TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAYNAK SEÇME OYUNLARINDA SOSYAL YAPILAŞMALAR ALTINDA DENGE HESAPLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatih Erdem KIZILKAYA

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Buğra ÇAŞKURLU

ARALIK 2020

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

………………………………

Prof. Dr. Osman EROĞUL

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksininlerini sağladığını onaylarım.

………………………………

Prof. Dr. Oğuz ERGİN

Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 171111139 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Fatih Erdem KIZILKAYA**'nın ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"KAYNAK SEÇME OYUNLARINDA SOSYAL YAPILAŞMALAR ALTINDA DENGE HESAPLAMASI"** başlıklı tezi **23.12.2020** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Dr. Öğr. Üyesi Buğra ÇAŞKURLU** ....
TOBB Ekonomive Teknoloji Üniversitesi

Eş Danışman : **Dr. Öğr. Üyesi Özgün EKİCİ** ....
Özyeğin Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. İsmail SAĞLAM (Başkan)** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Kemal YILDIZ ....
İhsan Doğramacı Bilkent Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Fatih Erdem Kızılkaya

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KAYNAK SEÇME OYUNLARINDA
SOSYAL YAPILAŞMALAR ALTINDA
DENGE HESAPLAMASI

Fatih Erdem Kızılkaya

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniveritesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Buğra Çaşkurlu

Tarih: Aralık 2020

Oyun kuramında, çözümlemeler için denge konseptleri büyük önem taşımaktadır. Oyun kuramının bir dalı olan koalisyonel oyun kuramı oyuncuların aralarında koalisyonlar kurabildiği varsayımı altında tanımlanan denge konseptlerini kullanır. Stratejik formda bir oyunda, kurulu olan hiçbir koalisyonun stratejilerini ortaklaşa değiştirerek "refahını" artıramadığı strateji profillerine (koalisyonel) denge denir. Daha zayıf veya güçlü denge konseptleri koalisyonların formasyonu üzerine yapılan çeşitli sınırlamalarla tanımlanabilir. Örneğin, bir Nash dengesinde, sadece tek bir oyuncudan oluşan koalisyonların kurulduğu varsayılmaktadır. Diğer zıt duruma karşılık gelen güçlü Nash dengesinde ise her koalisyonun (yani oyuncuların boş olmayan her alt kümesinin) kurulduğu kabul edilmektedir. Ancak, her koalisyonun kurulduğu varsayımı çalışmaya değer çoğu oyun için fazla zorlayıcıdır ve dolayısıyla çoğu oyunda güçlü Nash dengesi yoktur. Öte yandan, bir partisyon dengesinde, koalisyon formasyonu oyuncuların partisyonları ile sınırlanmaktadır. Bunun güçlü Nash dengesine göre çok daha az zorlayıcı olduğuna dikkat ediniz (zira bir partisyon dengesinde kurulu koalisyon sayısı $\Theta(n)$ iken güçlü Nash dengesinde $2^n - 1$'dir). Örneğin, bir partisyon dengesi kaynak seçme oyunlarında her zaman varken, bir güçlü Nash dengesi bu oyunların çok basit durumlarında bile yoktur.

Koalisyon formasyonu üzerine daha sofistike sınırlamalar iletişime, kordinasyona ve kurumlaşmaya bağlı kısıtlar ile motive edilebilir. Bu tezde, genelgeçer sosyal yapılaşmalardan ilhamla koalisyon formasyonu üzerine çeşitli sınırlamalar ve bu esasla tanımlanmış çeşitli denge konseptleri tanıtıyoruz. Bu denge konseptlerini kaynak seçme oyunlarında çalışıyoruz ve bu oyunların hem genelinde hem de önemli özel durumlarında varlık garantisinin olup olmadığını her denge konsepti için eksiksiz bir şekilde gösteriyoruz. Ayrıca varlık garantisi olan durumlarda dengeyi bulmak için verimli algoritmalar sunuyoruz.

Anahtar Kelimeler: Algoritmik oyun kuramı, Koalisyonel denge konseptleri, Partisyon dengesi, Kaynak seçme oyunları

ABSTRACT

Master of Science

COMPUTATION OF EQUILIBRIA FOR COALITION STRUCTURES ARISING FROM SOCIAL CONTEXTS IN RESOURCE SELECTION GAMES

Fatih Erdem Kızılkaya

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Departmenet of Computer Engineering

Supervisor: Asst. Prof. Buğra Çaşkurlu

Date: December 2020

In game theory, the centerpiece of analysis is the notion of equilibrium. A branch of game theory (called coalitional game theory) uses equilibrium notions that are defined under the assumption that agents can form coalitions between themselves. In a strategic form game, a strategy profile is a (coalitional) equilibrium if no viable coalition of agents benefits from jointly changing their strategies. Weaker or stronger equilibrium notions can be defined by considering various restrictions on formation of coalitions. In a Nash equilibrium, for instance, the assumption is that viable coalitions are simply singletons. In a strong Nash equilibrium, which lies at the other extreme, every possible coalition (i.e., every non-empty subset of agents) is viable. However, deeming every coalition viable is too demanding for most games that are worth to study; and hence, a strong Nash equilibrium rarely exists in those games. On the other hand, in a partition equilibrium, viable coaliations are restricted to partitions of agents, which is much less demanding then strong Nash equilibrium (since notice that the number of viable coalitions is $\Theta(n)$ in the case of a partition equilibrium, and it is $2^n - 1$ in the case of a strong Nash equilibrium). For example, a partition equilibrium always exists in resource selection games, whereas a strong Nash equilibrium does not exist even in most simple instances of these games.

More sophisticated restrictions on coalition formation can be justified by communicational, coordinational or institutional constraints. In this thesis, inspired by social structures in various real-life scenarios, we introduce certain restrictions on coalition formation, and on their basis, we introduce various equilibrium notions. We study our equilibrium notions also in resource selection games, and we present a complete set of existence and nonexistence results for general reseource selection games and their important special cases. We also provide efficient algorithms to compute an equilibrium for the cases where one exists.

Keywords: Algorithmic game theory, Coalitional equilibrium concepts, Partition equilibrium, Resource selection games

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Buğra Çaşkurlu ve Dr. Öğr. Üyesi Özgün Ekici'ye, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine, eğitimim boyunca bana burs veren TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Yapılan çalışmalar, 118E126 no'lu TÜBİTAK projesi kapsamında desteklenmiş olup, desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa
ÖZET ... **iv**
ABSTRACT ... **vi**
TEŞEKKÜR ... **viii**
İÇİNDEKİLER ... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ... **x**
ÇİZELGE LİSTESİ ... **xi**
KISALTMALAR ... **xii**
1. GİRİŞ ... **1**
1.1 Stratejik Formda Oyunlar ... 1
1.2 Çözüm Konseptleri ... 2
1.3 Sosyal Koalisyon Yapıları ... 4
1.4 İlgili Çalışmalar ... 7
1.5 Tezin Katkıları ve Organizasyonu ... 8
2. KOALİSYON YAPILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER ... **11**
3. KAYNAK SEÇME OYUNLARI ... **15**
3.1 Denge için Yeterli Şartlar ... 16
3.2 Dengenin Verimli Hesaplanabilirliği ... 18
4. DENGE VARLIK GARANTİLERİ VE VERİMLİ ALGORİTMALAR ... **21**
4.1 Genel Durum ... 21
4.2 İki Kaynaklı Özel Durum ... 25
4.2.1 Fit kümeler ile denge hesabı ... 26
4.2.2 Laminar koalisyon yapıları için fit küme hesabı ... 28
4.2.3 Doğrusal koalisyon yapıları için fit küme hesabı ... 29
4.3 Eşdeğer Kaynaklı Özel Durum ... 32
4.4 İki Eşdeğer Kaynaklı Özel Durum ... 34
5. SONUÇ VE ÖNERİLER ... **37**
KAYNAKLAR ... **39**
ÖZGEÇMİŞ ... **43**

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

Şekil 1.1 : Partisyon koalisyon yapısı örneği ... 5
Şekil 1.2 : Laminar koalisyon yapısı örneği ... 5
Şekil 1.3 : Doğrusal koalisyon yapısı örneği ... 6
Şekil 1.4 : Merkezi koalisyon yapısı örneği ... 7
Şekil 4.1 : Fit küme olmayan doğrusal koalisyon yapısı örneği ... 29
Şekil 4.2 : C-stabil bir atamanın olmadığı C merkezi koalisyon yapısı ... 34

ÇİZELGE LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

Çizelge 1.1 : Varlık garantileri... 10

KISALTMALAR

KSO **:** Kaynak Seçme Oyunu

1. GİRİŞ

Oyun kuramı, farklı amaçları olan insanların birbirleriyle olan etkileşimlerini incelemek amacıyla 20. yüzyılda ortaya çıkmış matematiksel bir disiplindir. Ekonomi [1], sosyoloji [2], psikoloji [3], davranışsal biyoloji [4] gibi akıllı varlıkların etkileşimini konu edinen birçok disiplinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Oyun kuramının bilgisayar biliminde kullanımı; internetin ortaya çıkmasından önce, bazı yapay zeka uygulamaları [5] ile sınırlıydı, çünkü yazılım sistemleri tek bir kişi veya kurum tarafından yürütülmekteydi. İnternetin yaygınlaşmasından sonra ise ağ problemlerine geliştirilen merkezi çözümlerin [6, 7] gerçek hayat uygulamaları ile olan ilişkisi azaldı. Bu durumun araştırmacıları stratejik davranışlara duyarlı algoritmalar [8, 9] geliştirmeye itmesiyle, "algoritmik oyun kuramı" [10-12] adında yeni bir disiplinin ortaya çıkmıştır.

Son yıllarda çok etmenli sistemlerde [13, 14] baş döndürücü gelişmeler olması, çevrimiçi açık arttırmaların hayatın olağan bir parçası haline gelmesi, arama motoru ve sosyal ağlardaki sponsorlu reklamların milyarlarca liralık bütçelere ulaşması, ve kripto para birimlerinin konuşulur olmasından dolayı, bilgisayar sistemleri oyun kuramının en önemli uygulama alanı haline gelmiştir. Böylece oyun kuramına dair konular teorik bilgisayar biliminde yaygınlıkla çalışılmaya başlamıştır.

Tezin katkılarını ayrıntılı bir şekilde sunabilmek için gerekli formal tanımlar ve literatürdeki ilgili çalışmalar ilerleyen alt başlıklarda sırasıyla tartışılmaktadır.

1.1 Stratejik Formda Oyunlar

Stratejik formda bir oyun aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $\langle N, S, U \rangle$ üçlüsünden meydana gelir:

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ sonlu bir oyuncu kümesidir.
- $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ bir strateji uzayıdır.
- $u : S \to \mathbb{R}^n$ bir fayda fonksiyonudur.

Açmak gerekirse, her $i \in N$ oyuncusunun bir *strateji kümesi* S_i vardır. Oyunu oynamak için her i oyuncusu bir strateji $s_i \in S_i$ seçer. Her oyuncunun seçtiği stratejilerden oluşan $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ profiline bir *strateji profili* denir. S strateji uzayının mümkün olan her strateji profilinin kümesine denk geldiğine dikkat ediniz. u fayda fonksiyonu ise her $s \in S$ strateji profili için (oynandığı takdirde) her $i \in N$ oyuncusunun alacağı faydayı ifade eder. Bu değeri $u_i(s)$ ile gösteriyoruz.

Bu tanıma göre i oyuncusunun oyunun sonucunda (yani bir strateji profilinde) aldığı faydanın sadece kendi seçtiği stratejiye değil, aynı zamanda diğer oyuncuların seçtikleri stratejilere de bağlı olduğuna dikkat ediniz. Her oyuncunun kendi faydasını ençoklamak istediği varsayımı altında, bu basit tanım oyuncuların yaptıkları tercihler ile birbirlerini etkilediği stratejik senaryoları modeller. Oyun kuramının temelini oluşturan bu modele literatürde normal formda oyunlar da denmektedir.

1.2 Çözüm Konseptleri

Yukarıda verilen oyun tanımı hakkında biraz düşünecek olursak, üzerine sayısız çalışmaların yapıldığı şu temel problem akla gelecektir: Eğer her oyuncu "rasyonel" tercihler yapıyorsa, bir oyunun sonucunun ne olacağını bilebilir miyiz? Bu problemi yanıtlayabilmek için öncelikle rasyonalitenin biçimsel bir ifadesine ihtiyacımız olduğu ortadadır. Oyun kuramında bu tür ifadelere çözüm konsepti denmekte olup, gerçek hayattan esinlenerek ortaya atılmış sayısız çözüm konsepti mevcuttur.

İleri bölümlerde daha ayrıntılı tartışacağımız Nash dengesi, mesela en yaygın kullanılan çözüm konseptlerinden biri olup, birçok farklı disiplinde genelgeçerliğe nail olmuştur. Algoritmik oyun kuramının bu konuda ortaya attığı önemli fikirlerden biri, oyuncuların da en nihayetinde hesaplama gücünün sınırlı olduğu ve bu hususa çözüm konseptlerinin incelenmesinde yer verilmesi gerektiğidir.

Oyuncuların hesaplama gücünün yanı sıra denge konseptlerinin tasarımı ve analizinde dikkate alınan daha birçok ölçüt literatürde yer almaktadır. Bu tezde odaklanacağımız ana ölçüt ise oyuncuların birbirleri ile olan koordinasyon gücüdür. Zira bir grup oyuncu alacakları stratejilere ortaklaşa karar verebildikleri koalisyonlar oluşturma yetisine sahip ise bunu avantajlarına kullanabilirler. Bu konsept en basit haliyle aşağıdaki şekilde formalize edilebilir.

Oyuncular kümesinin boş olmayan her alt kümesini birer *koalisyon* olarak atfediyoruz. Örneğin, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise $c = \{2, 3, 5\}$ var olabilecek koalisyonlardan biridir. Herhangi bir $c \subseteq N$ koalisyonu için, $S_c = \times_{i \in c} S_i$ uzayına c'nin *sapma uzayı* ve bu uzaydaki her elemana c'nin bir *sapması* diyoruz. Bir $s \in S$ strateji profili için, $i \in N$ oyuncusunun seçtiği stratejiyi s_i ile gösterdiğimiz gibi, $c \subseteq N$ koalisyonunun seçtikleri stratejilerin tümünü $s_c = (s_i)_{i \in c}$ dizisi ile gösteriyoruz ($s_c \in S_c$ olduğuna dikkat ediniz). Ayrıca bazen bir s strateji profilini belirtirken, c koalisyonunun seçtikleri stratejiler ile diğer oyuncuların seçtikleri stratejileri ayırt edebilmek için $s = \left(s_c, s_{N \setminus c}\right)$ şeklinde yazıyoruz.

Eğer bir $c \subseteq N$ koalisyonu, bir $s \in S$ strateji profili oynandığı takdirde, stratejilerini ortaklaşa değiştirerek "refahını" artırabiliyorsa, c koalisyonu s strateji profilini *bloklar* diyoruz. (Zira c koalisyonu var olduğu takdirde oyunun s strateji profili ile sonuçlanmasına engel olacaktır.) Bir koalisyonun refahının artması ile kastedilen literatürde çeşitlilik gösterse de en yaygın üç tanım aşağıdaki gibidir:

- **Toplam Refah Artışı:** Bir $c \subseteq N$ koalisyonunun bir $s \in S$ strateji profilini bloklaması için, c koalisyonunun öyle bir sapması $s'_c \in S_c$ olmalı ki $\sum_{i \in c} u_i\left(s'_c, s_{N \setminus c}\right) > \sum_{i \in c} u_i(s)$ olsun. Diğer bir deyişle, c'deki oyuncuların toplam faydası s'_c sapmasını aldıktan sonra artmalıdır. Bu tanım sadece faydanın transfer edilebildiği (para gibi) senaryolarda kullanılır.

- **Güçlü Refah Artışı:** Bir $c \subseteq N$ koalisyonunun bir $s \in S$ strateji profilini bloklaması için, c koalisyonunun öyle bir sapması $s'_c \in S_c$ olmalı ki her $i \in c$ oyuncusu için $u_i\left(s'_c, s_{N \setminus c}\right) > u_i(s)$ olsun. Diğer bir deyişle, c'deki her oyuncunun faydası s'_c sapmasını aldıktan sonra artmalıdır.

- **Pareto (veya Zayıf) Refah Artışı:** Bir $c \subseteq N$ koalisyonunun bir $s \in S$ strateji profilini bloklaması için, c koalisyonunun öyle bir sapması $s'_c \in S_c$ olmalı ki her $i \in c$ oyuncusu için $u_i\left(s'_c, s_{N \setminus c}\right) \geq u_i(s)$ ve en az bir $j \in c$ oyuncusu için $u_j\left(s'_c, s_{N \setminus c}\right) > u_j(s)$ olsun. Diğer bir deyişle, c'deki en az bir oyuncunun faydası s'_c sapmasını aldıktan sonra artarken, aynı zamanda c'deki hiçbir oyuncunun faydası azalmamalıdır.

Bu tez boyunca kullanılacak tanım Bölüm 1.4'de tartışacağımız sebeplerden dolayı Pareto refah artışıdır.

Hangi koalisyonların var olup hangilerinin var olmadığı bu tez çerçevesinde ele alınmayacaktır. Zira koalisyonların nasıl kurulduğu oyun kuramı ve yapay zeka alanlarında koalisyon formasyonu olarak anılan başlı başına ayrı bir disiplindir.[1] Onun yerine, var olan her koalisyonun bulunduğu bir kümenin, yani literatürdeki adıyla bir *koalisyon yapısı*nın, halihazırda verildiğini varsayıyoruz. Örneğin, yine $N = \{1,2,3,4,5\}$ ise $C = \big\{\{1,2\},\{2,3,5\},\{4\}\big\}$ verilen bir koalisyon yapısı olabilir.

Bir $s \in S$ strateji profilini, verilen bir C koalisyon yapısındaki hiçbir koalisyon bloklamıyorsa, bu s strateji profiline C*-stabil* diyoruz. Çözüm konseptleri üzerine olan tartışmamıza dönersek, C-stabilite tanımı verilen koalisyon yapısı üzerine kısıtlamalar yapılarak çeşitli çözüm konseptlerini tanımlamak için bir araç olarak kullanılabilir. Literatürde olduğu gibi bu tezde de sıklıkla bahsi geçen Nash dengesi [17] ve güçlü Nash dengesi [18] çözüm konseptlerinin tanımı aşağıda verilmiştir.

- **Nash Dengesi:** $\mathcal{P}_{=1}(N) = \{c \subseteq N : |c| = 1\}$ olsun. Bir $s \in S$ strateji profili $\mathcal{P}_{=1}(N)$-stabil ise s'ye *Nash dengesi* denir.
- **Güçlü Nash Dengesi:** $\mathcal{P}_{\geq 1}(N) = \{c \subseteq N : |c| \geq 1\}$ olsun. Bir $s \in S$ strateji profili $\mathcal{P}_{\geq 1}(N)$-stabil ise s'ye *güçlü Nash dengesi* denir.

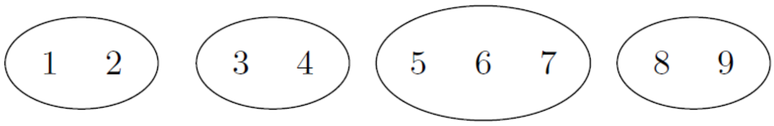
Bir oyun sınıfında her zaman bir Nash dengesi (dolayısıyla bir güçlü Nash dengesi) olmak zorunda değildir.

1.3 Sosyal Koalisyon Yapıları

Yukarıda verilen çözüm konseptleri, tanımlarında kullanılan koalisyon yapıları açısından bakılacak olursa, iki uç durumu temsil etmektedirler. Zira ilki oyuncuların sadece teklik koalisyonlar kurduğunu (yani aslında başkalarıyla hiç "koalisyon" kurmadıklarını) varsayarken, ikincisi ise her koalisyonun kurulduğunu varsaymaktadır. Birbiri ile çeşitli kısıtlar altında koordine olabilen "sosyal" oyuncular açısından bakıldığında, bu iki varsayım da gerçeklikten oldukça uzak kalacaktır. Bundan dolayı, bu tezde takip edilen ana yaklaşım, çeşitli sosyal yapılaşmalardan esinlenerek tanımlanmış koalisyon yapısı sınıfları ile bir orta yol bulmaktır.

[1] Yüksek lisansım sırasında bu disiplin üzerine yaptığım diğer çalışmalarım için bkz. [15, 16].

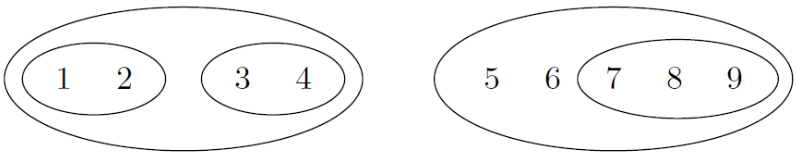
Bu yaklaşım ile yapılan ilk çalışma Feldman & Tennenholtz'a aittir [19]. Ele aldıkları koalisyon yapısı sınıfı partisyonlar olmuştur. Bir C koalisyon yapısına göre her oyuncu tek bir koalisyonda yer alıyorsa C'ye *partisyon* denir. Şekil 1.1'de partisyon koalisyon yapısına bir örnek verilmiştir. Verilen bir C partisyon koalisyon yapısı için, bir $s \in S$ strateji profili C-stabil ise s'ye *partisyon dengesi* denir.



Şekil 1.1 : Partisyon koalisyon yapısı örneği.

Bu tez kapsamında sosyal açıdan partisyonlardan daha komplike koalisyon yapılarını modelleyen üç yeni sınıf tanımlanıp çalışılmaktadır. Şimdi bu üç yeni koalisyon yapısı sınıfını tanıtıp, altlarında yatan motivasyonu tartışıyoruz.

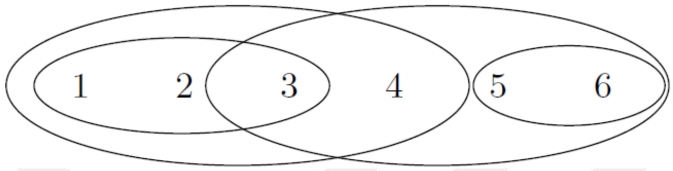
Laminar Koalisyon Yapısı Sınıfı: Bir C koalisyon yapısı *laminar* ise C'deki ayrışık olmayan her koalisyon çiftinin biri diğerinin alt kümesi demektir (yani her $c, c' \in C$ çifti için ya $c \subset c'$ ya $c' \subset c$ ya da $c \cap c' = \emptyset$ sağlanmaktadır). Şekil 1.2'de laminar koalisyon yapısına bir örnek verilmiştir. Verilen bir C laminar koalisyon yapısı için, bir $s \in S$ strateji profili C-stabil ise s'ye *laminar dengesi* denir.



Şekil 1.2 : Laminar koalisyon yapısı örneği.

Bu sınıf neredeyse her kurum ve şirkette gözlemlenen hiyerarşik organizasyon yapısını modellemektedir. Üniversite örneğinden hareket edersek, bir üniversitede bütün akademik birimler en tepede rektörlük çatısı altındadır. Rektörlüğün altında fakülteler, fakültelerin altında bölümler ve bölümlerin altında ise araştırma grupları (ana bilim dalları) bulunmaktadır. Ayrıca, Anshelevich ve ark. partisyon dengesini çalıştıkları makalede, laminar koalisyon yapılarını çalışmanın da ilginç olacağından bahsetmiş ve bu tezde çürüteceğimiz bazı hipotezler ortaya koymuştur [20].

Doğrusal Koalisyon Yapısı Sınıfı: Bir C koalisyon yapısı *doğrusal* ise C'deki her koalisyon ardışık oyunculardan meydana gelecek şekilde oyuncular bir doğru üzerine sıralanabiliyor demektir (yani N'nin öyle bir permütasyonu σ vardır ki her $c \in C$ σ'ya göre N'nin bir aralığına denk gelmektedir). Şekil 1.3'de doğrusal koalisyon yapısına bir örnek verilmiştir. Bu örnekte her koalisyonun oyuncuların doğal sırasına göre bir aralığa denk geldiğine dikkat ediniz. Verilen bir C doğrusal koalisyon yapısı için, bir $s \in S$ strateji profili C-stabil ise s'ye *doğrusal dengesi* denir.

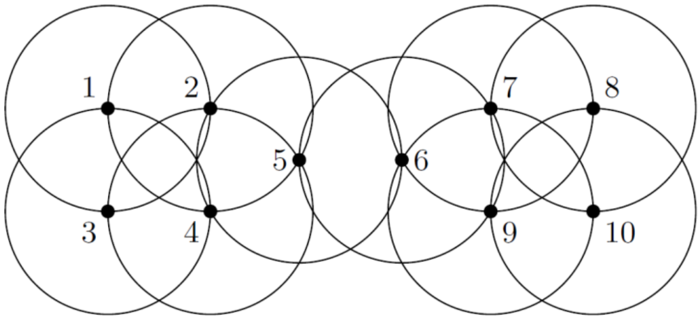


Şekil 1.3 : Doğrusal koalisyon yapısı örneği.

Bu sınıfın tanımı çeşitli örneklerle motive edilebilir: i) Komşuluk aracılığı ile sosyalleşen sokak sakinleri, ii) Arabulucular olmadan bir koalisyon kuramayan ve siyasi görüşlerine göre soldan sağa yerleştirilmiş oyuncular, veya iii) Aralarındaki iletişim bir kuyrukta bulundukları için sınırlanan oyuncular doğrusal koalisyon yapıları ile modellenebilir.

Merkezi Koalisyon Yapısı Sınıfı: Bir C koalisyon yapısı *merkezi* ise her koalisyon merkezinde bir oyuncusunun bulunduğu bir daire ile çevrilebilecek şekilde oyuncular iki boyutlu bir düzleme yerleştirilebiliyor demektir (yani her $i \in N$ öyle bir (x_i, y_i) koordinatına yerleştirilebilir ve de her $c \in C$ için öyle $O_c \in \bigcup_{i \in c}\{(x_i, y_i)\}$ ve $r_c \in \mathbb{R}_{>0}$ değerleri seçilebilir ki O_c merkezli ve r_c yarıçaplı daire içinde c'deki tüm oyuncuları ve sadece bu oyuncuları barındırmaktadır). Şekil 1.4'de merkezi koalisyon yapısına bir örnek verilmiştir. Verilen bir C dairesel koalisyon yapısı için, bir $s \in S$ strateji profili C-stabil ise s'ye *merkezi dengesi* denir.

Bu sınıfın tanımı çeşitli örneklerle motive edilebilir: i) Sınırlı bir mesafe içerisinde sosyalleşen mahalle sakinleri, ii) Siyasi pusula üzerindeki farklı görüşlere karşı belirli bir toleransı olan oyuncular, veya iii) Aralarındaki iletişim kullanılan iletişim cihazının kapsama alanıyla sınırlanan oyuncular merkezi koalisyon yapıları ile modellenebilir.



Şekil 1.4 : Dairesel koalisyon yapısı örneği.

Bir partisyon koalisyon yapısında $O(n)$ koalisyon varken laminar, doğrusal veya merkezi bir koalisyon yapısında $O(n^2)$ koalisyon olduğuna dikkat ediniz. Partisyon dengesi ile bizim tanımladığımız çözüm konseptleri arasındaki diğer bir bariz fark bazı koalisyonların kesişebilmesidir. Bu açıdan benzer çözüm konseptleri ve diğer ilgili çalışmalara bir sonraki bölümde yer verilmiştir.

1.4 İlgili Çalışmalar

Partisyon dengesi ilk olarak Feldman & Tennenholtz tarafından kaynak seçme ("resource selection") oyunları üzerinde çalışılmıştır [19]. Bu oyunlarda her oyuncu verilen m kaynaktan bir tanesini seçer. Yani her oyuncunun strateji kümesi oyunda verilen kaynakların kümesidir. Her kaynağın o kaynağı seçen oyuncu sayısına bağlı daima artan bir maliyet fonksiyonu vardır. Her oyuncu seçtiği kaynak için maliyet fonksiyonunun aldığı değer kadar bir maliyete (yani negatif faydaya) sahiptir. Kaynak seçme oyunları ağ yönlendirme ("routing") [21], ağ oluşum ("network formation") [22] ve yük dengeleme ("load balancing") [23] gibi birçok problemin modellenmesinde kullanılmaktadır.

Araştırmacıları partisyon dengesini kaynak seçmek oyunlarında çalışmaya iten ana motivasyon şu şekilde özetlenebilir: Bu oyunlarda güçlü Nash dengesi sadece iki kaynak varken ve bu kaynaklar eşdeğerken (yani aynı maliyet fonksiyonuna sahipken) bile yoktur [19]. Ancak bu oyunlar konjesyon ("congestion") oyunlarının [24] bir alt sınıfı olduğu için her zaman bir (saf) Nash dengesi vardır. Düşünecek olursak, güçlü Nash dengesinin her zaman var olduğu (muhtemelen oldukça basit) bir oyun sınıfında partisyon dengesini çalışmanın bir anlamı yoktur. Aynı şekilde, Nash dengesi bile olmayan bir oyun sınıfında partisyon dengesini çalışmanın da bir anlamı yoktur. Bu bakımdan kaynak seçme oyunları partisyon dengesini (ve benzer şekilde bu tez kapsamında tanımlanan çözüm konseptlerini) çalışmak için hem basit, hem genelleştirmeye müsait, hem de uygulamaları olan ideal bir çerçeve sunmaktadır. Bu yüzden bu tezde de geliştirilen çözüm konseptleri de kaynak seçme oyunları üzerinde çalışılmıştır.

Kaynak seçme oyunlarında her zaman bir partisyon dengesinin var olduğu, hatta her zaman hem Nash dengesi hem partisyon dengesi olan bir strateji profilinin var olduğu ve böyle bir profilin polinom zamanda bulunabildiği bilinmektedir [20]. Ayrıca, bizim bu tezde kullandığımız Pareto refah artışı tanımı yerine güçlü refah artışı tanımı kullanıldığı takdirde her zaman bir güçlü Nash dengesinin var olduğu da bilinmektedir [25]. Güçlü Nash dengesi üzerine olan çalışmalar için bkz. [26-29].

Benzer şekilde, partisyon dengesi de daha önce toplam refah artışı tanımı ile çalışılmıştır. Bu tanım altında partisyon dengesinin kaynak seçme oyunlarında maliyet fonksiyonları konveks iken her zaman var olduğu gösterilmiştir [30]. Kaynak seçme oyunlarında, toplam refah artışı tanımı altında partisyon dengesi daha basit olarak şu şekilde de düşünülebilir: Her koalisyon c yerine verilen kaynaklara $|c|$ tane iş ataması gereken ve maliyeti bu atadığı işlerin maliyetinin toplamı olan oyuncular verildiğini düşünelim. O zaman bu oyunun bir Nash dengesi toplam refah artışı tanımı altında bir partisyon dengesine denk gelir. Bu oyunlara daha genel haliyle atomik bölünebilir (“atomic splitable”) konjesyon oyunları denir. Bu oyunlar hakkında daha ayrıntılı bilgi almak için bkz. [31, 32]

Bu tezde tanımlanan çözüm konseptlerinde olduğu gibi kesişen koalisyonlara izin veren bir diğer çözüm konsepti ise düşünceli dengesidir (“considerate equilibrium”). Bu çözüm konsepti oyuncuların sosyal bir ağa gömülü olduğu ve sadece kliklerin koalisyon kurabildiklerini varsayımı altında arkadaşlarına karşı “düşünceli” davranan oyuncuları modellemektedir. Düşünceli dengesinin de kaynak seçme oyunlarında her zaman var olduğu bilinmektedir [33].

1.5 Tezin Katkıları ve Organizasyonu

Bölüm 2’de laminar, doğrusal ve merkezi koalisyon yapısı sınıfları arasındaki ilişkileri çalışıyoruz. Gösteriyoruz ki doğrusal koalisyon yapısı sınıfı laminar koalisyon yapısı sınıfının bir genellemesidir (*Teorem 1*) ve merkezi koalisyon yapısı sınıfı doğrusal koalisyon yapısı sınıfının bir genellemesidir (*Teorem 2*).

Bölüm 3'e kaynak seçme oyunlarını formal olarak tanıtarak başlıyoruz. Zira (yukarıda bahsettiğimiz gibi) araştırmacıların partisyon dengesini kaynak seçme oyunlarında çalışmaya başlaması ile aynı sebeplerden dolayı, biz de bu tezde geliştirdiğimiz çözüm konseptlerini kaynak seçme oyunlarında çalışacağız.

Bölüm 3.1'de Anshelevich ve ark. tarafından gösterilen ve bu tezde bize yardımcı olacak iki teoremi veriyoruz [20]. Bunlardan ilki kaynak seçme oyunlarında Nash dengesini karakterize etmektedir (*Teorem 3*). İkincisinde ise yine kaynak seçme oyunlarında bir koalisyonun bir strateji profilini bloklamaması için yeterli şartlar verilmektedir (*Teorem 4*). Ardından, kaynak seçme oyunlarının ele alacağımız bazı özel durumlarını tanıtıyoruz ve bu özel durumlar için Teorem 4'teki yeterli şartların sadeleştirilmiş hallerini veriyoruz. Bu özel durumları çalışmamızın altında yatan motivasyon kaynak seçme oyunlarında sadece iki kaynak varken ve bu kaynaklar eşdeğerken (yani aynı maliyet fonksiyonuna sahipken) bile güçlü Nash dengesinin olmamasına dayanmaktadır. Diğer bir deyişle, geliştirdiğimiz çözüm konseptlerini i) *iki kaynaklı*, ii) *eşdeğer kaynaklı* ve iii) *iki eşdeğer kaynaklı* özel durumlar için çalışmanın denge varlık garantileri açısından bir getirisi olabilir.

Bölüm 3.2'de verilen bir koalisyon yapısı C için C-stabil bir strateji profilin var olup olmadığına karar vermenin kaynak seçme oyunlarında sadece iki eşdeğer kaynak varken bile NP-zor olduğunu gösteriyoruz (*Teorem 5*).

Bölüm 4'de laminar, doğrusal ve merkezi koalisyon yapıları için kaynak seçme oyunlarında dengenin var olup olmadığını ve dengenin varsa ne kadar verimli bir şekilde bulunabileceğini çalışıyoruz. Bu bölümde öncelikle kaynak seçme oyunları genelinde bu sorulara yanıt veriyoruz (Bölüm 4.1). Ardından da iki kaynaklı (Bölüm 4.2), eşdeğer kaynaklı (Bölüm 4.3) ve iki eşdeğer kaynaklı (Bölüm 4.3) özel durumlar için bu sorulara yanıt veriyoruz. Bu bölüm ayrıca tezin ana katkılarını sunduğumuz yer olarak düşünülebilir.

Bölüm 4.1'de kaynak seçme oyunlarında her zaman bir laminar (dolayısıyla doğrusal ve merkezi) dengesinin olması gerekmediğini gösteriyoruz (*Teorem 6*). Böylece, laminar dengesinin kaynak seçme oyunlarında varlık garantisinin olduğu yönündeki 10 yıllık hipotezi çürütmüş oluyoruz [20]. Bunu göstermek için kullandığımız örnek oldukça karmaşık olup 14052 oyuncudan ve 2001 kaynaktan meydana gelmektedir.

Bölüm 4.2'de iki kaynaklı özel durumda laminar dengesinin her zaman var olduğunu (*Teorem 7*), doğrusal dengesinin her zaman var olmasa da (*Teorem 8*) eğer iki büyüklüğünde koalisyonlar yoksa her zaman var olduğunu (*Teorem 9*) gösteriyoruz. Ayrıca dengenin var olduğu bu durumlarda verimli bir şekilde bulunabildiğini gösteriyoruz. Bunun için fit küme adını verdiğimiz ve çeşitli koalisyon yapıları için kullanılabilecek genel bir teknik geliştiriyoruz (*Lemma 2*).

Bölüm 4.3'de eşdeğer kaynaklı özel durumda doğrusal (ve dolayısıyla laminar) dengesinin her zaman var olduğunu ve açgözlü bir algoritma ile verimli bir şekilde bulunabildiğini gösteriyoruz (*Teorem 10*).

Bölüm 4.4'de iki eşdeğer kaynaklı özel durumda merkezi dengesinin her zaman var olmadığını gösteriyoruz (*Teorem 11*). Böylece, daha genel koalisyon yapısı sınıflarını kaynak seçme oyunlarında çalışmanın denge varlık garantileri açısından bir getirisi olmadığını da göstermiş oluyoruz.

Çizelge 1.1 : Varlık garantileri.

Koalisyon Yapısı	*Genel*	*İki Kaynaklı*	*Eşdeğer Kaynaklı*	*İki Eşdeğer Kaynaklı*
Laminar	$-$	$+$	$+$	$+$
Doğrusal	$-$	$\oplus$	$+$	$+$
Merkezi	$-$	$-$	$-$	$-$

Bölüm 4'de verdiğimiz sonuçları özetlemek gerekirse Çizelge 1.1'de $+$ ile işaretlenen yerlerde varlık garantisi olduğunu, $-$ ile işaretlenen yerlerde olmadığını, $\oplus$ ile işaratlenen yerde sadece iki büyüklüğünde koalisyonlar yokken olduğunu göstermiş oluyoruz.

Bölüm 5'de ise son olarak tezin sonuç ve önerileri tartışılmaktadır.[2]

[2] Bu tezdeki çalışmaların yer aldığı ve yüksek lisansım sırasında basılan yayınlar için bkz. [34, 35].

2. KOALİSYON YAPILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde tez kapsamında tanıtılan partisyon, laminar, doğrusal ve merkezi koalisyon yapıları arasındaki ilişkileri inceliyoruz. Bunun için öncelikle verilen bir N oyuncu kümesi için bütün partisyon, laminar, doğrusal ve merkezi koalisyon yapılarının kümelerini sırasıyla $\mathbb{P}(N)$, $\mathbb{L}(N)$, $\mathbb{D}(N)$ ve $\mathbb{M}(N)$ olarak gösteriyoruz. $\mathbb{P}(N) \subseteq \mathbb{L}(N)$ olduğuna dikkat ediniz, çünkü tanımı gereği her partisyon koalisyon yapısı aynı zamanda bir laminar koalisyon yapısıdır. Diğer bir deyişle, laminar koalisyon yapısı sınıfı partisyon koalisyon yapısı sınıfının bir genellemesidir. Şimdi ise sırasıyla $\mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N)$ ve $\mathbb{D}(N) \subseteq \mathbb{M}(N)$ olduğunu gösteriyoruz.

Teorem 1. *Doğrusal koalisyon yapısı sınıfı laminar koalisyon yapısı sınıfının bir genellemesidir. Diğer bir deyişle,* $\mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N)$.

İspat. $\mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N)$ olduğunu $|N|$ üzerinden güçlü tümevarım tekniği ile ispatlıyoruz. $|N| = 1$ iken $\mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N)$ bağıntısının sağlandığı aşikardır. Şimdi $|N| \leq k$ iken de $\mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N)$ bağıntısının sağlandığını varsayalım. O zaman göstermemiz gereken $|N| = k + 1$ iken de $\mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N)$ bağıntısının sağlandığıdır.

$|N| = k + 1$ olduğunu farz edelim. $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar bir koalisyon yapısı olsun. $C \in \mathbb{D}(N)$ olduğunu gösterirsek, ispatımız bitmiş olacaktır. Bunun için N'nin öyle bir permütasyonu σ olmalı ki her $c \in C$ σ'ya göre N'nin bir aralığına denk gelsin. N'nin her permütasyonu σ için N, tanımı gereği σ'ya göre N'nin bir aralığına denk geldiği için genelliği kaybetmeden $N \notin C$ diye varsayabiliriz.

Hiçbir üst kümesi C'de yer almayan bir $c \in C$ koalisyonu seçelim. C laminar olduğu için $C^1 = \{c' \in C : c' \subset c\}$ ve $C^2 = C \setminus C^1$ koalisyon yapıları da laminar olmakla beraber, her $c^1 \in C^1$ ve $c^2 \in C^2$ koalisyon çifti de ayrışıktır. Ayrıca $N \notin C$ olduğu için $c \neq N$ olduğunu hatırlayınız. Bu yüzden de $|c| \leq k$ ve $|N \setminus c| \leq k$ olur. O zaman tümevarımsal hipotezimize göre $C^1, C^2 \in \mathbb{D}(N)$. $C = C^1 \cup C^2$ olduğu için aynı zamanda $C \in \mathbb{D}(N)$. Böylece, $\mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N)$ olduğunu ispatlamış olduk.

$\square$

Teorem 2. *Merkezi koalisyon yapısı sınıfı doğrusal koalisyon yapısı sınıfının bir genellemesidir. Diğer bir deyişle,* $\mathbb{D}(N) \subseteq \mathbb{M}(N)$.

İspat. Bu teoremi bir algoritma aracılığıyla ispatlayacağız. $C \in \mathbb{D}(N)$ verilmiş olsun. Kolaylık sağlaması açısından, C'deki her koalisyonun oyuncuların doğal sıralarına göre N'nin bir aralığına denk geldiğini genelliği kaybetmeden varsayabiliriz. Ayrıca eğer C'deki bir c koalisyonunun en küçük ve en büyük indekse sahip oyuncuları sırasıyla i ve j ise c'yi $[i, j]$ olarak gösteriyoruz.

Şimdi, aşağıda verilen algoritmayı kullanarak elemanları N'deki oyuncular ve boşluk karakterlerinden oluşan bir L listesi inşa ediyoruz. (Boşluk karakteri için ⊔ sembolünü kullanıyoruz.) Algoritma boş bir $L = (\,)$ listesi ile başlayıp aşağıdaki şekilde çalışmaktadır.

Sırasıyla her $j = 1, 2, \cdots, n$ için:

1. L'nin sonuna j'yi ekle.
2. C'de $[i, j]$ formunda $(i \neq j)$ bir koalisyon yoksa sonraki iterasyona (yani sıradaki j değerine) atla.
3. Aksi takdirde, C'deki $[i, j]$ formunda $(i \neq j)$ koalisyonlar arasından en küçük i değerine i^*de.
4. L'de i^*'dan başlayarak j'ye kadar olan (j hariç) eleman sayısına r de.
5. L'nin sonuna peş peşe r tane ⊔ ekle ve sonraki iterasyona atla.

Bu algoritma sonlandığı zaman C'deki $[i, j]$ formunda $(i \neq j)$ her koalisyon için L'de i'den başlayarak j'ye kadar (j dahil değil) kaç eleman varsa L'de j'den hemen sonra peş peşe o kadar ⊔ olduğuna dikkat ediniz.

Şimdi L'yi kullanarak $C \in \mathbb{M}(N)$ olduğunu gösteriyoruz: 1'den n'e kadar bütün oyuncuları sırasıyla bir doğrunun üzerine, ardışık oyuncuları arasındaki mesafe L'de aralarında yer alan ⊔ sayısından 1 fazla olacak şekilde, yerleştirelim. C'deki $[i, j]$ formunda $(i \neq j)$ her koalisyon için j merkezli ve yarıçapı i ile j arasındaki mesafeye eşit olan daireler çizelim. C'deki $[j, j]$ formunda her koalisyon için ise j merkezli ve $\varepsilon < 1$ yarıçaplı daireler çizelim. L'nin sağladığı yukarıdaki özellikten dolayı C'deki her c koalisyonu için çizdiğimiz dairenin içinde c'deki bütün oyuncuları olduğuna ve başka hiçbir oyuncunun olmadığına dikkat ediniz. Böylece, $\mathbb{D}(N) \subseteq \mathbb{M}(N)$ olduğunu ispatlamış olduk.

□

Teorem 1 & 2 ile $\mathbb{P}(N) \subseteq \mathbb{L}(N) \subseteq \mathbb{D}(N) \subseteq \mathbb{M}(N)$ olduğunu göstermiş olduk. Yani bu tezde partisyondan sonra tanımlanan her koalisyon yapısı sırayla bir öncekini genellemektedir. Böylece, ilerleyen bölümlerde bir çözüm konsepti hakkında edindiğimiz sonuçlar diğer çözüm konseptleri için bazı soruların yanıtlanmasında kullanılabilmektedir.

3. KAYNAK SEÇME OYUNLARI

Bir *kaynak seçme oyunu* (KSO) aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $\langle N, M, f\rangle$ üçlüsünden meydana gelir:

– $N = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu bir oyuncu kümesidir.
– $M = \{1, 2, \dots, m\}$ sonlu bir kaynak kümesidir.
– $f = (f_i)_{i=1}^{m}$ daima artan maliyet fonksiyonları profilidir.

Oyun oynanırken her $i \in N$ oyuncusu tam olarak bir tane $j \in M$ kaynağı seçer. Yani her $i \in N$ oyuncusunun strateji kümesi $S_i = M$. Bir $j \in M$ kaynağını q oyuncu seçtiyse, j'yi seçen her oyuncu $f_j(q)$ kadar bir maliyet (yani negatif fayda) görür. Her oyuncu maliyetini minimize etmeye çalışmaktadır.

Bu oyundaki strateji profillerinin oyunculardan kaynaklara olan bir atamaya denk geldiğine dikkat ediniz. Bir *atama* aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $a = (a_i)_{i=1}^{m}$ profili ile gösterilebilir:

– Her $i \in M$ için $a_i \subseteq N$.
– Her $i, j \in M$ için $(i \neq j)$ $a_i \cap a_j = \emptyset$.
– Son olarak $\bigcup_{i \in M} a_i = N$.

a_i ile a atamasında i kaynağına atanmış oyuncuların kümesi belirtilmektedir. Böylece, a atamasında a_i'deki her oyuncunun $f_i(|a_i|)$ kadar maliyet gördüğünü söyleyebiliriz. Bu oyunun strateji uzayını, yani mümkün olan bütün atamaların kümesini ise $\mathcal{A}$ ile gösteriyoruz.

Sırada tez boyunca kaynak seçme oyunları üzerine olan tartışmamızda bize kolaylık sağlayacak bazı terim ve notasyonları tanımlıyoruz.

Bir a atamasının *maks-maliyeti*ni a'da bir oyuncunun sahip olduğu en yüksek maliyet, yani $\max_{i \in M} f_i(|a_i|)$, olarak tanımlıyoruz.

Bir KSO'nun *min-maks-maliyeti*ni (α ile gösteriyoruz) bütün atamalar arasından en düşük maks-maliyet, yani $\alpha = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \max_{i \in M} f_i(|a_i|)$, olarak tanımlıyoruz.

Bir $i \in M$ kaynağının *kota*sını $q_i = \max_{q \in \mathbb{N}} f_i(q) \leq \alpha$ olarak tanımlıyoruz. Kısacası, bir kaynağın kotası α maliyetini aşmadan atanabilecek maksimum oyuncu sayısıdır. α maliyetine erişebilen ve erişemeyen kaynakları aşağıdaki şekilde ikiye ayırıyoruz:

- Eğer $f_i(q_i) = \alpha$ ise i kaynağını *tip 1* olarak sınıflandırıyoruz.
- Eğer $f_i(q_i) < \alpha$ ise i kaynağını *tip 2* olarak sınıflandırıyoruz.

Tip 1 ve tip 2 kaynakların kümesini sırasıyla T_1 ve T_2 ile gösteriyoruz. Tanımı gereği $T_1 \neq \emptyset$ olduğuna dikkat ediniz. Tip 1 kaynaklar için β_i ile i kaynağının kotasına ulaşmasına bir oyuncu kala sahip olduğu maliyeti gösteriyoruz, yani $\beta_i = f_i(q_i - 1)$.

3.1 Denge için Yeterli Şartlar

KSO'lar konjesyon oyunlarının bir alt sınıfı olduğu için her zaman bir Nash dengesi olduğunu hatırlayınız [24]. Aşağıda KSO'lar için Anshelevich ve ark. tarafından bulunan Nash dengesi karakterizasyonunu, yani bir a atamasının Nash dengesi olması için yeterli ve gerekli şartları, veriyoruz.

Teorem 3 (Anshelevich ve ark. [20]). *KSO'larda bir atama a eğer ve sadece eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir Nash dengesidir:*

1. *Her $i \in T_2$ için $|a_i| = q_i$.*
2. *Her $i \in T_1$ için $|a_i| \in \{q_i - 1, q_i\}$.*
3. *En az bir $i \in T_1$ için $|a_i| = q_i$.*

a ataması bir Nash dengesi olsun. O zaman Teorem 3'e göre tip 1 kaynakları aşağıdaki şekilde ikiye ayırabiliriz:

- $L(a) = \{i \in T_1 : |a_i| = q_i - 1\}$, yani kotasına ulaşamamış kaynaklar kümesi.
- $H(a) = \{i \in T_1 : |a_i| = q_i\}$, yani kotasına ulaşmış kaynaklar kümesi.

$L(a)$ ve $H(a)$ kümelerindeki kaynakları sırasıyla *düşük* ve *yüksek* kaynaklar olarak adlandırıyoruz. Teorem 3'ün 3. şartından dolayı $H(a) \neq \emptyset$ olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca, Teorem 3'ün daha sonra işimize yarayacak bir korolarisi aşağıda verilmiştir.

Korolari 1. *KSO'larda Nash dengesi olan her a ataması için $|L(a)| = \sum_{i \in M} q_i - n$ ve $|H(a)| = |T_1| - |L(a)|$. Bu da her Nash dengesinde düşük ve dolayısıyla yüksek kaynak sayıları aynı demektir.*

KSO'larda Teorem 3'de verilen şartlar açgözlü bir algoritma ile kolaylıkla sağlanabileceği için Teorem 3'ün diğer bir korolarisi ise şu şekildedir.

Korolari 2. *KSO'larda bir Nash dengesi polinom zamanda bulunabilir.*

Korolari 2 sayesinde α ve her $i \in M$ için q_i (ve dolayısıyla β_i) değerlerinin polinom zamanda bulunabileceğine dikkat ediniz. Bu sayede ileriki bölümlerde vereceğimiz verimli algoritmalarda bu değerlerin verilmiş (veya daha önceden hesaplanmış olduğunu) genelliği kaybetmeden varsayabiliriz.

Şimdi ise KSO'larda bir koalisyonun bir atamayı bloklamaması için yine Anshelevich ve ark. tarafından bulunan yeterli şartları aşağıda veriyoruz. Bu şartlar Teorem 3'teki şartların aksine aynı zamanda gerekli değildir, yani bir koalisyon bir atamayı aşağıda verilen şartları sağlamasa dahi bloklamıyor olabilir.

Teorem 4 (Anshelevich ve ark. [20]). *KSO'larda bir a ataması Nash dengesi ise ve verilen bir c koalisyonu her $l \in L(a)$ ve $h \in H(a)$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, c koalisyonu a atamasını bloklamaz:*

1. *Eğer $|a_l \cap c| = 0$ ise $|a_h \cap c| \leq 1$.*
2. *Eğer $\beta_h \geq \beta_l$ ve $|a_l \cap c| > 0$ ise $|a_h \cap c| \leq |a_l \cap c| + 1$.*
3. *Eğer $\beta_h < \beta_l$ ve $|a_l \cap c| > 0$ ise $|a_h \cap c| \leq |a_l \cap c|$.*

Teorem 4'teki şartlara dikkat edecek olursak, $L(a) = \emptyset$ (yani Korolari 1'den dolayı $\sum_{i \in M} q_i - n = 0$) olduğu takdirde bütün şartlar otomatik sağlanmaktadır. Bu yüzden Teorem 4 aşağıdaki korolariye sahiptir.

Korolari 3. *Bir KSO'da eğer $\sum_{i \in M} q_i - n = 0$ ise oyundaki her Nash dengesi ayrıca bir güçlü Nash dengesidir.*

İki kaynaklı KSO'lar (yani $M = \{1, 2\}$ olduğu özel durum) için Teorem 4'te verilen şartlar şu şekilde sadeleştirilebilir: Diyelim ki a ataması bir Nash dengesi ve bir kaynak düşük iken diğeri yüksek. Teorem 4'ün ifadesindeki gibi düşük ve yüksek kaynaklara sırasıyla l ve h diyelim. Varsayalım ki $\beta_h > \beta_l$. O halde dikkat edilecek olursa bir c koalisyonu a'yı eğer ve sadece eğer $|a_l \cap c| = 0$ ve $|a_h \cap c| > 1$ ise bloklar. Bu yüzden, Teorem 4'ün diğer bir korolarisi şu şekildedir.

Korolari 4. *İki kaynaklı KSO'larda bir a ataması Nash dengesi ise ve verilen bir c koalisyonu her $l \in L(a)$ ve $h \in H(a)$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, c koalisyonu a atamasını bloklamaz:*

1. *Eğer* $|a_l \cap c| = 0$ *ise* $|a_h \cap c| \leq 1$.
2. *Eğer* $\beta_h = \beta_l$ *ve* $|a_l \cap c| > 0$ *ise* $|a_h \cap c| \leq |a_l \cap c| + 1$.
3. *Eğer* $\beta_h < \beta_l$ *ve* $|a_l \cap c| > 0$ *ise* $|a_h \cap c| \leq |a_l \cap c|$.

Benzer şekilde, *eşdeğer kaynaklı KSO*'lar (yani her $i, j \in M$ için $f_i = f_j$ olduğu özel durum) için Teorem 4'teki şartlar aşağıdaki korolari ile sadeleştirilmiştir.

Korolari 5. *Eşdeğer kaynaklı KSO'larda bir a ataması Nash dengesi ise ve verilen bir c koalisyonu her $l \in L(a)$ ve $h \in H(a)$ için $|a_h \cap c| \leq |a_l \cap c| + 1$ şartını sağlıyorsa, c koalisyonu a atamasını bloklamaz.*

Bu alt başlıkta geçen sonuçları Bölüm 4'te vereceğimiz varlık garantileri ve verimli algoritmalarda kullanıyoruz. Ama öncesinde bu oyunlarda dengenin verimli hesaplanabilirliği hakkında önemli bir konuya değiniyoruz.

3.2 Dengenin Verimli Hesaplanabilirliği

Korolari 2'den bildiğimiz üzere KSO'larda bir Nash dengesi polinom zamanda bulunabilmektedir. Bu yüzden, Korolari 3'den görüldüğü gibi eğer $\sum_{i \in M} q_i - n = 0$ ise bir güçlü Nash dengesi de polinom zamanda bulunabilmektedir. Aynı zamanda, eğer $\sum_{i \in M} q_i - n \neq 0$ ise (her $i \in H(a)$ için $q_i = 1$ olan bir a Nash dengesinin var olduğu basit durum haricinde) güçlü Nash dengesinin var olmadığı bilinmektedir [20]. Bu yüzden, bir güçlü Nash dengesinin var olup olmadığı (ve varsa bulma) problemi de polinom zamanda çözülebilmektedir.

Özetleyecek olursak, ele alınan koalisyon yapıları açısından bu iki uç durumda da bir dengenin var olup olmadığı (ve varsa bulma) probleminin polinom zamanda çözülebildiğini bilinmektedir. Bu bölümde, bu problemin genel haline bakıyoruz. Yani bir C koalisyon yapısı verildiği takdirde C-stabil bir atamanın olup olmadığı problemini çalışıyoruz. Aşağıda, bu problemin *iki eşdeğer kaynaklı KSO*'larda (yani $M = \{1,2\}$ ve $f_1 = f_2$ olduğu özel durumda) dahi her $c \in C$ için $|c| = 2$ iken bile $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ değil ise polinom zamanda çözülemediğini gösteriyoruz.

Teorem 5. *İki eşdeğer kaynaklı KSO'larda dahi verilen bir C koalisyon yapısı için C-stabil bir atamanın olup olmadığına karar vermek NP-zor'dur ve her $c \in C$ için $|c| = 2$ olsa bile, bu problem hala NP-zor kalmaktadır.*

İspat. NP-zor olduğu bilinen yarım köşe örtme ("half vertex cover") problemi üzerinden bir indirgeme veriyoruz. Yarım köşe örtme probleminde bize yönsüz basit bir çizge $G = (V, E)$ verilmektedir. Genelliği kaybetmeden, $|V|$'nin tek olduğunu varsayabiliriz, zira problem bu halde bile NP-zor'dur**.** Diyelim ki pozitif bir tam sayı k için $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ olsun. Bu girdilere göre yarım köşe örtme problemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Yarım Köşe Örtme Problemi: *En fazla k büyüklüğünde öyle bir köşe alt kümesi $V' \subset V$ var mıdır ki her $(v_i, v_j) \in E$ kenarı için $v_i \in V'$ veya $v_j \in V'$ olsun?*

Şimdi verilen bir yarım köşe örtme problemi için, iki eşdeğer kaynaklı bir KSO $\langle N, M, f \rangle$ ve bir koalisyon yapısı C oluşturuyoruz:

- $M = \{1, 2\}$ ve $f_1(x) = f_2(x) = x$ olsun.
- Her $v_i \in V$ köşesi için bir $i \in N$ oyuncusu olsun.
- Her $(v_i, v_j) \in E$ kenarı için bir $\{i, j\} \in C$ koalisyonu olsun.

Verilen yarım köşe örtme probleminin cevabının eğer ve sadece eğer yukarıdaki yapıya göre C-stabil bir atama varsa "evet" olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olacaktır. Şimdi tam olarak bunu yapıyoruz.

($\Rightarrow$) Diyelim ki verilen yarım köşe probleminin cevabı "evet", yani en fazla k büyüklüğünde öyle bir köşe alt kümesi $V' \subset V$ var ki her $(v_i, v_j) \in E$ kenarı için $v_i \in V'$ veya $v_j \in V'$. Şimdi gösteriyoruz ki $a = (V', N \setminus V')$ ataması C-stabil'dir. Öncelikle, $|a_1| \leq k$ ve dolayısıyla $|a_2| \geq k + 1$ olduğuna dikkat ediniz. Bu yüzden, a'da 1. kaynağa atanmış oyuncuların maliyeti 2. kaynağa atanmış oyuncuların maliyetinden daima azdır. Her $\{i, j\} \in C$ için biliyoruz ki i ve j'den en az biri 1. kaynağa atanmıştır, çünkü hatırlayınız ki $v_i \in V'$ veya $v_j \in V'$. Eğer hem i hem de j 1. kaynağa atanmış ise bu iki oyuncunun da 1. kaynakta kalmayı 2. kaynağa geçmeye yeğleyeceği açıktır. Bu iki oyuncudan biri (diyelim ki j) 2. kaynağa atanmış ise 1. kaynağa geçerek maliyetini düşürmesi mümkündür. Ancak j bu strateji değişikliğine gittiği takdirde i 1. kaynakta kalsa da 2. kaynağa geçse de maliyeti artacaktır. Bu yüzden hiçbir $c \in C$ koalisyonu a atamasını bloklamaz. Yani a ataması C-stabildir.

($\Longleftarrow$) Şimdi ise diyelim ki yukarıdaki yapıya göre C-stabil bir a ataması var. $|N| = 2k + 1$ olduğu için a'da kaynaklardan birine en fazla k oyuncu atanmıştır. Genelliği kaybetmeden $|a_1| \leq k$ ve dolayısıyla $|a_2| \geq k + 1$ olduğunu varsayalım. Bir $\{i, j\} \in C$ koalisyonundaki iki oyuncunun 2. kaynağa atanmış olduğunu düşünelim. İçlerinden biri (diyelim ki i) 1. kaynağa geçerse i'nin maliyeti yükselmeyecektir ve j'nin maliyeti düşecektir. Ancak a ataması C-stabil olduğu için bu mümkün olamaz, yani her $c \in C$ koalisyonundaki en az bir oyuncu a'da 1. kaynağa atanmıştır. O zaman, a_1'deki oyunculara denk gelen köşelerin kümesi (diyelim ki V') her $(v_i, v_j) \in E$ için $v_i \in V'$ veya $v_j \in V'$ şartını sağlamakla beraber büyüklüğü en fazla k'dır. Bu da verilen yarım köşe örtme probleminin cevabı "evet" demektir.

Böylece, eğer iki eşdeğer kaynaklı KSO'larda verilen bir C koalisyon yapısı için (her $c \in C$ için $|c| = 2$ iken bile) C-stabil bir atamanın var olup olmadığı polinom zamanda çözülebilirse, yukarıdaki indirgeme ile NP-zor olan yarım köşe örtme probleminin de polinom zamanda çözülebildiğini göstermiş olduk.

$\square$

Teorem 5, herhangi bir düzen olmaksızın kurulan koalisyon yapıları altında, oldukça basit senaryolarda bile, dengenin hesaplanabilirliğinde katı sınırlar olduğunu göstermektedir. Bu bakımdan, koalisyon yapılarını sosyal bir düzen ile sınırlamak hesaplanabilirlik ile de motive edilebilir. Bir sonraki bölümde göreceğiz ki bu türden kısıtlamalar altında tanımladığımız çözüm konseptleri verimli hesaplanabilirlik sonuçlarına fırsat vermektedir.

4. DENGE VARLIK GARANTİLERİ VE VERİMLİ ALGORİTMALAR

Bu bölümde laminar, doğrusal ve merkezi dengesi çözüm konseptlerini KSO'lar ve KSO'ların özel durumları üzerinde çalışıyoruz. Bu çözüm konseptlerinin hepsinin partisyon dengesi çözüm konseptinin bir genellemesi olduğunu ve KSO'larda partisyon dengesinin varlık garantisi olduğunu hatırlayınız [20]. İlk olarak bu sonucun laminar, doğrusal ve merkezi dengesi çözüm konseptlerine genellenip genellenemeyeceğini çalışıyoruz.

4.1 Genel Durum

Bu alt başlığı genel olarak KSO'larda her zaman bir laminar dengesinin var olması gerekmediğini göstermeye adıyoruz. Bunu göstermek için kullandığımız örnek oldukça karmaşık olup çok sayıda oyuncu ve kaynak gerektirmektedir. Bu kadar karmaşık bir örneği bulmanın zorluğundan olsa gerek ki Anshelevich ve ark. partisyon dengesini çalıştıkları makalenin sonunda KSO'larda laminar dengesinin de varlık garantisi olduğu hipotezini ortaya koymuştur [20]. Böylece üzerinden yaklaşık on yıl geçtikten sonra bu hipotez bu tezde çürütülmüş olacaktır. Şimdi kullandığımız örneği tarif ediyoruz.

Örnek 1. Aşağıda 14052 oyunculu ve 2001 kaynaklı bir KSO tarif edilmektedir.

- Kaynakların hepsi tip 1 olarak sınıflandırılmış olsun.
- Kaynaklar kümesi $M = M_x \cup M_y \cup M_z$ olsun, öyle ki:
  - $M_x = \{x\}$ ve $q_x = 53$ olsun.
  - $M_y = \{y_1, y_2, \dots, y_{1000}\}$ ve her $y \in M_y$ için $q_y = 8$ olsun.
  - $M_z = \{z_1, z_2, \dots, z_{1000}\}$ ve her $z \in M_z$ için $q_z = 7$ olsun.
  - Ayrıca, her $y \in M_y$ ve $z \in M_z$ için $\beta_x > \beta_y > \beta_z > f_x(q_x - 2)$ olsun.

◊

Şimdi ise gösteriyoruz ki öyle bir $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar koalisyon yapısı vardır ki Örnek 1'de tarif edilen KSO'da C-stabil bir atama yoktur.

Teorem 6. *Bir KSO'nun verilen bir $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar koalisyon yapısı için C-stabil bir ataması olmayabilir. Yani, KSO'larda laminar dengesinin varlık garantisi yoktur.*

İspat. KSO'larda laminar dengesinin varlık garanatisi olmadığını göstermek için Örnek 1'de verilen KSO'nun aşağıda verilen $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar koalisyon yapısı için C-stabil bir ataması olmadığını gösteriyoruz. İlk olarak, 14052 oyuncuyu 6 tana eşit büyüklükteki $c_1, c_2, \dots, c_6$ koalisyonlara ayırıyoruz. Yani bu koalisyonların her biri farklı $14052 \div 6 = 2342$ oyuncu içermektedir. $C = \{c_1, c_2 \dots, c_6\} \cup \mathcal{P}_{=1}(N) \cup \{N\}$ olarak tanımladığımız koalisyon yapısının laminar olduğuna dikkat ediniz. Şimdi olmayan ergi (çelişki) yöntemini kullanabilmek için, C-stabil bir a atamasının olduğunu varsayıyoruz.

$\mathcal{P}_{=1}(N) \subset C$ olduğu için a atamasının aynı zamanda $\mathcal{P}_{=1}(N)$-stabil olduğuna, yani bir Nash dengesi olduğuna, dikkat ediniz. Bu yüzden a atamasının Teorem 3'de verilen şartları sağladığını not ediniz. Ayrıca, Korolari 1'den dolayı $|L(a)| = 1001$ ve $|H(a)| = 1000$ olduğuna dikkat ediniz. İspatın geri kalanını 6 parçaya ayırıyoruz:

(1) $x \in L(a)$ olduğunu gösteriyoruz.

Eğer $x \in H(a)$ ise $N \in C$ koalisyonu a'yı blokladığı için a'nın C-stabil olamayacağını gösteriyoruz. Varsayalım ki $x \in H(a)$, yani tüm düşük kaynaklar $M_y \cup M_z$'dedir. Düşük olan iki kaynak (diyelim ki i ve j) ele alalım. Dikkat ediniz ki $|a_i| + |a_j| = (q_i - 1) + (q_j - 1) \leq 14$. Ardından, öyle $N_i \in a_x$ ve $N_j \in a_x$ oyuncu alt kümeleri seçelim ki $|N_i| = q_i$, $|N_j| = q_j$ ve $N_i \cap N_j = \emptyset$ olsun. Şimdi a üzerinde oynayarak yeni bir a' ataması tarif ediyoruz:

- a_i, a_j, N_i ve N_j'deki oyuncuları atanmış oldukları kaynaklardan kaldıralım.
- N_i'deki oyuncuları i kaynağına, N_j'deki oyuncuları j kaynağına ve son olarak $a_i \cup a_j{}'$deki oyuncuları x kaynağına atayalım.
- Diğer tüm oyuncular bulundukları kaynaklarda kalmaya devam etsin.

a' atamasında $a_i \cup a_j$'deki oyuncuların a atamasına göre maliyetlerinin daha düşük olduğuna dikkat ediniz, çünkü hatırlayacak olursak $\beta_y > \beta_z > f_x(q_x - 2)$. Diğer oyuncuların ise a' atamasındaki maliyetinin a atamasındaki maliyetlerinden fazla olmadığı açıktır. Bu yüzden $N \in C$ koalisyonu a'yı bloklar. Ancak a ataması C-stabil olduğu için bu mümkün değildir. Bu da demektir ki $x \in L(a)$.

(2) $|H(a) \cap M_y| \leq 7$ (ve dolayısıyla $|H(a) \cap M_z| \geq 993$) olduğunu gösteriyoruz.

(1)'den biliyoruz ki $M_y \cup M_z$'de toplam 1000 düşük ve 1000 yüksek kaynak var. Sırada $|H(a) \cap M_y| \geq 8$ ise $N \in C$ koalisyonu a'yı blokladığı için a'nın C-stabil olamayacağını gösteriyoruz. Varsayalım ki $|H(a) \cap M_y| \geq 8$. Bu demektir ki $|L(a) \cap M_z| \geq 8$. Şimdi a üzerinde oynayarak yeni bir a' ataması tarif ediyoruz:

- M_y'den 7 yüksek kaynak seçiyoruz. Diyelim ki $y_1, y_2, \dots, y_7 \in H(a) \cap M_y$.
- M_z'den 8 düşük kaynak seçiyoruz. Diyelim ki $z_1, z_2, \dots, z_8 \in L(a) \cap M_z$.
- a'da x'e atanmış 49 oyuncu seçiyoruz. Diyelim ki $N_x \subset a_x$ ve $|N_x| = 49$.
- $\left(a_{y_1} \cup \cdots \cup a_{y_7}\right) \cup \left(a_{z_1} \cup \cdots \cup a_{z_8}\right) \cup N_x$'deki oyuncuları atanmış oldukları kaynaklardan kaldıralım.
- N_x'deki 49 oyuncuyu $y_1, \dots, y_7$ kaynaklarına, her kaynakta 7'şer oyuncu olacak şekilde atayalım.
- $a_{y_1} \cup \cdots \cup a_{y_7}$'deki 56 oyuncuyu $z_1, \dots, z_8$ kaynaklarına, her kaynakta 7'şer oyuncu olacak şekilde atayalım.
- $a_{z_1} \cup \cdots \cup a_{z_8}$'deki 48 oyuncuyu x kaynağına atayalım.
- Diğer tüm oyuncular bulundukları kaynaklarda kalmaya devam etsin.

a' atamasında, x kaynağına atanmış oyuncuların a'ya göre maliyeti daha düşüktür (çünkü x'de $q_x - 2$ oyuncu vardır). a' atamasında, $y_1, \dots, y_7$ kaynaklarına atanmış olan oyuncuların da a'ya göre maliyeti daha düşüktür (çünkü hatırlayanız ki $\beta_x > \beta_y$). Diğer oyuncuların ise a' atamasındaki maliyetinin a atamasındaki maliyetlerinden fazla olmadığı açıktır. Bu yüzden $N \in C$ koalisyonu a'yı bloklar. Ancak a ataması C-stabil olduğu için, bu demektir ki $|H(a) \cap M_y| \leq 7$.

(3) Gösteriyoruz ki öyle bir $c \in \{c_1, \dots, c_6\}$ vardır ki c koalisyonundaki en az 1159 oyuncu a atamasında $H(a) \cap M_z$'deki kaynaklara atanmıştır.

(2)'den biliyoruz ki a atamasında M_z'deki kaynakların en az 993'ü yüksektir. Hatırlayınız ki a'da bu kaynakların her birine 7 oyuncu atanmıştır. Bu yüzden, a'da M_z'deki yüksek kaynaklara atanmış oyuncu sayısı en az $993 \times 7 = 6951$'dir. Genel güvercin yuvası prensibini uygulayarak görebiliriz ki öyle bir $c \in \{c_1, \dots, c_6\}$ koalisyonu vardır ki c'deki en az $\left\lceil {}^{6951}/_{6} \right\rceil$ =1159 oyuncu a'da M_z'deki yüksek kaynaklara atanmıştır.

(4) Yukarıda (3)'de tarif edildiği gibi bir $c \in \{c_1, \ldots, c_6\}$ koalisyonunu ele alalım. Gösteriyoruz ki öyle bir $z \in H(a) \cap M_z$ vardır ki c koalisyonundaki en az iki oyuncu a atamasında z kaynağına atanmıştır.

a atamasında M_z'de en fazla 1000 yüksek kaynak olabilir ve (3)'den bildiğimiz üzere c koalisyonun en az 1159 oyuncusu M_z'deki yüksek kaynaklara atanmıştır. Böylece, güvercin yuvası prensibini kullanarak c'nin en az iki oyuncusunun a'da M_z'deki kaynaklardan birine atanmış olduğunu söyleyebiliriz.

(5) Yukarıda (3)'de tarif edildiği gibi bir $c \in \{c_1, \ldots, c_6\}$ koalisyonunu ele alalım. Gösteriyoruz ki her $y \in L(a) \cap (M_x \cup M_y)$ için c koalisyonunun en az iki oyuncusu a atamasında y kaynağına atanmıştır.

(4)'de tarif edildiği gibi bir $z \in H(a) \cap M_z$ kaynağı ele alalım. Biliyoruz ki c'nin iki oyuncusu (diyelim ki i ve j) a'da z'ye atanmıştır. Şimdi eğer c en fazla tek bir oyuncusunun atanmış olduğu bir $y \in L(a) \cap (M_x \cup M_y)$ kaynağı varsa, c koalisyonu a'yı blokladığı için a'nın C-stabil olamayacağını gösteriyoruz. Varsayalım ki öyle bir kaynak $y \in L(a) \cap (M_x \cup M_y)$ var, yani $|a_y \cap c| \leq 1$. Şimdi $|a_y \cap c| = 0$ ve $|a_y \cap c| = 1$ ihtimallerini sırayla inceliyoruz.

Varsayalım ki $|a_y \cap c| = 0$. O zaman c koalisyonu a'yı şu şekilde bloklayabilir: i oyuncusu z'den kaldırılıp y'ye atanırsa, i'nin maliyeti aynı kalırken j'ninki düşer ve c'deki diğer oyuncuların maliyeti de artmaz. Bu yüzden, $|a_y \cap c| = 0$ olamaz.

Varsayalım ki $|a_y \cap c| = 1$. $a_y \cap c$'deki oyuncuya k diyelim. Bu durumda yine c koalisyonu a'yı şu şekilde bloklayabilir: i ve j oyuncuları z'den kaldırılıp y'ye ve k oyuncusu da y'den kaldırılıp z'ye atanırsa, i ve j'nin maliyeti aynı kalırken z'ninki düşer ve c'deki diğer oyuncuların maliyeti de artmaz. Bu yüzden, $|a_y \cap c| = 1$ de olamaz. Bu da demektir ki $|a_y \cap c| \geq 2$.

(6) İspatı tamamlıyoruz: (3)'de tarif edildiği gibi bir $c \in \{c_1, \ldots, c_6\}$ ele alalım. (1) ve (2)'den biliyoruz ki $|L(a) \cap (M_x \cup M_y)| \geq 994$. (5)'den ise biliyoruz ki c'nin en az $2 \times 994 = 1988$ oyuncusu a'da $L(a) \cap (M_x \cup M_y)$'deki kaynaklara atanmıştır. (3)'den ise biliyoruz ki c'nin en az 1159 oyuncusu a'da $H(a) \cap M_z$'deki kaynaklara atanmıştır. O halde $|c| \geq 1988 + 1159 = 3147$. Ancak biliyoruz ki $|c| = 2342$.

□

Teorem 6'dan KSO'larda laminar dengesinin varlık garantisi olmadığını bildiğimize göre Teorem 1 & 2'den dolayı doğrusal ve merkezi dengesinin de yoktur.

Korolari 6. *Bir KSO'nun verilen bir $C \in \mathbb{D}(N)$ veya $C \in \mathbb{M}(N)$ koalisyon yapısı için C-stabil bir ataması olmayabilir. Yani, KSO'larda doğrusal ve merkezi dengesinin de varlık garantisi yoktur.*

4.2 İki Kaynaklı Özel Durum

Bu alt başlığı laminar, doğrusal ve merkezi dengesi çözüm konseptlerini iki kaynaklı KSO'larda çalışmaya adıyoruz. İki kaynaklı KSO'larda eğer i) $C \in \mathbb{L}(N)$ ise ya da ii) $C \in \mathbb{D}(N)$ ve her $c \in C$ için $|c| \neq 2$ ise, her zaman C-stabil bir atamanın var olduğunu ve böyle bir atamanın polinom zamanda bulunabildiğini gösteriyoruz. Yani iki kaynaklı KSO'larda genel durumun aksine her zaman bir laminar dengesi olduğunu göteriyoruz. Bir doğrusal dengesinin ise her zaman var olmadığını ancak dengeyi aslında sadece iki oyunculu koalisyonların bozduğunu ve böyle koalisyonlar olmadığı takdirde doğrusal dengesinin de her zaman var olduğunu gösteriyoruz. Ayrıca bu durumlarda dengeyi polinom zamanda bulabilmek için geliştirdiğimiz "fit" küme tekniğini tanıtıyoruz. Ama öncelikle okuyucuya kolaylık sağlaması için genelliği kaybetmeden aşağıdaki varsayımları yapıyoruz.

İki kaynaklı KSO'larda $q_1 + q_2 \in \{n, n+1\}$ olduğuna dikkat ediniz. Ancak eğer $q_1 + q_2 = n$ ise Korolari 3'den biliyoruz ki bir güçlü Nash dengesi vardır ve polinom zamanda bulunabilir. Bu yüzden genelliği kaybetmeden $q_1 + q_2 = n + 1$ olduğunu varsayabiliriz. Korolari 1'den dolayı bu demektir ki bir Nash dengesinde kaynaklardan biri düşüktür, diğeri de dolayısıyla yüksektir (hatırlayınız ki tanımı gereği en az bir kaynak yüksek olmalıdır). Ayrıca genelliği kaybetmeden $\beta_1 \leq \beta_2$ olduğunu varsayıyoruz. Yukarıda bahsettiğimiz fit eden kümeler tekniği $\beta_1 = \beta_2$ olduğu durumda işe yaramamaktadır. Önce bu eşitlik durumunu aradan çıkartmak için doğrusal ve dolayısıyla laminar dengesinin, $\beta_1 = \beta_2$ iken iki kaynaklı KSO'larda her zaman var olduğunu ve polinom zamanda bulunabildiğini gösteriyoruz.

Lemma 1. *İki kaynaklı bir KSO'da eğer $\beta_1 = \beta_2$ (ve $q_1 + q_2 = n + 1$) ise verilen her $C \in \mathbb{D}(N)$ doğrusal koalisyon yapısı için C-stabil bir atama vardır ve böyle bir atama polinom zamanda bulunabilir.*

İspat. Bir $C \in \mathbb{D}(N)$ doğrusal koalisyon yapısı verilmiş olsun. Kolaylık sağlaması için C'deki her koalisyonun oyuncuların doğal sıralarına göre N'nin bir aralığına denk geldiğini genelliği kaybetmeden varsayabiliriz. Yine genelliği kaybetmeden $q_1 \leq q_2$ olduğunu varsayıyoruz. Aşağıda verilen algoritmanın C-stabil bir atama oluşturduğunu gösteriyoruz:

- 1. kaynağa tam olarak q_1 oyuncu atanana kadar, oyuncuları doğal sırasıyla teker teker alıp bir 1. kaynağa bir 2. Kaynağa ait olacak şekilde atayalım.
- Henüz atanmamış oyuncuların hepsini 2. kaynağa atayalım.

Yukarıdaki algoritmanın sonucunda ortaya çıkan atamaya a dersek $a_1 = \{1, 3, 5, \cdots, 2q_1 - 1\}$ ve $a_2 = \{2, 4, 6, \cdots, 2q_1 - 2\} \cup \{2q_1, 2q_1 + 1, \cdots, n\}$ olduğuna dikkat ediniz. Toplamda ise 1. kaynağa q_1 ve 2. kaynağa $q_2 - 1$ oyuncu atandığına, yani 1. kaynak yüksek iken 2. kaynağın düşük olduğuna dikkat ediniz. O zaman Teorem 3'te geçen karakterizasyondan dolayı a'nın bir Nash dengesi olduğunu biliyoruz. Bu sayede Korolari 4'te iki kaynaklı KSO'larda bir koalisyonun bir atamayı bloklamaması için verilen yeterli şartları a atamasının C-stabil olduğunu göstermek için aşağıdaki şekilde kullanabiliriz:

Diyelim ki $c = \{i, i + 1, \cdots, j\} \in C$ ve $i \leq j$. Eğer $|a_2 \cap c| = 0$ ise $|c| = 1$ olduğuna dikkat ediniz. Bu yüzden Korolari 4'deki 1. şart a ve c için sağlanmaktadır. Şimdi bir $k \in c$ oyuncusunu ele alalım, yani $i \leq k \leq j$ olsun. Eğer $k < j$ ve $k \in a_1$ ise $k + 1 \in a_2$ olduğuna dikkat ediniz. O zaman $|a_1 \cap c| \leq |a_2 \cap c| + 1$ diyebiliriz, yani Korolari 4'teki 2. şart da a ve c için sağlanmaktadır. Korolari 4'teki 3. şart $\beta_1 = \beta_2$ olduğudan a ve c için bağlayıcı değildir. Böylece yukarıdaki algoritma ile polinom zamanda oluşturabilecek a atamasının C-stabil olduğunu göstermiş olduk.

□

4.2.1 Fit kümeler ile denge hesabı

İki kaynaklı KSO'larda $\beta_1 = \beta_2$ iken doğrusal ve dolayısıyla laminar dengesinin varlık garantisi olduğunu ve polinom zamanda bulunabildiğini gösterdik. Şimdi ise $\beta_1 \neq \beta_2$ (yani $\beta_1 < \beta_2$) iken verilen bir C koalisyon yapısı için C-stabil bir atamanın varlığını garanti eden fit küme kavramını tanıtıyoruz.

Fit Küme: *$F \subset N$ oyuncu alt kümesinin verilen bir koalisyon yapısı C için fit küme olması her $c \in C \setminus \mathcal{P}_{=1}(N)$ için $1 \leq |F \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$ sağlanıyor demektir.*

Verilen bir C koalisyon yapısı için her zaman bir F fit kümesinin var olmak zorunda olmadığına dikkat ediniz. Ancak şimdi gösteriyoruz ki eğer öyle bir F varsa C-stabil bir atama da vardır. Dahası, F verildiği takdirde C-stabil bir atamanın polinom zamanda bulunabildiğini gösteriyoruz.

Lemma 2. *İki kaynaklı bir KSO'da eğer $\beta_1 < \beta_2$ (ve $q_1 + q_2 = n + 1$) ise ve verilen bir C koalisyon yapısı için bir F fit kümesi varsa C-stabil bir atama da vardır. Dahası, F verildiği takdirde C-stabil bir atama polinom zamanda bulunabilir.*

İspat. Aşağıda verilen algoritmanın C-stabil bir atama oluşturduğunu gösteriyoruz:

(1) Eğer $|F| \leq q_1 - 1$ ise F'deki her oyuncuyu 1. kaynağa, kalan oyuncuları ise 1. kaynak düşük ve 2. kaynak yüksek olacak şekilde rastgele atayalım.

(2) Aksi takdirde, $N \setminus F$'deki her oyuncuyu 2. kaynağa, kalan oyuncuları ise bu sefer 1. kaynak yüksek ve 2. kaynak düşük olacak şekilde rastgele atayalım

Yukarıdaki algoritmanın sonucunda ortaya çıkan atamaya a diyelim. Teorem 3'de geçen karakterizasyondan dolayı her iki durumda da a'nın bir Nash dengesi olduğuna dikkat ediniz. Bu sayede Korolari 4'de iki kaynaklı KSO'larda bir koalisyonun bir atamayı bloklamaması için verilen yeterli şartları, a atamasının C-stabil olduğunu göstermek için aşağıdaki şekilde kullanabiliriz:

(1) İlk $|F| \leq q_1 - 1$ olduğunu varsayalım ve bir $c \in C$ koalisyonunu ele alalım. $|c| = 1$ ise a bir Nash dengesi olduğu için c'nin a'yı bloklamadığına dikkat ediniz. Bu yüzden genelliği kaybetmeden $|c| > 1$ diye varsayabiliriz. O halde $|F \cap c| \geq 1$ olduğu için $|a_1 \cap c| \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz. Bu yüzden de Korolari 4'ün 1. şartı a ve c için sağlanmaktadır. Koroları 4'ün 2. ve 3. şartları ise $\beta_1 < \beta_2$ olduğundan dolayı a ve c için bağlayıcı değildir. Böylece bu durumda a'nın C-stabil olduğunu göstermiş olduk.

(2) Şimdi ise $|F| > q_1 - 1$ olduğunu varsayalım ve yine bir $c \in C$ koalisyonunu ele alalım. $|c| = 1$ ise a bir Nash dengesi olduğu için c'nin a'yı bloklamadığına dikkat ediniz. Bu yüzden genelliği kaybetmeden $|c| > 1$ diye varsayabiliriz. O halde $|F \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$ olduğu için $|a_1 \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$ ve dolayısıyla da $|a_2 \cap c| \geq \left\lceil \frac{|c|}{2} \right\rceil \geq 1$'dir.

Bu demektir ki Korolari 4'ün 1. şartı a ve c için sağlanmaktadır. 2. şartı ise $\beta_1 < \beta_2$ olduğundan a ve c için bağlayıcı değildir. $|a_2 \cap c| \geq \left\lceil \frac{|c|}{2} \right\rceil \geq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor \geq |a_1 \cap c|$ olduğu için Korolari 4'ün 3. şartı da a ve c için sağlanmaktadır. Böylece bu durumda da a'nın C-stabil olduğunu göstermiş olduk.

Son olarak dikkat ediniz ki F verildiği takdirde yukarıdaki algoritma C-stabil olduğunu gösterdiğimiz bir a atamasını polinom zamanda oluşturmaktadır.

□

4.2.2 Laminar koalisyon yapıları için fit küme hesabı

Şimdi her $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar koalisyon yapısı için bir F fit kümesinin olduğunu ve F'nin polinom zamanda bulunabildiğini göstererek Teorem 7'yi ispatlamış olacağız.

Teorem 7. *İki kaynaklı KSO'larda verilen her $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar koalisyon yapısı için C-stabil bir atama vardır ve böyle bir atama polinom zamanda bulunabilir. Yani iki kaynaklı KSO'larda laminar dengesinin varlık garantisi ve bulanabilmesi için verimli bir algoritması vardır.*

İspat. İki kaynaklı bir KSO $\langle N, M, f \rangle$ verilmiş olsun. Hatırlayacak olursanız genelliği kaybetmeden $q_1 + q_2 = n + 1$ ve $\beta_1 \leq \beta_2$ diye varsaymıştık. Yine hatırlayınız ki $\beta_1 = \beta_2$ ise Lemma 1'den dolayı ispat tamamlanmış olacaktır. Bu yüzden ayrıca $\beta_1 < \beta_2$ diye varsayıyoruz.

Bir $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar koalisyon yapısı verilmiş olsun. C için bir F fit kümesi olduğunu ve F'nin polinom zamanda bulunabildiğini gösterebilirsek, Lemma 2'den dolayı ispat tamamlanmış olacaktır.

Her $c \in C$ için $\mathcal{L}_{>1}(c) = \{c \in C : c' \subset c \; ve \; |c'| > 1\}$ olsun, yani C koalisyon yapısındaki (büyüklüğü bir olmayan) koalisyonlar arasından c'nin alt kümesi olanları $\mathcal{L}_{>1}(c)$ kümesi ile gösteriyoruz. $\mathcal{R}_{>1} = \{c \in C : \mathcal{L}_{>1}(c) = \emptyset \; ve \; |c| > 1\}$ olsun, yani bir $c \in C$ koalisyonunun (birden büyük) hiçbir alt kümesi C'de yoksa $c \in \mathcal{R}_{>1}$.

$\mathcal{R}_{>1}$'deki her koalisyondan rastgele bir oyuncu seçelim ve bu oyuncuların kümesine F diyelim. F'nin polinom zamanda oluşturulabileceğini not ediniz. Şimdi gösteriyoruz ki C koalisyon yapısı için F bir fit kümedir, yani her $c \in C \setminus \mathcal{P}_{=1}(N)$ için $1 \leq |F \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$ sağlanmaktadır:

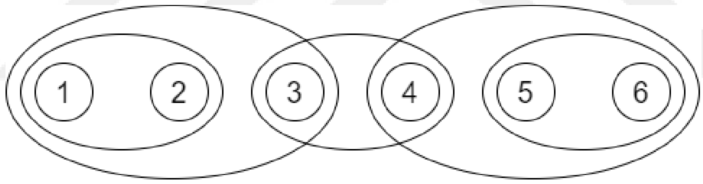
- C laminar olduğu için (birden büyük) her $c \in C$ koalisyonu için ya $c \in \mathcal{R}_{>1}$ ya da öyle bir $c' \in \mathcal{R}_{>1}$ vardır ki $c' \in \mathcal{L}_{>1}(c)$. Bu yüzden $|F \cap c| \geq 1$.
- C laminar olduğu için $\mathcal{R}_{>1}$'deki koalisyonlar ayrışıktır. Ayrıca $\mathcal{R}_{>1}$'deki her koalisyonda en az iki oyuncu olduğu ve bunlardan yalnızca biri F'de olduğu için şunu gözlemleyiniz: bir $c \in C \setminus \mathcal{P}_{=1}(N)$ koalisyonunun F'ye eklenen her oyuncusu için F'ye eklenmeyen özgün bir oyuncusu daha vardır. Bu yüzden $|c| \geq 2 \cdot |F \cap c|$ ve dolayısıyla $|F \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$.

Böylece C için F'nin bir fit küme olduğunu göstermiş ve ispatı bitirmiş olduk.

□

4.2.3 Doğrusal koalisyon yapıları için fit küme hesabı

Teorem 7'yı ispatlamak için kullandığımız fit küme yöntemi doğrusal dengesi çözüm yöntemi için iki oyunculu koalisyonlar varken kullanılamaz. Zira Şekil 4.1'de verilen doğrusal koalisyon yapısı için bir fit küme yoktur.



Şekil 4.1 : Fit küme olmayan doğrusal koalisyon yapısı örneği.

Öncelikle, Şekil 4.1'de verilen koalisyon yapısı için doğrusal dengesinin iki oyunculu KSO'larda her zaman olmadığını gösteriyoruz.

Teorem 8. *İki kaynaklı bir KSO'nun verilen bir $C \in \mathbb{D}(N)$ doğrusal koalisyon yapısı için C-stabil bir ataması olmayabilir. Yani, iki kaynaklı KSO'larda doğrusal dengesinin varlık garantisi yoktur.*

İspat. $N = \{1, \cdots, 6\}$ ve $M = \{1,2\}$ olan iki kaynaklı bir KSO ele alalım. 1. kaynağın maliyeti $1, 2, 4$ diye artsın, yani $f_1(1) = 1$, $f_1(2) = 2$ ve $f_1(3) = 4$ olsun. 2. kaynağın maliyeti ise $1, 2, 3, 4$ diye artsın, yani $f_2(1) = 1$, $f_2(2) = 2$, $f_2(3) = 3$ ve $f_2(4) = 4$ olsun. Şimdi gösteriyoruz ki bu KSO'nun Şekil 4.1'de verilen doğrusal koalisyon yapısı (diyelim ki C) için C-stabil bir ataması yoktur.

Olmayana ergi (çelişki) yöntemini kullanabilmek için, C-stabil bir a atamasının olduğunu varsayıyoruz. $\mathcal{P}_{=1}(N) \subset C$ olduğu için a bir Nash dengesidir. O zaman Teorem 3'de verilen karakterizasyondan dolayı biliyoruz ki ya $|a_1| = 3$ ve $|a_2| = 3$ ya da $|a_1| = 2$ ve $|a_2| = 4$. Şimdi bu iki durumu da ele alıyoruz.

Farz edelim ki $|a_1| = 3$ ve $|a_2| = 3$, yani 1. kaynak yüksek ve 2. kaynak düşük. Bir $c \in C \setminus \mathcal{P}_{=1}(N)$ koalisyonunun en az $\left\lceil \frac{|c|}{2} \right\rceil$ oyuncusu 2. kaynağa atanmış değil ise c'nin a'yı blokladığına dikkat ediniz. O zaman en az 4 oyuncu (mesela $2, 3, 4$ ve 5) 2. kaynağa atanmış olmalıdır ama $|a_2| = 3$ olduğu için bu mümkün değildir.

Farz edelim ki $|a_1| = 2$ ve $|a_2| = 4$, yani 1. kaynak düşük ve 2. kaynak yüksek. Bir $c \in C \setminus \mathcal{P}_{=1}(N)$ koalisyonunun en az bir oyuncusu 1. kaynağa atanmış değil ise c'nin a'yı blokladığına dikkat ediniz. O zaman en az 3 oyuncu (mesela $1, 3$ ve 5) 1. kaynağa atanmış olmalıdır ama $|a_1| = 2$ olduğu için bu mümkün değildir.

Böylece her iki durumda da çelişkiye ulaştık. Bu demektir ki yukarıda verilen KSO'nun C-stabil ataması yoktur.

$\square$

$\mathbb{D}_{\neq 2}(N) = \{C \in \mathbb{D}(N) : c \in C \; ise \; |c| \neq 2\}$ olsun. Şimdi ise her $C \in \mathbb{D}_{\neq 2}(N)$ koalisyon yapısı için bir F fit kümesinin olduğunu ve F'nin polinom zamanda bulunabildiğini göstererek Teorem 8'yı ispatlamış olacağız. Şekil 4.1'deki koalisyon yapısında iki büyüklüğünde birçok koalisyon (mesela $\{3, 4\}$) olduğu için $\mathbb{D}_{\neq 2}(N)$'nin içinde yer almadığına dikkat ediniz.

Teorem 9. *İki kaynaklı KSO'larda verilen her $C \in \mathbb{D}_{\neq 2}(N)$ koalisyon yapısı için C-stabil bir atama vardır ve böyle bir atama polinom zamanda bulunabilir. Yani iki kaynaklı KSO'larda iki büyüklüğünde koalisyonlar yokken doğrusal dengesinin varlık garantisi ve bulanabilmesi için verimli bir algoritması vardır.*

İspat. İki kaynaklı bir KSO $\langle N, M, f \rangle$ verilmiş olsun. Hatırlayacak olursanız genelliği kaybetmeden $q_1 + q_2 = n + 1$ ve $\beta_1 \leq \beta_2$ diye varsaymıştık. Yine hatırlayınız ki $\beta_1 = \beta_2$ ise Lemma 1'den dolayı ispat tamamlanmış olacaktır. Bu yüzden ayrıca $\beta_1 < \beta_2$ diye varsayıyoruz.

Bir $C \in \mathbb{D}_{\neq 2}(N)$ doğrusal koalisyon yapısı verilmiş olsun. Kolaylık sağlaması için C'deki her koalisyonun oyuncuların doğal sıralarına göre N'nin bir aralığına denk geldiğini genelliği kaybetmeden varsayabiliriz. C için bir F fit kümesi olduğunu ve F'nin polinom zamanda bulunabildiğini gösterebilirsek, Lemma 2'den dolayı ispat tamamlanmış olacaktır.

$e(i) = \{c \in C : i \in c \; ve \; |c| \neq 1\}$ olsun, yani C'deki (büyüklüğü bir olmayan) koalisyonlar arasında i oyuncusunu içine alanları $e(i)$ ile gösteriyoruz. Bir i oyuncusu bir c koalisyonunu *örter* dersek $c \in e(i)$'yi kastediyor olacağız. Ayrıca $E(F) = \bigcup_{i \in F} e(i)$ olarak tanımlıyoruz.

Şimdi C koalisyon yapısının bir F fit kümesini bulmak için polinom zamanda çalışan bir algoritma veriyoruz. Bu algoritma boş bir oyuncu kümesi $F = \{\}$ ile başlayıp aşağıdaki şekilde çalışmaktadır:

Sırasıyla her $i = 1, 2, \cdots, n$ için:

- $e(i) = \emptyset$ ise sonraki iterasyona atla.
- $F = \emptyset$ ise i'yi F'ye ekle ve sonraki iterasyona atla.
- $F \neq \emptyset$ ise F'ye eklenen son oyuncuya j de. Ardından:
  - $E(F \cup \{i\}) = E\big((F \setminus \{j\}) \cup \{i\}\big)$ ise j'yi F'den çıkar ve i'yi ekle ve sonraki iterasyona atla.
  - $e(i) \nsubseteq E(F)$ ise i'yi F'ye ekle ve sonraki iterasyona atla.

Şimdi gösteriyoruz ki C koalisyon yapısı için yukarıdaki algoritmanın oluşturduğu F bir fit kümedir, yani her $c \in C \setminus \mathcal{P}_{=1}(N)$ için $1 \leq |F \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$ sağlanmaktadır. Bir $c \in C \setminus \mathcal{P}_{=1}(N)$ koalisyonunu ele alalım.

İlk önce gösteriyoruz ki $|F \cap c| \geq 1$.

Çelişki uğruna farz edelim ki $|F \cap c| < 1$, yani $F \cap c = \emptyset$. O halde $c \notin E(F)$. Bu demektir ki c'nin hiçbir oyuncusu algoritma boyunca F'ye eklenmemiş, zira öyle olsaydı dikkat ediniz ki algoritmanın sonunda F'deki bir oyuncu c'yi örtüyor olurdu. Şimdi bir $i \in c$ oyuncusu ele alalım. Algoritmanın i. iterasyonunda $e(i) \nsubseteq E(F)$ şartı sağlandığı için i mutlaka F'ye eklenmiştir. Bu çelişkiden dolayı $|F \cap c| \geq 1$.

Şimdi ise gösteriyoruz ki $|F \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$.

Bir çift $i, j \in F$ oyuncusu ele alalım. Genelliği kaybetmeden varsayalım ki $j > i$. Önce gösteriyoruz ki $j > i + 2$. Çelişki uğruna farz edelim ki $j \in \{i + 1,\ i + 2\}$. Aşağıda sırasıyla $j \neq n$ ve $j = n$ durumlarını inceliyoruz.

İlk olarak farz edelim ki $j \neq n$. O halde $j + 1 \in N$. Algoritmanın $(j + 1)$. iterasyonunu ele alalım. Ayrıca bir $c' \in e(j)$ koalisyonunu ele alalım ($j \in F$ olduğu için $e(j) \neq \emptyset$ olduğuna dikkat ediniz). Tanım gereği $|c| \geq 3$ olduğunu bildiğimiz için diyebiliriz ki ya $c' \in e(i)$ ya da $c' \in e(j + 1)$. Ama o zaman $i \in F$ olduğu için F'den j çıkarılıp yerine $j + 1$ eklenmiştir. Bu çelişki bize demektedir ki $j > i + 2$.

Şimdi farz edelim ki $j = n$. Bir $c' \in e(j)$ koalisyonunu ele alalım ($j \in F$ olduğu için $e(j) \neq \emptyset$ olduğuna dikkat ediniz). Tanım gereği $|c| \geq 3$ olduğunu bildiğimiz için diyebiliriz ki $c' \in e(i)$. Ama o zaman $i \in F$ olduğu için j'nin F'ye eklenmiş olamaz. Bu çelişki bize demektedir ki $j > i + 2$.

Böylece $j > i + 2$ olduğunu göstermiş olduk. Diğer bir deyişle eğer $i \in F$ ise $i + 1 \notin F$ ve $i + 2 \notin F$. Bu yüzden $|F \cap c| \leq \left\lceil \frac{|c|}{3} \right\rceil$. Son olarak $|c| \geq 3$ olduğu için $\left\lceil \frac{|c|}{3} \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$ olduğuna dikkat ediniz. Bu yüzden $|F \cap c| \leq \left\lfloor \frac{|c|}{2} \right\rfloor$. Böylece C için F'nin bir fit küme olduğunu göstermiş ve ispatı bitirmiş olduk.

□

4.3 Eşdeğer Kaynaklı Özel Durum

Bu alt başlığı eşdeğer kaynaklı KSO'larda doğrusal (ve dolayısıyla laminar) dengesinin varlık garantisinin ve bulunabilmesi için verimli bir algortimanın var olduğunu göstermeye adıyoruz. Merkezi dengesinin varlık garantisininin olmadığını ise eşdeğer kaynaklardan da daha özel KSO'ları çalıştığımız bir sonraki alt başlığa saklıyoruz.

Teorem 10. *Eşdeğer kaynaklı KSO'larda verilen her $C \in \mathbb{D}(N)$ doğrusal koalisyon yapısı için C-stabil bir atama vardır ve böyle bir atama polinom zamanda bulunabilir Yani eşdeğer kaynaklı KSO'larda doğrusal dengesinin varlık garantisi ve bulanabilmesi için verimli bir algoritması vardır.*

İspat. İki kaynaklı bir KSO $\langle N, M, f\rangle$ ve bir $C \in \mathbb{D}(N)$ doğrusal koalisyon yapısı verilmiş olsun. C'deki her koalisyonun, oyuncuların doğal sıralarına göre, N'nin bir aralığına denk geldiğini genelliği kaybetmeden varsayabiliriz. C-stabil bir atama oluşturmak için aşağıda verdiğimiz basit algoritmanın yeterli olduğunu gösteriyoruz (bu algoritmanın polinom zamanda çalıştığı açıktır):

Sırasıyla her $i = 1, 2, \cdots, n$ için:

- i oyuncusunu $(i - 1 \mod m) + 1$ kaynağına ata.

Diğer bir deyişle, yukarıdaki algoritma 1. kaynaktan başlayarak bütün oyuncuları birer birer kaynaklara atar ve her kaynağa bir oyuncu atadıktan sonra 1. kaynağa geri dönüp kalan oyuncular için bunu tekrar eder. Sonda oluşan atamaya a diyelim. O halde dikkat ediniz ki a'da her kaynak çiftine atanan oyuncu sayısı arasındaki fark en fazla bir olabilir. Bu yüzden, a ataması Teorem 3'de geçen karakterizasyona göre bir Nash dengesidir. O halde $H(a) = \{1, \cdots, |H(a)|\}$ ve $L(a) = \{|H(a)| + 1, \cdots, m\}$.

Her $h \in H(a)$ ve $l \in L(a)$ için $h < l$ olduğundan dolayı, algoritma bir oyuncuyu düşük bir kaynağa atamadan önce yüksek her kaynağa bir oyuncu atar. Bu yüzden algoritma bir $c \in C$ koalisyonunun bir oyuncusunu yüksek bir kaynağa atamadan önce her düşük kaynağa c'den en fazla bir oyuncu eklemiş olabilir. Diğer yandan, algoritma bir $c \in C$ koalisyonunun bir oyuncusunu yüksek bir $h \in H(a)$ kaynağına ilk defa atadıktan sonra, h kaynağına c'nin bir oyuncusunu daha atamadan önce her $l \in L(a)$ kaynağına c'den birer oyuncu atar. O halde, her $h \in H(a)$ ve $l \in L(a)$ için $|a_h \cap c| \leq |a_l \cap c| + 1$. Böylece, Korolari 5'de eşdeğer kaynaklı KSO'larda bir koalisyonun bir atamayı bloklamaması için verilen yeterli şartlar a atamasının C-stabil olduğunu göstermektedir.

□

Teorem 1'den dolayı Teorem 10 ayrıca aşağıdaki korolariye sahiptir.

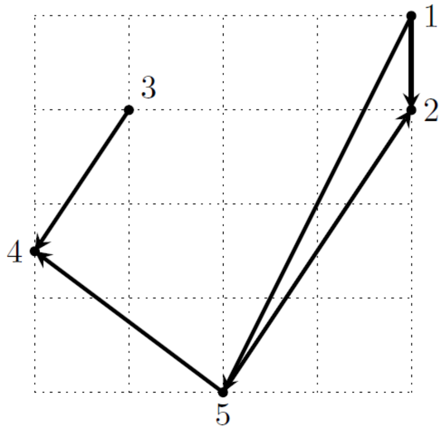
Korolari 7. *Eşdeğer kaynaklı KSO'larda verilen her $C \in \mathbb{L}(N)$ laminar koalisyon yapısı için C-stabil bir atama vardır ve böyle bir atama polinom zamanda bulunabilir. Yani eşdeğer kaynaklı KSO'larda laminar dengesinin varlık garantisi ve bulanabilmesi için verimli bir algoritması vardır.*

4.4 İki Eşdeğer Kaynaklı Özel Durum

Bu alt başlığı tıpkı güçlü Nash dengesi gibi merkezi dengesinin de iki eşdeğer kaynaklı KSO'larda bile varlık garantisinin olmadığını göstermeye adıyoruz. Böylece daha genel koalisyon yapısı sınıflarını kaynak seçme oyunlarında çalışmanın denge varlık garantileri açısından bir getirisi olmadığını göstermiş olacağız.

Teorem 11. *İki eşdeğer kaynaklı bir KSO'nun verilen bir $C \in M(N)$ merkezi koalisyon yapısı için C-stabil bir ataması olmayabilir. Yani, iki eşdeğer kaynaklı KSO'larda merkezi dengesinin varlık garantisi yoktur.*

İspat. $N = \{1, \cdots, 5\}$ ve $M = \{1,2\}$ olan iki eşdeğer kaynaklı bir KSO ele alalım. $C = \mathcal{P}_{=1}(N) \cup \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,4\}, \{1,2,3,5\}, \{5,2,3,4\}\}$ olsun. Bu koalisyon yapısının merkezi olduğunu görmek için Şekil 4.2'ye bakınız. Bu şekilde anlaşılabilirlik için koalisyonlar daireler yerine oklar ile temsil edilmiştir. Okların kuyrukları dairelerin merkezlerine, uzunlukları ise yarıçaplarına karşılık gelmektedir. (Şekilin basitliğini korumak için tek oyunculu koalisyonlar belirtilmemiştir.)



Şekil 4.2 : C-stabil bir atamanın olmadığı bir C merkezi koalisyon yapısı.

Şimdi C-stabil bir atamanın var olmadığını gösteriyoruz. Çelişki uğruna, C-stabil bir a atamasının var olduğunu farz edelim. Dikkat ediniz ki $\mathcal{P}_{=1}(N) \subset C$ olduğu için a bir Nash dengesidir. O zaman Teorem 3'de verilen karakterizasyondan dolayı biliyoruz ki a'da kaynaklardan birine 2 diğerine ise 3 oyuncu atanmış olmalıdır. Genelliği kaybetmeden $|a_1| = 2$ ve $|a_2| = 3$ diye varsayalım.

$1 \in a_1$ ise $\{5, 2, 3, 4\}$ koalisyonunun, $4 \in a_1$ ise de $\{1, 2, 3, 5\}$ koalisyonunun a'yı bloklayacağına dikkat ediniz. Bu yüzden $1, 4 \in a_2$. O zaman $2 \in a_2$ ise $\{1, 2\}$ koalisyonunun, $3 \in a_2$ ise $\{3, 4\}$ koalisyonun, $5 \in a_2$ ise de $\{4, 5\}$ koalisyonunun a'yı bloklayacağına dikkat ediniz. Bu yüzden $2, 3, 5 \in a_1$. Ama bu $|a_1| = 2$ ile çelişmektedir. Böylece C-stabil bir atamanın olmadığını göstermiş olduk.

$\square$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde sosyal açıdan partisyonlardan daha komplike koalisyon yapılarını modelleyen laminar, doğrusal ve merkezi dengesi çözüm konseptleri kaynak seçme oyunları üzerinde çalışılmıştır. Partisyon dengesinin aksine laminar (dolayısıyla doğrusal ve merkezi) dengesinin varlık garantisinin olmadığı gösterilmiştir. Belirli özel durumlarda ise laminar ve doğrusal dengesinin varlık garantisinin olduğu ve verimli bir algoritma ile bulunabildiği gösterilmiştir Ancak merkezi dengesinin tıpkı güçlü Nash dengesi gibi iki eşdeğer kaynaklı özel durumda bile olmadığı gösterilmiştir.

Eğer bir s strateji profili $\{N\}$-stabil ise s'ye Pareto verimli denmektedir. Öyleyse kaynak seçme oyunlarında Pareto verimli, partisyon dengesi ve Nash dengesi olan bir atamanın her zaman var olmadığını Teorem 6'da gösterdiğimize dikkat ediniz. Eğer kaynak seçme oyunlarının aksine her oyuncunun her kaynağa erişimi yoksa (yani her oyuncu belirli bir kaynak kümesine erişebiliyorsa) bu oyunlara *asimetrik kaynak seçme oyunları* denir. Yakın bir çalışmada eşdeğer kaynaklı asimetrik kaynak seçme oyunlarında Pareto verimli, partisyon dengesi ve Nash dengesi olan bir atamanın her zaman var olduğu da gösterilmiştir [36].

KAYNAKLAR

[1] **Von Neumann, J., Morgenstren, O.,** (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Presss.

[2] **Bernard, J.,** (1954). The theory of games of strategy as a modern sociology of conflict, *American Journal of Sociology*, 59(5), 411-424.

[3] **Colman, A.M.,** (2003). Cooperation, psychological game theory, and limitations of rationality in social interaction, *Behavioral and Brain Sciences*, 26(02), 139-153.

[4] **Smith, J.,** (1982). *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge: Cambridge University Press.

[5] **Russell, S. J., Norvig, P.,** (2003). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

[6] **Dijkstra, E. W.,** (1959). A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, 1, 269–271.

[7] **Pettie, S., Ramachandran, V.,** (2002). An optimal minimum spanning tree algorithm, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 49(1), 16-34.

[8] **Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.,** (2009). *Introduction to Algorithms*, USA: The MIT Press.

[9] **Kleinberg, J., Tardos, E.,** (2005). *Algorithm Design*, Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.

[10] **Hearn, R. A., Demaine, E. D.,** (2009). *Games, Puzzles, and Computation*, Natick, MA, USA: A. K. Peters, Ltd.

[11] **Nisan, N., Roughgarden, T., Tardon, E., Vazirani, V.V.,** (2007). *Algorithmic Game Theory*, New York: Cambridge University Press.

[12] **Roughgardan, T.,** (2016) *Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory*, New York, NY, USA: Cambridge University Press.

[13] **Shoham, Y. Brandt, F., Fischer, F., Harrenstein, Paul.,** (2007). A game-theoretic analysis of strictly competitive multiagent scenarios, *Proceedings of the 20th international joint conference on Artifical intelligence*. 1199-1206.

[14] **Shoham, Y., Leyton-Brown, K.,** (2008). *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*, New York, NY, USA: Cambridge University Press.

[15] **Caskurlu, B., Kizilkaya, F.E.,** (2019). On hedonic games with common ranking property, Proceedings of the 11th International Conference on Algorithms and Complexity, LNCS 11485, 137–148.

[16] **Caskurlu, B., Kizilkaya, F.E., Ozen, B.,** (2020). Hedonic expertise games, *Computing Research Repository*, 2011.01778 [cs.GT].

[17] **Nash, J.,** (1951). Non-Cooperative games, *Annals of Mathematics*, 54(2), 286–295.

[18] **Aumann, R.J.,** (1959). Acceptable points in general cooperative n-person games, *Contributions to the Theory of Games IV*, Editörler: Luce, R. D., Tucker, A. W. Princeton: Princeton University Press.

[19] **Feldman, M., Tennenholtz, M.,** (2010). Structured coalitions in resource selection games, *ACM Trans. Intell. Syst. Technol.*, 1(1), 4.

[20] **Anshelevich, E., Çaşkurlu, B., Hate, A.,** (2013). Partition equilibrium always exists in resource selection games, *Theory of Computing Systems*, 53(1), 73–85.

[21] **Roughgardan, T., Tardos, E.,** (2002). How bad is selfish routing?, *J. ACM*, 49(2), 236–259.

[22] **Anshelevich, E.,** et. al. (2004). The price of stability for network design with fair cost allocation, *Proc. 45th Symp. Fdns. of Computer Science*, 295–304.

[23] **Caragiannis, I.,** et. al. (2006). Tight bounds for selfish and greedy load balancing, *Proc. 33rd Intl. Colloq. on Automata, Languages, and Programming*, 311–322.

[24] **Rosenthal, R.W.,** (1973). A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria, *International Journal of Game Theory*, 2, 65–67.

[25] **Holzman, R., Law-Yone, N.,** (1997). Strong equilibrium in congestion games, *Games and Economic Behavior*, 21(1-2), 85–101.

[26] **Bernheim, B.D., Peleg, B., Whinston, M.D.,** (1987). Coalition-proof Nash equilibria concepts, *J. Econ. Theory*, 42(1), 1–12.

[27] **Konishi, H., Le Breton, N., Weber, S.,** (1997). Equilibria in a model with partial rivalry, *J. Econ. Theory* 72(1), 225–237.

[28] **Konishi, H., Le Breton, M., Weber, S,** (1999). On coalition-proof Nash equilibria in common agency games, *J. Econ. Theory*, 85(1), 122–139.

[29] **Moreno, D., Wooders, J.,** (1996) Coalition-proof equilibrium, *Games and Economic Behavior*, 17(1), 80–112.

[30] **Hayrapetyan, A., Tardos, E., Wexler, T.,** (2006). The effect of collusion in congestion Games, *Proceedings of the thirty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, 89–98.

[31] **Roughgarden, T.** (2005). Selfish routing with atomic players, *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1184–1185.

[32] **Cominetti, R., Correa, J.R., Stier-Moses N.E.,** (2006). Network games with atomic players, *ICALP 2006: Automate Languages and Programming*, 525–536.

[33] **Hoefer, M., Penn, M., Polukarov, M., Skopalik, A., Vöcking, B.,** (2011). Considerate equilibrium, *Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 1, 234–239.

[34] **Caskurlu, B., Ekici, O., Kizilkaya, F.E.,** (2020). On existence of equilibrium under social coalition structures, *Proceedings of the 16th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation*, LNCS 12337, 263–274.

[35] **Caskurlu, B., Ekici, O., Kizilkaya, F.E.,** (2020). On efficient computation of equilibrium under social coalition structures, *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 28, 1686–1698.

[36] **Caskurlu, B., Ekici, O., Kizilkaya, F.E.,** (2020). On singleton congestion games with resilience against collusion, *Computing Research Repository*, 2011.01791 [cs.GT].

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Fatih Erdem Kızılkaya
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 21.06.1996 Altındağ/Ankara
E-posta : fatiherdemkizilkaya@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2018, TOBB ETÜ, Bilgisayar Müh.
- **Yüksek Lisans** : 2020, TOBB ETÜ, Bilgisayar Müh.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2018 – 2020	TOBB ETÜ	Özel Başarı Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Caskurlu, B., Ekici, O., **Kizilkaya, F.E.**, (2020). On existence of equilibrium under social coalition structures, *Proceedings of the 16th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation*, LNCS 12337, 263–274.
- Caskurlu, B., Ekici, O., **Kizilkaya, F.E.,** (2020). On efficient computation of equilibrium under social coalition structures, *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 28, 1686–1698.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Caskurlu, B., Ekici, O., **Kizilkaya, F.E.**, (2020). On singleton congestion games with resilience against collusion, *Computing Research Repository*, 2011.01791 [cs.GT].
- Caskurlu, B., **Kizilkaya, F.E.**, Ozen, B., (2020). *Hedonic expertise games, Computing Research Repository*, 2011.01778 [cs.GT].
- Caskurlu, B., **Kizilkaya, F.E.**, (2019). On hedonic games with common ranking property, *Proceedings of the 11th International Conference on Algorithms and Complexity*, LNCS 11485, 137–148.