

**HABER VERMEYEN ARIZALARA SAHİP SİSTEMLER İÇİN BAKIM  
POLİTİKALARI**

**BÜŞRA KELEŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ**

**TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2014**

**ANKARA**

Fen Bilimleri Enstitü onayı

---

Prof. Dr. Osman EROĞUL  
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

---

Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU  
Anabilim Dalı Başkanı

BÜŞRA KELEŞ tarafından hazırlanan HABER VERMEYEN ARIZALARA SAHİP SİSTEMLER İÇİN BAKIM POLİTİKALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

---

Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN

Tez Danışmanı

---

Doç. Dr. N. Onur BAKIR

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Erdem ACAR

Üye : Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

**Büşra KELEŞ**

**Üniversitesi** : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
**Enstitüsü** : Fen Bilimleri  
**Anabilim Dalı** : Endüstri Mühendisliği  
**Tez Danışmanı** : Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN  
**2. Tez Danışmanı** : Doç. Dr. N. Onur BAKIR  
**Tez Türü ve Tarihi** : Yüksek Lisans – Temmuz 2014

**Büşra KELEŞ**

## **HABER VERMEYEN ARIZALARA SAHİP SİSTEMLER İÇİN BAKIM POLİTİKALARI**

### **ÖZET**

Bu çalışmada Markov eskleyen bir sistemin optimal bakım politikası, maliyeti enküçükleyen ve kontrol zamanını eniyileyen rassal karar modeli kurularak hesaplanmaktadır. Karar verici mekanizma sistemi periyodik olarak kontrol ederek sistem durumuna bağılı (iyi, kritik, arızalı) uygun aksiyonlardan (hiçbir şey yapma, tamir, yenile) birini seçmektedir. Arızalanmaların ancak kontrol anlarında tespit edildiğı, haber vermeyen arızalara sahip sistemlerde anlık arızalar hem sistem kullanılabilirliğı hem de sistem maliyeti açısından istenmeyen sonuçlara sebep olabilir. Bu bağlamda arızalı sürenin beklenen değeri hesaplanmış, birim arızalı süre başına düşen maliyet başta olmak üzere kontrol maliyeti ve bakımdan kaynaklanan sabit maliyetler gibi çeşitli maliyetler çalışmada önerilmiştir. Kontrol maliyeti sık gözlemleri önlemek amacıyla zamana bağılı artmayan bir fonksiyon olarak alınmış ve periyodik gözlemin yanı sıra sürekli gözleme de yer verilmiştir. Tüm aksiyonlar altında olası beş farklı bakım politikası incelenerek yenileme teorisinin yardımıyla her politika için optimum kontrol zamanını bulan bakım modelleri kurulmuştur. Sayısal örnekler ile kontrol zamanlarının analitik değerleri hesaplanmış ve model parametrelerinin bakım planı üzerindeki etkisi analiz edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bakım Politikası, Periyodik Kontrol, Haber Vermeyen Arızalar, Yenileme Teorisi.

**University** : TOBB University of Economics and Technology  
**Institute** : Institute of Natural and Applied Sciences  
**Science Programme** : Industrial Engineering  
**Supervisor** : Assist. Prof. Dr. Salih TEKİN  
**Co-Supervisor** : Assoc. Prof. Dr. N. Onur BAKIR  
**Degree Awarded and Date** : M.Sc. – JULY 2014

**Büşra KELEŞ**

**MAINTENANCE POLICIES FOR DETERIORATING SYSTEMS SUBJECT  
TO NON-SELF-ANNOUNCING FAILURES**

**ABSTRACT**

In stochastically failing systems, maintenance activities are crucial to improve system availability performance, particularly, when the failures are non-self-announcing in which failures can only be detected through inspections. In this study, we comparatively evaluate various maintenance policies for systems subject to continuous time Markovian deterioration which may result in non-self-announcing failures. For each policy, the decision maker inspects the system periodically at the decision epochs, identifies the current state; good, poor, or failed and chooses an available action; do-nothing, repair, or replace. By the help of renewal theory, the objective is to minimize the expected long-run cost rate which consists of various components such as inspection, downtime, and maintenance costs. We provide a numerical example to analyse the effect of various cost parameters on the optimum inspection period and policy.

**Keywords:** Maintenance Policy, Periodic Inspection, Non-self-announcing Failures, Renewal Theory.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince engin bilgi ve deneyimleriyle çalışmalarımı yönlendiren, ilgi ve desteklerini esirgemeyen, bana rehberlik eden çok değerli tez danışmanlarım ve hocalarım Yrd. Doç. Salih TEKİN ve Doç. Dr. N. Onur BAKIR'a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Bilimsel katkılarının yanı sıra manevi destekleri benim için her zaman değerli olacaktır.

Maneviyatıma sağladığı eşsiz destekle daima yanımda olan Onur ÖKTEM'e, yüksek lisansın bana kazandırmış olduğu çok sevgili dostum E. Burcu DİLDEN'e, en önemlisi destekleri ve fedakarlıkları sayesinde bugünlere gelmemi sağlayan saygıdeğer aileme gönülden teşekkür ederim.

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine ve ayrıca jüri üyelerinden Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU ve Doç. Dr. Erdem ACAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b>	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b>	<b>vii</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>TABLO LİSTESİ</b>	<b>xi</b>
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2 LİTERATÜR</b>	<b>4</b>
2.1 Klasik Bakım Modelleri . . . . .	4
2.2 Haber Vermeyen Arızalara Sahip Sistemler İçin Bakım Modelleri . . .	8
<b>3 PROBLEM TANIMI VE SİSTEM MODELLEMESİ</b>	<b>11</b>
3.1 Model Kurulumu . . . . .	16
3.1.1 Geçiş Olasılıkları . . . . .	16
3.1.1.1 Durum 1'den geçiş olasılıkları . . . . .	18
3.1.1.2 Durum 2'den geçiş olasılıkları . . . . .	21
3.1.1.3 Durum 3'den geçiş olasılıkları . . . . .	22
3.1.2 Beklenen Arıza Süresi . . . . .	23

3.1.2.1	Durum 1'den oluşacak beklenen arıza süresi . . . . .	23
3.1.2.2	Durum 2'den oluşacak beklenen arıza süresi . . . . .	33
3.1.3	Ortalama Maliyet Oranı . . . . .	34
3.1.3.1	Politika 1, $\Pi_1$ : (Hiçbir şey yapma, Hiçbir şey yapma, Majör Tamir) . . . . .	36
3.1.3.2	Politika 2, $\Pi_2$ : (Hiçbir şey yapma, Hiçbir şey yapma, Yenile) . . . . .	38
3.1.3.3	Politika 3, $\Pi_3$ : (Hiçbir şey yapma, Minör Tamir, Majör Tamir) . . . . .	39
3.1.3.4	Politika 4, $\Pi_4$ : (Hiçbir şey yapma, Minör Tamir, Yenile) . . . . .	41
3.1.3.5	Politika 5, $\Pi_5$ : (Hiçbir şey yapma, Yenile, Yenile) . . . . .	42
3.2	Optimal Politika ve Optimal Kontrol Periyodu . . . . .	43
<b>4</b>	<b>SAYISAL ÇALIŞMA</b>	<b>47</b>
4.1	Durumlar Arası Geçiş Hızlarının Optimalite Üzerindeki Etkisi . . . . .	47
4.2	Bakım Parametrelerinin Optimalite Üzerindeki Etkisi . . . . .	56
4.2.1	Kontrol Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi . . . . .	56
4.2.2	Yenileme Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi . . . . .	60
4.2.3	Tamir Parametrelerinin Optimalite Üzerindeki Etkisi . . . . .	63
<b>5</b>	<b>SONUÇ</b>	<b>71</b>
	<b>KAYNAKLAR</b>	<b>73</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>77</b>



# ŞEKİLLERİN LİSTESİ

3.1	Dışardan müdahale olmadığındaki olasılık geçişleri . . . . .	16
3.2	Tüm politikalar için olasılık geçişleri . . . . .	17
3.3	Durum 1'den durum 3'e geçiş olasılığı gösterimi . . . . .	19
3.4	Arıza süresi gösterimi . . . . .	23
4.1	Çabuk arızalanan sistem için $\lambda_{13}$ geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi . . . . .	49
4.2	Geç arızalanan sistem için $\lambda_{13}$ geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi . . . . .	49
4.3	Geçiş hızı $\lambda_{13}$ 'ün optimum kontrol zamanı ve politikalar üzerindeki etkisi . . . . .	51
4.4	Çabuk arızalanan sistem için $\lambda_{23}$ geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi . . . . .	52
4.5	Geç arızalanan sistem için $\lambda_{23}$ geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi . . . . .	52
4.6	Geçiş hızı $\lambda_{23}$ 'ün optimum kontrol zamanı ve politikalar üzerindeki etkisi . . . . .	54
4.7	Geçiş hızı $\lambda_{12}$ 'nin optimum kontrol zamanı ve politikalar üzerindeki etkisi . . . . .	55
4.8	Çabuk arızalanan sistem için kontrol maliyeti analizi . . . . .	57
4.9	Geç arızalanan sistem için kontrol maliyeti analizi . . . . .	59
4.10	Çabuk arızalanan sistem için yenileme maliyeti analizi . . . . .	61
4.11	Geç arızalanan sistem için yenileme maliyeti analizi . . . . .	62

4.12	Çabuk arızalanan sistem için majör tamir analizi 1 . . . . .	64
4.13	Çabuk arızalanan sistem için majör tamir analizi 2 . . . . .	65
4.14	Geç arızalanan sistem için majör tamir analizi 1 . . . . .	66
4.15	Geç arızalanan sistem için majör tamir analizi 2 . . . . .	67
4.16	Olasılık analizi . . . . .	68
4.17	Bakım süresi analizi . . . . .	69

# TABLULARIN LİSTESİ

2.1	Bakım kategorileri . . . . .	5
3.1	Politikaların gösterimi . . . . .	14
4.1	Sayısal örnekteki parametrelerin gösterimi . . . . .	48

# 1. GİRİŞ

18. yüzyılda Avrupa'da ortaya çıkan Sanayi Devrimi ile birlikte, buhar gücünün yerini makinalaşmış endüstrinin alması sonucunda hızla ilerleyen teknolojik gelişmelerin etkisi günlük hayatımız içerisinde sıklıkla görülmektedir. Eskiden hayal bile edemediğimiz ürünleri artık günümüzde işletmeler, makinalaşmış sistemler kurarak bizlere sunmaktadır. Verimliliği, kaliteyi ve sürekliliği sağlayabilmek için bu tip sistemlerin çeşitli bakım kontrollerine tabi tutulması ve uygun adımların atılması büyük bir önem arz etmektedir. Bu bağlamda işletmeler herhangi bir bakım politikasını takip ederken en düşük bakım maliyeti ile sistem kullanılabilirliğini (*availability*) artırmak isterler. Bu amaca yönelik ele alınan bu çalışmada, rassal olarak eskiyen bir sistem için verilen bakım maliyet kalemleri ve diğer bakım parametreleri doğrultusunda en iyi bakım politikaları incelenmekte ve hangi parametrelerin politikalar üzerinde etkisi olduğu sayısal örnekler ile gözlemlenmektedir.

Güvenilirlik (*Reliability*) literatüründe sistem bakım modellemesine yönelik çalışmalar oldukça geniş yer tutmaktadır. Çalışmalarda ele alınan hemen hemen her tip sisteme güncel hayatta sıklıkla karşılaşılabılır. Örneğin seri üretim yapan fabrika makinaları yılın belirli zamanlarında bakım kontrollerinden geçmektedir. Karar mekanizması kontroller sonucu sistemin durumuna göre çeşitli tamir tiplerine başvurabileceği gibi sistemi tamamen yenisiyle değiştirme kararını da alabilmektedir. Çünkü beklenmedik arızalanmalar, hem maddi hem de manevi açıdan büyük zararlara yol açabilir. Hastanelerde veya askeriyede kullanılan ekipmanlar, hava taşıtları ve denizaltılar yine bu tip sistemlere örnektir. Arızalanmaların haber vermediği durumlarda ise zarar katlanarak artmaktadır. Literatürde bu tip sistemlere örnek olarak güvenlik sistemleri, sensör cihazları ve elektrik röleleri verilir. Diğer taraftan, sağlık ekipmanları gibi hassas cihazların hassasiyet özelliğini kaybederek yanlış değerleri göstermeye başlaması ve kontrole kadar fark edilememesi yine haber vermeyen arızalara örnek olarak gösterilebilir. Sonuç olarak böyle sistemlerde beklenmedik arızalanmaların önüne geçebilmek için bakım politikasının belirlenmesi, hatta arızalanmaların haber vermediği sadece kontroller sonucunda tespit edilebildiği durumlarda sistemin hangi sıklıkla kontrol edilip hangi bakım kararlarının alınması gerektiği büyük bir önem teşkil etmektedir.

Bu çalışmada periyodik olarak kontrol edilen rassal eskimeye sahip bir sistem ele alınmıştır. Her kontrol anında sistem durumu "iyi", "kritik" veya "arızalı" olup, uygun aksiyonlardan "hiçbir şey yapma", "tamir et", "yenile" biri seçilmektedir. Sistem durumu iyi iken, kesin olarak hiçbir şey yapmama aksiyonu seçilirken, kritik iken hiçbir şey yapma kararı alınabileceği gibi bakım aksiyonunda (tamir et veya yenile) alınabilmektedir. Sistemin işlev görmediği arızalı durumda ise kesin olarak bakım aksiyonlarından biri seçilir. Burada tamir veya yenileme aksiyonu, alındığı andaki sistem durumuna göre önleyici bakım veya düzenleyici bakım olmaktadır. Bir başka deyişle, sistem kritik durumdayken alınan tamir veya yenileme kararı önleyici bakım olarak nitelendirilirken, arızalı durumlu sistemlerde yapılan bakım düzenleyici bakım olarak adlandırılır. Ayrıca, tamir aksiyonları alındıkları sistem durumuna göre maliyet, süre ve başarı olasılıkları açısından farklılık gösterirler. Bu farklılığı belirtmek amacıyla kritik durumda yapılan tamire minör tamir, arızalı durumda yapılan tamire majör tamir denilmiştir. Fakat yenileme aksiyonu için böyle bir farklılıktan bahsedilemez. Çünkü sistem hangi durumda olursa olsun 1 olasılığı ile sabit bir maliyet karşılığında yenisiyle değiştirilmektedir.

Diğer taraftan, sistemin bir kontrol periyodu içerisindeki sahip olduğu durumdaki bulunma zamanlarının (*holding times*) üstel dağıldığı varsayılır. Bu bağlamda, sistemin rassal eskime süreci Markov özelliğini sağlamaktadır. Yani, sistem durumunun bir sonraki kontrol zamanında ne olacağı sadece bir önceki kontroldeki sistem durumuna bağlı, geçmişten bağımsızdır. O halde bir kontrol periyodu içerisinde sistem durumları arası geçiş olasılıkları sürekli-zaman Markov sürecini oluştururken, sistemin kontrol anlarındaki sahip olduğu durum uzayının iyi, kritik ve arızalıdan oluşması karar sürecinin ayrık durumlu Markov özelliği taşıması durumunu doğurmaktadır.

Çalışmadaki en temel varsayım, sistem durumunun ancak kontrol zamanlarında tespit edilmesidir ki bu varsayım arızalanmaların "haber vermeyen arızalar" olduğunu gösterir. Ayrıntılı olarak, iyi durumlu sistemlerde arızalanmalar iki farklı şekilde olabilir: Şok arızalanma ve aşamalı arızalanma. Şok arızalanmalarda sistem bir kontrol periyodu içerisinde iyi durumdan direkt arızalı duruma geçerken, aşamalı arızalanmalarda sistem bir kontrol periyodu içerisinde iyi durumdan önce kritik duruma, sonra da arızalı duruma geçer. Kritik durumda hiç birşey yapmama aksiyonu altında ele alınan sistemler için ise kritik durumdan arızalı duruma geçiş direkt olacaktır. O halde sistem eğer kontrol zamanında arızalı olarak tespit edilmiş ise, ne kadar süredir arızalı olduğunun beklenen değeri bu çalışmada hesaplanmaktadır.

Problemde sistem durumlarına göre alınan aksiyonlara bağılı değişen, olası beş farklı bakım politikası önerilmiştir. Önerilen tüm politikalar için amaç fonksiyonu uzun vadedeki maliyet oranının en küçüklenmesidir. En iyi bakım politikası ve en iyi kontrol periyodunu belirlemek amaçlı kurulan maliyet fonksiyonu için yenileme teorisinden yararlanılmıştır. Burada yenileme çevrimi, iyi durumlu bir sistemin en az bir bakım aksiyonu alınarak tekrar iyi duruma geri dönmesiyle sonlanır. Her politikanın sahip olduğu çevrim süresi ve çevrim maliyeti hesabı için Markov özelliğinden yararlanılarak özyinelemeli (rekursive) denklemler kurulmuştur.

Elbette bazı sistemler için bakım maliyeti ne olursa olsun sistem kullanılabilirliği (*availability*) ön planda olabilmektedir. Bu bağlamda problemin güvenilirlik ölçütü olan kullanılabilirlik analizi ele alınmış, fakat problem açık çözümlere (*trivial solutions*) sahip olduğundan dolayı bu durum sayısal örneklerle incelenmemiş; sadece bir sonuç olarak gösterilmiştir.

Beş bölümde analiz edilen bu tez çalışmasının bir sonraki bölümünde gerekli literatür çalışması, ele alınan problemin günümüze kadar incelenen bakım modelleri ile ilgili bağlantıları kurularak verilmektedir. Temel bakım problemleri incelenerek, çalışmanın literatürdeki yeri vurgulanmaktadır. Bölüm 3'te çalışmanın problem çözümüne yönelik öncelikle sistemin rassal eskime süreci tanımlanmakta, gerekli matematiksel hesaplamalar yapılmakta ve daha sonra bakım politikaları geliştirilerek optimalite şartları incelenmektedir. Sayısal örnekler ile Bölüm 4'te desteklenen problem, çeşitli bakım maliyetleri ve süreleri gibi pek çok girdi parametresine bağılı olarak bakım politikalarının kendi aralarında nasıl değiştiğini anlamak üzere analiz edilmiştir. Son olarak 5'inci bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlara ait yorumlar yer almaktadır. Aynı zamanda geleceğe yönelik çalışmalara dair öneriler de Bölüm 5'te verilmektedir.

## 2. LİTERATÜR

Literatürde geniş çapta incelenen rassal eskimeye sahip sistemler için bakım problemlerinin temelleri 1950'li yıllara dayanmaktadır. Basit varsayımlar ile incelenmeye başlayan bakım problemleri zamanla yeni bilgiler ışığında daha kompleks sistemlerin analiziyle devam etmiştir. Öncelikle iki duruma sahip (iyi ve arızalı) sistemler için sistemin ne zaman yenilenmesi gerektiği gibi problemler incelenirken zamanla üç veya daha fazla duruma sahip sistemler için önleyici bakım kararlarından oluşan bakım problemleri analiz edilmiştir. Bu alandaki ilk çalışmalar Bellman [1], Derman [3], Klein [5] gibi pek çok araştırmacı tarafından yapılmış; fakat Barlow ve Proschan tarafından bakım problemlerinin genellemesi 1965 yılında *Mathematical Theory of Reliability* [6] adlı tek bir kitapta toplanmıştır. Çalışmalar, 1980'li yıllarda hız kazanmış ve günümüzde hala incelenmeye devam etmektedir.

Literatür çalışmasında temel alınan konular, klasik bakım problemleri ve haber vermeyen arızalara sahip sistemler için bakım problemleri şeklinde iki ana başlıkta incelenecektir.

### 2.1 Klasik Bakım Modelleri

Literatürdeki sistem bakım problemleri, sistemin eskime süreci, bakım çeşitleri ve varsayımları, sistemin anlık veya periyodik olarak gözlemlenmesi ve optimizasyon kriteri gibi faktörler bakımından birbirlerine göre farklılık göstermektedir. Bu bağlamda günümüze kadar yüzlerce model kurulmuş, fakat her bir modelin yer aldığı kategoriler zamanla oluşmuştur. Genel haliyle kategoriler ve içerikleri Tablo 2.1'deki gibidir.

Bilinen en yaygın ve popüler bakım politikası yaşa bağlı önleyici bakım politikasıdır. Bu politika altında sistem belirli bir yaşa geldiğinde hala çalışır durumdaysa önleyici bakım olarak bakımdan geçer. Bu alandaki çalışmalar Morse [2]'nin 1958'deki eserine dayanmaktadır. Barlow ve Hunter [4] tarafından 1960 yılında incelenen yaşa bağlı yenileme politikası, yaşa bağlı önleyici bakım politikasının özelleşmiş halidir. Öyle ki belirli bir arıza hızına sahip sistem ya arızalandığında ya da  $T$  yaşına geldiğinde önleyici olarak yenilenir. Daha sonraki çalışmalarında yenileme aksiyonları yerine farklı bakım türlerini de incelemiştir. Bu alandaki detaylı çalışmalarını anlatmadan önce

bakım türlerinden bahsetmekte fayda vardır.

Tablo 2.1: Bakım kategorileri

<b>Bakım Politikası</b>	<b>Sistem Biçimi</b>	<b>Bakım Özelliği</b>
Yaşa bağlı bakım	İki durumlu sistem	Mükemmel bakım
Blok bakım	Çok durumlu sistem	Minimal bakım
Periyodik bakım	Tek bir sistem	Mükemmel
Sıralı bakım	Çok sistemli	olmayan bakım
Kontrol limit		Kötü bakım

<b>Bakım Maliyeti</b>	<b>Optimizasyon Kriteri</b>	<b>Model Aracı</b>
Sabit	Maliyet oranı	Yenileme teorisi
Rassal	en küçükleme	Markov zinciri
Bileşik	Kullanılabilirlik	Olasılık
	en iyilemesi	Poisson süreci
	Arıza süresinin	
	en küçükleme	

<b>Planlama Süresi</b>	<b>Bağımlılık</b>	<b>Sistem Bilgisi</b>
Sonsuz	Durum	Süper bilgi
Sonlu	Arıza	Hatalı bilgi
Ayrık	Olasılık	
Sürekli	Ekonomik	

Literatürde bakım genel olarak ikiye ayrılmaktadır: Önleyici bakım ve düzenleyici bakım. Önleyici bakım kararı sistem performansını uzun vadede artırmaya yönelik olarak sistem operasyonel anlamda çalışırken yapılır. Düzenleyici bakım ise sistem arızalandığında, operasyonel anlamda işlev görmediği anlarda sistemi arızadan kurtarmak için gerçekleşir. Bakım aynı zamanda 6 farklı kategori altında da incelenebilmektedir. Bunlar sırasıyla; mükemmel bakım, minimal bakım, mükemmel olmayan bakım, kötü bakım ve çok kötü bakımdır. Detaylı tanımları aşağıdaki gibidir.

1. *Mükemmel bakım*: Sistemi başlangıçtaki haline geri getirir (sistemi yenisiyle değiştirmek bilinen en iyi mükemmel bakım politikasıdır).



2. *Minimal bakım*: Sistemi bozulmadan önceki haline geri getirir (araba lastiğini değiştirmek, arabanın bozulma hızında herhangi bir değişiklik yaratmadığı için minimal bakım için bir örnektir).
3. *Mükemmel olmayan bakım*: Sistemi en iyi olduğu durum ile arızalanmadan önceki sahip olduğu durum arasında bir yere geri getirir (araba motorlarının ayarlanması-tamir olması).
4. *Kötü bakım*: Sistemi sahip olduğu durumdan daha kötü bir duruma geri getirir (yanlış parça tamiri veya doğru parçayı tamir ederken sağlam parçaların hasara uğraması).
5. *Çok kötü bakım*: Sistemin arızalanmasıyla sonuçlanır (yanlış parça tamiri veya doğru parçayı tamir ederken sağlam parçaların hasara uğraması).

Yukarıdaki bakım türleri ve Tablo 4.1'de gösterildiği gibi sistemin sahip olduğu diğer özellikler farklı bakım politikalarını oluşturmaktadır. Literatürdeki temel bakım politikaları aşağıdaki gibi sıralanır.

- a) *Yaşa bağlı önleyici bakım politikası*: Sistem ya arızalandığında ya da  $T$  yaşına geldiğinde önleyici olarak bakımdan geçer. [4, 6, 13, 24]
- b) *Blok önleyici bakım politikası*: Sistem periyodik olarak her  $kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) anında ya da arızalandığında yenisiyle değiştirilir. [6, 27]
- c) *Periyodik önleyici bakım politikası*: Sistem periyodik olarak her  $kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) anında ya da arızalandığında bakım kararı alınır. [6, 10]
- d) *Ardışık önleyici bakım politikası*: Sistemin kontrol zamanları dinamik olarak belirlenir ve kontrol anlarında bakım kararı alınır. [6, 15, 16]
- e) *Kontrol limit politikası*: Arıza hızı, bakım sayısı veya süresi gibi parametreler önceden belirlenmiş değeri aştığında bakım kararı alınır. [14, 17, 20]

Birinci bölümde bahsedildiği üzere bu çalışmada iki farklı tamir türü mevcuttur: Minör tamir ve majör tamir. Her iki tamir türü belirli olasılıklar ile mükemmel bakım, minimal bakım veya mükemmel olmayan bakım olabilmektedir. Ayrıntılı olarak, sistem "kritik" iken yapıldığı için bir önleyici bakım olan minör tamir  $p_{mn}$  olasılığı

ile mükemmel bakım özelliği kazanırken,  $q_{mn} = 1 - p_{mn}$  olasılığı ile minimal bakım özelliği kazanmaktadır. Diğer taraftan sistem "arızalı" iken yapıldığı için bir düzenleyici bakım olan majör tamir sonrası sistem  $p_{mj}$  olasılığı ile mükemmel bakım özelliği kazanırken,  $q_{mj} = 1 - p_{mj}$  olasılığı ile mükemmel olmayan bakım özelliği kazanmaktadır. Bu tarz varsayımlar literatürde Nakagawa, Brown, Proschan ve Block tarafından yoğunlukla incelenmiştir. Nakagawa [8] ilk mükemmel olmayan önleyici bakım modelini geliştirmiştir. Modele göre yaşa bağlı önleyici bakım politikası izlenmekte ve her bakım sonrası sistem  $p$  olasılığı ile mükemmel bakım olurken,  $q = 1 - p$  olasılığı ile minimal bakım olmaktadır. Literatürde bu metoda  $(p, q)$  kuralı da denilmektedir. Yine, Brown [11] mükemmel olmayan tamir sürecini ele almıştır. Sistem her arızalandığında tamir edilmekte ve tamir  $p$  olasılığı ile mükemmel,  $q = 1 - p$  olasılığı ile minimal olmaktadır. Buna göre sistemin yaşam dağılımı  $F$  ve arıza hızı  $r$  iken, her başarılı mükemmel tamir arası geçen zamanın  $F_p = 1 - (1 - F)^p$  ve buna bağlı arıza hızının  $r_p = pr$  olduğunu göstermiştir. Diğer taraftan, Block v.d. [13]  $(p, q)$  kuralını sistemin yaşını da göz önünde bulundurarak  $(p(t), q(t))$  kuralı olarak genişletmiştir. Burada  $t$  sistemin yaşıdır. Brown çalışmasına benzer bir şekilde sistemin her iki başarılı tamir arası geçen sürenin dağılımının

$$F_p = 1 - \exp \left\{ \int_0^t p(x) [1 - F(x)]^{-1} F(x) \right\}$$

olduğunu ve arıza hızının ise  $r_p(t) = p(t)r(t)$  şeklinde olduğunu hesaplamışlardır. Bizim çalışmamızda ise tamir başarı olasılıklarının, sistemin Markov özelliğini boz-maması için sabit olduğu varsayılmıştır. Çünkü ele alınan sistem yaşa bağlı (*age-dependent*) değil, duruma bağlıdır (*state-dependent*).

Temel bakım politikalarını birbirinden ayıran bir diğer etmen ise sistem durum uzayının tasviridir. Çalışmada olduğu gibi sistemin üç farklı (iyi, kritik, arızalı) duruma sahip olması, ikili durum uzayına (iyi, arızalı) göre daha fazla modelleme seçenekleri sunmaktadır. Hatta güncel hayatta çoğu fabrikada sistem durumu yeşil, sarı ve kırmızı şeklinde yansıtılır. Sistem durumlarının bu şekilde renkli tasviri Wang'ın çalışmalarında [34, 35] görülmektedir.  $S = \{0, 1, 2, \dots, L - 1, L\}$  durum uzayı ile gösterilen sistemlerde ise 0 iyi durumu,  $\{1, 2, \dots, L - 1\}$  eskimeye ait durumları ve  $L$  arızalı durumu göstermektedir. Lam ve Yeh [18, 19] ile bu çalışmaları referans alan Chiang ve Yuan [30] ve Chen v.d. [33] sistem durumunun arızalı olan  $L$  durumu hariç ancak periyodik veya sıralı gözlemler sonucunda öğrenildiğini varsayımıştır.

Yine bu çalışmalarda sistem model aracı sürekli-zaman Markov süreci olup amaç uzun vadede maliyet oranının en küçüklenmesidir. Sistemin arızalandığında anında haber vermesi ve sistem durumunun ya bir sonraki kötü duruma ya da arızalı duruma geçmesi varsayımı, bu tarz bakım modellerinin kurulmasına kolaylık sağlamaktadır. Diğer taraftan, bizim çalışmamızda üç durumlu ( $L = 3$ ) bir sistem için hem aşamalı arızalanmaların ele alınması hem de arızalı durumun ancak gözlemler sonucunda tespit edilmesi daha karmaşık matematiksel ifadelerin hesaplanmasını gerektirmiştir.

Yine çoklu durum uzayı ile tasvir edilen sistemler için literatürde gecikme zamanı konsepti (delay time concept) adı altında toplanan çalışmalar mevcuttur. Konsept, arızalı olmayan durumlarda tamirin ne kadar süre bekletileceği sorusunun incelenmesi şeklinde olmak üzere Christer [12] tarafından geliştirilmiştir. Daha sonraki çalışmasında Christer [25] model aracı olarak yenileme teorisini kullanarak asimtotik sonuçlar elde etmiş ve nümerik sonuçlar ile ilk çalışmasını desteklemiştir. Bu alandaki en yeni çalışma ise Oosterom v.d. [36] tarafından 2014 yılında kapsamlıca geliştirilen ve farklı yenileme maliyetlerine sahip bakım modelleme çalışmasıdır. Bu tip gecikme zamanı konsepti, bizim çalışmamızda Bölüm 5'te detaylıca incelenecek sayısal sonuçlarda da gözlemlenmektedir. Örneğin, farklı model parameterleri altında en düşük maliyetli en iyi kontrol periyodu, bazen sistem durumu kritik iken hiçbir şey yapmama kararı altında belirlenirken bazen de minör tamir kararı alınarak belirlenir.

Bu şekilde literatürdeki klasik bakım modelleri incelenmiş oldu. Bir sonraki başlıkta bu çalışma ile doğrudan ilişkili olan sistem durumlarının yalnızca kontrol anlarında belirlendiği analizlerden bahsedilecektir.

## **2.2 Haber Vermeyen Arızalara Sahip Sistemler İçin Bakım Modelleri**

Bölümün başında belirtildiği gibi bakım problemleri literatürde kapsamlıca incelenmiş ve hala incelenmeye devam etmektedir. Her bir problemin kendi içinde avantajları ve dezavantajları mevcuttur. Bu alt bölümde iki duruma (iyi ve arızalı) veya çoklu duruma sahip sistemler için sistem durumunun ancak kontrol zamanlarında belirlendiği, yani haber vermeyen arızalanmaların mevcut olduğu bakım problemlerini inceleyen çalışmalar ele alınacaktır.

Barlow ve Proschan [6], 1965 yılında yayınladıkları *Mathematical Theory of Reliability* kitabında rassal olarak eskijen ve arızalanana kadar çalışan sistemleri konu alan problemleri ele almıştır. Modellerinde, ikili olarak tasvir edilen sistem durumunun ancak kontrol zamanlarında kontrol edilebilmesi varsayımından kaynaklanan arıza süresi hesaplanmıştır. Öyle ki her kontrolün sabit bir maliyeti ve arızalı sistem için ise birim arıza zaman başına düşen ceza maliyeti mevcuttur. En iyi kontrol zamanı, sistemin ortalama maliyet oranının enküçüklenmesiyle hesaplanmıştır. Bizim çalışmamızda da benzer maliyetler mevcut olmakla birlikte, sistemin kontrol maliyeti periyodik kontroller içeren Zuckerman'ın [9] çalışmasında olduğu gibi zamana bağlı artmayan bir fonksiyondur. Bunun sebebi ise, sistemin çok sık kontrol edilmesini önlemektir. Yine Zuckerman'ın çalışmasında sistem haber vermeyen arızalanmalara sahiptir ve bakım politikası sistem ya arızalı tespit edildiğinde ya da belirli bir yaşa geldiğinde sistemin yenilenmesi şeklindedir. Arıza süresinden kaynaklanan maliyet, kontrol maliyeti ve yenileme maliyeti ile birlikte ele alınarak ortalama maliyet enküçüklenmiştir. Fakat burada, eğer sistem arızalanmadan yenilenirse daha az bir maliyet ortaya çıkmaktadır.

Literatürde, çoklu duruma sahip sistem durumunun (arızalı durum ile birlikte) ancak kontrol anlarında tespit edildiği bakım aksiyonlarının incelenmesiyle oluşturulan çalışmalar çok fazla değildir. Bizim çalışmamızla yakından ilgisi olan Luss [7]'un analiz etmiş olduğu haber vermeyen arızalanmalara sahip sistemler için önerilen bakım problemi bunlardan bir tanesidir. Luss'un çalışmasında eskime, sistem durumunun sadece bir sonraki kötü duruma geçmesiyle olmaktadır. Bir kontrol periyodu içerisinde her  $i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, L\}$  durumundaki bekleme zamanı (*holding times*), sistem durumundan bağımsız ve değişmeyen sabit hızla üstel dağılmaktadır. Bu bağlamda  $L$  adet duruma sahip sistem için gamma dağılımından yararlanılmıştır. Ayrıca, beklenen arıza süresi hesaplanarak tek bir politika altında maliyet analizi yapılmıştır. Bizim çalışmamızın en ayırt edici farkı çok arızalanmanın varlığı ve her bir durumdaki bekleme zamanının farklı hıza sahip üstel dağılmasıdır. Bu bağlamda her geçiş için olasılık yoğunluk fonksiyonu çıkartılmış ve beklenen arıza süresinin analitik sonucu hesaplanarak beş farklı politika için maliyet analizi yapılmıştır.

Bu alandaki bir diğer önemli çalışmalar ise Chelbi'nin yürütmüş olduğu çalışmalardır [23, 26]. Yine haber vermeyen arızalara sahip sistem ele alınmış, model aracı olarak olasılık kontrol limit politikası kullanılmıştır. Politikaya göre sistem, yapılan kontrol sayısına bağlı değişen olasılığın önceden belirlenmiş bir değeri aştığında yenilenir.

Chelbi'nin [26] çalışmasını, [23] çalışmasından ayırarak temel fark ise [26] eserinde en iyi kontrol zamanını dinamik olarak güncelleyen bir sayısal algoritma yazmasıdır.

Badia v.d. [29]'nin çalışmasında haber vermeyen arızadan kaynaklanan durum farklı bir şekilde ele alınmıştır. Risk faktörü altında yanlış alarm prosedürü geliştirilmiştir. Arızalı sistem, kontrol zamanında belirli bir olasılık ile arızalı olarak teşhis edilememektedir. Yine, arızalı olmayan sistem belirli bir olasılık ile arızalı olarak teşhis edilmektedir. Buna göre sistem arızasının teşhis edilmediği durumlarda arıza süresinden kaynaklanan maliyet ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda diğer bakım maliyetleri ile birlikte en iyi kontrol periyodunu belirleyen maliyet en küçüklemesi yapılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların hepsinde, en yaygın optimizasyon kriteri maliyet en küçüklemesi kullanılmıştır. Fakat, güvenilirlik literatüründe maliyet minimizasyonu yerine sistem kullanılabilirliğinin en iyilenmesiyle ilgilenen çalışmalar da vardır. Özellikle haber vermeyen arızalara sahip sistemleri ele alan en yaygın isim Georgia-Ann Klutke'dir. Klutke [21] çalışmasında sistem kullanılabilirlik fonksiyonunun karakteristik yapısını incelemiştir; daha sonra [22] çalışmasında ise Poisson gelişli şokların eskime sürecini tanımladığı sistemler için kontrol zamanlarını hesaplayan ve kullanılabilirliği maksimize eden bakım problemini ele almıştır. Y. Yang [28] ile yaptığı çalışmasında bilginin değerini ölçmek için üç farklı kontrol politikası (periyodik gözlem, olasılık tabanlı sıralı gözlem, bileşik gözlem) için kullanılabilirliği hesaplamış, sayısal örnekler ile değerlendirmiştir. Son olarak Klutke v.d. [31] [32] çalışmalarında ise sadece periyodik gözlemlere sahip sistemleri ele alarak, yine haber vermeyen arızaları içeren problemleri inceleyerek sistem kullanılabilirlik maksimizasyonu ile ilgilenmiştir.

### 3. PROBLEM TANIMI VE SİSTEM MODELLEMESİ

Çalışmanın bu bölümünde sistem bakımı ile ilgili problem tanımı ayrıntılarıyla verilmekte ve probleme karşılık gelen sistem bakım modellemesi kurulmaktadır. Ele alınan sistemin rassal eskime süreci tanımlanarak, matematiksel modelin anlatımıyla birlikte bakım politikalarının incelenmesi bu bölümde verilmektedir.

Problem temel olarak bir sistemde uzun vadede meydana gelen ortalama bakım maliyetinin en küçüklenmesi problemidir. Rassal olarak eskiyen bu sistem karar verici mekanizma tarafından periyodik olarak  $\tau$  zamanda bir kontrol edilmekte ve her kontrol zamanında sistem durumu anlık olarak mükemmel bir şekilde belirlenmektedir. Sistem durumu "iyi", "kritik", veya "arızalı" olurken, bu durumlara bağlı olarak "hiçbir şey yapma", "tamir et" ve "yenile" aksiyonlarından biri karar verici tarafından seçilir. Burada iyi veya kritik durumda olan sistem operasyonel anlamda çalışmakta, arızalı olarak tespit edilen sistem işlev görmemektedir. Bu bağlamda sistem durumlarının ancak kontrol zamanlarında tespit edildiği varsayımı altında, sistem arızalandığı taktirde ne kadar süredir işlev görmediğinin cevabı kurulacak modelin önemli bir girdisidir.

Bölüm 2'de anlatıldığı üzere eskimenin zaman üzerindeki belirsizliği eskime sürecinin stokastik bir süreç olduğunu göstermektedir. Genel olarak stokastik süreç  $\{Y_t, t \geq 0\}$  bir gözlem dizisi içerisinde herhangi bir  $t$  zamanına bağlı olarak değer alan rasgele değişkenler kümesidir. Örneğin herhangi bir  $t$  yılının sonunda meydana gelen sel sayısı  $Y_t$  ile tanımlanırsa, ilk üç yıl için stokastik süreç  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$  şeklinde gösterilir.

Rasgele değişkenlerin aldığı değerlerin her biri, durum (*state*) olarak adlandırılır. Bizim ele aldığımız problemde durum uzayı "iyi", "kritik" ve "arızalı" elemanlarını içerir. Matematiksel olarak ifade kolaylığı sağlamak için "iyi" durum 1 ile, "kritik" durum 2 ile ve "arızalı" durum 3 ile gösterilmiştir. O halde eskime süreci  $\{Y_t, t \geq 0\}$  durum uzayının  $S = \{1, 2, 3\}$  elemanlarının herhangi birini değer olarak oluşturmaktadır.

Sistemin bir kontrol periyodu içerisindeki sahip olduğu durumdaki bulunma zamanlarının (*holding times*) ise üstel dağıldığı varsayılır. Dolayısıyla,  $i$  durumunda gözlemlenen bir sistemin  $\tau$  zaman sonraki kontrolünde  $j$  durumunda bulunma olasılığı  $P_{ij}(\tau)$

Markov özelliğini sağlamaktadır. Yani, sistem durumunun bir sonraki kontrol zamanında ne olacağı sadece bir önceki kontroldeki sistem durumuna bağlı, geçmişten bağımsızdır. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse,  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1}$  ifadesini sağlayan  $\forall t_k > 0$  anındaki mevcut durum için aşağıdaki özellik sağlanırsa Markov süreç tanımlanır:

$$P\{Y_{k+1} = y_{k+1} | Y_{t_0} = y_{t_0}, Y_{t_1} = y_{t_1}, \dots, Y_{t_k} = y_{t_k}\} = P\{Y_{k+1} = y_{k+1} | Y_{t_k} = y_{t_k}\}$$

Bu durumda sistemin durum  $i$ 'den  $\tau$  zaman sonra durum  $j$ 'de olma olasılığı  $P_{ij}(\tau)$ ,

$$P_{ij}(\tau) = P\{Y_{t+\tau} = j | Y_t = i\}, \quad \forall t, \tau \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\} \quad \text{ve} \quad i, j = 1, 2, 3$$

şeklinde yazılabilir.

O halde kontrol periyodlarında gözlemlenen  $S = \{1, 2, 3\}$  durum uzayı üzerindeki sistemin eskime süreci bir kontrol periyodu içerisinde durumlar arası geçişlerin sürekli zaman Markov zinciri ile ifade edildiği; ayrık durumlu bir Markov süreçtir. Bu şekilde eskime süreci tanımlanmış olur.

Diğer taraftan periyodik kontrollerin varlığı iki temel maliyete ışık tutmaktadır. Bunlardan birincisi sistemin arızalı olarak tespit edildiği durumda ortaya çıkan birim arızalı zaman başına düşen maliyet  $c_d$ , diğeri ise sistemin birim zaman başına düşen kontrol maliyeti  $\kappa(\tau)$ 'dir. Literatür bölümünde detaylarıyla incelenen Zuckerman [9]'ın çalışmasında olduğu gibi sistemin çok sık kontrol edilmesini önlemek için kontrol maliyeti bakım periyodu süresine bağlı artmayan bir fonksiyon olarak alınmıştır. Fonksiyonun uç değerlerinin ise

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \kappa(\tau) = K < \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \kappa(\tau) = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde olduğu varsayılır. Burada birinci limit, sürekli kontrol politikasını işaret etmektedir. Bakım aralığı  $\tau$ 'nın sıfıra giderken kontrol maliyetinin  $K$  değerine yakınsaması, sürekli kontrolün sonlu bir maliyetle yapıldığına işaret eder. Böyle bir varsayım bizim sistemimiz için sürekli gözlem opsiyonunun da göz önünde bulundurulmasını sağlamaktadır. İkinci limit ise kontrolün hiç yapılmaması durumunda kontrol maliyetin ortadan kalkması gibi akla yatkın bir varsayımı ifade etmektedir.

Problem tanımında belirtildiği gibi karar verici mekanizma sistem durumuna göre çeşitli aksiyonlar alabilmektedir. Bunlardan "hiçbir şey yapma" aksiyonu adından da anlaşıldığı gibi sisteme hiçbir getirisi veya sisteme hiçbir maliyeti olmayan bir aksiyondur. Karar vericinin sistem iyi haldeyken kesinlikle bu aksiyonu aldığı varsayılır. Diğer taraftan bakım aksiyonları "tamir et" ve "yenile" ise alındığı zamandaki sistem durumuna göre önleyici bakım veya düzenleyici bakım niteliği kazanmaktadır. Sistem durumu kritik iken verilen tamir (minör tamir) veya yenileme kararı birer önleyici bakım aksiyonu olurken, sistem durumu arızalıyken verilen tamir (majör tamir) veya yenileme kararı birer düzenleyici bakım aksiyonudur. Güncel hayatta olduğu gibi kritik durumda olan sistem tamiri ile arızalı durumda olan sistem tamirinin aynı sonucu doğurmayacağı gerçeği, tamir aksiyonunun minör ve majör olarak ikiye ayrılmasına neden olmuştur. Bu bağlamda her iki tamir aksiyonu, tamir başarı olasılıkları, tamir süreleri ve sabit maliyetler şeklinde üç temel parametreye göre farklılık göstermektedir. Minör tamir sonrası sistem,  $p_{mn}$  olasılığı ile durum 1'e gelirken  $q_{mn} = (1 - p_{mn})$  olasılığı ile sistem durumunda bir değişiklik olmaz; sistem durum 2'de kalmaya devam eder. Diğer taraftan majör tamir sonucunda  $p_{mj}$  olasılığı ile sistem durumu 1 olurken,  $q_{mj} = (1 - p_{mj})$  olasılığı ile durum 2 olmaktadır. O halde majör tamirin kesinlikle sistemi iyileştirdiği fakat minör tamirin sistem durumunda değişiklik yaratmadığı anlar olabilir. Bir başka deyişle, literatürdeki bakım türleri sınıflandırmasına göre minör tamir  $p_{mn}$  olasılığı ile mükemmel bakım özelliği kazanırken,  $q_{mn}$  olasılığı ile minimal bakım özelliği; majör tamir ise  $p_{mj}$  olasılığı ile mükemmel bakım özelliği kazanırken,  $q_{mj}$  olasılığı ile mükemmel olmayan bakım özelliği kazanır. Ek olarak  $(t_{mn}, c_{mn})$  ve  $(t_{mj}, c_{mj})$  ikilileri sırasıyla minör tamir ve majör tamirin bakım sürelerini ve bakım maliyetlerinin notasyon gösterimidir.

Yenileme bakım aksiyonu ise sistemin yenisiyle değiştirildiğini ifade eder. Sistem hangi duruma sahip olursa olsun sabit bir  $c_{rpl}$  maliyeti karşılığında 1 olasılığı ile durum 1'e geri gelir. Yine, yenilenmenin  $t_{rpl}$  gibi bir süre sürdüğü varsayılır.



Problemi güncel hayata uyarlayabilmek adına diğer bir varsayımımız ise tüm bakım aksiyonları süresi boyunca sistemin çalışmadığıdır. Bu bağlamda sistem bakımdayken çalışmadığı için birim arızalı zaman başına  $c_d$  maliyeti ortaya çıkar. Örneklendirecek olursak, kontrol periyodu  $\tau$  olan bir sistemin herhangi bir gözlem anında arızalı olarak tespit edildiğini ve verilecek bakım kararının sistemi tamir etmek şeklinde olduğunu varsayalım. Bu durumda sistem  $t_{mj}$  süresi boyunca çalışmayacağından, bu süreden kaynaklanan maliyet  $t_{mj} c_d$  şeklinde hesaplanmış olur.

Tablo 3.1: Politikaların gösterimi

Politika	Durum 1	Durum 2	Durum 3
$\Pi_1$	Hiçbir şey yapma	Hiçbir şey yapma	Majör Tamir
$\Pi_2$	Hiçbir şey yapma	Hiçbir şey yapma	Yenile
$\Pi_3$	Hiçbir şey yapma	Minör tamir	Majör tamir
$\Pi_4$	Hiçbir şey yapma	Minör tamir	Yenile
$\Pi_5$	Hiçbir şey yapma	Yenile	Yenile

Her sistem durumu için oluşturulabilecek tüm bakım aksiyonları düşünüldüğünde toplamda beş farklı bakım politikası elde edilmiş ve Tablo 3.1’de gösterilmiştir. Önerilen tüm politikalar için amaç uzun vadedeki bakım maliyet oranının en küçülenmesidir. En iyi bakım politikası ve en iyi periyodik kontrol zamanlarını belirlemek amaçlı kurulan maliyet fonksiyonu için yenileme teorisinden yararlanılmıştır. Burada yenileme çevrimi, iyi durumda bir sistemin en az bir bakım aksiyonu sonucu tekrar iyi duruma geri dönerek sonlanmasıdır.

Elbette bazı sistemler için bakım maliyeti ne olursa olsun sistem kullanılabilirliği her zaman ön planda olabilir. Bu bağlamda problemin güvenilirlik ölçütü olan kullanılabilirlik analizi bir sonuç olarak ilerideki alt bölümlerde gösterilecektir.

Bu çalışmada ele alınan problem modeli için metin boyunca kullanılacak notasyonlar aşağıda yer almaktadır.

#### **Kümeler:**

$S = \{1, 2, 3\}$ ; Durum Kümesi

$T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ; Kontrol Periyod Kümesi

## Karar Değişkeni:

$\tau$  : İki ardışık kontrol arasındaki sabit süre; kontrol periyodu

## Parametreler:

### *Bakıma ait parametreler:*

$c_d$  : Birim arızalı zaman başına düşen maliyet

$c_{rpl}$  : Sistemi yenilemenin sabit maliyeti

$c_{mn}$  : Sabit minör tamir maliyeti

$c_{mj}$  : Sabit majör tamir maliyeti

$t_{rpl}$  : Sistemi yenilemenin sabit süresi

$t_{mn}$  : Sabit minör tamir süresi

$t_{mj}$  : Sabit majör tamir süresi

$p_{mn}$  : Minör tamir başarı olasılığı

$p_{mj}$  : Majör tamir başarı olasılığı

### *Kontrolle ait parametreler:*

$\kappa(\tau)$  : Birim zaman başına düşen kontrol maliyeti,  $\tau \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}$

$K$  : Kontrol sabiti,  $K = \kappa(0)$

### *Eskime sürecine ait parametreler:*

$X_{ij}$  : Bir kontrol periyodu içerisinde sistem durum  $i$  ile sistem durum  $j$  arasındaki bulunma zamanı,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$\lambda_{ij}$  : Sistemin  $i \in \{1, 2\}$  durumundan  $j \in \{2, 3\}$  durumuna geçiş hızı

$\lambda_1$  : Durum 1'den toplam çıkış hızı,  $\lambda_1 = \lambda_{12} + \lambda_{13}$

$\lambda_2$  : Durum 2'den toplam çıkış hızı,  $\lambda_2 = \lambda_{23}$

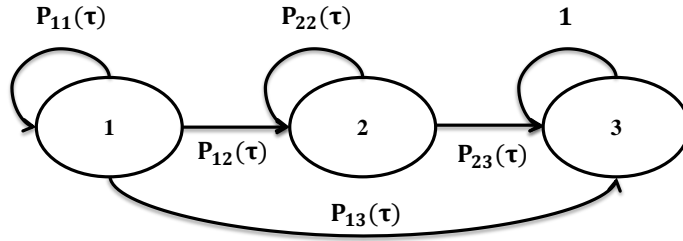
Çalışmanın bu bölümünün devamında kurulan eskime sürecine ait model kurulumu başlığı altında geçiş olasılıkları, haber vermeyen arızalardan kaynaklanan beklenen arıza süresi ve her politika için belirlenen ortalama maliyet oranı hesaplanacak; en iyi kontrol periyodu ve en iyi politika başlığı altında ise amaç fonksiyonu kurulup optimalite şartları detaylarıyla incelenecektir.

## 3.1 Model Kurulumu

### 3.1.1 Geçiş Olasılıkları

Problem tanımında bahsedildiği üzere sistem durumunun ancak kontrol zamanlarında tespit edilebilmesi varsayımı, iyi durumda bir sistemin ne zaman durumunun kritikleşeceğini ve hatta ne zaman arızalanacağını bilinmediğini gösterir. Aynı şekilde kritik durumda sistemin de ne zaman arızalanacağı bilinmemektedir. Fakat her iki türlü arızalanmada, arıza tespiti bir sonraki kontrol anında gerçekleşeceğinden bir kontrol periyodu ( $\tau$ ) içinde arızalanan sistem bir sonraki kontrol anına kadar arızalı olarak kalır. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer önemli ayrıntı ise kontrol periyodu içerisinde tüm durum değişiklikleri sistemi ancak kötü bir duruma sokar, asla iyileştirmez. Örneğin kritik durumda bir sistem  $\tau$  süresi boyunca eğer durum değiştirecekse sadece arızalı duruma geçebilir, iyi duruma geçemez.

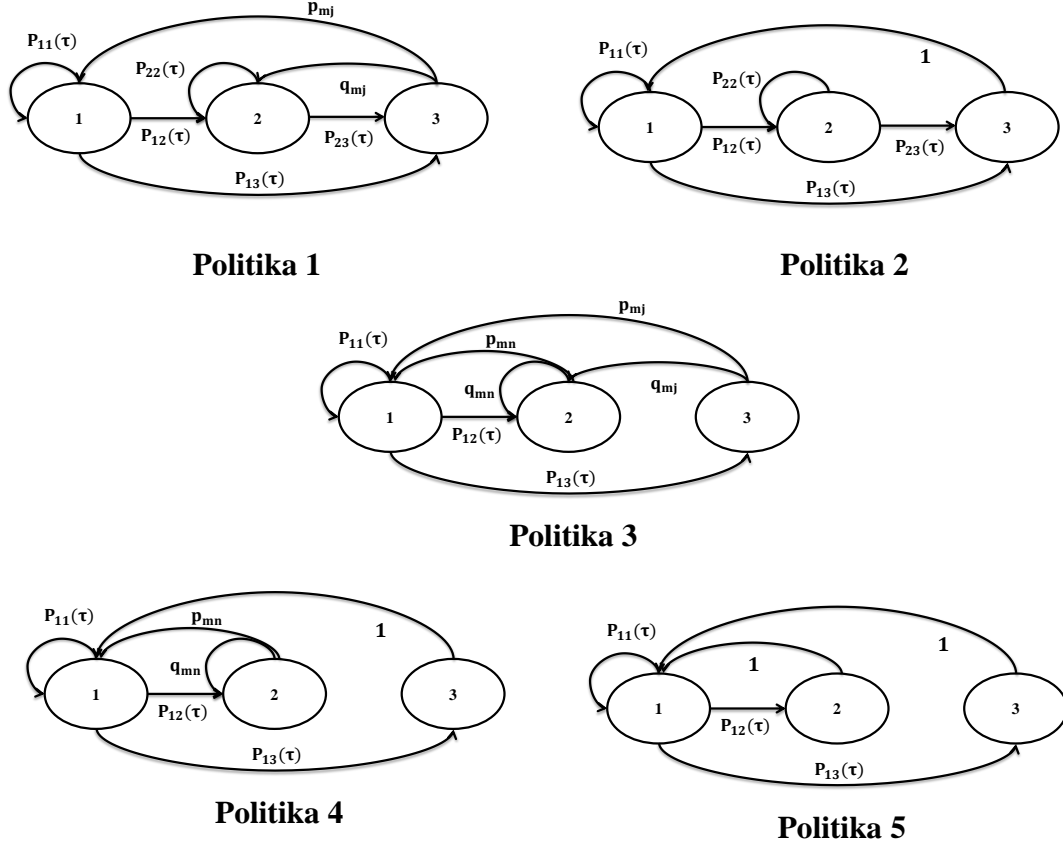
Dışarıdan müdahale olmadığında, bir kontrol periyodu içindeki durumlar arası olası tüm geçişler Şekil 3.1'deki gibidir. Burada sistemin 3. duruma, yani arızalı duruma geçmesi halinde bir sonraki kontrol periyoduna kadar arızalı olarak kalması 3. durumun yutucu durum (*absorbing state*) olduğunu gösterir.



Şekil 3.1: Dışarıdan müdahale olmadığında olasılık geçişleri

Sistem arızalı olarak tespit edildiği anda bakım kararlarından biri kesinlikle verildiği için gerekli bakım tamamlanır (başarılı veya başarısız) ve yeni gözlem  $\tau$  zaman sonra gerçekleşir. Arızalı durumdan geçişler verilecek bakım kararının başarı olasılığına göre değişmektedir. Yine 2. duruma sahip sistemler için önleyici bakım aksiyonu alınırsa, bu aksiyonun başarı olasılığına göre 2. durumdan geçişler farklı olacaktır. Tüm politikalar

altındaki geçişler Şekil 3.2'deki gibi gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Tüm politikalar için olasılık geçişleri

Bu başlık altında, dışarıdan hiçbir müdahalenin olmadığı  $\tau$  süresi boyunca gerçekleşen sistem durumları arası geçiş olasılıkları hesaplanacak, diğer durumlardaki geçiş olasılıkları her politika için yazılan maliyet oranları hesabında analiz edilecektir.

Geçiş olasılıklarının hesabına geçmeden önce şunu hatırlayalım: Herhangi bir aksiyon alınmadığı süre içinde sistemin bulunduğu durumda geçirdiği zaman dilimi üstel olarak dağılmıştır. Daha öncede belirtildiği üzere herhangi bir aksiyonun alınmaması halinde durum değişikliği sistemi ancak daha kötü bir duruma sokar. O halde, sistem 1. durumda iken geçen süre  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$  hızına sahip iki üstel rassal değişkenin  $X_{12}$ ,  $X_{13}$  minimum değerini alırken, bu süre  $\min\{X_{12}, X_{13}\}$  olarak ifade edilir. Sistemin 2. durumdayken geçirdiği süre ise hızı  $\lambda_{23}$  olan  $X_{23}$  üstel rassal değişkeniyle gösterilir.

Son olarak sistemin 3. durumda geçirdiği rassal süre ise çalışmada "arıza süresi" olarak adlandırılmıştır. Bu sürenin beklenen değeri ilerideki alt bölümlerde hesaplanacaktır.

Tüm işlemlerde  $X_{12}$ ,  $X_{13}$ , ve  $X_{23}$  değişkenlerinin birbirinden bağımsız sırasıyla  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$ , ve  $\lambda_{23}$  geçiş hızlarına sahip birer üstel rassal değişken olmalarından yararlanılmıştır. Her birinin olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla  $f_{X_{12}}$ ,  $f_{X_{13}}$  ve  $f_{X_{23}}$  şeklinde gösterilmiştir. Sistem durum 1'den toplam çıkış hızı  $\lambda_1 = \lambda_{12} + \lambda_{13}$  ve durum 2'den toplam çıkış hızı  $\lambda_2 = \lambda_{23}$  notasyonu da gösterim kolaylığı sağlamıştır.

### 3.1.1.1 Durum 1'den geçiş olasılıkları

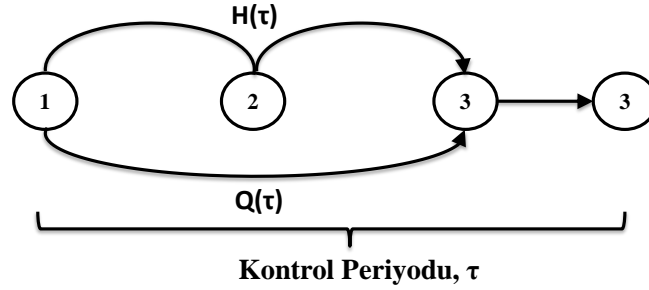
Herhangi bir kontrol anında 1. durumda olan bir sistem hiçbir şey yapma aksiyonu altında, bir sonraki kontrol anında 1, 2 ve 3 durumlarından birine sahip olabilir. Kontrol periyodu süresince sistemin bakıma alınması söz konusu olmadığından, ilk iki ihtimali kapsayan geçiş olasılıkları aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$P_{11}(\tau) = P\{\min\{X_{12}, X_{13}\} > \tau\} = e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\tau} = e^{-\lambda_1\tau} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} P_{12}(\tau) &= P\{X_{12} \leq \tau, X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{X_{13} > X_{12}, X_{23} > \tau - X_{12} \mid X_{12} = x\} f_{X_{12}}(x) dx \\ &= \int_0^\tau P\{X_{13} > x, X_{23} > \tau - x\} f_{X_{12}}(x) dx \\ &= \int_0^\tau P\{X_{13} > x\} P\{X_{23} > \tau - x\} f_{X_{12}}(x) dx \\ &= \int_0^\tau e^{-\lambda_{13}x} e^{-\lambda_{23}(\tau-x)} \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x} dx \\ &= \int_0^\tau \lambda_{12} e^{-\lambda_{23}\tau} e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13}-\lambda_{23})x} dx \\ &= \int_0^\tau \lambda_{12} e^{-\lambda_2\tau} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Son olası geçiş sistemin iyi durumdan (durum 1) arızalı duruma (durum 3) bir kontrol periyodu içinde geçmesidir. Bu geçiş iki farklı şekilde olabilir. Birincisi şok arızalanma, bir başka deyişle sistemin durum 1'den direkt olarak durum 3'e  $Q(\tau)$  olasılığı ile geçmesidir. Diğeri ise sistemin  $H(\tau)$  olasılığı ile aşamalı olarak arızalanmasıdır. Aşamalı arızalanmalarda sistemin önce kritikleşerek durum 2'ye, peşinden yine aynı kontrol periyodu içerisinde durum 3'e geçmesi söz konusudur. Şekil 3.3'de görsel olarak iki geçiş gösterilmektedir.



Şekil 3.3: Durum 1'den durum 3'e geçiş olasılığı gösterimi

O halde,  $P_{13}(\tau)$  olasılığı bu iki ayırık olayın olasılıklarının toplanması ile elde edilir.

$$P_{13}(\tau) = Q(\tau) + H(\tau) \quad (3.4)$$

Burada

$$\begin{aligned}
Q(\tau) &= P\{X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12}\} \\
&= \int_0^\tau P\{X_{12} > X_{13} \mid X_{13} = y\} f_{X_{13}}(y) dy \\
&= \int_0^\tau P\{X_{12} > y\} f_{X_{13}}(y) dy \\
&= \int_0^\tau e^{-\lambda_{12}y} \lambda_{13} e^{-\lambda_{13}y} dy \\
&= \int_0^\tau \lambda_{13} e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})y} dy \\
&= \int_0^\tau \lambda_{13} e^{-\lambda_1 y} dy \\
&= \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(\tau) &= P\{X_{12} \leq \tau, X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{X_{13} > X_{12}, X_{23} \leq \tau - X_{12} \mid X_{12} = x\} f_{X_{12}}(x) dx \\
&= \int_0^\tau P\{X_{13} > x, X_{23} \leq \tau - x\} f_{X_{12}}(x) dx \\
&= \int_0^\tau P\{X_{13} > x\} P\{X_{23} \leq \tau - x\} f_{X_{12}}(x) dx \\
&= \int_0^\tau e^{-\lambda_{13}x} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x)}) \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x} dx \\
&= \int_0^\tau \lambda_{12} e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})x} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x)}) dx \\
&= \int_0^\tau \lambda_{12} e^{-\lambda_1 x} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-x)}) dx \\
&= \int_0^\tau \lambda_{12} (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 \tau} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Eşitlik 3.5 ile 3.6 toplamından, durum 1’de olan sistemin  $\tau$  zaman sonra durum 3’de olma olasılığı  $P_{13}(\tau)$

$$P_{13}(\tau) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau} \tau, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ 1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} + e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde elde edilir.

### 3.1.1.2 Durum 2’den geçiş olasılıkları

Herhangi bir kontrol anında durum 2’ye (kritik) sahip sistem üzerinde hiçbir bakım aksiyonu alınmadığı sürece bir sonraki kontrol anında sistem kritikliğini koruyup hala durum 2’de olabilir ya da arızalı olarak tespit edilebilir. O halde sisteme dışarıdan müdahale bulunulmadığı takdirde geçiş olasılıkları aşağıdaki gibidir.

$$P_{21}(\tau) = 0 \quad (3.8)$$

$$P_{22}(\tau) = P\{X_{23} > \tau\} = e^{-\lambda_{23} \tau} = e^{-\lambda_2 \tau} \quad (3.9)$$

$$P_{23}(\tau) = P\{X_{23} < \tau\} = 1 - e^{-\lambda_{23} \tau} = 1 - e^{-\lambda_2 \tau} \quad (3.10)$$



### 3.1.1.3 Durum 3'den geçiş olasılıkları

Arızalı durum dışarıdan müdahale olmadığı sürece yutucu durumdur.

$$P_{31}(\tau) = P_{32}(\tau) = 0 \quad (3.11)$$

$$P_{33}(\tau) = 1 \quad (3.12)$$

Yine, sistem eğer bir kontrol periyodu içerisinde arızalanmış ise 1 olasılığı ile bir sonraki kontrol zamanına kadar arızalı kalmaya devam eder.

Sonuç olarak sistemin  $S = \{1, 2, 3\}$  durum uzayında, dışarıdan müdahalesiz geçen bir kontrol periyodu içerisindeki geçiş olasılıklarının aşağıdaki özellikleri sağladığı gözlemlenmiştir.

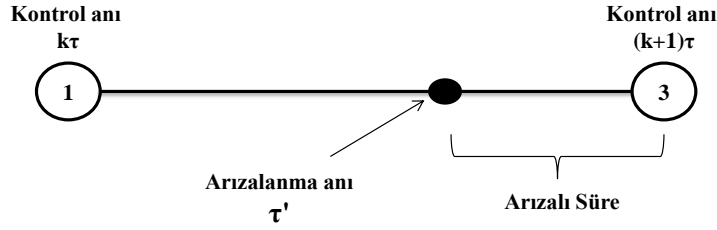
$$1) \quad 0 \leq P_{ij} \leq 1 \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.13)$$

$$2) \quad \sum_{j=1}^{j=3} P_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

Dışarıdan müdahale olduğu durumlardaki geçiş olasılıkları ise verilen bakım kararlarına göre değişecektir. Örneğin durum 2'de tespit edilen sistem için tamir aksiyonu alındığında durum 2'den geçişler  $p_{mn}$  olasılığı ile durum 1,  $q_{mn}$  olasılığı ile durum 2 ve 0 olasılığı ile durum 3 olacaktır. Bu ve bunun gibi tüm geçiş olasılıkları maliyet oranı hesaplarında kurulacak denklemlerde incelenecektir.

### 3.1.2 Beklenen Arıza Süresi

Çalışmada arızalanmaların haber vermemesi, ancak kontrol zamanlarında tespit edilebilmesi, sistemin en son kontrolden beri ne kadar süredir arızalı olduğuna dair belirsizlik doğurmaktadır. Bizim güvenilirlik analizimizde sistemin arızalı olduğu sürenin en aza indirgenmesi önemli olduğu için bu sürenin beklenen değerinin yapılan kontroller sonucu toplanan durum bilgisinin ışığında hesaplanması elzemdir.



Şekil 3.4: Arıza süresi gösterimi

Arızalı süre, sistemin arızalandığı zaman (bilinmeyen) ile arızalanmanın ilk tespit edildiği kontrol zamanı arasındaki süre olarak tanımlanmaktadır. Şekil 3.4'te açıkça görüldüğü üzere, sistem  $k\tau$  anında iyi olarak tespit edilmiş iken, bir sonraki kontrol anında  $(k+1)\tau$  arızalı olarak tespit edilmiştir. Bu da gösteriyor ki sistem  $\tau' \in (k\tau, (k+1)\tau]$  gibi bir zamanda arızalanmıştır.  $\tau'$  anının belirsiz olması arızalı sürenin belirsizliğine işaret etmektedir. Bu bağlamda beklenen arıza süresinin analitik değeri hesaplanmalıdır.

#### 3.1.2.1 Durum 1'den oluşacak beklenen arıza süresi

$D_1(\tau)$ 'i sistemin bir kontrol periyodu  $\tau$  içerisinde durum 1'den durum 3'e geçmesi halinde oluşacak beklenen arıza süresi olarak tanımlayalım. Bu durumda sistemin beklenen arıza süresi, şok ve aşamalı arızalanma olasılıklarına koşullama yapılarak hesaplanmalıdır.

$D^Q(\tau)$  ve  $D^H(\tau)$  notasyon olarak sırasıyla şok ve aşamalı arızalanma halinde meydana gelecek beklenen arıza süresini temsil ederse, durum 1'den oluşacak beklenen arıza süresi:

$$D_1(\tau) = D^Q(\tau) Q(\tau) + D^H(\tau) H(\tau) \quad (3.15)$$

şeklinde hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} D^Q(\tau) &= \tau - E[ X_{13} \mid X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12} ] \\ &= \tau - \int_0^\tau P\{ X_{13} > u \mid X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12} \} du, \quad u \leq \tau \\ &= \tau - \int_0^\tau (1 - P\{ X_{13} \leq u \mid X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12} \}) du, \quad u \leq \tau \\ &= \int_0^\tau P\{ X_{13} \leq u \mid X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12} \} du, \quad u \leq \tau \\ &= \int_0^\tau \frac{P\{ X_{13} \leq u, X_{13} < X_{12} \}}{P\{ X_{13} \leq \tau, X_{13} < X_{12} \}} du, \quad u \leq \tau \\ &= \int_0^\tau \frac{\int_0^u P\{ X_{12} > X_{13} \mid X_{13} = y_1 \} f_{X_{13}}(y_1) dy_1}{\int_0^\tau P\{ X_{12} > X_{13} \mid X_{13} = y_2 \} f_{X_{13}}(y_2) dy_2} du, \quad u \leq \tau \\ &= \int_0^\tau \frac{\int_0^u P\{ X_{12} > y_1 \} f_{X_{13}}(y_1) dy_1}{\int_0^\tau P\{ X_{12} > y_2 \} f_{X_{13}}(y_2) dy_2} du, \quad u \leq \tau \\ &= \int_0^\tau \frac{\int_0^u e^{-\lambda_{12}y_1} \lambda_{13} e^{-\lambda_{13}y_1} dy_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_{12}y_2} \lambda_{13} e^{-\lambda_{13}y_2} dy_2} du, \quad u \leq \tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \frac{\int_0^u \lambda_{13} e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})y_1} dy_1}{\int_0^\tau \lambda_{13} e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})y_2} dy_2} du, \quad u \leq \tau \\
&= \int_0^\tau \frac{\int_0^u e^{-\lambda_1 y_1} dy_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_1 y_2} dy_2} du, \quad u \leq \tau \\
&= \int_0^\tau \frac{1 - e^{-\lambda_1 u}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau}} du, \quad u \leq \tau \\
&= \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_1 \tau}} - \frac{1}{\lambda_1} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
D^H(\tau) &= \tau - \{ E[ X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau ] \\
&\quad + E[ X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau ] \} \\
&= \tau - \left\{ \int_0^\tau P\{X_{12} > u \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} du \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau P\{X_{23} > v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} dv \right\}, \quad u, v \leq \tau \\
&= \tau - \left\{ \int_0^\tau (1 - P\{X_{12} \leq u \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}) du \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau (1 - P\{X_{23} \leq v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}) dv \right\}, \quad u, v \leq \tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\tau + \left\{ \int_0^\tau P\{X_{12} \leq u \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} du \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau P\{X_{23} \leq v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} dv \right\}, \quad u, v \leq \tau
\end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde hesaplanır.

$F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u)$  ve  $F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v)$  aşamalı arızalanmaya koşullanmış olasılık dağılım fonksiyonları olarak gösterildiğinde, aşamalı arızalanmadan kaynaklanan beklenen arıza süresi

$$\begin{aligned}
D^H(\tau) &= -\tau + \left\{ \int_0^\tau F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u) du \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) dv \right\} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Koşullu yoğunluk fonksiyonları ise,

$$f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u) = \frac{d}{du} F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u) \tag{3.19}$$

$$f_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) = \frac{d}{dv} F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) \tag{3.20}$$

şeklinindedir. Eşitlik 3.18'nin analitik değerini hesaplayabilmek için öncelikle koşullu dağılım fonksiyonlarını ve daha sonra bu fonksiyonların integrallerini elde edelim.

$$F_{X_{12} | X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(u)$$

$$\begin{aligned}
&= P\{X_{12} \leq u \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} \\
&= \frac{P\{X_{12} \leq u, X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}}{P\{X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\}} \\
&= \frac{\int_0^u P\{X_{13} > X_{12}, X_{23} \leq \tau - X_{12} \mid X_{12} = x_1\} f_{X_{12}}(x_1) dx_1}{\int_0^\tau P\{X_{13} > X_{12}, X_{23} \leq \tau - X_{12} \mid X_{12} = x_2\} f_{X_{12}}(x_2) dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u P\{X_{13} > x_1\} P\{X_{23} \leq \tau - x_1\} f_{X_{12}}(x_1) dx_1}{\int_0^\tau P\{X_{13} > x_2\} P\{X_{23} \leq \tau - x_2\} f_{X_{12}}(x_2) dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u e^{-\lambda_{13}x_1} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_1)}) \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x_1} dx_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_{13}x_2} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_2)}) \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}x_2} dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})x_1} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_1)}) dx_1}{\int_0^\tau e^{-(\lambda_{12}+\lambda_{13})x_2} (1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-x_2)}) dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u e^{-\lambda_1x_1} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-x_1)}) dx_1}{\int_0^\tau e^{-\lambda_1x_2} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-x_2)}) dx_2} \\
&= \frac{\int_0^u (e^{-\lambda_1x_1} - e^{-\lambda_2\tau} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x_1}) dx_1}{\int_0^\tau (e^{-\lambda_1x_2} - e^{-\lambda_2\tau} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x_2}) dx_2} \\
&= \begin{cases} \frac{1-e^{-\lambda_1u}-\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} u}{1-e^{-\lambda_1\tau}-\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1-\lambda_2) (1-e^{-\lambda_1u})-\lambda_1 e^{-\lambda_2\tau} (1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)u})}{(\lambda_1-\lambda_2) (1-e^{-\lambda_1\tau})-\lambda_1 e^{-\lambda_2\tau} (1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)\tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

(3.21)

$$\begin{aligned}
& F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) \\
&= P\{X_{23} \leq v \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{X_{23} \leq v \mid X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y, X_{12} = y\} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^\tau \frac{P\{X_{23} \leq v, X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}}{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq v\}}{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + \int_{\tau-v}^\tau \frac{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}}{P\{X_{13} > y, X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{P\{X_{13} > y\} P\{X_{23} \leq v\}}{P\{X_{13} > y\} P\{X_{23} \leq \tau - y\}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + \int_{\tau-v}^\tau f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{1 - e^{-\lambda_{23}v}}{1 - e^{-\lambda_{23}(\tau-y)}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + 1 - F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(\tau - v) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(y) \, d(y) \\
&\quad + 1 - F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(\tau - v). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Eşitlik 3.22’de görüldüğü üzere olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyaç vardır.

$$\begin{aligned}
& f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (u) \\
&= \frac{d}{du} F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (u) \\
&= \begin{cases} \frac{d}{du} \left[ \frac{1 - e^{-\lambda_1 u} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} u}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right], & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{d}{du} \left[ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 u}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) u})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})} \right], & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} - (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) u}}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} (1 - e^{-\lambda_1 (\tau - u)})}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{-\lambda_1 u} (1 - e^{-\lambda_2 (\tau - u)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2. \end{cases} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Buradan 3.22 eşitliğinin değeri  $\lambda_1 = \lambda_2$  durumu için,

$$\begin{aligned}
& F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (v) \\
&= \int_0^{\tau - v} \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2 (\tau - y)}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (y) d(y) \\
&\quad + (1 - F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (\tau - v))
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau-v} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)}} \right) \left( \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} (1 - e^{-\lambda_1(\tau-y)})}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) d(y) \\
&\quad + \left( 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} (\tau - v)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{(1 - e^{-\lambda_1 v}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} d(y) + \left( 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} (\tau - v)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) \\
&= \frac{(1 - e^{-\lambda_1 v}) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)})}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} + \left( 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} (\tau - v)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \right) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda_1 v} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} v}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

şeklinde olurken  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  durumu için,

$$\begin{aligned}
&F_{X_{23} \mid X_{13} < X_{12}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (v) \\
&= \int_0^{\tau-v} \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)}} f_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (y) d(y) \\
&\quad + (1 - F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (\tau - v)) \\
&= \int_0^{\tau-v} \left[ \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2 v}}{1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{-\lambda_1 y} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-y)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \right) \right] d(y) \\
&\quad + \left( 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\tau})} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau-v} \frac{(1 - e^{-\lambda_2 v}) \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{-\lambda_1 y}}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})} d(y) \\
&\quad + \left( 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})} \right) \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_2 v}) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})} \\
&\quad + \left( 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1(\tau-v)}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau-v)})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})} \right) \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_2 v}) + \lambda_2 e^{-\lambda_1 \tau} (1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)v})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.  $D^H(\tau)$ 'nin Eşitlik 3.18'deki değerini hesaplayabilmek için bu fonksiyonların integrallerinin alınması gerekir.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau} F_{X_{12} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau} (u) du \\
&= \begin{cases} \frac{\tau - \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \frac{\tau^2}{2}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \tau - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} \tau + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \\
&\tag{3.26}
\end{aligned}$$

$\lambda_1 = \lambda_2$  durumu için,

$$\int_0^\tau F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) dv = \frac{\tau - \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \frac{\tau^2}{2}}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau} \quad (3.27)$$

ve  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  durumu için,

$$\int_0^\tau F_{X_{23} \mid X_{12} < X_{13}, X_{12} + X_{23} \leq \tau}(v) dv = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \tau - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 \tau}) + \lambda_2 e^{-\lambda_1 \tau} \tau - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}. \quad (3.28)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan eşitlik 3.26, 3.27 ve 3.30'dan  $D^H(\tau)$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D^H(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - \frac{2}{\lambda_1} + e^{-\lambda_1 \tau} \left( \frac{2}{\lambda_1} + \tau \right)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \left( \tau - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau}}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (3.29)$$

Sonuç olarak eşitlik 3.15 ifadesindeki bilinmeyen tüm ifadeler hesaplanmış oldu. Yani, başlangıç durumu 1 olan sistemin bir sonraki kontrol anına kadar oluşacak beklenen arıza süresi aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$D_1(\tau) = D^Q(\tau) Q(\tau) + D^H(\tau) H(\tau) .$$

Burada

$$Q(\tau) = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) ,$$

$$H(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_{12} e^{-\lambda_2 \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

$$D^Q(\tau) = \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_1 \tau}} - \frac{1}{\lambda_1} ,$$

$$D^H(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - \frac{2}{\lambda_1} + e^{-\lambda_1 \tau} \left( \frac{2}{\lambda_1} + \tau \right)}{1 - e^{-\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \tau}, & \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \left( \tau - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau}}{(\lambda_1 - \lambda_2) (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} (1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) \tau})}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

şeklindedir.

### 3.1.2.2 Durum 2'den oluşacak beklenen arıza süresi

$D_2(\tau)$ 'i başlangıç durumu 2 olan bir sistemin bir sonraki gözlem anında durum 3'te tespit edilmesi halinde oluşacak beklenen arıza süresi olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
D_2(\tau) &= \tau - E [ X_{23} | X_{23} \leq \tau ] \\
&= \tau - \int_0^\tau P\{X_{23} > w | X_{23} \leq \tau\} d(w), \quad w \leq \tau \\
&= \tau - \int_0^\tau (1 - P\{X_{23} \leq w | X_{23} \leq \tau\}) d(w), \quad w \leq \tau \\
&= \int_0^\tau P\{X_{23} \leq w | X_{23} \leq \tau\} d(w), \quad w \leq \tau \\
&= \int_0^\tau \left( \frac{1 - e^{-\lambda_{23}w}}{1 - e^{-\lambda_{23}\tau}} \right) d(w), \quad w \leq \tau \\
&= \frac{\tau - \frac{1}{\lambda_{23}} (1 - e^{-\lambda_{23}\tau})}{1 - e^{-\lambda_{23}\tau}} = \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_{23}\tau}} - \frac{1}{\lambda_{23}} \\
&= \frac{\tau}{1 - e^{-\lambda_2\tau}} - \frac{1}{\lambda_2}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Böylece başlangıç durumu 1 veya 2 olan sistemin  $\tau$  zaman sonra arızalı olarak tespit edilmesi halinde meydana gelen beklenen arıza süresi hesaplanmış oldu. Bundan sonraki alt bölümde bakım probleminin amaç fonksiyonunu elde edebilmek için her politika altında maliyet oranları yazılarak tüm matematiksel işlemler tamamlanacaktır.

### 3.1.3 Ortalama Maliyet Oranı

Problemimizde uzun vadede oluşacak en düşük maliyetli bakım politikasını belirlemek için yenileme teorisinden yararlanılmıştır. Yenileme çevrimi, iyi durumda bir sistemin en az bir bakım aksiyonu sonucu tekrar iyi duruma geri dönmesiyle tanımlanır. Her politika  $\Pi_i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, 5\}$ , için birim çevrim başına düşen maliyeti en küçükleyen en iyi kontrol periyodu  $\tau_i^*$  belirlenerek, maliyet oranlarının minimumunu veren politika en iyi bakım politikası olur.

Maliyet oranlarını yazmadan önce çevrim süresi ve çevrim maliyeti aşağıdaki gibi tanımlayalım.

**Çevrim süresi:** Durum 1'e sahip sistemin en az bir adet bakım aksiyonu olarak tekrar durum 1'e gelmesine kadar geçen süre.

**Çevrim maliyeti:** Bir çevrim süresini boyunca kontrol maliyetini haricinde oluşacak toplam maliyet.

Notasyon olarak çevrim süresi ve çevrim maliyeti aşağıdaki gibi tanımlanır:

$L_i^j(\tau)$  :  $\forall \Pi_i, i = \{1, \dots, 5\}$  politikası için durum  $j = \{1, 2, 3\}$ 'den durum 1'e kadar geçen süre

$C_i^j(\tau)$  :  $\forall \Pi_i, i = \{1, \dots, 5\}$  politikası için durum  $j = \{1, 2, 3\}$ 'den durum 1'e kadar oluşan maliyet

O halde çevrim süresi ve çevrim maliyeti tanımından, en az bir bakım altında  $L_i^1(\tau)$ 'in çevrim süresi ve  $C_i^1(\tau)$ 'in çevrim bakım maliyeti olduğu söylenir. Birim zaman başına tanımlanan kontrol maliyeti ise  $\kappa(\tau)$ 'dir. Her politika için ortalama maliyet oranı olan notasyon olarak  $\Gamma_i(\tau)$  şeklinde gösterilir ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Gamma_i(\tau) = \frac{C_i^1(\tau)}{L_i^1(\tau)} + \kappa(\tau) . \quad (3.31)$$

Çevrim maliyet oranını hesaplamak için ilk adım analizi (*first step analysis*) uygulanarak özyinelemeli denklemler aşağıdaki gibi kurulmuştur. Her politika için geçerli olan beklenen çevrim süresi  $L_i^1(\tau)$

$$\begin{aligned} L_i^1(\tau) &= P_{11}(\tau) [\tau + L_i^1(\tau)] + P_{12}(\tau) [\tau + L_i^2(\tau)] + P_{13}(\tau) [\tau + L_i^3(\tau)] \\ &= \tau [P_{11}(\tau) + P_{12}(\tau) + P_{13}(\tau)] + P_{11}(\tau) L_i^1(\tau) \\ &\quad + P_{12}(\tau) L_i^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_i^3(\tau) \\ \implies L_i^1(\tau) [1 - P_{11}(\tau)] &= \tau + P_{12}(\tau) L_i^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_i^3(\tau) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$L_i^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau) L_i^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_i^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.32)$$

şeklinde elde edilir.

Her politika için geçerli olan beklenen çevrim maliyeti  $C_i^1(\tau)$

$$\begin{aligned} C_i^1(\tau) &= P_{11}(\tau) C_i^1(\tau) + P_{12}(\tau) C_i^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_i^3(\tau)] \\ \implies C_i^1(\tau) [1 - P_{11}(\tau)] &= P_{12}(\tau) C_i^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_i^3(\tau)] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$C_i^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau) C_i^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_i^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)} \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilir.

3.32 ve 3.33 eşitliklerinde  $L_i^3(\tau)$  ve  $C_i^2(\tau)$  gibi bilinmeyen ifadeler mevcuttur. Bu ifadeler her politikaya göre alınan bakım kararına göre farklılık gösterir. Bu sebeple her politika için yine özyinelemeli denklemler yardımıyla tüm belirsiz ifadelerin de hesaplandığı maliyet oranları bir sonraki alt başlıklarda verilecektir.

### 3.1.3.1 Politika 1, $\Pi_1$ : (Hiçbir şey yapma, Hiçbir şey yapma, Majör Tamir)

Politika 1 gözetiminde herhangi bir önleyici bakım aksiyonu alınmamaktadır. Bir başka deyişle karar verici, sistemi sadece arızalı olarak tespit ettiği kontrol anlarında bakıma sokmaktadır. Bakım olarak da tamiri seçmektedir. Tamir sonrası sistemin yeni durumunun nasıl olacağı tamamen tamirin başarısına bağlıdır.  $t_{mj}$  süren tamir sonrası

sistem  $p_{mj}$  olasılığı ile durum 1'de olurken,  $q_{mj} = (1 - p_{mj})$  olasılığı ile durum 2'de olmaktadır. Bu durumda çevrim süresi  $L_1^1(\tau)$ , aşağıdaki özyinelemeli denklemlerin çözümüyle elde edilir.

$$L_1^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau) L_1^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_1^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)}$$

olarak yazılırken

$$\begin{aligned} L_1^2(\tau) &= P_{22}(\tau) [\tau + L_1^2(\tau)] + P_{23}(\tau) [\tau + L_1^3(\tau)] \\ &= \tau [P_{22}(\tau) + P_{23}(\tau)] + P_{22}(\tau) L_1^2(\tau) + P_{23}(\tau) L_1^3(\tau) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow L_1^2(\tau) [1 - P_{22}(\tau)] = \tau + P_{23}(\tau) L_1^3(\tau),$$

$$L_1^2(\tau) = \frac{\tau + P_{23}(\tau) L_1^3(\tau)}{1 - P_{22}(\tau)},$$

$$\begin{aligned} L_1^3(\tau) &= p_{mj} t_{mj} + q_{mj} (t_{mj} + L_1^2(\tau)), \\ &= t_{mj} + q_{mj} L_1^2(\tau) \end{aligned}$$

dir.

Çevrim maliyetini ise majör tamirin sabit maliyeti ve tamir boyunca sistemin işlev görmemesinden kaynaklanan arıza maliyeti oluşturur. Yine sistem tamirdeyken kontrol edilmediği için bu süre boyunca meydana gelecek kontrol maliyeti çıkartılmalıdır. Tüm bunlar göz önüne alındığında yenileme çevrimi maliyeti

$$C_1^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau) C_1^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_1^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)}$$



olarak yazılırken

$$\begin{aligned}C_1^2(\tau) &= P_{22}(\tau) C_1^2(\tau) + P_{23}(\tau) [c_d D_2(\tau) + C_1^3(\tau)] \\ \Leftrightarrow [1 - P_{22}(\tau)] C_1^2(\tau) &= P_{23}(\tau) [c_d D_2(\tau) + C_1^3(\tau)], \\ C_1^2(\tau) &= c_d D_2(\tau) + C_1^3(\tau), \\ C_1^3(\tau) &= c_{mj} + t_{mj} (c_d - \kappa(\tau)) + q_{mj} C_1^2(\tau)\end{aligned}$$

denklemleriyle hesaplanır.

### 3.1.3.2 Politika 2, $\Pi_2$ : (Hiçbir şey yapma, Hiçbir şey yapma, Yenile)

Karar verici mekanizma, Politika 2'yi takip ettiğinde Politika 1'de olduğu gibi sistem durumu kritik iken önleyici bakım aksiyonu almaz. Kontrol anlarında sistem sadece arızalı ise düzenleyici olan yenileme aksiyonunu seçer.

Bu durumda çevrim süresi,

$$L_2^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau) L_2^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_2^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)}$$

olarak yazılırken

$$\begin{aligned}L_2^2(\tau) &= \frac{\tau + P_{23}(\tau) L_2^3(\tau)}{1 - P_{22}(\tau)}, \\ L_2^3(\tau) &= t_{rpl}\end{aligned}$$

şeklinde ortaya çıkar.

Yenileme çevrim maliyetinde bakım maliyet kalemleri, sabit yenileme maliyeti ve yenileme süresi boyunca sistemin operasyonel anlamda işlev görmemesinden kaynaklanan maliyettir. Yine yenileme süresi boyunca sistemin kontrol edilmediği varsayımı, kontrol maliyetinin bu süre boyunca çıkartılmasına neden olmaktadır.

$$C_2^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau) C_2^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_2^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)}.$$

Burada

$$C_2^2(\tau) = c_d D_2(\tau) + C_2^3(\tau),$$

$$C_2^3(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} (c_d - \kappa(\tau))$$

şeklindedir.

### 3.1.3.3 Politika 3, $\Pi_3$ : (Hiçbir şey yapma, Minör Tamir, Majör Tamir)

Politika 3'ü takip eden karar mekanizması, kontrol anlarında sistem kritik veya arızalı durumdaysa tamir kararı almaktadır. Diğer bir deyişle önleyici bakıma başvurmaktadır.  $t_{mn}$  süresinde gerçekleşen minör tamir sonucu sistem,  $p_{mn}$  olasılığı ile durum 1'e gelirken,  $q_{mn} = (1 - p_{mn})$  olasılığı ile durum 2'ye gelmektedir. Aynı şekilde majör tamir sonucu sistem  $p_{mj}$  olasılığı ile durum 1'e gelirken,  $q_{mj} = (1 - p_{mj})$  olasılığı ile durum 2'ye  $t_{mj}$  süresinde gelmektedir.

Bu durumda yenileme çevrim süresi,

$$L_3^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau) L_3^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_3^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned}L_3^2(\tau) &= t_{mn} + (1 - p_{mn}) L_3^2(\tau) \\ \Leftrightarrow L_3^2(\tau) [1 - (1 - p_{mn})] &= t_{mn}, \\ L_3^2(\tau) &= \frac{t_{mn}}{p_{mn}}, \\ L_3^3(\tau) &= t_{mj} + (1 - p_{mj}) L_3^2(\tau)\end{aligned}$$

denklemleriyle hesaplanır.

Yenileme çevrim maliyeti ise

$$C_3^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau) C_3^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_3^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)}$$

diye olurken

$$\begin{aligned}C_3^2(\tau) &= c_{mn} + t_{mn} (c_d - \kappa(\tau)) + (1 - p_{mn}) C_3^2(\tau) \\ \Leftrightarrow C_3^2(\tau) [1 - (1 - p_{mn})] &= c_{mn} + t_{mn} (c_d - \kappa(\tau)), \\ C_3^2(\tau) &= \frac{c_{mn} + t_{mn} (c_d - \kappa(\tau))}{p_{mn}}, \\ C_3^3(\tau) &= c_{mj} + t_{mj} (c_d - \kappa(\tau)) + q_{mj} C_3^2(\tau)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### 3.1.3.4 Politika 4, $\Pi_4$ : (Hiçbir şey yapma, Minör Tamir, Yenile)

Bu politika altında karar verici artık biraz daha katılaşmakta; sistemi kritik olarak tespit ettiğinde tamir etmekte ya da arızalı olarak tespit ettiğinde yenilemektedir. Böyle bir durumda çevrim süresi,

$$L_4^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau) L_4^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_4^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)}$$

diye elde edilirken

$$L_4^2(\tau) = \frac{t_{mn}}{p_{mn}},$$

$$L_4^3(\tau) = t_{rpl}$$

olarak hesaplanır.

Yenileme çevrim maliyeti  $C_4^1(\tau)$  ise

$$C_4^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau) C_4^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_4^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)},$$

$$C_4^2(\tau) = \frac{c_{mn} + t_{mn} (c_d - \kappa(\tau))}{p_{mn}},$$

$$C_4^3(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} (c_d - \kappa(\tau))$$

denklemlerinden elde edilmektedir.

### 3.1.3.5 Politika 5, $\Pi_5$ : (Hiçbir şey yapma, Yenile, Yenile)

Son bakım politikası ise haber vermeyen arızalara çok fazla tahammül edemeyen herhangi bir sistem için düşünülmüştür. Öyle ki sistem her kontrol anında eğer iyi durumda değilse hem önleyici bakım hem de düzenleyici bakım olarak yenileme kararı alınmaktadır. Diğer politikalarda olduğu gibi çevrim süresi ve yenileme bakım maliyeti hesaplanırsa

$$L_5^1(\tau) = \frac{\tau + P_{12}(\tau) L_5^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_5^3(\tau)}{1 - P_{11}(\tau)},$$

$$L_5^2(\tau) = t_{rpl},$$

$$L_5^3(\tau) = t_{rpl}$$

$$C_5^1(\tau) = \frac{P_{12}(\tau) C_5^2(\tau) + P_{13}(\tau) [c_d D_1(\tau) + C_5^3(\tau)]}{1 - P_{11}(\tau)},$$

$$C_5^2(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} (c_d - \kappa(\tau)),$$

$$C_5^3(\tau) = c_{rpl} + t_{rpl} (c_d - \kappa(\tau))$$

ifadeleri elde edilir.

Tüm politikalar,  $\forall \Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , için genel bir ortalama maliyet oranı yazacak olursak

$$\Gamma_i(\tau) = \frac{C_i^1(\tau)}{L_i^1(\tau)} + \kappa(\tau)$$

ifadesi

$$L_i^1(\tau) = \frac{1}{1 - P_{11}(\tau)} [\tau + P_{12}(\tau) L_i^2(\tau) + P_{13}(\tau) L_i^3(\tau)], \quad (3.34)$$

$$L_i^2(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{1 - P_{22}(\tau)} [\tau + P_{23}(\tau) L_i^3(\tau)], & i = 1, 2 \\ \frac{t_{mn}}{p_{mn}}, & i = 3, 4 \\ t_{rpl} & i = 5 \end{cases} \quad (3.35)$$

$$L_i^3(\tau) = \begin{cases} t_{mj} + (1 - p_{mj}) L_i^2(\tau), & i = 1, 3 \\ t_{rpl} & i = 2, 4, 5 \end{cases} \quad (3.36)$$

$$C_i^1(\tau) = \frac{1}{1 - P_{11}(\tau)} [P_{12}(\tau) C_i^2(\tau) + P_{13}^{(\tau)} (c_d D_1(\tau) + C_i^3(\tau))], \quad (3.37)$$

$$C_i^2(\tau) = \begin{cases} c_d D_2(\tau) + C_i^3(\tau), & i = 1, 2 \\ \frac{c_{mn} + t_{mn}[c_d - \kappa(\tau)]}{p_{mn}}, & i = 3, 4 \\ c_{rpl} + t_{rpl} [c_d - \kappa(\tau)] & i = 5 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$C_i^3(\tau) = \begin{cases} c_{mj} + t_{mj} [c_d - \kappa(\tau)] \\ \quad + (1 - p_{mj}) C_i^2(\tau), & i = 1, 3 \\ c_{rpl} + t_{rpl} [c_d - \kappa(\tau)] & i = 2, 4, 5 \end{cases} \quad (3.39)$$

denklemleriyle hesaplanır.

### 3.2 Optimal Politika ve Optimal Kontrol Periyodu

Her politika  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  için karar değişkeni  $\tau$ 'nin optimal değeri  $\tau_i^*$  ortalama maliyetin en küçüklenmesiyle elde edilir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\tau_i^* = \underset{\forall \tau \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \{ \tau : \Gamma_i(\tau) \} = \underset{\forall \tau \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \tau : \frac{C_i^1(\tau)}{L_i^1(\tau)} + \kappa(\tau) \right\}$$

Burada  $\tau \in (0, \infty)$  için (3.34 - 3.39) ifadelerin pozitif ve sonlu olması  $\Gamma_i(\tau)$  ifadesinin de pozitif ve sonlu olduğunu, bu bağlamda  $\tau \in (0, \infty)$  için  $\tau_i^* < \infty$  olduğunu gösterir.

**Önerme 3.2.1**  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  için,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \Gamma_i(\tau) < \infty$  ve  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma_i(\tau) < \infty$ 'dir. Dolayısıyla, optimal kontrol periyodu  $\tau^*$  sonludur.

*İspat 3.2.1*

Öncelikle  $\tau \rightarrow 0$  durumunu incelersek, sistemin periyodik kontrolden çıkıp sürekli kontrole geçtiği gözlemlenir. Sürekli gözlemlenir. Sürekli gözlemlenir. Sürekli gözlemlenir. Sürekli gözlemlenir. Sürekli gözlemlenir. Aynı zamanda  $\kappa(\tau)$  değerinin  $\tau \rightarrow 0$  iken  $K > 0$ 'a yakınsadığını hatırlarsak, sistemin ortalama maliyet oranı

$$\Gamma_i(0) = \frac{C_i^1(0)}{L_i^1(0)} + K$$

şeklinde olur. Burada

$$L_i^1(0) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} \left[ \frac{1}{\lambda_{12}} + L_i^2(0) \right] + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} \left[ \frac{1}{\lambda_{13}} + L_i^3(0) \right] \quad (3.40)$$

olurken, burada

$$L_i^2(0) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2} + L_i^3(0), & i = 1, 2 \\ \frac{t_{mn}}{p_{mn}}, & i = 3, 4 \\ t_{rpl} & i = 5 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$L_i^3(0) = \begin{cases} t_{mj} + (1 - p_{mj}) L_i^2(0), & i = 1, 3 \\ t_{rpl} & i = 2, 4, 5 \end{cases} \quad (3.42)$$

şeklindedir. Ayrıca çevrim maliyeti

$$C_i^1(0) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} C_i^2(0) + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} C_i^3(0) \quad (3.43)$$

olurken

$$C_i^2(0) = \begin{cases} C_i^3(0), & i = 1, 2 \\ \frac{c_{mn} + t_{mn} (c_d - K)}{p_{mn}}, & i = 3, 4 \\ c_{rpl} + t_{rpl} (c_d - K) & i = 5 \end{cases} \quad (3.44)$$

$$C_i^3(0) = \begin{cases} c_{mj} + t_{mj} (c_d - K) + (1 - p_{mj}) C_i^2(0), & i = 1, 3 \\ c_{rpl} + t_{rpl} (c_d - K) & i = 2, 4, 5 \end{cases} \quad (3.45)$$

ifadeleri elde edilir.

(3.40 - 3.45) arasındaki tüm parametrelerin pozitif ve sonlu olması, maliyet oranının

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Gamma_i(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C_i^1(\tau)}{L_i^1(\tau)} + \kappa(\tau) = \frac{C_i^1(0)}{L_i^1(0)} + K < \infty \quad (3.46)$$

olduğunu gösterir.

Diğer durumda, yani  $\tau \rightarrow \infty$  durumunda sistem hiçbir kontrole uğramamakta ve birim zamandaki kontrol maliyetinin değeri,  $\kappa(\tau)$ , 0'a gitmektedir. O halde sistem kontrole uğramadığından 1 olasılığı ile arızalanır ve hiçbir bakım maliyeti ortaya çıkmayacağından tek maliyet arıza süresinden kaynaklanan maliyet olur. Bu durumda meydana gelecek olan ortalama maliyet oranı



$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Gamma_i(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ \frac{c_d D_1(\tau)}{\tau} + \kappa(\tau) \right] \quad (3.47)$$

$$= c_d + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \kappa(\tau)$$

$$= c_d < \infty \quad (3.48)$$

olur. İspat tamamlanır.

Burada  $\tau \rightarrow \infty$  iken limit değerinin  $c_d$ 'ye yakınsaması sistem üzerindeki bütün politikaların uzun vadede aynı değere yakınsayacağını gösterir. O halde  $c_d$ 'den küçük maliyet oranını veren  $\tau$  bulunmadığında optimum kontrol periyodu mevcut değildir. Bu durum Bölüm 4'te verilecek olan sayısal örneklerde gözlemlenmektedir.

**Sonuç 3.2.1** Eğer herhangi bir politika  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  için  $\Gamma_i(\tau) < c_d$  olacak şekilde en az bir  $\tau \in [0, \infty)$  mevcut ise,  $\Gamma_i(\tau)$  fonksiyonu  $[0, \min\{\Gamma_i(0), \Gamma_i(\infty)\}]$  kümesi üzerinde sınırlı olduğundan optimum kontrol periyodu  $\tau_i^*$  vardır ve  $\tau_i^* \in \Gamma_i^{-1}([0, \min\{\Gamma_i(0), \Gamma_i(\infty)\}])$ 'dir. Aksi takdirde bütün politikalar uzun vadede  $c_d$ 'ye yakınsar.

**Sonuç 3.2.2** Eğer  $c_d = 1$  ve diğer maliyetler (kontrol maliyeti hariç) 0 alınırsa, herhangi bir bakım politikası  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  ve  $\tau$  aralıklı kontrol mekanizması altında  $1 - \Gamma_i(\tau)$  sistem kullanılabilirliğini (availability) verir. Fakat burada tüm bakım maliyet parametreleri 0 olduğu için sistem her zaman yenileme aksiyonunu seçecektir. Dolayısıyla, problem açık çözümlere sahiptir.

## 4. SAYISAL ÇALIŞMA

3. Bölüm’de rassal olarak eskijen, haber vermeyen arızalara sahip bir sistem için çeşitli bakım politikaları önerilmiş ve optimum kontrol zamanları ile ilgili sonuçlar elde edilmişti. Bu bölümde sayısal örnekler ile belirlenen sonuçların analitik değerleri hesaplanacak ve geçiş hızları, bakım maliyetleri ve bakım süreleri gibi girdi parametrelerinin sistem üzerindeki etkileri gözlemlenecektir.

İncelenen örneklerde genel olarak çabuk arızalanan ve geç arızalanan şeklinde iki farklı sistem ele alınmış ve sonuçları değerlendirilmiştir. Ayrıntılı olarak çabuk arızalanan sistem için geçiş hızları  $\lambda_{12} = 0,22$ ,  $\lambda_{13} = 0,08$ ,  $\lambda_{23} = 0,1$  olurken, geç arızalanan sistem için geçiş hızları  $\lambda_{12} = 0,022$ ,  $\lambda_{13} = 0,008$ ,  $\lambda_{23} = 0,01$  şeklindedir. Diğer parametre girdileri ise her analize göre değişebilir. Fakat birim zaman başına kontrol maliyet fonksiyonu tüm sayısal örneklerde  $\kappa(\tau) = K e^{-0,1\tau}$  olacak şekilde aynı alınmıştır. Burada  $\kappa(\tau)$  fonksiyonunun, uç noktalarda

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} K e^{-0,1\tau} = K \quad \text{ve} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} K e^{-0,1\tau} = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde değer alması ve  $\tau$ 'a bağlı artmayan bir özelliğe sahip oluşu kontrol maliyeti için önerilen varsayımlarımıza uymaktadır.

Bir sonraki alt başlıklarda detaylarıyla incelenip yorumlanacak olan sayısal örnekler sonucunda en iyi bakım politikasının seçiminde rol oynayan temel faktörler elde edilip yorumlanacaktır. Temel alt başlıklar durumlar arası geçiş hızlarının optimalite üzerindeki etkisi ve bakım parametrelerinin optimalite üzerindeki etkisi şeklindedir.

### 4.1 Durumlar Arası Geçiş Hızlarının Optimalite Üzerindeki Etkisi

Sistem durumlar arası geçiş hızlarının, yani  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{23}$ ’ün en iyi bakım politikasının ve en iyi kontrol periyodunun belirlenmesindeki etkisini gözlemleyebilmek için herhangi bir hız değişken, diğer hızlar sabit tutularak analizler yapılmıştır.

Bu alt bölümde kullanılacak bakım aksiyonlarına ait ilgili girdiler Tablo 4.1’de verilmektedir.

Tablo 4.1: Sayısal örnekteki parametrelerin gösterimi

	Yenileme	Minör Tamir	Majör Tamir
<b>Sabit maliyet</b>	1000	150	500
<b>Bakım süresi</b>	1	0,5	2
<b>Başarı olasılığı</b>	1	0,9	0,6
<b>Kontrol sabiti</b>	1000		

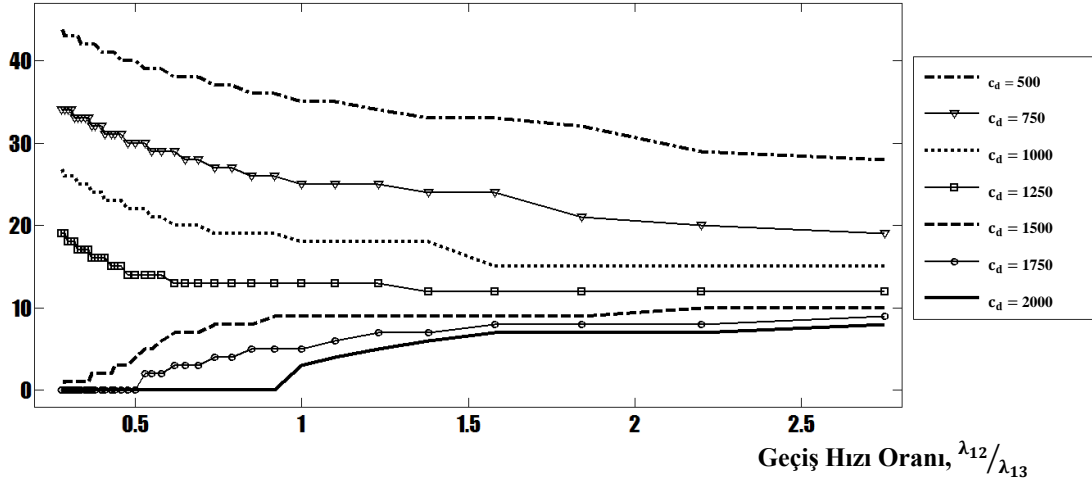
Durum 1’den durum 3’e geçiş hızının ( $\lambda_{13}$ ), bir başka deyişle şok arızalanma hızının bakım politikasının özelliğine bakılmaksızın optimum kontrol periyodu ( $\tau^*$ ) üzerindeki etkisi incelendiğinde, birim arızalı zaman maliyetinden kaynaklanan ilginç bir sonuç ile karşılaşmıştır.

Çabuk arızalanabilir sistem için Şekil 4.1’e bakılacak olunursa, x eksenini durum 1’den durum 2’e geçiş hızının durum 1’den durum 3’e geçiş hızına oranını, yani  $\lambda_{12}/\lambda_{13}$ ’ü; y eksenini ise optimum kontrol zamanı  $\tau^*$ ’ı göstermektedir. Grafik  $\lambda_{12} = 0,22$ ,  $\lambda_{23} = 0,1$  olacak şekilde sabitlenerek ve  $\lambda_{13}$ ,  $[0,08, 0,8]$  aralığında  $0,02$ ’lik artışlarla değiştirilerek elde edilmiştir. Ayrıca  $\lambda_{12}/\lambda_{13}$  oranı ile  $\tau^*$  arasındaki ilişki,  $c_d$  maliyeti 500’den 2000’e artırılarak oluşturulan 7 farklı durum altında incelenmiştir.

Burada, x eksenini üzerinde sola doğru gidildikçe  $\lambda_{12}/\lambda_{13}$  ifadesinin azalması, arızalanma hızının arttığını gösterir. O halde,  $c_d$ ’nin yüksek olduğu haller için arızalanma hızı arttıkça sistemin daha sık kontrol edilmesi akla yatkın bir durumdur. Fakat  $c_d$ ’nin düşük olduğu durumlarda arıza hızı arttığı halde kontrolün daha geç aralıklar ile yapılması beklenmedik bir durumdur. Bunun sebebi şöyle açıklanabilir: Genel maliyet oranı, düşük  $c_d$ ’ler için arıza hızı arttıkça çevrim zamanı boyunca oluşan bakım sayısını azaltarak (kontrol sıklığını genişleterek) minimize olur. Çünkü kontrol periyodunun artması sistemin bakım maliyetinin, haber vermeyen arızadan dolayı katlanacağı maliyetten daha önemli olduğunu gösterir. Örneğin,  $c_d = 500$  olduğu durumda,  $\tau = 30$  iken yapılacak bakım sayısı haliyle  $\tau = 40$  iken yapılacak bakım sayısından fazla olacaktır. Biz Şekil 4.1’de arıza hızı artsa bile karar vericinin bakım maliyetinden kaçınmak için optimum kontrol periyodun 30’dan 40’a çıkarmayı göze aldığı

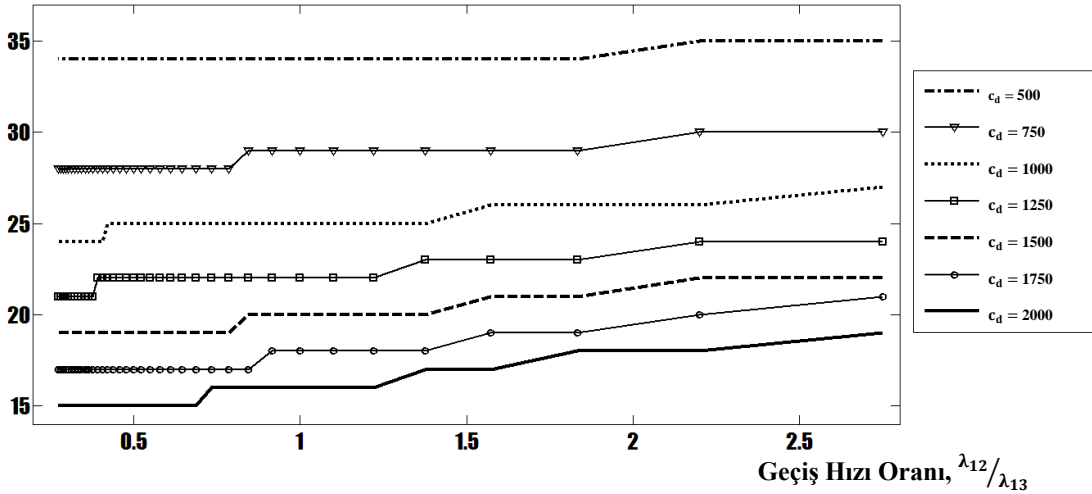
görüyoruz. Fakat diğer yandan kontrol periyodundaki artış beklenen arıza süresini de artıracığı için haber vermeyen arızadan kaynaklanan maliyet de artacaktır. Bu nedenle iki maliyet arasında bir ödünleşme vardır. Bu ödünleşme Şekil 4.1'de  $c_d$ 'nin 1250 ve altı değerler aldığı durumlarda optimal kontrol periyodunun arıza hızı arttıkça uzamasına sebep olmaktadır. Diğer taraftan  $c_d$  1500 ve üzeri değerler aldığı zaman bu ilişki ters yönde seyretmektedir.

En İyi Kontrol Periyodu,  $\tau^*$



Şekil 4.1: Çabuk arızalanan sistem için  $\lambda_{13}$  geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi

En İyi Kontrol Periyodu,  $\tau^*$



Şekil 4.2: Geç arızalanan sistem için  $\lambda_{13}$  geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi

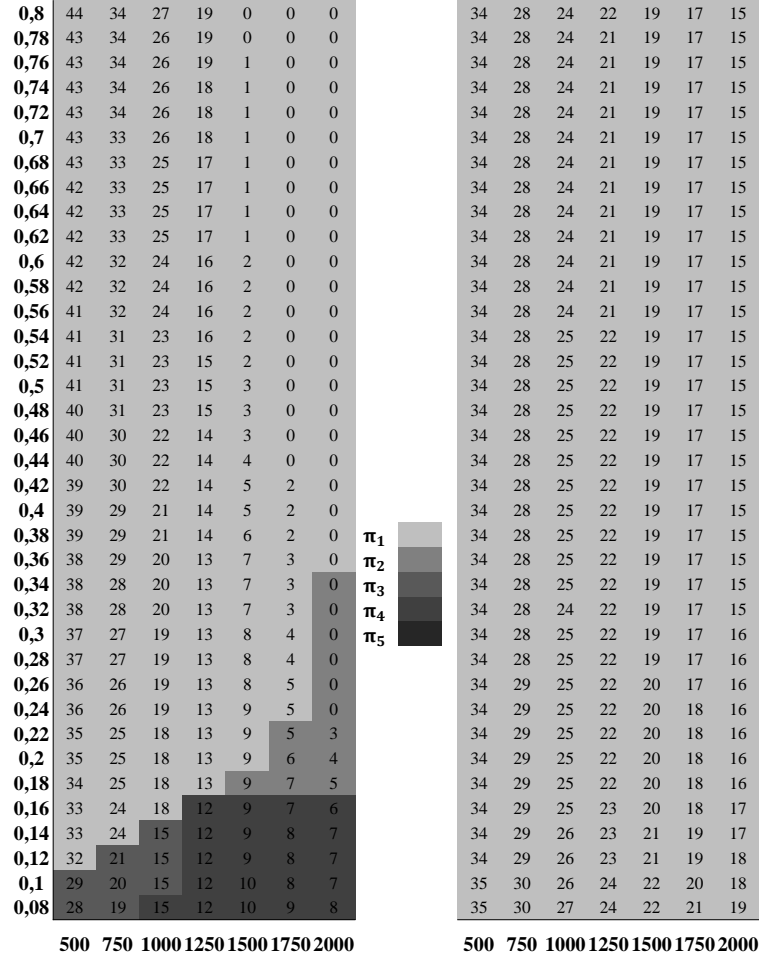
Geç arızalanabilir ( $\lambda_{12} = 0,022$  ve  $\lambda_{23} = 0,01$ ) sistem ele alındığında ise aynı parametreler için Şekil 4.2'den de görüldüğü üzere böyle bir sonuç ile karşılaşılmamıştır. Çünkü sistemin geç arızalanabilir oluşu bakım maliyeti ve  $c_d$  arasındaki dengenin  $c_d$  lehine kurulmasını ve şok arızalanma hızı arttıkça daha sık bakım kararının tercih edilmesini sağlamıştır.

Şekil 4.1 ve 4.2, politika ayırımı gözetmeksizin geçiş hızlarının optimum kontrol periyodu üzerindeki davranışını göstermektedir. Şekil 4.3 ise politikalar arası geçişlerin de göz önünde bulundurulduğu bir analizdir.

Şekil 4.3 ve bundan sonra yapılacak benzer grafiklerde, her bir rakamın yazılı olduğu kısım birer problem çözümüdür. Rakamlar optimal kontrol zamanlarını, renkler ise optimum politikaları göstermektedir. Örneğin Şekil 4.3'te x ekseninde sağa doğru gidildikçe rakamlardaki azalış,  $c_d$ 'deki artıştan dolayı optimum kontrol periyodunun sıklaştığı gösterir. Diğer taraftan y ekseninde yukarıya doğru çıkıldıkça daha açık rengin oluşması, arıza hızındaki artıştan dolayı politika değişikliği yaşandığını göstermektedir. Optimum politikada arızalı durumda tespit edilen sistem için tamir kararı alınırken, yenileme kararı alınmaya başlanmıştır.

Şekil 4.3'te (a) ile gösterilen şekil çabuk arızalan sistem için, (b) ile gösterilen şekil ise geç arızalanan sistem için yapılan analizi gösterir. Her iki şekilde  $c_d$  arttıkça kontrollerin sıklaştığı görülmektedir. Fakat kendi aralarındaki gözlem periyodunun optimum değerlerindeki farklılık, sistemin çabuk veya geç arızalanabilir oluşu ile açıklanabilir. Geç arızalanan sistemin, çabuk arızalanan sistemden daha az sıklıkla kontrol edilmesi beklenen bir sonuçtur. İki şekli birbirinden ayıran temel fark ise Şekil (a)'da şok arıza hızının küçük olduğu yerlerde sistemin önleyici olarak tamir kararı almasıdır. Diğer bir deyişle  $\lambda_{13}$ 'ün az olduğu durumlarda Politika 3 ve 4 tercih edilmektedir. Şok arıza hızı arttıkça (y ekseninde yukarıya doğru gidildikçe) önleyici bakımdan vazgeçilmekte, sistemin sadece arızalı olarak tespit edildiği kontrol anlarında tamir kararını öneren Politika 1 etkin olmaktadır. Burada kontrolün sıklaşması önleyici bakımın ortadan kaldırılmasındaki en önemli etmeni oluşturur. Çünkü sistem önleyici bakımın maliyetine katlanmak yerine kontrol maliyetine katlanmayı tercih eder. Şekil (b)'de ise aynı parametreler altında hiçbir politika değişikliği olmamıştır. Sistem geç arızalandığı için  $c_d$ 'ye olan hassasiyetinin azalması, politika değişikliğini güçleştirmiştir.

Durum 1'den Durum 3'e  
geçiş hızı,  $\lambda_{13}$



Birim arızalı zaman başına düşen maliyet,  $c_d$

$$\lambda_{12} = 0,22, \quad \lambda_{23} = 0,1$$

(a)

$$\lambda_{12} = 0,022, \quad \lambda_{23} = 0,01$$

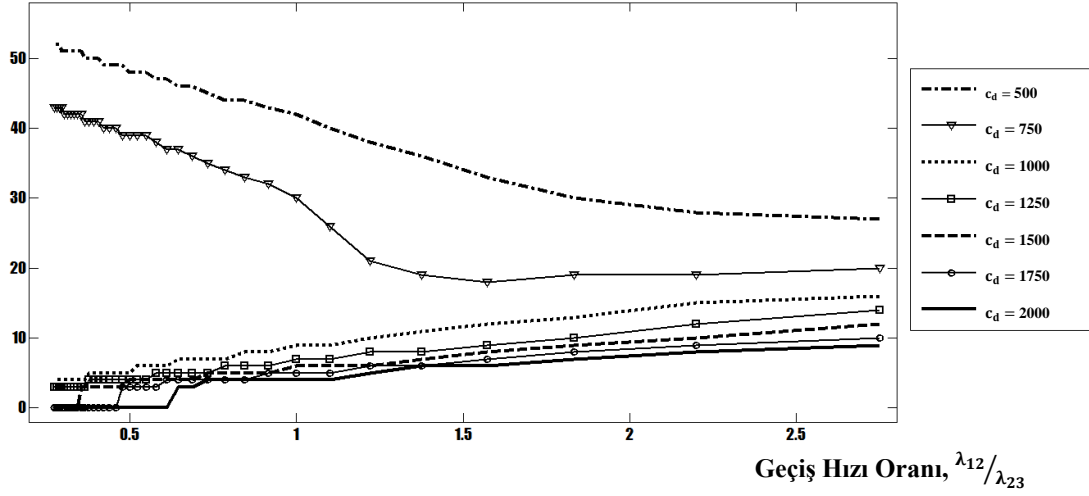
(b)

Şekil 4.3: Geçiş hızı  $\lambda_{13}$ 'ün optimum kontrol zamanı ve politikalar üzerindeki etkisi

Farklı parametreler, farklı sonuçları doğuracaktır. Fakat yaptığımız analizlerde gördük ki çeşitli girdi değerleri için bile sistem davranışı değişmemekte, yine benzer grafikler elde edilmektedir.

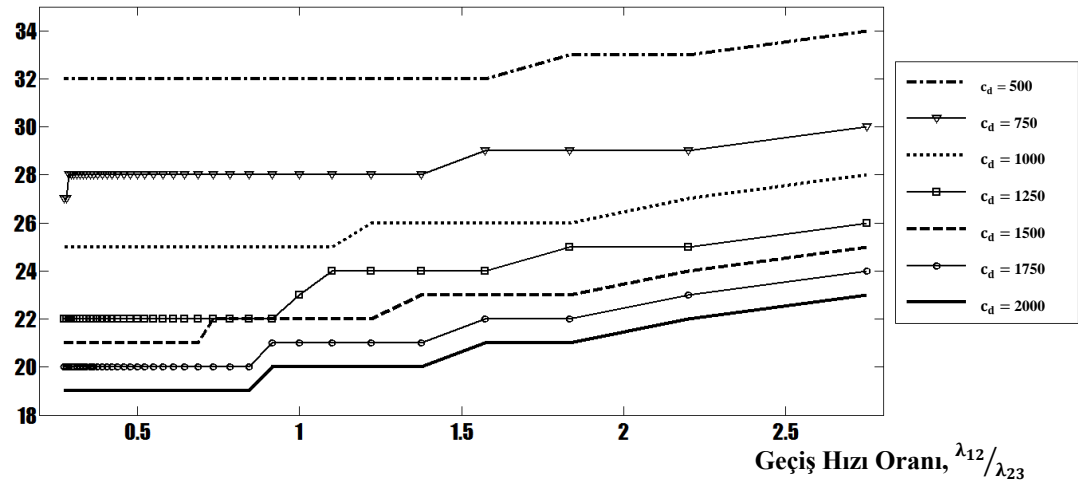
Durum 2'den durum 3'e geçiş hızının ( $\lambda_{23}$ ) değışmesi halinde optimal kontrol periyodunun etkisi incelenmiş; çabuk arızalanan sistem için Şekil 4.4 ve geç arızalanan sistem için Şekil 4.5 elde edilmiştir.

En İyi Kontrol Periyodu,  $\tau^*$



Şekil 4.4: Çabuk arızalanan sistem için  $\lambda_{23}$  geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi

En İyi Kontrol Periyodu,  $\tau^*$



Şekil 4.5: Geç arızalanan sistem için  $\lambda_{23}$  geçiş hızının optimum kontrol zamanı üzerindeki etkisi

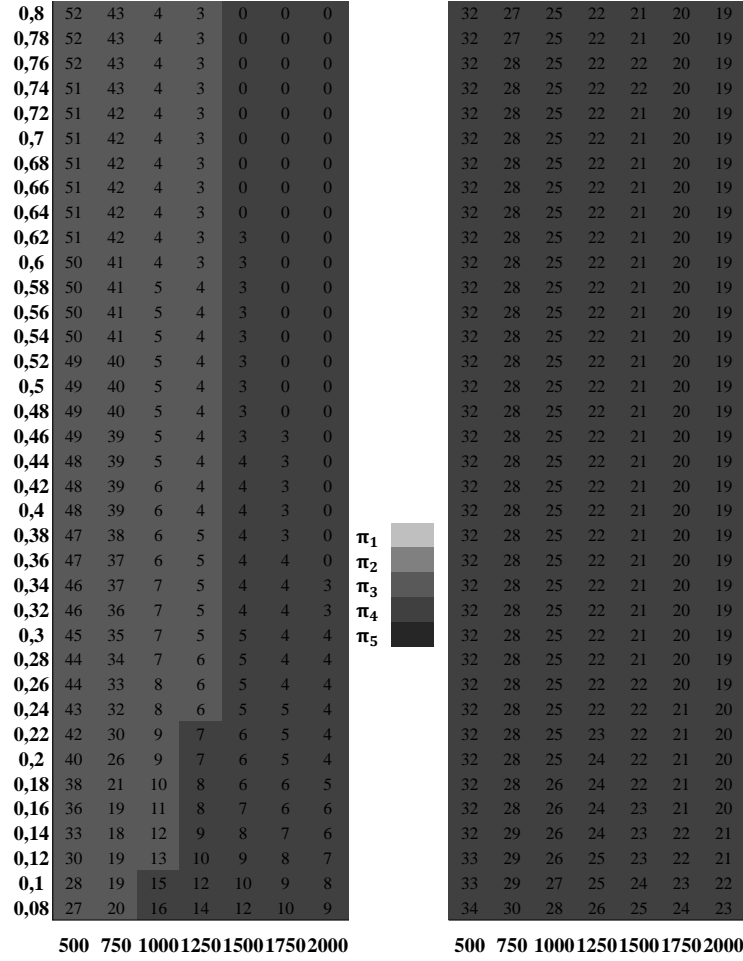
Şekil 4.4 için aynı parametreler altında şok arızası için yapılan analiz Şekil 4.1'e göre  $\tau^*$ 'ın aldığı değerlerde farklılık gözlemlenmiştir. Şekil 4.1'de  $\tau^*$ 'ın aldığı değerler 0 ile 45 arasında değişirken, Şekil 4.4'te 0 ile 55 arasında değişmektedir. O halde sistemin, şok arızalanma hızındaki değişime göre daha duyarlı olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü şok arızadan kaynaklanan arıza hızındaki artış, kritik durumdan arızalı duruma geçiş hızından kaynaklanan arıza hızındaki artışa göre sistemin daha sık kontrol edilmesine neden olmuştur.

Bir diğer gözlem ise, arıza hızının artmasıyla birlikte kontrolün daha geç aralıklarla yapıldığı  $c_d$  değerleri Şekil 4.1'de 1250 ve altı iken Şekil 4.4'te 750 ve altıdır. Böyle bir durumun sebebi politika farklılığı ile açıklanır. Sistemin kritik durumdan arızalı duruma geçişinin hızlı olması, sistemi önleyici bakıma yöneltir. Önleyici bakım ile optimale ulaşan sistem fazladan bir maliyete daha, yani arızalı süreden kaynaklanan bir maliyete katlanmak istemeyecektir. Dolayısıyla  $c_d$ 'ye olan duyarlılığı daha da artar ve arıza hızındaki artışa rağmen daha geç kontrolün yapıldığı  $c_d$  değerleri Şekil 4.4'te daha az olur.

Geç arızalanan sistem için elde edilen Şekil 4.5'teki gözlemler, yine  $\lambda_{13}$ 'ün geç arızalanabilir sistem için yapılan analizinde olduğu gibi benzer şekilde yorumlanabilir. Fakat ilginç olan burada  $\lambda_{23}$ 'teki değişimin, sistemi durum 2'de iken önleyici olarak bakım kararı almaya itip itmeyeceğidir. Bu bağlamda politikalar arasındaki geçişleri gösteren analiz yapılmış ve Şekil 4.6'daki gibi gösterilmiştir.



Durum 2'den Durum 3'e  
geçiş hızı,  $\lambda_{23}$



Birim arızalı zaman başına düşen maliyet,  $c_d$

$$\lambda_{12} = 0,22, \quad \lambda_{13} = 0,08$$

(a)

$$\lambda_{12} = 0,022, \quad \lambda_{13} = 0,008$$

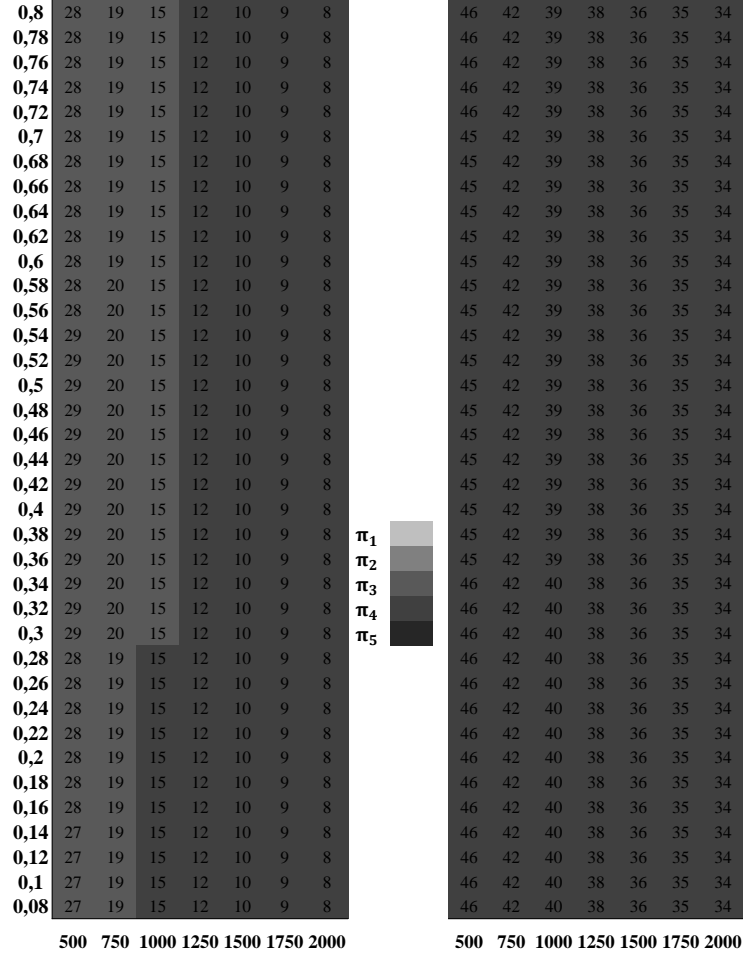
(b)

Şekil 4.6: Geçiş hızı  $\lambda_{23}$ 'ün optimum kontrol zamanı ve politikalar üzerindeki etkisi

Şekil 4.6'da grafik (a) ve (b)'de önleyici bakımın alınması, durum 2'den durum 3'e geçiş hızının ( $\lambda_{23}$ ) önemini göstermektedir. Bu hız arttıkça sistemin önleyici bakımdan asla vazgeçmediği görülür. İlginç olan bir diğer sonuç ise (a)'da sistemin  $c_d$  maliyetinin artmasıyla birlikte Politika 3'ten Politika 4'e geçişidir. Çünkü çabuk arızalanan sistem için arızalı sürenin birim maliyeti oldukça önemlidir. Bu maliyet arttıkça karar verici 3. durumda tamirden vazgeçer ve sistemi yenilemeye geçer. Çünkü sistem için tamir

süresinden dolayı ortaya çıkan maliyet de oldukça önemli olacaktır.

Durum 1'den Durum 2'e  
geçiş hızı,  $\lambda_{12}$



Birim arızalı zaman başına düşen maliyet,  $c_d$

$$\lambda_{13} = 0,08, \quad \lambda_{23} = 0,1$$

(a)

$$\lambda_{13} = 0,002, \quad \lambda_{23} = 0,01$$

(b)

Şekil 4.7: Geçiş hızı  $\lambda_{12}$ 'nin optimum kontrol zamanı ve politikalar üzerindeki etkisi

Geçiş hızlarına ait son analiz ise durum 1'den durum 2'e geçiş hızı olan  $\lambda_{12}$ 'ye ait çalışmadır. Şekil 4.7'de görüldüğü üzere optimum kontrol zamanlarındaki değişiklik neredeyse çok azdır. Böyle bir durumun sebebi  $\lambda_{12}$ 'daki değişimin doğrudan sistemin arıza hızına etkisinin olmamasıdır. Fakat dikkat edilmelidir ki  $\lambda_{12}$  arttıkça sistemin

durum 2'e daha hızlı geçmesi, durum 2'de yapılan önleyici bakımının etkisini ortaya çıkarmıştır. Bu bağlamda optimum politikada önleyici bakım yer almaktadır.

## 4.2 Bakım Parametrelerinin Optimalite Üzerindeki Etkisi

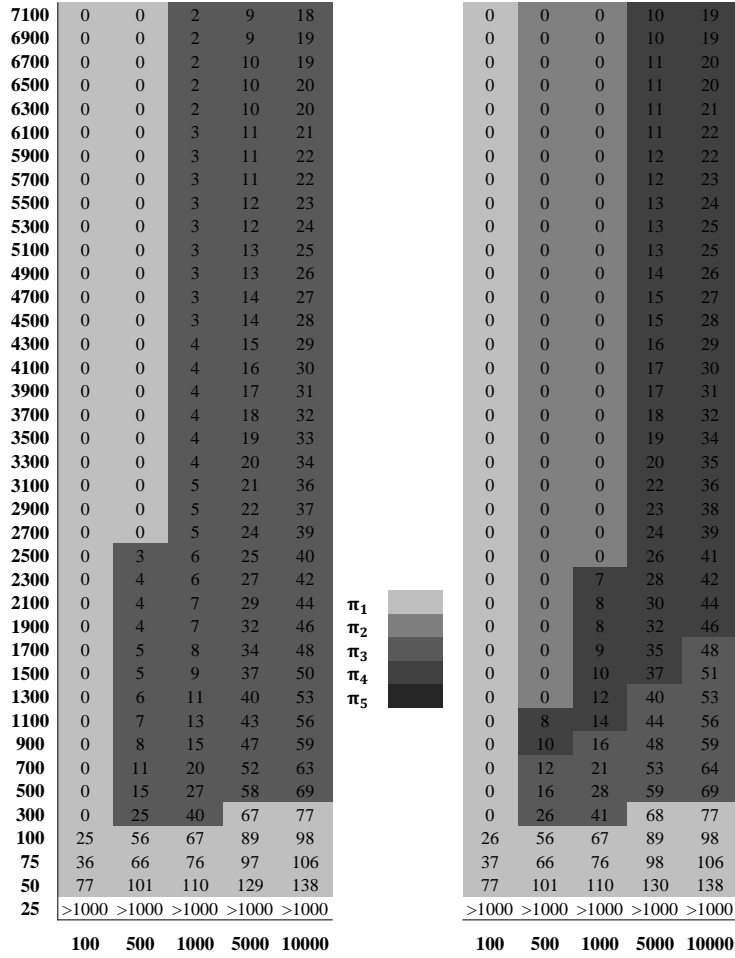
Sistemin haber vermeyen arızalara sahip olması nedeniyle, bakım parametrelerine ilişkin analizlerde optimal politikanın birim arızalı zaman başına düşen maliyeti  $c_d$ 'ye göre değişimi incelenmiştir. Bu incelemede öncelikle  $c_d$  ile kontrol maliyeti  $\kappa(\tau)$ 'nin arasındaki etkileşimin optimal politika ve bakım periyodu üzerindeki etkisine bakılmıştır. Sonra benzer analizler  $c_d$  ile yenileme maliyeti  $c_{rpl}$  arasındaki ikili etkileşim ve yine  $c_d$  ile tamir parametreleri arasındaki ilişkiler ele alınarak tekrar edilmiştir.

### 4.2.1 Kontrol Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi

Kontrol maliyetinin sistem üzerindeki davranışını tespit edebilmek için, kontrol parametresi olan  $K$ 'nin farklı değerleri altında problem çözülmüştür. Çabuk arızalanan sistem için Şekil 4.8 elde edilirken; geç arızalanan sistem için Şekil 4.9 ortaya çıkmıştır. Burada (a) ve (b) analizleri farklı bakım süreleri (tamir veya yenileme süresi) altında elde edilmiş, bakım sürelerinin de optimalite üzerindeki etkisi gözlemlenmeye çalışılmıştır.

Şekil 4.8'e göre,  $K$  değeri azaldıkça kontrol maliyeti de azalacağı için sistem daha sık kontrole yönelmiş ve hatta kimi zaman haber vermeyen arızadan ötürü meydana gelen maliyete katlanmamak için sürekli gözlem ile optimum maliyete ulaşmıştır.  $K = 100$  olduğu durum için sistemin  $c_d$ 'deki artışa göre daha hızlı sürekli gözleme geçmesi bu duruma örnek gösterilebilir. Benzer şekilde, kontrol maliyetindeki artış hem Şekil (a)'da hem de Şekil (b)'de görüldüğü üzere optimum politikanın  $\Pi_1$ 'den  $\Pi_3$ 'e geçmesine neden olmuştur. Bu da kontrol maliyetinin önleyici bakım kararında etkili olduğunu göstermektedir. Şekil (b)'nin analizinden elde edilecek diğer bir sonuç,  $c_d$ 'deki artışa göre arıza anında tamir kararından yenileme kararına yöneliştir. Bu durum  $\Pi_3$ 'den  $\Pi_4$ 'e geçiş noktalarında görülür.

**Birim arızalı zaman  
başına düşen maliyet,  $c_d$**



**Kontrol sabiti, K**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	1000	300	500
Bakım süresi	0.001	0.001	0.001
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	K		

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	1000	300	500
Bakım süresi	1	0.5	2
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	K		

(a)

(b)

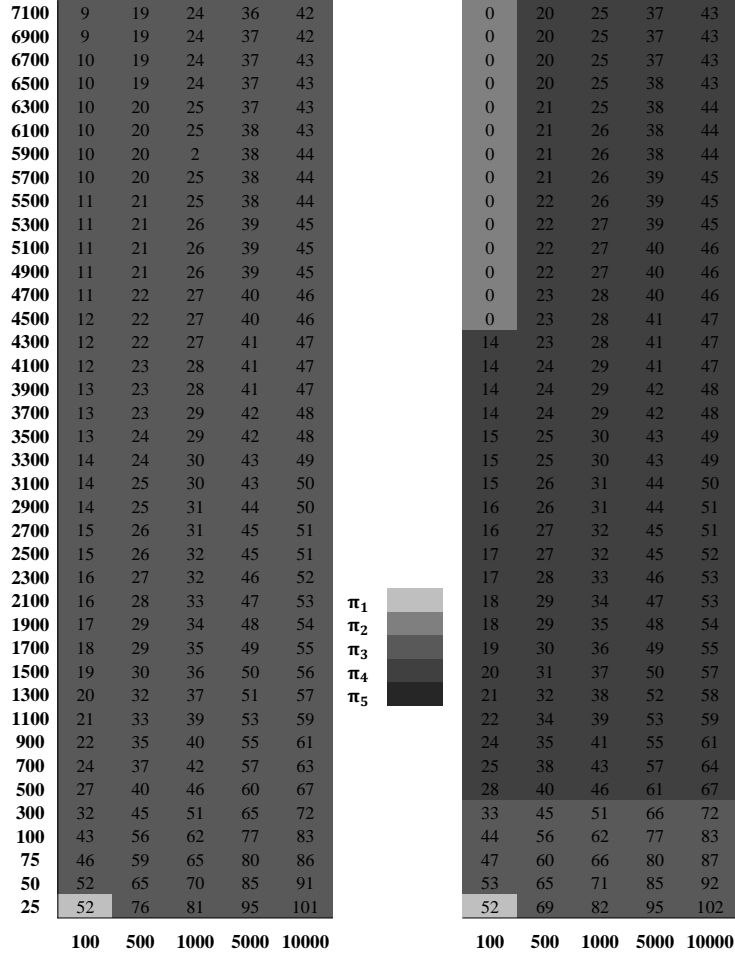
Şekil 4.8: Çabuk arızalanan sistem için kontrol maliyeti analizi

Şekil 4.8'de (b) analizine ilişkin diğer bir sonuç ise, 500 veya 1000'e eşit olan kontrol sabiti için  $c_d$ 'nin küçük değerlerinde  $\Pi_1$ 'in, nispeten büyük değerlerinde  $\Pi_3$  veya  $\Pi_4$ 'ün ve çok büyük değerlerinde  $\Pi_2$ 'nin etken oluşudur. Yani,  $c_d$ 'nin düşük değerlerinde önleyici bakım yapılmazken, bu karar  $c_d$ 'nin değeri arttıkça önleyici bakım yapma yönünde değişmektedir. Fakat, daha da fazla  $c_d$  değerleri için sistemin

sürekli kontrol ile optimale ulaşması, önleyici bakımın yapılmamasına neden olmuştur. Bunun sebebi arıza maliyetindeki değişkenliğin haber vermeyen arızalara sahip sistem üzerindeki etkisidir. Birim arıza başına maliyetin,  $c_d$ , çok küçük olması, sadece arızalı durumda olan sistemi tamire iterken; çok büyük olması, haber vermeyen arızalardan kaynaklanan maliyete katlanamayan sistemi yenisiyle değiştirme kararını aldırarak sürekli gözleme yöneltir.

Şekil 4.8'deki son gözlem ise hem (a)'daki hem de (b)'deki grafiğin son satırında, yani  $c_d = 25$  olduğu durumda optimum kontrol zamanının 1000'den büyük bir değere sahip olmasıdır. Bunun anlamı sistemin bakım maliyetini enküçükleyen kontrol zamanının bulunamamasıdır. Bölüm 3'teki Önerme 3.2 ve Sonuç 3.2 ifadesine geri dönersek, sistemin bazı koşullar altında optimum kontrol periyodunun bulunamadığı görülmüş ve hatta tüm politikaların maliyet oranlarının uzun vadede  $c_d$  değerine ulaştığı gösterilmişti. Bu bağlamda sistem arızalı iken katlanılan bakım maliyetin çok küçük olması kontrol periyodunun ya çok uzun olmasına ya da hiç kontrol yapılmamasına sebep olmaktadır. Ancak hiç kontrol yapılmayan sistemin çalışır durumda olduğu sürenin kısıtlı olduğu düşünülürse kontrolden vazgeçilmesi pratikte bu sistemin kurulmasının ekonomik kıstaslara göre uygun olmadığı anlamına gelmektedir.

**Birim arızalı zaman  
başına düşen maliyet,  $c_d$**



**Kontrol sabiti, K**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	1000	300	500
Bakım süresi	0.001	0.001	0.001
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	K		

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	1000	300	500
Bakım süresi	1	0.5	2
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	K		

(a)

(b)

Şekil 4.9: Geç arızalanan sistem için kontrol maliyeti analizi

Geç arızalanan sistem için kontrol maliyetine ilişkin analiz Şekil 4.9'da görülebilir. Şekilde etkin politikaların  $\Pi_3$  ve  $\Pi_4$  olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle karar vericinin önleyici bakımından vazgeçtiği Şekil 4.8'de olduğu gibi durumlar, birkaç ufak istisna haricinde olmamıştır. Bu aslında beklenen bir sonuçtur. Çünkü sistemin geç arızalanabilir oluşu,  $c_d$ 'ye olan hassasiyetini azaltmıştır. Dikkatlice inceleyecek

olursak (b)'de  $c_d$  artarken, sistemin Politika 3'ten Politika 4'e geçişi, her ne kadar majör tamir sistemi yenilemeden ucuz olsa da majör tamir süresine katlanmanın maliyetinin daha ağır bastığını gösterir.

Çabuk arızalanabilir sistemde olduğu gibi  $c_d = 25$  iken optimum kontrol zamanının bulunamadığı bir sonuç ile karşılaşılmamıştır. Bunun da yine tek sebebi sistemin arızalanma olasılığının düşük oluşudur. Fakat şekilde gösterilmese de kontrol zamanının bulunamadığı 25'ten küçük  $c_d$  değerlerinin varlığı sayısal örneklerde tespit edilmiştir.

## 4.2.2 Yenileme Maliyetinin Optimalite Üzerindeki Etkisi

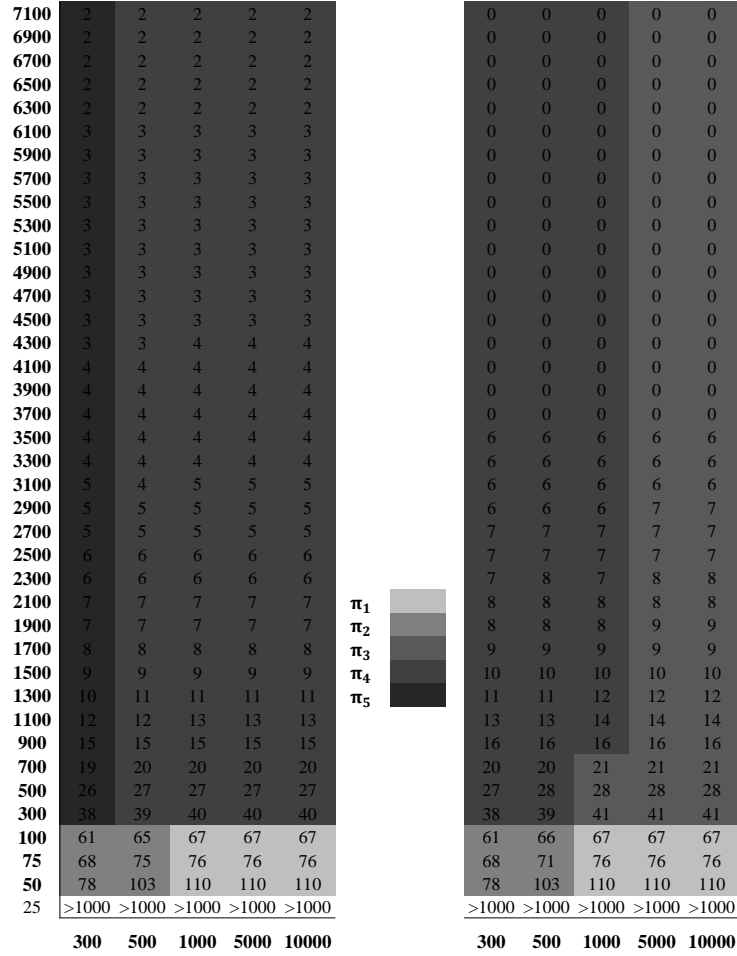
Bir diğer maliyet analizimiz olan sistemi yenileme maliyetine  $c_{rpl}$  ait analiz ise yine çabuk arızalanabilir ve geç arızalanabilir olacak şekilde iki farklı biçimde elde edilerek Şekil 4.10 ve Şekil 4.11'deki gibi gösterilmektedir.

Çabuk arızalanabilir sistem için elde edilen iki şekle göre  $25 \leq c_d \leq 100$  iken sistemin aynı sonuca ulaşması,  $c_d$ 'nin bu değerleri için bakım süresinin optimum politikanın belirlenmesinde önemli bir rolü olmadığını gösterir. Fakat böyle bir sonuç aynı maliyet oranına sahip olduğunu göstermez ki bu sonuçlardan da görülmüştür. Diğer taraftan,  $c_d$ 'nin diğer değerleri için politika seçimi değişmektedir. Örneğin, Şekil (a)'da sistemi yenileme maliyetinin çok küçük olduğu yerde  $\Pi_5$ 'in gözlemlenmesi oldukça mantıklıdır. Çünkü hem yenileme maliyetinin az hem de yenileme süresinin kısa olması sistemi önleyici ve düzenleyici olarak yenileme aksiyonunun alınmasına itmiştir. Şekil (b)'de ise bakım sürelerindeki (tamir veya yenileme süresi) artış ile birlikte aynı  $c_d$  değeri için, yenileme maliyeti aynı olmasına rağmen yenileme süresinin artması sonucu oluşan maliyet sistemin maliyet oranını etkilemiştir. Bu nedenle  $\Pi_5$  optimum politika olma özelliğinden çıkmış, yerini kritik durumda tamir kararı aldırın  $\Pi_4$ 'e bırakmıştır.

Şekil 4.10'deki (b) grafiğinde ise sistemin yenilenme süresinin (a)'ya göre daha uzun olması,  $c_{rpl}$ 'deki artışa bağlı olarak arızalı durumda tespit edilen sistem için karar vericiyi yenilemeden vazgeçirmiş tamire yöneltmiştir. Bu durum  $\Pi_4$ 'ten  $\Pi_3$ 'e geçiş yerlerinde gözlemlenebilir. Ayrıca, sistemin (a)'ya oranla daha hızlı sürekli gözleme geçtiği görülmüştür. Çünkü bakım süresinden kaynaklanan maliyet,  $c_d$ 'nin artmasıyla genel maliyeti negatif yönde etkilemeye başlamış, periyodik kontroller sonucu haber vermeyen arızalardan kaynaklanan maliyete katlanmak istemeyen sistem, sürekli

gözlem ile optimum sonuca ulaşmıştır.

**Birim arızalı zaman  
başına düşen maliyet,  $c_d$**



**Yenileme maliyeti,  $c_{rp1}$**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	$c_{rp1}$	300	500
Bakım süresi	0.001	0.001	0.001
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(a)

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	$c_{rp1}$	300	500
Bakım süresi	1	0.5	2
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(b)

Şekil 4.10: Çabuk arızalanan sistem için yenileme maliyeti analizi





Geç arızalanabilir sisteme göre yapılan analiz, Şekil 4.11, için de benzer yorumlar yapılabilir. Örnek olarak  $c_{rpl}$  artıkça sistemin yenileme aksiyonundan tamir aksiyonuna yönelmesi, bakım sürelerindeki artış nedeniyle etkin politikanın (b)'de  $\Pi_3$  yerine  $\Pi_4$  olması gibi çıkarımlar verilebilir. Ayrıntılı olarak  $c_{rpl} = 1000$  için (a)'da  $\Pi_3$  optimal politika olurken; diğer taraftan (b)'de tamir süresinin yenileme süresinden fazla olması en iyi politikanın  $\Pi_4$  olmasına neden olmuştur. Dikkat edildiği üzere, her iki şekilde gözlem zamanları neredeyse aynıdır. Hatta kendi içlerinde de değişiklikler ufak seviyededir. Bu da demek oluyor ki  $c_{rpl}$ 'nin kontrol periyodu üzerinde etkin bir rolü yoktur.

Diğer taraftan önemli bir gözleme değinmekte fayda vardır. Arıza hızı ve kontrol maliyeti analizinde olduğu gibi sistemin geç arızalanabilir oluşu, hemen hemen her  $c_d$  değeri için sistemi önleyici bakım almaya yöneltmektedir. Geç arızalandığı halde neden önleyici bakıma başvurduğu ise ancak kontrol periyodlarına bakılarak anlaşılabilir.

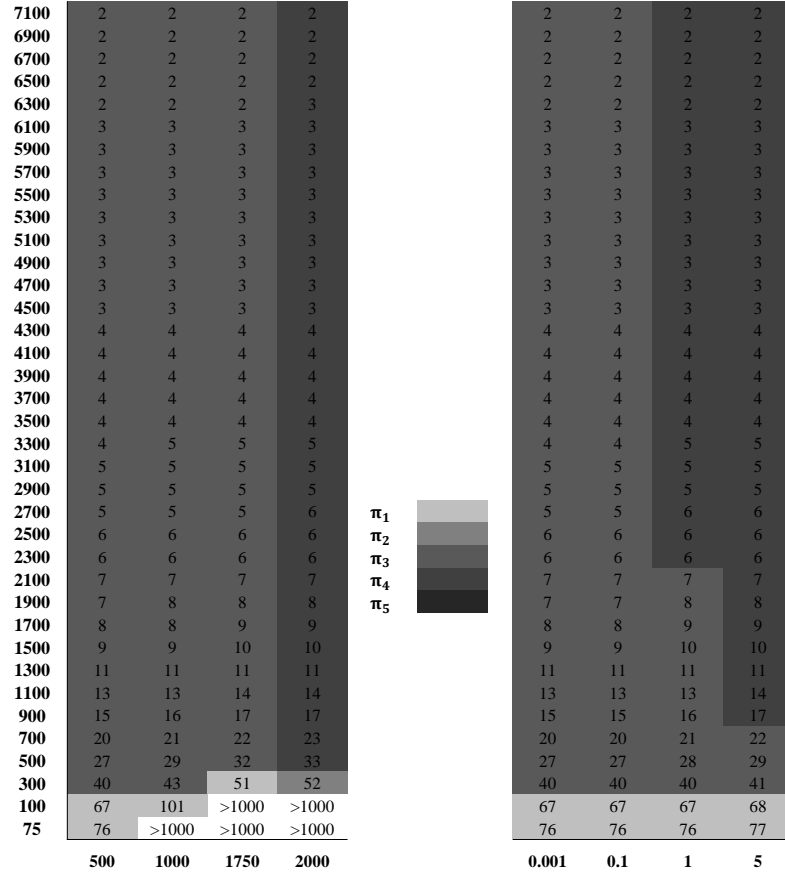
### 4.2.3 Tamir Parametrelerinin Optimalite Üzerindeki Etkisi

Tamir parametrelerine ait ilk analiz majör tamir için yapılan çözümlerdir. Tamir süresini ve tamir maliyetini içeren çabuk ve geç arızalanabilir sistemler için elde edilen 4 farklı analiz yapılmıştır.

Çabuk arızalanan sistemler için Şekil 4.12 ve Şekil 4.13 elde edilmiştir. Her iki şekilde özellikle dikkat edilecek husus majör tamirin sabit maliyetindeki ve bakım süresindeki artışın yenileme aksiyonunun alınmasına sebep olduğudur. Bakım sürelerinin (tamir veya yenileme süresi) önem kazandığı Şekil 4.13'te ise sürekli gözlem politikasının etkin olduğu görülmektedir.

Bir diğer önemli sonuç ise majör tamire ait parametrelerdeki değişimin, optimum kontrol periyodunun belirlenmesindeki etkisinin minimal düzeyde olduğudur. Bu durum Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'de sabit  $c_d$  değeri için, majör tamir maliyeti veya tamir süresi değiştiği halde sistemin optimale aynı kontrol zamanlarında ulaşması ile gözlemlenebilir.

**Birim arızalı zaman  
başına düşen maliyet,  $c_d$**



**Majör tamir maliyeti,  $c_{mj}$**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	2000	300	$c_{mj}$
Bakım süresi	0.001	0.001	0.001
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(a)

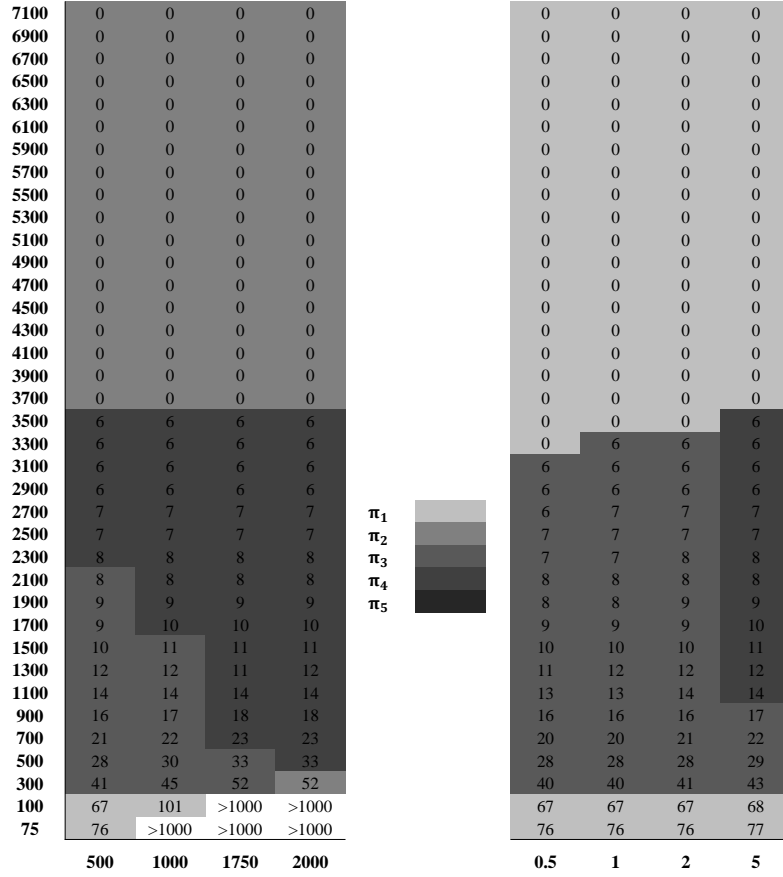
**Majör tamir süresi,  $t_{rp1}$**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	2000	300	500
Bakım süresi	0.001	0.001	$t_{mj}$
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(b)

Şekil 4.12: Çabuk arızalanan sistem için majör tamir analizi 1

**Birim arızalı zaman  
başına düşen maliyet,  $c_d$**



**Majör tamir maliyeti,  $c_{mj}$**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	2000	300	$c_{mj}$
Bakım süresi	1	0.5	2
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(a)

**Majör tamir süresi,  $t_{rp1}$**

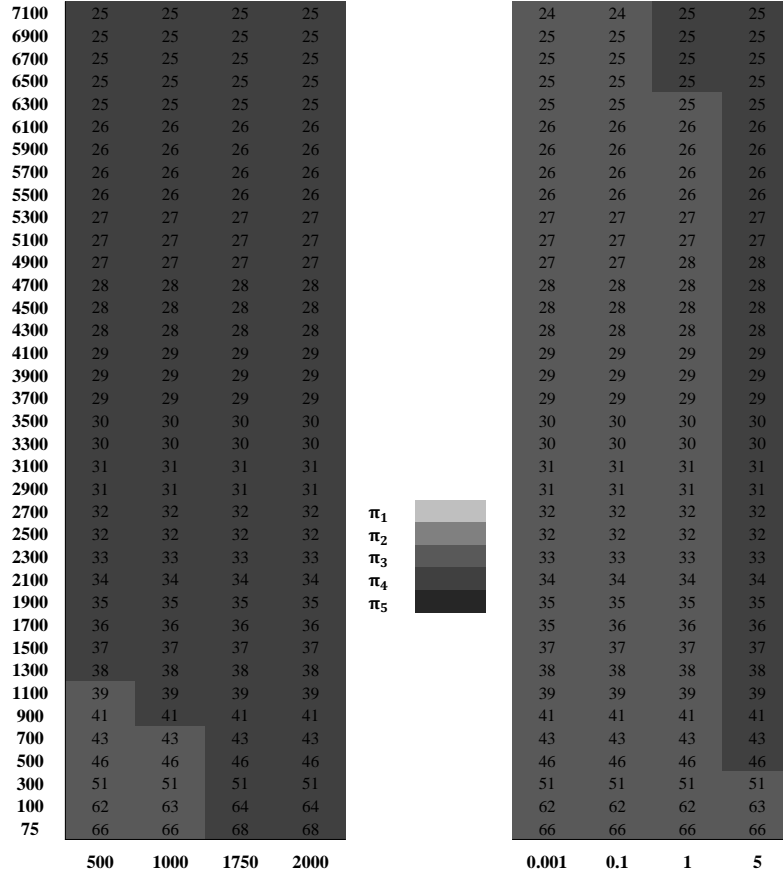
	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	2000	300	500
Bakım süresi	1	0.5	$t_{mj}$
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(b)

Şekil 4.13: Çabuk arızalanan sistem için majör tamir analizi 2



**Birim arızalı zaman  
başına düşen maliyet,  $c_d$**



**Majör tamir maliyeti,  $c_{mj}$**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	2000	300	$c_{mj}$
Bakım süresi	1	0.5	2
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(a)

**Majör tamir süresi,  $t_{rp1}$**

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	2000	300	500
Bakım süresi	1	0.5	$t_{mj}$
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol Sabiti	1000		

(b)

Şekil 4.15: Geç arızalanan sistem için majör tamir analizi 2

Majör tamiri için yapılan analizler minör tamiri için de yapılmış, fakat majör tamirde olduğu gibi politika değişikliklerine çok sık rastlanmamıştır. Bu bağlamda majör tamir gibi kapsamlı bir analiz yerine sadece olasılık ve süreleri ele alan iki farklı çözümden sonuçlar elde edilmiştir.

**Majör tamir başarı olasılığı,  $p_{mj}$**

1	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,9	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,8	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,7	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,6	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,5	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,4	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,3	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,2	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,1	28	28	28	28	28	28	28	28	28

**I.  $c_{rpl} = 500$**

1	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,9	29	29	28	28	28	28	28	28	28
0,8	30	30	29	28	28	28	28	28	28
0,7	29	29	29	29	28	28	28	28	28
0,6	29	29	29	29	28	28	28	28	28
0,5	29	29	29	29	28	28	28	28	28
0,4	29	29	29	29	28	28	28	28	28
0,3	29	29	29	29	28	28	28	28	28
0,2	29	29	29	29	28	28	28	28	28
0,1	29	29	29	29	28	28	28	28	28



**II.  $c_{rpl} = 650$**

1	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,9	29	29	28	28	28	28	28	28	28
0,8	30	30	29	28	28	28	28	28	28
0,7	30	30	29	28	28	28	28	28	28
0,6	31	31	29	28	28	28	28	28	28
0,5	31	31	29	28	28	28	28	28	28
0,4	30	30	29	28	28	28	28	28	28
0,3	30	30	29	28	28	28	28	28	28
0,2	30	30	29	29	29	28	28	28	28
0,1	30	30	29	29	29	28	28	28	28

	Yenile	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	$c_{rpl}$	150	500
Bakım süresi	1	0,5	2
Başarı olasılığı	1	$p_{mn}$	$p_{mj}$
Kontrol sabiti	1000		
Birim arızalı süre başına düşen maliyet	500		

**III.  $c_{rpl} = 750$**

1	28	28	28	28	28	28	28	28	28
0,9	29	29	28	28	28	28	28	28	28
0,8	30	30	29	28	28	28	28	28	28
0,7	30	30	29	28	28	28	28	28	28
0,6	31	31	29	28	28	28	28	28	28
0,5	31	31	29	28	28	28	28	28	28
0,4	32	32	29	28	28	28	28	28	28
0,3	33	33	29	28	28	28	28	28	28
0,2	33	33	30	29	29	28	28	28	28
0,1	33	33	30	29	29	28	28	28	28

**Minör tamir başarı olasılığı,  $p_{mn}$**

0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

**IV.  $c_{rpl} = 1000$**

Şekil 4.16: Olasılık analizi

Şekil 4.16’da sistemin farklı yenileme maliyetleri altındaki minör ve majör tamir başarı olasılıklarını aynı anda inceleyen grafikler oluşturulmuştur. Yenileme maliyetinin artmasıyla birlikte yenileme aksiyonundan tamir aksiyonuna yöneldiği gözlemlenmiştir. Ayrıca, majör tamir başarı olasılığı sabit tutulup minör tamir başarı olasılığı artırıldığında önleyici bakıma doğru yönelişin olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, minör tamir başarı olasılığı sabit tutulup majör tamir başarı olasılığı artırıldığında ise

optimum kontrol periyodundaki ufak azalışlar ile sistemin yenilemeden vazgeçip yine tamire yönelmesi bir diğer gözlemimizdir.

**Majör tamir bakım süresi,  $t_{mj}$**

5	28	29	29	29	29	29	29	29	29
4,5	28	29	29	29	29	29	29	29	29
4	28	29	29	29	29	29	29	29	29
3,5	28	28	29	29	29	29	29	29	29
3	28	28	28	29	29	29	29	29	29
2,5	28	28	28	28	29	29	29	29	29
2	28	28	28	28	28	29	29	29	29
1,5	28	28	28	28	28	28	28	29	29
1	27	27	28	28	28	28	28	29	29
0,5	27	27	28	28	28	28	28	28	29

**I.  $t_{rpl} = 0.01$**

5	28	29	29	29	29	29	29	29	29
4,5	28	29	29	29	29	29	29	29	29
4	28	29	29	29	29	29	29	29	29
3,5	28	28	29	29	29	29	29	29	29
3	28	28	28	28	28	29	29	29	29
2,5	28	28	28	28	28	29	29	29	29
2	28	28	28	28	28	29	29	29	29
1,5	28	28	28	28	28	28	28	29	29
1	27	27	28	28	28	28	28	29	29
0,5	27	27	28	28	28	28	28	28	29

**II.  $t_{rpl} = 0.1$**

5	29	29	29	29	29	29	29	29	29
4,5	28	29	29	29	29	29	29	29	29
4	28	29	29	29	29	29	29	29	29
3,5	28	28	29	29	29	29	29	29	29
3	28	28	28	29	29	29	29	29	29
2,5	28	28	28	28	29	29	29	29	29
2	28	28	28	28	28	29	29	29	29
1,5	28	28	28	28	28	28	28	29	29
1	27	27	28	28	28	28	28	29	29
0,5	27	27	28	28	28	28	28	28	29

**III.  $t_{rpl} = 1$**

5	29	29	29	29	29	30	30	30	30
4,5	29	29	29	29	29	29	29	30	30
4	28	29	29	29	29	29	29	29	29
3,5	28	28	29	29	29	29	29	29	29
3	28	28	28	29	29	29	29	29	29
2,5	28	28	28	28	29	29	29	29	29
2	28	28	28	28	28	29	29	29	29
1,5	28	28	28	28	28	28	28	29	29
1	27	27	28	28	28	28	28	29	29
0,5	27	27	28	28	28	28	28	28	29

**IV.  $t_{rpl} = 5$**



	Yenile Tamir	Minör Tamir	Majör Tamir
Sabit maliyet	1000	150	500
Bakım süresi	$t_{rpl}$	$t_{mn}$	$t_{mj}$
Başarı olasılığı	1	0.9	0.6
Kontrol sabiti	1000		
Birim arızalı süre başına düşen maliyet	500		

**Minör tamir bakım süresi,  $t_{mn}$**

0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5

Şekil 4.17: Bakım süresi analizi



Şekil 4.17’de ise sistemin farklı yenileme süreleri altındaki minör ve majör bakım sürelerini aynı anda inceleyen grafikler oluşturulmuştur. Yine,  $t_{rpl}$ ’deki artış sistemi tamire yöneltmiş ve her grafik için bakım süreleri arasındaki değişiklik arızalı durumda olan sistem için yenileme veya tamir kararının seçilmesine neden olmuştur.

Ayrıca dikkat edilmelidir ki Şekil 4.16 ve Şekil 4.17’deki hemen hemen her grafik için kontrol periyodu, bakım parametrelerindeki değişikliğe rağmen yaklaşık olarak aynıdır. Bu da bakıma ait etmenlerin sistemin kontrol periyodunu etkileyen temel faktörlerden olmadığını göstermektedir.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada rassal olarak eskijen ve periyodik olarak kontrol edilen bir sistem için çeşitli bakım politikaları önerilmiş ve optimal politikanın en iyi gözlem periyoduyla birlikte belirlenmesinde önemli role sahip faktörler sayısal örnekler ile incelenmiştir. Politika çeşitliliğinden ve her politikanın sahip olduğu bakım parametrelerinin fazlalığından dolayı, her örnek farklı bir sonuca ulaşmamızı sağlamıştır. Fakat temel olarak elde edilen gözlemler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- Optimalite üzerindeki arıza hızlarının önem sırası  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{23}$  ve  $\lambda_{12}$  şeklindedir.
- Çabuk arızalanan sistemlerde nispeten küçük  $c_d$  değerleri için arıza hızı artmasına rağmen sistem daha geç kontroller ile optimum sonuca ulaşır. Çünkü sistem, bakım maliyetine katlanmak yerine beklenmedik arızadan kaynaklanan maliyete katlanmayı tercih eder.
- Geç arızalanan sistem için politika belirleme açısından etkin maliyetin  $c_d$  olmadığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda politikalar arası geçişlere çok sık rastlanmamış, genel olarak önleyici bakımın etkin olduğu tespit edilmiş ve kontrol periyodundaki değişiklikler neredeyse çok az olmuştur.
- Kontrol periyodunun belirlenmesindeki temel faktör kontrol maliyeti  $\kappa(\tau)$  ve birim arızalı süre başına düşen maliyet  $c_d$ 'dir.
- Kontrol maliyetindeki azalışın veya  $c_d$  değerindeki artışın sistemi daha sık kontrollere ve hatta sürekli gözleme kadar ittiği gözlemlenmiştir.
- Yenileme maliyetindeki artış sistemi yenileme aksiyonundan vazgeçirerek tamire yöneltme etkisine sahiptir.
- $c_d$ 'deki artışlara katlanamayan sistem kimi zaman daha sık kontrol ile önleyici bakımdan vazgeçmiş ve kontrol maliyetine katlanmayı tercih etmiş, kimi zaman ise geç kontroller ile tamir kararından vazgeçerek yenileme kararına geçmiştir. Bu değişimler girilen bakım parametrelerine bağlı olarak oluşmaktadır.

Bu çalışmayı daha ileri götürmeye yönelik çalışmalar yapılabilir. Örneğin ele alınan problemde, sistemin maliyet açısından durum 1'de veya durum 2'de olmasının bir farkı yoktur. Halbuki durum 2'ye sahip sistem için bir zarar maliyeti ortaya çıkabilir. Diğer

tarafından, beklenen arıza süresinin yanı sıra arıza süresinin varyansı da hesaplanıp bakım modeli güncellenerek daha sağlıklı kararlar verilebilir. Bu şekilde problemimizle ilgili çalışmalar geliştirilebilir.

# Kaynakça

- [1] Bellman, R., Equipment replacement policy, *Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 3(3): 133-136, 1955
- [2] Morse, P. M., Queues, inventories, and maintenance, *New York: Wiley*, 1958
- [3] Derman, C., Sacks, J., Replacement of periodically inspected equipment, *Naval Research Logistics Quarterly*, 7(4): 597-607, 1960
- [4] Barlow, R., Hunter, L., Optimum preventive maintenance policies, *Operations Research*, 8(1): 90-100, 1960
- [5] Klein, M., Inspection maintenance replacement schedules under Markovian deterioration, *Management Science*, 9(2): 25-32, 1962
- [6] Barlow, R. E., Proschan, F., Mathematical theory of reliability, *New York: Wiley*, 1965
- [7] Luss, H., Maintenance policies when deterioration can be observed by inspections, *Operation Research*, 24(2): 359–366, 1976.
- [8] Nakagawa, T., Optimum policies when preventive maintenance is imperfect, *IEEE Transactions on Reliability*, R-28(4): 331–332, 1979.
- [9] Zuckerman, D., Inspection and replacement policies, *Journal of Applied Probability*, 17(1): 168–177, 1980.
- [10] Nakagawa, T., Modified periodic replacement with minimal repair at failure, *IEEE Transactions on Reliability*, 2(2): 165–168, 1981.
- [11] Brown, M., Proschan, F., Imperfect repair, *Journal of Applied Probability*, 20(4): 851–859, 1983.

- [12] Christer, A. H., Waller, W. M., Delay time models of industrial inspection maintenance models, *Operational Research Society*, 35(5): 401–406, 1984.
- [13] Block, H. W., Borges, W. S., Savits, T. H., Age-dependent minimal repair, *Journal of Applied Probability*, 22(2): 370–385, 1985.
- [14] Canfield, R. V., Cost optimization of periodic preventive maintenance, *IEEE Transactions on Reliability*, R-35(1): 78–81, 1986.
- [15] Nakagawa, T., Periodic and sequential preventive maintenance policies, *Journal of Applied Probability*, 23(2): 536–542, 1986.
- [16] Nakagawa, T., Sequential imperfect preventive maintenance policies, *IEEE Transactions on Reliability*, 37(3): 295–298, 1988.
- [17] Fard, N., Zheng, X., An approximation method for non-repairable systems based on opportunistic replacement policy, *Reliability Engineering & System Safety*, 33(2): 277–288, 1991.
- [18] Lam, C. T., Yeh, R. H., Optimal maintenance policies for deteriorating system under various maintenance strategies, *IEEE Transactions on Reliability*, R-43(3): 423–430, 1994.
- [19] Lam, C. T., Yeh, R. H., Comparison of sequential and continuous inspection strategies for deteriorating systems, *Advances in Applied Probability*, 26(2): 423–435, 1994.
- [20] Suresh, P. V., Chaudhuri, D., Preventive maintenance scheduling for a system with assured reliability using fuzzy set theory, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 1(4): 497–513, 1994.
- [21] Wortman, M. A., Klutke, G. A., On maintained systems operating in a random environment, *Journal of Applied Probability*, 31: 589–594, 1994.
- [22] Wortman, M. A., Klutke, G. A., Ayhan, H., A maintenance strategy for systems subjected to deterioration governed by random shocks, *IEEE Transactions on Reliability*, 43(3): 439–445, 1994.
- [23] Chelbi, A., Ait-Kadi, D., Replacement strategy for non self announcing failure equipment, *Emerging Technologies and Factory Automation*, 1: 423–430, 1994

- [24] Wang, H., Pham, H., Imperfect maintenance, *European Journal of Operational Research*, 94: 425–438, 1996.
- [25] Christer, A. H., Waller, W. M., A modelling procedure to optimize component safety inspection over a finite time horizon, *Quality and Reliability Engineering International*, 13: 217–224, 1997.
- [26] Chelbi, A., Ait-Kadi, D., An optimal inspection strategy for randomly failing equipment, *Reliability Engineering and System Safety* 63(2): 127-131, 1999
- [27] Wang, H., Pham, H., Some maintenance models and availability with imperfect maintenance in production systems, *Annals of Operation Research*, 91: 305–318, 1999.
- [28] Yang, Y., Klutke, G. A., Improved inspection schemes for deteriorating equipment, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 14(4): 445-460, 2000
- [29] Badia, F. G., Berrade, M. D., Campos, C. A., Optimization of inspection intervals based on cost, *Applied Probability*, 38: 872–881, 2001.
- [30] Chiang, J. H., Yuan, J., Optimal maintenance policy for a Markovian system under periodic inspection, *Reliability Engineering and System Safety*, 71: 165–172, 2001.
- [31] Kiessler, P. C., Klutke, G. A., Yang, Y., Availability of periodically inspected systems subject to Markovian degradation, *Journal of Applied Probability*, 39: 700–711, 2002.
- [32] Klutke, G. A., Yang, Y., The availability of inspected shocks and graceful degradation, *IEEE Transactions on Reliability*, 51(3): 371–374, 2002.
- [33] Chen, C. T., Chen, Y. W., Yuan, J., On a dynamic preventive maintenance policy for a system under inspection, *Reliability Engineering and System Safety*, 80: 41–47, 2003.
- [34] Wang, W., An inspection model for a process with two types of inspections and repairs, *Reliability Engineering and System Safety*, 94: 526–533, 2008.
- [35] Wang, W., An inspection model based on a three-stage failure process, *Reliability Engineering and System Safety*, 96: 838–848, 2011.

- [36] Oosterom, C. D., Elwany, A. H., Çelebi, D., Houtum, G. J., Optimal policies for a delay time model with postponed replacement, *European Journal of Operational Research*, 232: 186–197, 2014.

# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : BÜŞRA KELEŞ  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 16.02.1988 Samsun  
Medeni hali : Bekar  
Telefon : +905333864601  
e-mail : bkeles@etu.edu.tr

## Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Y. Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2014
Lisans	Hacettepe Üniversitesi	2011

## İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Yüksek Lisans Öğr.

## Yabancı Dil

İngilizce (Çok iyi)  
Almanca (Başlangıç)

## Yayımlar

Keleş, B., Tekin, S., Bakır, N. O., Maintenance policies for systems subject to non-self-announcing failures, 20<sup>th</sup> IFORS Conference Of The International Federation Of Operational Research Societies, Barcelona, Spain, July, 2014