - (1/4)}, m = 1,2$’dir. Ayrıca, $A_{61} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$; $A_{62} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$ ve $\mathrm{A}_{61} + \mathrm{A}_{62} = 4$’tür.

(A.15) eşitliği kullanılarak hesaplanan 7. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenin oluşturduğu yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$U_{(7)}(t) = \frac{\alpha t}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7}e^{-\mathrm{A}_{71}\alpha t/2}[\cos(\omega_{71}\alpha t) + Q_{71}\sin(\omega_{71}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{7}e^{-\mathrm{A}_{72}\alpha t/2}[\cos(\omega_{72}\alpha t) + Q_{72}\sin(\omega_{72}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{7}e^{-\mathrm{A}_{73}\alpha t/2}[\cos(\omega_{73}\alpha t) + Q_{73}\sin(\omega_{73}\alpha t)].$$

Burada $Q_{7m} = (4 - A_{7m})/2\omega_{7m}$; $\omega_{7m} = A_{7m}\sqrt{(1/A_{7m}) - (1/4)}, m = 1,2,3$’tür. Ayrıca, $A_{71} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \approx 0.753$; $A_{72} = 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \approx 2.445$; $A_{73} = 4\sin^2\left(\frac{3\pi}{7}\right) \approx 3.802$ ve $A_{71} + A_{72} + A_{73} = 7$’dir.

(A.16) eşitliği kullanılarak hesaplanan 8. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenin oluşturduğu yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$U_{(8)}(t) = \frac{\alpha t}{8} + \frac{9}{16} + \frac{e^{-2\alpha t}}{16} + \frac{1}{8}e^{-\mathrm{A}_{81}\alpha t/2}[\cos(\omega_{81}\alpha t) + Q_{81}\sin(\omega_{81}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{8}e^{-\mathrm{A}_{82}\alpha t/2}[\cos(\omega_{82}\alpha t) + Q_{82}\sin(\omega_{82}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{8}e^{-\mathrm{A}_{83}\alpha t/2}[\cos(\omega_{83}\alpha t) + Q_{83}\sin(\omega_{83}\alpha t)].$$

Burada $Q_{8m} = (4 - A_{8m})/2\omega_{8m}$; $\omega_{8m} = A_{8m}\sqrt{(1/A_{8m}) - (1/4)}, m = 1,2,3$'tür. Ayrıca, $A_{81} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0.586$; $A_{82} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$; $A_{83} = 4\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) \approx 3.414$ ve $\mathrm{A}_{81} + \mathrm{A}_{82} + \mathrm{A}_{83} = 6$'dir.

(A.15) eşitliği kullanılarak hesaplanan 9. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenin oluşturduğu yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$U_{(9)}(t) = \frac{\alpha t}{9} + \frac{5}{9} + \frac{1}{9}e^{-\mathrm{A}_{91}\alpha t/2}[\cos(\omega_{91}\alpha t) + Q_{91}\sin(\omega_{91}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{9}e^{-\mathrm{A}_{92}\alpha t/2}[\cos(\omega_{92}\alpha t) + Q_{92}\sin(\omega_{92}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{9}e^{-\mathrm{A}_{93}\alpha t/2}[\cos(\omega_{93}\alpha t) + Q_{93}\sin(\omega_{93}\alpha t)] +$$

$$+\frac{1}{9}e^{-\mathrm{A}_{94}\alpha t/2}[\cos(\omega_{94}\alpha t) + Q_{94}\sin(\omega_{94}\alpha t)].$$

Burada $Q_{9m} = (4 - A_{9m})/2\omega_{9m}$; $\omega_{9m} = A_{9m}\sqrt{(1/A_{9m}) - (1/4)}, m = 1,2,3,4$'tür. Ayrıca, $A_{91} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx 0.468$; $A_{92} \approx 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 1.653$; $A_{93} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$; $A_{94} = 4\sin^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 3.879$ ve $\mathrm{A}_{91} + \mathrm{A}_{92} + \mathrm{A}_{93} + \mathrm{A}_{94} = 9$'dur.

(A.16) eşitliği kullanılarak hesaplanan 10. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenin oluşturduğu yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$U_{(10)}(t) = \frac{\alpha t}{10} + \frac{11}{20} + \frac{e^{-2\alpha t}}{20} + \frac{1}{10}e^{-\mathrm{A}_{10,1}\alpha t/2}\left[\cos\left(\omega_{10,1}\alpha t\right) + Q_{10,1}\sin\left(\omega_{10,1}\alpha t\right)\right]$$

$$+\frac{1}{10}e^{-\mathrm{A}_{10,2}\alpha t/2}\left[\cos\left(\omega_{10,2}\alpha t\right) + Q_{10,2}\sin\left(\omega_{10,2}\alpha t\right)\right]$$

$$+\frac{1}{10}e^{-\mathrm{A}_{10,3}\alpha t/2}\left[\cos\left(\omega_{10,3}\alpha t\right) + Q_{10,3}\sin\left(\omega_{10,3}\alpha t\right)\right]$$

$$+\frac{1}{10}e^{-\mathrm{A}_{10,4}\alpha t/2}\left[\cos\left(\omega_{10,4}\alpha t\right) + Q_{10,4}\sin\left(\omega_{10,4}\alpha t\right)\right].$$

Burada $Q_{10,m} = \left(4 - A_{10,m}\right)/2\omega_{10,m}$; $\omega_{10,m} = A_{10,m}\sqrt{\left(1/A_{10,m}\right) - (1/4)}, m = 1,2,3,4$'tür. Ayrıca, $A_{10,1} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 0.382$; $A_{10,2} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 1.382$;

$A_{10,3} = 4\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 2.618$; $A_{10,4} = 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 3.618$ ve $\mathrm{A}_{10,1} + \mathrm{A}_{10,2} + \mathrm{A}_{10,3} + \mathrm{A}_{10,4} = 8$'dir.

Yenileme sürecinin varyansı için kesin ifade elde edebilmek için kullanılacak olan Laplace dönüşümü (A.4) eşitliğinde bulunmaktadır. (A.4) eşitliği kullanılarak 3. dereceye kadar α parametreli Erlang dağılımına kadar $N(t)$ sürecinin ikinci momenti için kesin ifadeler elde edilmiştir.

Bu takdirde, (A.4) eşitliğinden faydalanıldığında 1. dereceden α parametreli Erlang dağılımına (Üstel(α)) sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momentinin Laplace dönüşümü $\widetilde{U}_{2(1)}(\gamma)$ aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{2(1)}(\gamma) = \frac{1 + F^*(\gamma)}{\gamma\big(1 - F^*(\gamma)\big)^2} = \frac{1 + \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}}{\gamma\left\{1 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right\}^2} = \frac{2\alpha^2}{\gamma^3} + \frac{3\alpha}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}. \qquad (A.17)$$

Burada, $\widetilde{\mathrm{U}}_{2(1)}(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} U_{(1)}(t)dt$, $\mathrm{F}^*(\gamma) \equiv E(e^{-\gamma X_1}) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} dF(t)$'dir. Ayrıca, $U_{(1)}(t)$ 1. dereceden α parametreli Erlang dağılımına (Üstel(α)) sahip rasgele değişkenin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur.

(A.17) eşitliğine λ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{2(1)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{2(1)}(t) = \alpha^2 t^2 + 3\alpha t + 1. \qquad (A.18)$$

Burada, $U_{2(1)}(t)$ 1. dereceden α parametreli Erlang dağılımına (Üstel(α)) sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momentidir.

(A.4) eşitliğinden faydalanıldığında 2. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momentinin Laplace dönüşümü $\widetilde{U}_{2(2)}(\gamma)$ aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{2(2)}(\gamma) = \frac{1 + F^*(\gamma)}{\lambda\big(1 - F^*(\gamma)\big)^2} = \frac{1 + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^2}{\gamma\left\{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^2\right\}^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2\gamma^3} + \frac{\alpha}{\gamma^2} + \frac{5}{8\gamma} + \frac{3}{8(2\alpha+\gamma)} - \frac{\alpha}{4(2\alpha+\gamma)^2}. \qquad (A.19)$$

(A.19) eşitliğine γ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{2(2)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{2(2)}(t)=\frac{\alpha^2t^2}{4}+\alpha t+\frac{5}{8}+\frac{3}{8}e^{-2\alpha t}-\frac{1}{4}\alpha t e^{-2\alpha t}. \qquad (A.20)$$

Burada, $U_{2(2)}(t)$ 2. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momentidir.

(A.4) eşitliğinden faydalanıldığında 3. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momentinin Laplace dönüşümü $\widetilde{U}_{2(3)}(\gamma)$ aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_{2(3)}(\gamma)=\frac{1+F^*(\gamma)}{\gamma\big(1-F^*(\gamma)\big)^2}=\frac{1+\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^3}{\gamma\left\{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^3\right\}^2}=$$

$$=\frac{2\alpha^2}{9\gamma^3}+\frac{5\alpha}{9\gamma^2}+\frac{14}{27\gamma}+\frac{24\alpha+13\gamma}{27(3\alpha^2+3\alpha\gamma+\gamma^2)}-\frac{6\alpha^3+4\alpha^2\gamma}{9(3\alpha^2+3\alpha\gamma+\gamma^2)^2}. \quad (A.21)$$

(A.21) eşitliğine γ parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_{2(3)}(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{2(3)}(t)=\frac{\alpha^2t^2}{9}+\frac{5\alpha t}{9}+\frac{14}{27}-\frac{4\sqrt{3}}{27}\alpha t e^{-3\alpha t/2}\sin\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big)+$$

$$+\frac{1}{27}e^{-3\alpha t/2}\big[3\sqrt{3}\sin\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big)+13\cos\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big)\big]. \qquad (A.22)$$

Burada, $U_{2(3)}(t)$ 3. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momentidir.

(A.18), (A.20) ve (A.22) eşitlikleri yardımıyla 3. dereceye α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerden oluşan yenileme sürecinin varyansı için kesin ifadeler aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$Var_{(1)}\big(N(t)\big)\equiv E\left(N_{(1)}^2(t)\right)-\left\{E\left(N_{(1)}(t)\right)\right\}^2=U_{2(1)}(t)-\left\{U_{(1)}(t)\right\}^2=$$

$$=\alpha^2t^2+3\alpha t+1-\{\alpha t+1\}^2=\alpha^2t^2+3\alpha t+1-\alpha^2t^2-2\alpha t-1=$$

$$Var_{(1)}\big(N(t)\big)=\alpha t.$$

Burada, $E\left(N_{(1)}^2(t)\right) \equiv U_{2(1)}(t)$ 1. dereceden α parametreli Erlang dağılımına (Üstel(α)) sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momenti, $E\left(N_{(1)}(t)\right) \equiv U_{(1)}(t)$ ise yenileme fonksiyonudur.

$$Var_{(2)}\big(N(t)\big) \equiv E\left(N_{(2)}^2(t)\right) - \left\{E\left(N_{(2)}(t)\right)\right\}^2 = U_{2(2)}(t) - \left\{U_{(2)}(t)\right\}^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2 t^2}{4} + \alpha t + \frac{5}{8} + \frac{3}{8}e^{-2\alpha t} - \frac{1}{4}\alpha t e^{-2\alpha t} - \left\{\frac{\alpha t}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\alpha t}\right\}^2$$

$$= \frac{\alpha^2 t^2}{4} + \alpha t + \frac{5}{8} + \frac{3}{8}e^{-2\alpha t} - \frac{1}{4}\alpha t e^{-2\alpha t} -$$

$$- \frac{\alpha^2 t^2}{4} - \frac{3\alpha t}{4} - \frac{9}{16} - \frac{3}{8}e^{-2\alpha t} - \frac{1}{16}e^{-4\alpha t} - \frac{1}{4}\alpha t e^{-2\alpha t}$$

$$Var_{(2)}\big(N(t)\big) = \frac{\alpha t}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}e^{-4\alpha t} - \frac{1}{2}\alpha t e^{-2\alpha t}.$$

Burada, $E\left(N_{(2)}^2(t)\right) \equiv U_{2(2)}(t)$ 2. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momenti, $E\left(N_{(2)}(t)\right) \equiv U_{(2)}(t)$ ise yenileme fonksiyonudur.

$$Var_{(3)}\big(N(t)\big) \equiv E\left(N_{(3)}^2(t)\right) - \left\{E\left(N_{(3)}(t)\right)\right\}^2 = U_{2(3)}(t) - \left\{U_{(3)}(t)\right\}^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2 t^2}{9} + \frac{5\alpha t}{9} + \frac{14}{27} - \frac{4\sqrt{3}}{27}\alpha t e^{-3\alpha t/2}\sin\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big) +$$

$$+ \frac{1}{27}e^{-3\alpha t/2}\left[3\sqrt{3}\sin\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big) + 13\cos\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big)\right] -$$

$$- \left\{\frac{\alpha t}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)\right]\right\}^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2 t^2}{9} + \frac{5\alpha t}{9} + \frac{14}{27} - \frac{4\sqrt{3}}{27}\alpha t e^{-3\alpha t/2}\sin\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big) +$$

$$+ \frac{1}{27}e^{-3\alpha t/2}\left[3\sqrt{3}\sin\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big) + 13\cos\big(\sqrt{3}\alpha t/2\big)\right] -$$

$$- \frac{\alpha^2 t^2}{9} - \frac{4\alpha t}{9} - \frac{4}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{27}\alpha t e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right) -$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{27}e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{27}e^{-3\alpha t}\sin(\sqrt{3}\alpha t)-$$

$$-\frac{2}{9}\alpha t\, e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)-\frac{4}{9}e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{27}e^{-3\alpha t}\cos(\sqrt{3}\alpha t)-\frac{2}{27}e^{-3\alpha t}$$

$$Var_{(3)}(N(t))=\frac{\alpha t}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{27}e^{-3\alpha t}-\frac{\sqrt{3}}{27}e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)[6\alpha t+1]-$$

$$-\frac{1}{27}e^{-\frac{3\alpha t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)[6\alpha t-1]-$$

$$-\frac{1}{27}e^{-3\alpha t}\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)+\cos\left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2}\right)\right].$$

Burada, $E\left(N_{(3)}^2(t)\right)\equiv U_{2(3)}(t)$ 3. dereceden α parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerle oluşturulan yenileme sürecinin ikinci momenti, $E\left(N_{(3)}(t)\right)\equiv U_{(3)}(t)$ ise yenileme fonksiyonudur.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad	**: Özlem Sevinç (Ardıç)**
Uyruğu	**: T.C.**
Doğum Tarihi ve Yeri	**: 01.12.1987, Trabzon**
E-posta	**: ardicozlem@gmail.com**

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü
- **Yüksek lisans** : 2014, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011 - 2014	TOBB Ekonomi Teknoloji Üniversitesi	Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2014 - 2016	TOBB Ekonomi Teknoloji Üniversitesi	Burslu Doktora Öğrencisi
2016 - 2017	Türkiye İstatistik Kurumu	Uzman Yardımcısı
2017 -	Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası	Uzman Yardımcısı

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Ardic Sevinc, O.,** Khaniyev, T., 2018. On the General Formula of Renewal Function of Erlang Distribution, 11. International Statistics Days Conference, 3-7 October, Bodrum, Turkey.

- **Ardic Sevinc, O.**, Khaniyev, T., 2019. Limiting Form for the Ergodic Distribution of a Semi-Markovian Random Walk With General Interference of Chance, The 18th Conference of the Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society, 11-14 June, Florance, Italy.

- Khaniyev, T., **Ardic Sevinc, O.**, 2019. Genel Müdahaleli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin Durağan Karakteristiklerinin Asimtotik Davranışı Üzerine, 39. Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği Ulusal Kongresi (YAEM), 12-14 Haziran, Ankara, Türkiye.

- **Ardic Sevinc, O.**, Khaniyev, T., 2019. Asymptotic Results for Stationary Characteristics of Random Walk with a General Interference of Chance, 11. International Statistics Congress, 4-8 October, Bodrum, Turkey.

- Khaniyev, T., **Ardic Sevinc, O.**, 2020. Limit Theorem for a Semi-Markovian Random Walk With General Interference of Chance, *Sains Malaysiana*, 49(4), 919-928.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Khaniyev, T., Fattahpour Marandi, A.A., Unver, I., **Ardic O.,** 2013. Asymptotic Approach to Boundary Functionals of a Semi-Markovian Random Walk with Generalized Delaying Barrier, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science (TJMCS),* DOI: 20130014.

- Khaniyev, T., **Ardic, O.,** Gever, B., 2013. Stokastik Talep Altında, Düşük Kalite ve Geç Teslime İzin Verilen Durumda Optimal Envanter Modeli, Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 33. Ulusal Kongresi (Uluslararası IEE Konferansı), 26-28 Haziran, İstanbul, Türkiye.

- **Ardic, O.**, Gever, B., Khaniyev, T., 2013. Asymptotic Results for a Semi-Markovian Inventory Model of Type (s, S) with General Interference of Chance, 26th European Conference on Operational Research, 1-4 July, Roma, Italy.

- Khaniyev, T., **Ardic, O.,** Aliyev, R., 2014. Asymptotic results for a renewal-reward process with a general interference of chance, 9. IGS 2014, 10-14 May, Side, Turkey.

- **Ardic, O.,** Khaniyev, T., Aliyev, R., 2015. Asymptotic results for renewal-reward process with general interference of chance, 18th INFORMS Applied Probability Society Conference, 5-8 July İstanbul, Turkey.

- Khaniyev, T., **Ardic, O.,** Aliyev, R., 2015. Genel müdahaleli ödüllü yenileme süreci için zayıf yakınsama teoremi, YAEM 2015, 9-11 Eylül, Ankara, Türkiye.

- Aliyev, R., **Ardic, O.,** Khaniyev, T., 2016. Asymptotic Approach for a Renewal-Reward Process with a General Interference of Chance, *Communication in*

Statistics-Theory and Methods, 45(14), 4237-4248.

- Ceritoğlu, E., **Ardic Sevinc O.,** 2019. Identification of Wealthy Households from the Residential Property Price Index Database for Sample Selection for Household Surveys, 11. International Statistics Congress, 4-8 October, Bodrum, Turkey.

- Ceritoğlu, E., **Ardic Sevinc O.,** 2020. Identification of Wealthy Households from the Residential Property Price Index Database for Sample Selection for Household Surveys, CBRT Working Paper (Accepted).