MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN DİNAMİĞİNE HAMİLTON PRENSİBİ YAKLAŞIMI

YÜCEL ERCAN

MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN DİNAMİĞİNE HAMİLTON PRENSİBİ YAKLAŞIMI

YÜCEL ERCAN

MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN DİNAMİĞİNE

HAMİLTON PRENSİBİ YAKLAŞIMI

Yücel Ercan

Birinci Sürüm: Haziran 2016

ISBN: **978-605-83437-0-2**

YAZAR HAKKINDA

Yücel Ercan 1943 yılında Konya'da doğdu. 1961 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nın yükseköğretim bursunu kazanarak makine mühendisliği eğitimi için ABD'ye gitti. Massachusetts Institute of Technology (MIT)'den sırasıyla lisans, yüksek lisans ve doktora derecelerini aldı. MIT'de araştırma asistanı ve araştırıcı olarak çalıştı. 1971 yılında yurda dönerek Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde öğretim üyesi olarak çalışmaya başladı. 1976'da doçent oldu. Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde rektör yardımcılığı ve bölüm başkan yardımcılığı yaptı. 1979-1981 yılları arasında Alexander von Humboldt Vakfı bursu kazanarak Almanya'da araştırmalarda bulundu. 1982'de profesör ünvanını aldı. Aynı yıl yeni kurulan Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi'ne dekan olarak atandı ve 1992'ye kadar dekanlık görevini sürdürdü. 2005 yılında TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'nde çalışmaya başladı. TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'nde rektör vekilliği ve rektör yardımcılığı, dekanlık, fen bilimleri enstitüsü müdürlüğü, bölüm başkanlığı gibi idari görevlerde bulunan yazar halen aynı üniversitenin makine mühendisliği bölümünde profesör olarak çalışmaktadır. Yazar, sistem dinamiği, otomatik kontrol, akışkan gücü kontrolü, dinamik, modelleme ve simülasyon konularında çalışmalar yapmaktadır. Daha önce *Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği*, *Akışkan Gücü Kontrolü Teorisi* ve *İleri Dinamik* isimli kitapları yayınlanmış olan yazarın yurt içinde ve yurt dışında yayınlanmış veya sunulmuş 150 kadar makale, bildiri ve teknik araştırma raporu vardır. İngilizce ve Almanca bilen yazar, evli ve iki çocuk babasıdır.

İÇİNDEKİLER

1
GİRİŞ

Mühendislik sistemleri, davranışları enerji tarafından belirlenen elemanlardan oluşan sistemlerdir. Bu sistemler tek enerji türü içeren öteleme mekanik, dönel mekanik, akışkanlı, elektrik veya ısıl elemanlardan oluşabileceği gibi, farklı türde enerjileri içeren hibrid sistemler de olabilir. Sistem dinamiği mühendislik sistemlerinin modellenmesini, dinamik denklemlerinin çıkarılmasını ve davranışlarını inceleyen bilim dalıdır. Mühendislik sistemlerinin modellenmesinde temel yaklaşım mekanik, akışkanlı, elektrik ve ısıl sistemlerin değişkenleri ve elemanları arasındaki benzeşimleri belirlemek ve enerji türünden bağımsız olarak ortak yöntemler kullanmaktır. Yaygın olarak kullanılan yöntem, önce sistemin yapısını yansıtan bir grafik oluşturmaktır. Bu amaçla lineer grafik ya da bağ (bond) grafiği kullanılır. Sonra bu grafikten elemanların dinamiğini tanımlayan denklemler, süreklilik denklemleri ve uyarlık deklemleri yazılarak sistemin dinamik denklemleri elde edilir. Grafik yöntemlerin ayrıntıları, bazıları bu kitabın kaynakça kısmında verilen eserlerde bulunabilir [6, 14, 15, 17].

Mekanik dalının temelini oluşturan hipotezlerden en yaygın olanı Newton Kanunlarıdır. Bu kanunlar "bir kütle parçacığı her hangi bir kuvvet uygulanmadıkça hareketsiz kalır ya da düz bir doğru boyunca sabit hızla hareket eder", "bir kütle parçacığının momentumunun değişme hızı uygulanan kuvvete eşittir ve kuvvet yönündedir" ve "etki eşit tepkidir" temel varsayımlarına dayanır. Bu varsayımların (hipotez) geçerliliğini teorik olarak ispat etme olanağı yoktur. Herhangi bir deneyde aksi gözlemlenmediği sürece doğruluğu kabul edilir. Bütün mekanik bilimi bu hipotezlerin üzerine inşa edilmiştir. Bilimin tarihi gelişimi incelendiğinde mekanik biliminin üzerine oturtulabileceği başka hipotezlerin de öne sürüldüğü görülür. Bunlardan birisi Hamilton tarafından öne sürülen ve bugün *HamiltonPprensibi* olarak adlandırılan hipotezdir. Bu hipotez Lagrange'ın katkılarıyla daha kolay uygulanabilir hale gelmiş, daha sonra korunumlu olmayan elemanlara sahip sistemlere de genişletilmiştir. Newton kanunundan başlayarak Hamilton prensibinin türetilmesi, Hamilton prensibinden başlayarak Newton kanununun türetilmesi mümkündür.

Bu kitabın amacı mekanik sistemlerin dinamik denklemlerinin bulunmasında Newton Kanunu'nun bir alternatifi olarak kullanılan Hamilton prensibini elektrik, akışkanlı ve ısıl sistemlere de genelleştirmektir. Bu kitabın anlaşılmasında, okuyucunun sistem dinamiğinin temel kavramlarını bilmesi çok yardımcı olacaktır. Okuyucunun bu konuları hatırlaması amacıyla sistem dinamiğiyle ilgili temel bilgiler kitabın ikinci bölümünde özetlenmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında Hamilton prensibinin klasik ifadesi sunulmuş ve uygulamasıyla ilgili örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise Hamilton prensibinin alternatif bir ifadesi sunulmuş ve buna ilişkin örnekler verilmiştir.

Kitabın dördüncü bölümünde Hamilton prensibi mekanik olmayan mühendislik sistemlerine genelleştirilmiştir. Daha önce mekanik öteleme ve mekanik dönel sistemlere uygulanan Hamilton prensibinin sadece elektriksel ya da akışkanlı ya da ısıl elemanlardan oluşan sistemlere nasıl uygulanacağı anlatılmıştır. Bu bölümde de Hamilton prensibinin iki alternative ifadesi geliştirilmiş ve çeşitli uygulama örnekleri verilmiştir.

Kitabın beşinci bölümünde Hamilton prensibinin mekanik, elektrik, akışkanlı veya ısıl elemanları bir arada barındıran hibrid sistemlere uygulanması incelenmiş ve Hamilton prensibinin iki alternatif ifadesinin bu sistemlere uygulanışı örneklerle anlatılmıştır.

Altıncı bölümde yayılı parametresi olan mekanik, elektriksel, akışkanlı ve ısıl elemanlar da dikkate alınmıştır. Yayılı parametreli ve kümesel parametreli elemanların bir arada olduğu örnekler incelenmiş ve Hamilton prensibi kullanılarak bunların dinamiğini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemler ve doğal sınır şartları elde edilmiştir.

Bu kitap lisansüstü düzeydedir. Bu yüzden okuyucunun temel konularda yeterince bilgi sahibi olduğu kabul edilerek uzun türetme işlemlerinden ve açıklamalardan kaçınılmıştır. Okuyucu eksikliklerini duyduğu konularda kitabın arkasında verilen sistem dinamiği, ileri dinamik ve Hamilton prensibi konularındaki kaynaklara başvurabilir.

2

DEĞİŞKENLERİN VE DİNAMİK SİSTEM ELEMANLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ

2.1 Değişkenlerin Genelleştirilmesi

Mühendislik sistemlerinin modellenmesinde kolay çözülebilen denklemler verdiğinden ve sistemin dinamiğini tanımlamakta genellikle yeterli olduğundan saf ve lineer elemanlar kullanılması tercih edilir. Bu elemanların davranışları iki temel değişken türü arasındaki bir ilişkiyle (eleman denklemi) tanımlanır. Bu değişkenlerden birisi bir potansiyel farkıdır. Akışkanlı sistemlerde basınç farkı (p_{21}), elektrik sistemlerinde elektrik gerilimi (voltaj) farkı (v_{21}) ve ısıl sistemlerde sıcaklık farkı (T_{21}) olarak görülür. Potansiyel farkı öteleme mekanik sistemlerde doğrusal hız farkı (v_{21}), dönel mekanik sistemlerde ise açısal hız farkıdır (ω_{21}). Bu tür değişkenlerin ortak adı *gerilim değişkeni*'dir. Bu kitapta gerilim değişkenleri genelleştirilmiş olarak v_{21} ile gösterilecektir.

Eleman denkleminde yer alan ikinci temel değişken ise *akım değişkeni*'dir. Bu değişken elektrik sistemlerinde elektrik akımı (i), akışkanlı sistemlerde hacimsel debi (Q), ısıl sistemlerde ısı debisi (Q), öteleme mekanik sistemlerde kuvvet (f), dönel mekanik sistemlerde ise moment (T) olarak görülür. Bu kitapta akım değişkenleri genelleştirilmiş haliyle f ile gösterilecektir.

Yukarıda tanımlanan iki temel değişken türüne ek olarak, bunların integralini alarak iki tür değişken daha tanımlanır. *İntegral gerilim değişkeni* farkı (x_{21}), gerilim değişkeni v_{21}'in zamana göre integralini alarak, *integral akım değişkeni* (h) ise akım değişkeni f 'nin zamana göre integralini alarak bulunur.

Yukarıda sözü edilen değişkenlerin enerji türlerine göre bir listesi Çizelge 2.1'de verilmiştir.

2.2 Enerji Kapıları

Sistemin çevresiyle enerji alışverişi yaptığı yerler *enerji kapısı* olarak anılır. Enerji türlerine göre enerji kapıları öteleme mekanik, dönel mekanik, elektrik, akışkan veya ısıl enerji kapıları olabilir. Her enerji kapısının iki *uç* noktası, ya da *terminal*'i vardır. Kapı üzerinden bir güç akışı olabilmesi için iki uç arasında bir gerilim değişkeni farkı ve bu uçların birinden

Çizelge 2.1 Değişik Tür Sistemlerde Değişken Tanımları

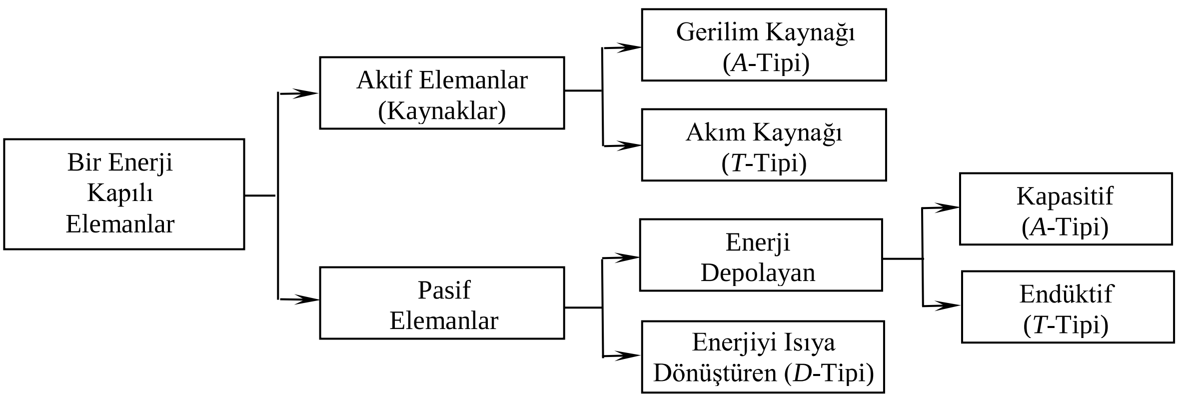
Sistem Türü	Gerilim Değişkeni (v_{21})	Akım Değişkeni (f)	İntegral Gerilim Değişkeni (x_{21})	İntegral Akım Değişkeni (h)	Güç (P)
Öteleme Mekanik	Hız Farkı (v_{21})	Kuvvet (f)	Konum Farkı (x_{21})	Momentum (p)	$P = v_{21} f$
Dönel Mekanik	Açısal Hız Farkı (ω_{21})	Moment (T)	Açısal Konum Farkı (θ_{21})	Açısal Momentum (h)	$P = \omega_{21} T$
Elektrik	Elektrik Gerilimi Farkı (V_{21})	Elektrik Akımı (i)	Akı Farkı (λ_{21})	Elektrik Yükü (q)	$P = V_{21} i$
Akışkanlı	Basınç Farkı (p_{21})	Hacimsel Debi (Q)	Basınç Momentumu Farkı (Γ_{21})	Akışkan Hacmi (υ)	$P = p_{21} Q$
Isıl	Sıcaklık Farkı (T_{21})	Isı Debisi (Q)	Sıcaklık Momentumu Farkı (γ_{21})	Isı Enerjisi (κ)	$P = Q$

diğerine doğru akan bir akım değişkeni olması gerekir. Isıl enerji kapısı dışındaki enerji kapılarından akan güç (P), kapının iki ucu arasındaki gerilim değişkeni farkı ile bu uçlar arasında akan akım değişkeninin çarpımına eşittir. Isıl enerji kapısından akan güç ise akım değişkeninin kendine eşittir. Çizelge 2.1'in son sütününda değişik tür enerji kapıları için güç ifadeleri görülmektedir.

Mühendislik sistemlerinin modellenmesinde bir ve iki enerji kapılı *saf* elemanlar yapı taşı olarak kullanılır.

2.3 Bir Enerji Kapılı Saf Elemanlar

Bir enerji kapılı elemanlar *pasif elemanlar* ve *aktif elemanlar* olarak iki ana gruba ayrılır. Pasif elemanların dinamik davranışı kendilerine dışarıdan sağlanan enerjinin etkisiyle oluşur. Bu grup *enerji depolayan* ve *enerjiyi ısıya dönüştüren* elemanlar olarak iki alt gruba ayrılır. Enerji depolayan elemanlar da *endüktif* (*T-Tipi*) ve *kapasitif* (*A-Tipi*) elemanlar olarak ayrılır. Aktif saf elemanlar gerilim ya da akım değişkeni sağlayan kaynak elemanlarıdır. *A-tipi* (*gerilim kaynakları*) ve *T-tipi* (*akım kaynakları*) olarak ikiye ayrılırlar. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1 Bir Enerji Kapılı Elemanlar

2.3.1 *A*-Tipi (Kapasitif) Enerji Depolayan Elemanlar[1]

A-tipi, enerji depolayan bir dinamik eleman gerilim değişkeni dolayısıyla enerji depolar. Öteleme mekanik sistemlerde kütle, dönel mekanik sistemlerde atalet momenti, elektrik sistemlerinde elektrik kapasitansı, akışkanlı sistemlerde akışkan kapasitansı, ısıl sistemlerde ısıl kapasitans *A*-tipi enerji depolayan eleman olarak modellenir.

Bu tür elemanlarda integral akım değişkeni (h) ile gerilim değişkeni (v_{21}) arasında,

$$h = h(v_{21}) \qquad (v_{21} = 0 \text{ iken } h = 0) \tag{2.1}$$

gibi tek değerli bir ilişki vardır, Bu ilişkiye *elemanın yapısal ilişkisi* denir (Şekil 2.2). Bu ilişki,

$$h = Cv_{21} \tag{2.2}$$

gibi lineer ise, eleman da lineerdir. Bu ifadede geçen C sabiti *genelleştirilmiş kapasitans*'tır. Genelleştirilmiş kapasitans, öteleme mekanik sistemlerde kütle (M), dönel mekanik sistemlerde atalet momenti (J), elektrik sistemlerinde kapasitans (C), akışkanlı sistemlerde akışkan kapsitansı (C_f), ısıl sistemlerde ısıl kapasitans (C_t)'dir.

Lineer bir *A*-tipi, enerji depolayan elemanın yapısal ilişkisinin türevi alınırsa, elemanın akım ve gerilim değişkenleri arasında elde edilen,

$$f = C\frac{dv_{21}}{dt} \tag{2.3}$$

ifadesine elemanın *eleman denklemi* denir.

A-tipi, enerji depolayan bir elemana verilen güç (ısıl sistem hariç), $P = fv_{21}$ olduğuna göre, eleman tarafından depolanan enerji (E) aşağıdaki gibidir.

$$E(h) = \int_0^t fv_{21}dt = \int_0^h v_{21}(h)dh \tag{2.4}$$

Elemana yapılan iş, yani elemanın depoladığı enerji integral akım değişkeninin bir fonksiyonu olup, Şekil 2.2'deki yapısal ilişki eğrisi ile h-ekseni arasında kalan alana eşittir. Eleman lineer ise, elemanın depoladığı enerji aşağıdaki ifadeden bulunur.

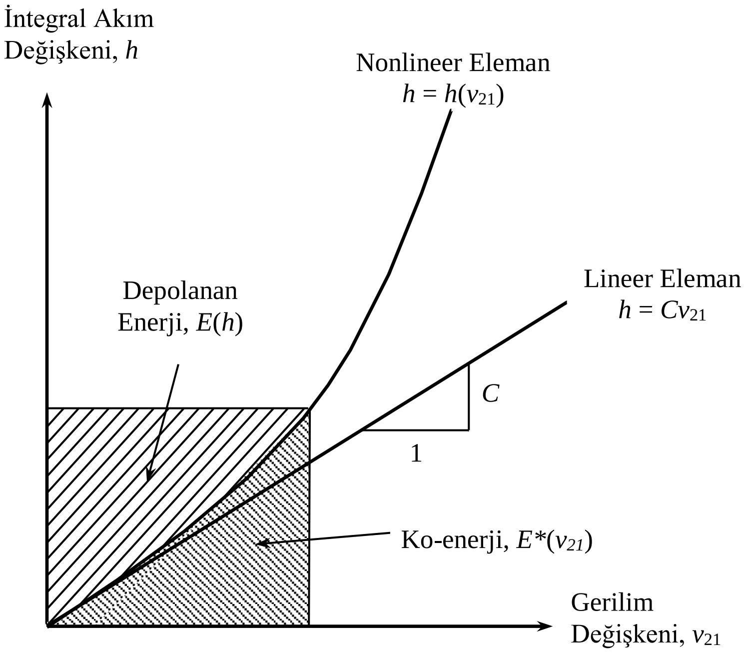
$$E(h) = \frac{h^2}{2C} \tag{2.5}$$

Yapısal ilişki eğrisiyle v_{21}-ekseni arasında kalan alan ise elemanın ko-enerjisidir. (Ko-enerji eleman tarafından depolanan enerjiyle karıştırılmamalıdır.) Ko-enerji,

$$E^*(v_{21}) = \int_0^{v_{21}} h(v_{21})dv_{21} \tag{2.6}$$

---

[1]Bölüm 2.3'de verilen denklemler genelleştirilmiş değişkenler cinsinden yazılmıştır. Değişkenlerin yerine Tablo 2.1'de görülen karşıtları koyulursa, değişik türdeki sistemlerin denklemleri elde edilir.



Şekil 2.2 *A*-Tipi Enerji Depolayan Elemanın Yapısal İlişkisi

denkleminden bulunur. Eleman lineer ise ko-enerji aşağıdaki gibidir:

$$E^*(v_{21}) = \frac{1}{2}Cv_{21}^2 \tag{2.7}$$

2.3.2 *T*-Tipi (Endüktif) Enerji Depolayan Elemanlar

T-tipi, enerji depolayan bir eleman enerjiyi akım değişkeni dolayısıyla depolar. Öteleme mekanik sistemlerde yay, dönel mekanik sistemlerde dönel yay, elektrik sistemlerinde elektrik endüktansı, akışkanlı sistemlerde ise akışkan inertansı *T*-tipi enerji depolayan eleman olarak modellenir. (Isıl sistemlerde endüktif eleman yoktur.)

Bu tür elemanlarda, integral gerilim değişkeni farkı (x_{21}) ile akım değişkeni (f) arasında,

$$x_{21} = x_{21}(f) \qquad (f = 0 \text{ iken } x_{21} = 0) \tag{2.8}$$

gibi tek değerli bir ilişki vardır (Şekil 2.3). Bu ifadeye *elemanın yapısal ilişkisi* denir. Bu ilişki,

$$x_{21} = Lf \tag{2.9}$$

gibi lineer ise, eleman da lineerdir. Bu ifadede geçen L sabiti *genelleştirilmiş endüktans*'tır. Genelleştirilmiş endüktans, öteleme mekanik sistemlerde yay sabitinin tersi ($1/k$), dönel mekanik sistemlerde dönel yay sabitinin tersi ($1/k_t$), elektrik sistemlerinde endüktans (L), akışkanlı sistemlerde akışkan inertansı (I)'dir.

Lineer bir *T*-tipi, enerji depolayan elemanın yapısal ilişkisinin türevi alınırsa, o elemanın *eleman denklemi* bulunur:

$$v_{21} = L\frac{df}{dt} \tag{2.10}$$

T-tipi, enerji depolayan bir elemana verilen güç (ısıl sistem hariç), $P = fv_{21}$ olduğuna göre, eleman tarafından depolanan enerji (*E*),

$$E(x_{21}) = \int_0^t fv_{21}dt = \int_0^{x_{21}} fdx_{21} \tag{2.11}$$

olarak elde edilir. Bu ise, Şekil 2.3'de yapısal ilişki eğrisi ile x_{21}-ekseni arasında kalan alana eşittir. Eleman lineer ise, elemanın depoladığı enerji aşağıdaki gibi olur:

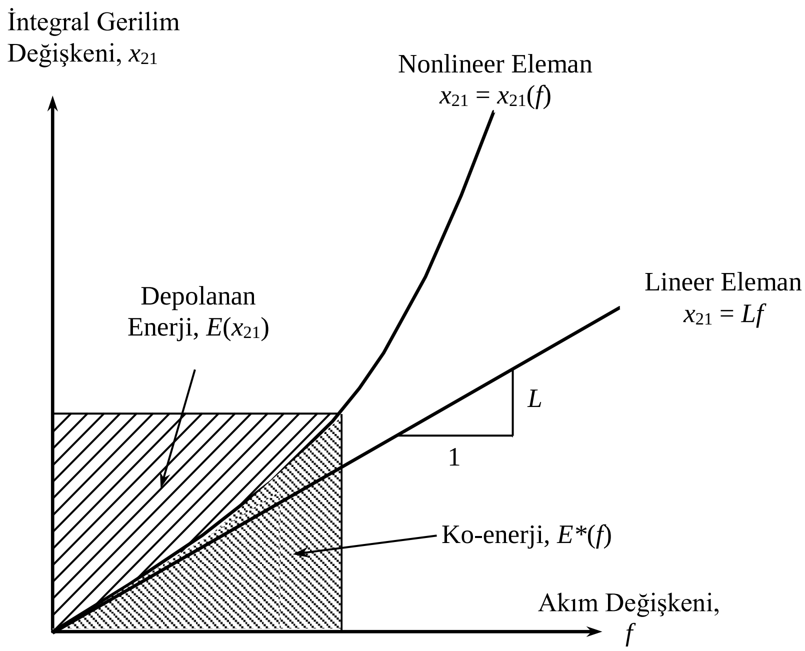
$$E(x_{21}) = \frac{1}{2}\frac{x_{21}^2}{L} \tag{2.12}$$

Yapısal ilişki eğrisiyle *f*-ekseni arasında kalan alan ise elemanın ko-enerjisidir. (Ko-enerji eleman tarafından depolanan enerjiyle karıştırılmamalıdır.) Ko-enerji,

$$E^*(f) = \int_0^f x_{21}(f)df \tag{2.13}$$

denkleminden bulunur. Eleman lineer ise ko-enerji aşağıdaki gibidir.

$$E^*(f) = \frac{1}{2}Lf^2 \tag{2.14}$$



Şekil 2.3 *T*-Tipi Enerji Depolayan Elemanın Yapısal İlişkisi

2.3.3 *D*-Tipi, Enerjiyi Isıya Dönüştüren Direnç Elemanları

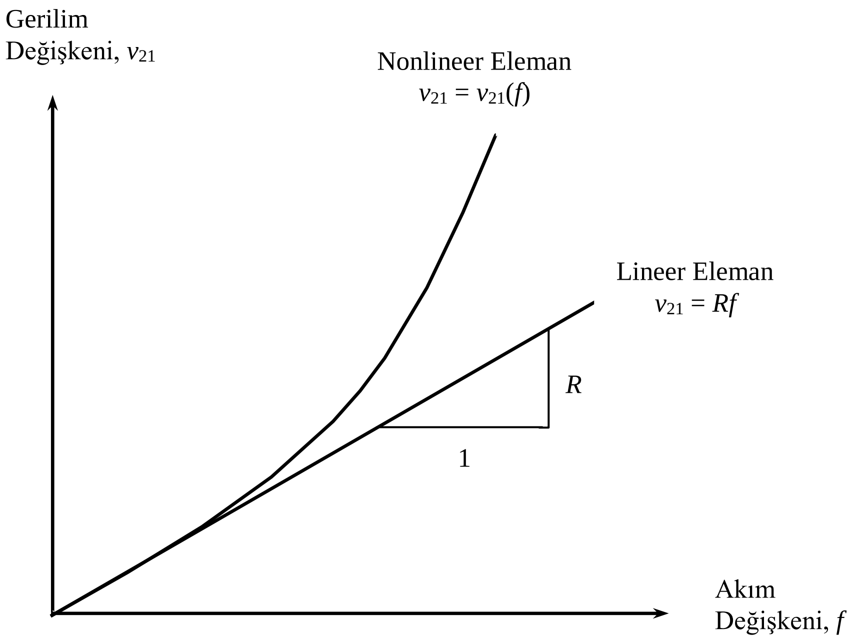
D-tipi elemanlar direnç tipi elemanlardır. Mekanik sistemlerde sönümleyiciler, elektrik sistemlerinde dirençler, akışkanlı sistemlerde akışkan direnci, ısıl sistemlerde ısıl direnç *D*-tipi eleman olarak modellenebilir. *D*-tipi elemanlarda gerilim değişkeni farkı (v_{21}) ile akım değişkeni (f) arasında,

$$v_{21} = v_{21}(f) \tag{2.15}$$

gibi bir *yapısal ilişki* vardır (Şekil 2.4). Eğer bu ilişki,

$$v_{21} = Rf \tag{2.16}$$

gibi lineer ise, eleman da lineerdir. Bu ifade lineer elemanın yapısal ilişkisi ve aynı zamanda *eleman denklemi*'dir. Bu denklemde R terimi *genelleştirilmiş direnç*'dir. Mekanik sistemlerde genelleştirilmiş direnç sönüm sabitinin tersine ($1/b$, $1/b_t$), elektrik sistemlerinde elektrik direncine (R), akışkanlı sistemlerde akışkan direncine (R_f), ısıl sistemlerde ısıl dirence (R_t) eşittir.



Şekil 2.4 *D*-Tipi Elemanın Yapısal İlişkisi

D-tipi elemanlarda ısıya dönüştürülen güç (ısıl eleman hariç),

$$P = v_{21} f \geq 0 \tag{2.17}$$

olur. Lineer eleman tarafından ısıya dönüştürülen güç ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$P = Rf^2 = \frac{v_{21}^2}{R} \geq 0 \tag{2.18}$$

2.3.4 Aktif Elemanlar (Kaynak Elemanları)

Saf kaynak elemanları *gerilim kaynakları* (*A*-tipi kaynak) ve *akım kaynakları* (*T*-tipi kaynak) olarak iki gruba ayrılır.

Saf gerilim kaynağı akım değişkeninin değerine bağlı olmaksızın, uçları arasındaki gerilim değişkeni farkını $v_{21} = v(t)$ gibi bir zaman fonksiyonu olarak verir. Kaynaktan akan akım değişkenin değeri, kaynak elemanına bağlı diğer elemanlar tarafından belirlenir. Sistemlere uygulanan hız, voltaj, basınç ve sıcaklık girişleri gerilim kaynağı olarak modellenir.

Saf akım kaynağı uçları arasına uygulanan gerilim farkına bağlı olmaksızın, iki ucu arasında $f = f(t)$ gibi bir akım değişkeni sağlar. Saf akım kaynağında kaynağın iki ucu arasındaki gerilim farkını kaynağa bağlı olan elemanlar belirler. Sistemlere uygulanan kuvvet, moment, elektrik akımı, akışkan debisi ve ısıl debi girişleri akım kaynağı olarak modellenir.

2.4 İki Enerji Kapılı Elemanlar

Eğer modellenen sistemde farklı, ya da aynı türden enerjiler arasında dönüşüm oluyorsa, bu dönüşümün modellenmesi için *iki kapılı elemanlar*'dan yararlanılır. İki kapılı bir elemanda her bir kapının iki ucu, bu uçlar arasında bir gerilim değişkeni farkı ve bir uçtan diğer uca doğru akan bir akım değişkeni vardır. Saf bir iki kapılı elemanın enerji depolama ya da enerjiyi ısıya dönüştürerek kaybetme özelliği olmadığından, bir kapıdan verilen enerji herhangi bir kayba uğramadan diğer kapıdan aynen alınır. Eğer bir kapının gerilim ve akım değişkenleri (v_1, f_1) ile diğer kapının gerilim ve akım değişkenleri (v_2, f_2) arasında lineer bir ilişki varsa iki kapılı eleman lineerdir. Lineer, saf iki kapılı elemanlar *transformatör*'ler ve *jiratör*'ler olarak ikiye ayrılır.

Transformatörlerde kapıların değişkenleri arasındaki ilişki transformatör sabiti T cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

ya da,

$$v_1 = T v_2 \tag{2.20}$$

$$f_1 = -\frac{1}{T} f_2 \tag{2.21}$$

Transformatörlerin özelliği karşılıklı kapıların gerilim değişkenlerinin kendi aralarında, akım değişkenlerin de kendi aralarında orantılı olmasıdır.

Jiratörlerde iki kapının değişkenleri arasında jiratör sabiti G cinsinden aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -\dfrac{1}{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

ya da,

$$v_1 = Gf_2 \tag{2.23}$$

$$f_1 = -\frac{1}{G} v_2 \tag{2.24}$$

Jiratörlerde bir kapının gerilim değişkeni diğerinin akım değişkeniyle; akım değişkeni ise diğer kapının gerilim değişkeniyle orantılıdır.

İki kapılı elemanlarda kapılardaki enerji türleri aynı, ya da farklı olabilir. Kaldıraç kolları, dişli kutuları, kremayer-pinyon mekanizması, makara-halat, elektro-mekanik dönüştürücü, hidro-mekanik dönüştürücü, elektrik transformatörü gibi elemanların modellenmesinde iki kapılı elemanlardan yararlanılır.

3

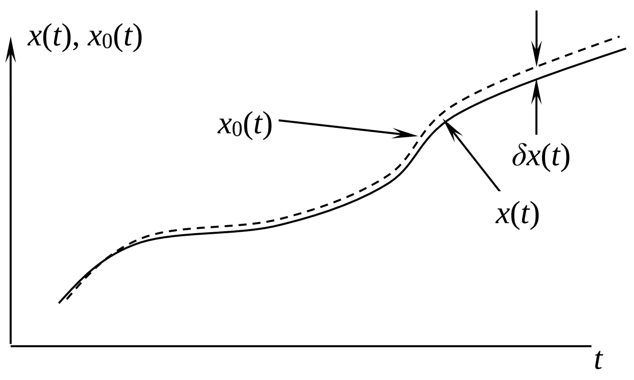
MEKANİK SİSTEMLER İÇİN HAMİLTON PRENSİBİNİN KLASİK VE ALTERNATİF FORMLARI

Mekanik sistemlerde dinamik denklemlerin elde edilmesinde neredeyse daima iki temel yaklaşımdan biri kullanılır. Bunlardan biri Newton kanunun doğrudan uygulanmasıdır. Diğer yaklaşım ise Hamilton prensibi adı verilen dolaylı bir yaklaşımdır. Newton kanunu ve Hamilton prensibi biri diğeri yerine kullanılabilen hipotezlerdir. Yani bunlar kanıtlanmaz, doğrulukları varsayılır. Dinamikte kullanılan bütün denklemler bu hipotezlerin birinden ya da diğerinden türetilebilir. Ancak, Newton kanunu uygulanırken atalet eksen takımı kullanılması ve ivmelerin belirlenmesi gerekir. Atalet eksen takımında ivmelerin bulunması ise çok karmaşık bir hal alabilir. Bu durum Newton kanununun karmaşık sistemlerde kullanılmasının önündeki en önemli engeldir. Hamilton prensibi ise ivmelere gerek duymaz; sadece hızların ve konumların belirlenmesi yeterlidir. Bu yüzden özellikle karmaşık sistemlerde kullanılması daha kolaydır.

3.1 Varyasyon

Bir $x(t)$ fonksiyonu ve bunun komşusu olan bir $x_0(t)$ fonksiyonu olsun (Şekil 3.1). Bu iki fonksiyonun birbirinin komşusu olmaları demek, bütün *t* değerleri için $x - x_0$ ve $\dot{x} - \dot{x}_0$ terimlerinin çok küçük olmaları demektir. *x*'in *varyasyonu* δx aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta x = x - x_0 \tag{3.1}$$



Şekil 3.1 Varyasyonun Tanımı

$V(x)$ ise $x(t)$'nin scalar bir fonksiyonu olsun. Argümanı bir fonksiyon olan fonksiyonlara *fonksiyon fonksiyonu* ya da kısaca *fonksiyonel* denir. $V(x)$'in argümanı x'den x_0'a değiştirildiğinde V'nin değerinde olan ΔV değişikliğine V'nin toplam varyasyonu denir ve aşağıdaki ifadeyle tanımlanır:

$$\Delta V = V(x) - V(x_0) = V(x_0 + \delta x) - V(x_0) \tag{3.2}$$

Eğer $V(x_0 + \delta x)$ terimi Taylor serisiyle açılırsa, ΔV aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Delta V = V(x_0) + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_0} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right|_{x_0} \delta x^3 + \cdots - V(x_0) \tag{3.3}$$

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \cdots \tag{3.4}$$

Yukarıdaki ifadede geçen δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, . . . terimlerine sırasıyla V'nin birinci varyasyonu (ya da kısaca V'nin varyasyonu), V'nin ikinci varyasyonu, V'nin üçüncü varyasyonu, . . denir. Bu terimler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta V = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0} \delta x \tag{3.5}$$

$$\delta^2 V = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_0} \delta x^2 \tag{3.6}$$

$$\delta^3 V = \left.\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right|_{x_0} \delta x^3 \tag{3.7}$$

$$\vdots$$

δV 'nin tanımı incelendiğinde, bir fonksiyon fonksiyonunun varyasyonunu alırken uygulanan kurallarla, bir fonksiyonun diferansiyelini alırken uygulanan kuralların aynı olduğu görülür. Örneğin, v bir fonksiyon ise,

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\delta v \tag{3.8}$$

olur. Eğer yukarıdaki denklemde v hız ise, $v = \dot{x}$ olacağından aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\delta v = mv\delta(\dot{x}) = m\dot{x}\delta(\dot{x}) \tag{3.9}$$

3.2 Mekanik Sistemler için Hamilton Prensibi – Klasik Form

Daha önce de belirtildiği gibi Hamilton prensibi Newton kanunu gibi doğruluğu varsayılan bir hipotezdir. Dolayısıyla kanıtlanması beklenmez. Hamilton prensibi de Newton kanunu gibi sadece dinamik denklemleri verir; bu denklemlerin çözümlerini vermez.

Hamilton prensibi aşağıdaki gibi ifade edilir.

Hamilton Prensibi:

Bir dinamik sistem t_1 zamanında sabit bir konfigürasyondan t_2 zamanında başka bir sabit bir konfigürasyona giderken yaptığı tabii hareketten olan rastgele, kabul edilebilir, küçük varyasyonlar için aşağıdaki Hamilton İntegralini sıfır yapar.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i f_i \delta x_i \right) dt \tag{3.10}$$

Bu integralin altındaki terimler, sistemdeki bütün kuvvet elemanları, kuvvet alanları, atalet kuvvetleri ve dış kuvvetler ***tarafından*** *yapılan iş terimleridir.*

Bir sistemde kütle ve atalet momentleri varsa Hamilton integralindeki bunlarla ilgili iş terimleri kinetik ko-enerji varyasyonları olarak; korunumlu iki-kuvvet elemanları (yaylar) veya korunumlu kuvvet alanları (yerçekimi) varsa bunların iş terimleri potansiyel enerji varyasyonları olarak da ifade edilebilir. Bu seçenek uygulamalarda büyük kolaylık sağladığından tercih edilir. Bu türden terimler,

$$\delta \mathcal{L} = \sum_j \delta T_j^* - \sum_k \delta V_k \tag{3.11}$$

şeklinde bir araya toplanır. Bu denklemdeki $\mathcal{L}$ terimi *Lagrange Fonksiyoneli* olarak anılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{L} = \sum_j T_j^* - \sum_k V_k \tag{3.12}$$

Kütleler, atalet momentleri, korunumlu iki-kuvvet elemanları ve korunumlu kuvvet alanları ile ilgili iş terimleri Lagrange fonksiyoneli cinsinden ifade edilirse, mekanik sistemler için Hamilton prensibinin klasik formdaki genel ifadesi aşağıdaki hali alır:

Bir dinamik sistem t_1 zamanında sabit bir konfigürasyondan t_2 zamanında başka bir sabit konfigürasyona giderken yaptığı tabii hareketten olan rastgele, kabul edilebilir, küçük varyasyonlar için aşağıdaki Hamilton integralini sıfır yapar.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \left(\sum_j T_j^* - \sum_k V_k \right) + \sum_i \delta W_i \right] dt \tag{3.13}$$

Burada terimler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\sum_j T_j^*(v_j)$:	Korunumlu elemanların kinetik ko-enerjileri (kütle ve atalet momentlerinin kinetik ko-enerjileri)
$\sum_k V_k(x_k)$:	Korunumlu elemanların potansiyel enerjileri (yay ve kuvvet alanlarının potansiyel enerjileri)
$\sum_i \delta W_i = \sum_i f_i \delta x_i$:	Korunumlu olmayan elemanlar tarafından yapılan iş terimleri (sönümleyiciler, sisteme dışarıdan uygulanan kuvvet ve moment zorlamaları)

Bu yöntemde hız/konum zorlamaları geometrik sınırlamalar dikkate alınarak sistem kabul edilebilirlik şartları içinde ele alınır.

Hamilton prensibinin uygulanmasında sisteme dışardan uygulanan kuvvet girişleri de iş yaptıklarından ayrı birer eleman olarak kabul edilir ve bunlara ait iş terimleri Hamilton integralinin $\sum_i f_i \delta x_i$ kısmına dahil edilir. Çizelge 3.1'de öteleme ve dönel türde lineer mekanik elemanların yapısal ilişkileri ve Hamilton integraline katkıları verilmiştir. Çizelgeden görüldüğü gibi, kinetik ko-enerji terimleri hızların (gerilim değişkenlerinin), potansiyel enerji terimleri ise konumların yani integral gerilim değişkenlerinin fonksiyonudur.

Hamilton integrali sadece Lagrange fonksiyoneli vasıtasıyla ya da doğrudan ifade edilmiş iş terimlerini içerdiğinden iş yapmayan kuvvetler, Newton kanunu uygulamasının aksine, problem formülasyonuna girmez. Örneğin, sürtünmesiz yataklardaki reaksiyon kuvvetleri, yuvarlanan yüzeylerdeki kuvvetler, kütlesiz rijit bağlantı elemanları (kollar, halatlar, vb.) tarafından aktarılan kuvvetler Hamilton integraline katkıda bulunmaz. Bu elemanlar ileride görüleceği gibi geometrik kabul edilebilirlik şartlarına katkıda bulunurlar.

Hamilton prensibinin mekanik sistemlere klasik uygulamasında kabul edilebilirlik şartları iki cinstir. Eleman kabul edilebilirlik şartları olarak adlandırılan birinci grup kinematik ilişkilerden oluşur. Konumların türevlerinin hıza eşit olduğu gerçeğine dayanır. Örneğin, bir kütlenin konumu x, hızı v ise, $\dot{x} = v$ olduğundan bunların varyasyonları arasıda da $\delta(\dot{x}) = \delta v$ ilişkisi vardır. İkinci gruba giren kabul edilebilirlik şartları ise, sistemin yapısı ve geometriden kaynaklanan şartlardır. Örneğin, bir kremayer dişli mekanizmasında kremayer dişlisinin konumu x ile pinyon dişli çarkının açısal konumu θ arasında $\theta r = x$ gibi bir ilişki varsa, $r\omega = v$, $r\delta\theta = \delta x$ ve $r\delta\omega = \delta v$ şartları yazılabilir. Kabul edilebilirlik şartları Hamilton integralinin argümanındaki varyasyon alma işleminden önce ya da sonra uygulanabileceği gibi, burada ayrıntısı verilmeyen Lagrange çarpanları yöntemiyle dolaylı olarak da uygulanabilir.

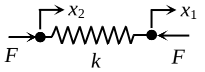
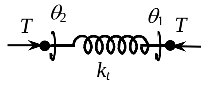
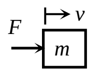
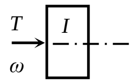
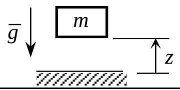
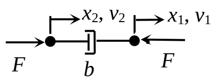
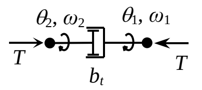
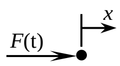
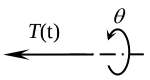
Hamilton prensibinin uygulanması aşağıdaki aşamaları içerir:

a) Sistem elemanlarının tanımlanması. (Dış kuvvet ve moment girişleri de birer eleman olarak kabul edilir.)

b) Eleman ve sistem kabul edilebilirlik şartlarının yazılması.

c) Lagrange fonksiyoneli ve iş terimlerinin yazılması.

Çizelge 3.1 Lineer Mekanik Elemanlar ve Hamilton İntegraline Katkıları (Klasik Form)

Eleman Tipi	Fiziksel Eleman	Diyagram	Yapısal İlişki	Hamilton İntegraline Katkı
Korunumlu İki-kuvvet Elemanı	Öteleme Yayı		$F=k(x_2-x_1)$	$V=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$
	Dönel Yay		$T=k_t(\theta_2-\theta_1)$	$V=\frac{1}{2}k_t(\theta_2-\theta_1)^2$
Kütle	Öteleme Halinde Kütle		$p=mv$	$T^*=\frac{1}{2}mv^2$
	Dönel Kütle		$h=I\omega$	$T^*=\frac{1}{2}I\omega^2$
Yerçekimi Alanı	Yerçekimi Alanında Kütle		-	$V=mgz$
Sönümleyici	Öteleme Sönümleyici		$F=bv_{21}$	$\sum f_i\delta x_i=-F\delta x_{21}=-b\dot{x}_{21}\delta x_{21}$
	Dönel Sönümleyici		$T=b_t\omega_{21}$	$\sum f_i\delta x_i=-T\delta\theta_{21}=-b_t\dot{\theta}_{21}\delta\theta_{21}$
Dış Zorlama	Dış Kuvvet		$F=F(t)$	$\sum f_i\delta x_i=F(t)\delta x$
	Dış Moment		$T=T(t)$	$\sum f_i\delta x_i=T(t)\delta\theta$
	Lineer veya Açısal Konum veya Hız Zorlaması	-	$x=x(t),\ v=v(t)$ $\theta=\theta(t),\ \omega=\omega(t)$	Hamilton integralinde iş terimi olarak yer almaz. Kabul edilebilirlik şartları olarak işlem görür.

F = kuvvet
v = hız
k = öteleme yay sabiti
b = öteleme sönüm sabiti

T = moment
ω = açısal hız
k_t = açısal yay sabiti
b_t = açısal sönüm sabiti

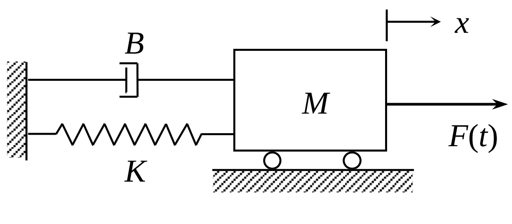
p = momentum
x = konum
m = kütle

h = açısal momentum
θ = açısal konum
I = atalet momenti

d) İş terimlerinde geçen kuvvetlerin eleman denklemlerinden yazılması.
e) Kabul edilebilirlik şartlarının uygulanması.
f) Hamilton prensibinin uygulanması.

Örnek 1:

Şekil 3.1'de verilen sistemin dinamik denklemini Hamilton prensibini uygulayarak elde edelim.



Şekil 3.1

Sistem elemanları: Kütle, *M*; yay, *K*; sönümleyici, *B*; zorlama kuvveti, *F*(*t*).

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M v_m^2 - \frac{1}{2} K x_k^2 \tag{3.14}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i \delta x_i = F(t)\delta x_F - F_b \delta x_b \tag{3.15}$$

Sönümleyici için eleman denklemi:

$$F_b = B v_b \tag{3.16}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\dot{x} = v_m \ ; \ \dot{x}_k = v_k \ ; \ \dot{x}_b = v_b \ ; \ \dot{x}_F = v_F \tag{3.17}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$x = x_k = x_b = x_F \tag{3.18}$$

$$v_m = v_k = v_b = v_F \tag{3.19}$$

Hamilton integrali:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} M v_m^2 - \frac{1}{2} K x_k^2 \right) + F(t)\delta x_F - F_b \delta x_b \right] dt \tag{3.20}$$

Sönümleyicinin eleman denklemi kullanılır ve kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa, Hamilton integrali *x* cinsinden aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2 \right) + F(t)\delta x - B\dot{x}\delta x \right] dt \tag{3.21}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[M\dot{x}\delta\dot{x} - Kx\delta x + F(t)\delta x - B\dot{x}\delta x \right] dt \tag{3.22}$$

İntegralin altındaki birinci terimin kısmi integrali alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} M\dot{x} \frac{d}{dt}(\delta x) dt = M\dot{x}\delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} M\ddot{x}\delta x dt \tag{3.23}$$

Hamilton prensibine göre t_1 ve t_2 zamanlarında sistem konfigürasyonunun sabit olduğu kabul edilir. Bu yüzden t_1 ve t_2'de sisteme varyasyon uygulanamaz, yani $\delta x(t_1)=0$ ve $\delta x(t_2)=0$ şartı vardır. Bu şart dolayısıyla denklem (3.23)'ün sağ tarafındaki ilk terim sıfıra eşittir. Denklem (3.23)'den elde edilen sonuç, denklem (3.22)'de kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}-B\dot{x}-Kx+F(t)\right]\delta x dt \tag{3.24}$$

Hamilton prensibine göre rastgele δx varyasyonları için bu integralin sıfır olması gerekir:

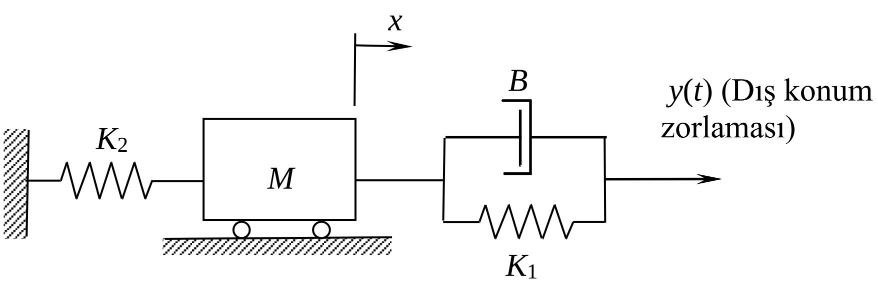
$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}-B\dot{x}-Kx+F(t)\right]\delta x dt=0 \qquad \text{(Rastgele } \delta x \text{ için)} \tag{3.25}$$

Yukarıdaki integralin rastgele δx varyasyonları için sıfır olabilmesi, ancak δx'in katsayısının yani köşeli parantez içindeki terimin sıfır olmasıyla mümkün olacağından, sistemin dinamik denklemi bu terimi sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx=F(t) \tag{3.26}$$

Örnek 2:

Şekil 3.2'de verilen sistemdeki kütle yatay düzlem üzerinde sürtünmesiz olarak kaymaktadır. Bu sisteme Hamilton prensibini uygulayarak dinamik denklemini elde edelim.



Şekil 3.2

Sistem elemanları: Kütle, M; yay, K_1; yay, K_2; sönümleyici, B.

Bu sistemde $y(t)$ kuvvet zorlaması olmadığından sistem elemanı olarak alınmaz. Fakat kabul edilebilirlik şartı olarak probleme girer.

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}Mv_m^2-\frac{1}{2}K_1\left[x-y(t)\right]^2-\frac{1}{2}K_2x^2 \tag{3.27}$$

$\dot{x}=v_m$ (kabul edilebilirlik şartı) olduğundan denklem (3.27) aşağıdaki hali alır:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K_1\left[x - y(t)\right]^2 - \frac{1}{2}K_2 x^2 \tag{3.28}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i \delta x_i = -F_b \delta x = -B\left[\dot{x} - \dot{y}(t)\right]\delta x \tag{3.29}$$

Denklem (3.29) yazılırken, $y(t)$ dış zorlama olduğundan $\delta y(t) = 0$ alınmıştır.

Hamilton integrali:

$\delta y(t) = 0$ olduğunu dikkate alarak, denklemler (3.28) ve (3.29)'dan Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K_1\left[x - y(t)\right]^2 - \frac{1}{2}K_2 x^2\right) - B\left[\dot{x} - \dot{y}(t)\right]\delta x\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[M\dot{x}\delta\dot{x} - K_1\left[x - y(t)\right]\delta x - K_2 x\delta x - B\left[\dot{x} - \dot{y}(t)\right]\delta x\right]dt \end{aligned} \tag{3.30}$$

İntegralin altındaki ilk terime kısmi integral formülü uygulanır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x} - B\dot{x} - (K_1 + K_2)x + K_1 y(t) + B\dot{y}(t)\right]\delta x dt = 0 \quad (\text{Rastgele } \delta x \text{ için}) \tag{3.31}$$

olur ve sistemin dinamik denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

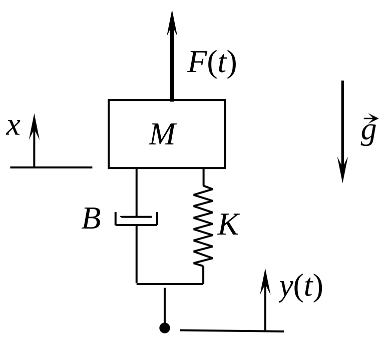
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + (K_1 + K_2)x = K_1 y(t) + B\dot{y}(t) \tag{3.32}$$

Örnek 3:

Şekil 3.3'de verilen sistemin dinamik denklemini Hamilton prensibini uygulayarak elde edelim. (y = 0 iken ve yay serbest boydayken x = 0.)

Sistem elemanları: Kütle, M; yay, K; sönümleyici, B; kuvvet girişi, $F(t)$.

Bu sistemde $y(t)$ kuvvet zorlaması olmadığından sistem elemanı olarak alınmaz. Fakat kabul edilebilirlik şartı olarak probleme girer.



Şekil 3.3

Lagrange fonksiyoneli:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}Mv_m^2-\frac{1}{2}K\left[x-y(t)\right]^2-Mgx \tag{3.33}$$

$\dot{x}=v_m$ (kabul edilebilirlik şartı) olduğundan denklem (3.33) aşağıdaki hali alır:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}K\left[x-y(t)\right]^2-Mgx \tag{3.34}$$

İş terimleri:

$$\sum_i f_i\delta x_i=-F_b\delta x+F(t)\delta x=-B\left[\dot{x}-\dot{y}(t)\right]\delta x+F(t)\delta x \tag{3.35}$$

Denklem (3.35) yazılırken, $y(t)$ dış zorlama olduğundan $\delta y(t)=0$ alınmıştır.

Hamilton integrali:

$\delta y(t)=0$ olduğunu dikkate alarak, denklemler (3.34) ve (3.35)'den Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2-\frac{1}{2}K\left[x-y(t)\right]^2-Mgx\right)-B\left[\dot{x}-\dot{y}(t)\right]\delta x+F(t)\delta x\right]dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{M\dot{x}\delta\dot{x}-K\left[x-y(t)\right]\delta x-Mg\delta x-B\left[\dot{x}-\dot{y}(t)\right]\delta x+F(t)\delta x\right\}dt\end{aligned} \tag{3.36}$$

İntegralin altındaki ilk terime kısmi integral formülü uygulanır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-M\ddot{x}-B\dot{x}-Kx+Ky(t)+B\dot{y}(t)-Mg+F(t)\right]\delta x dt=0 \quad \text{(Rastgele } \delta x \text{ için)} \tag{3.37}$$

olur ve sistemin dinamik denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx=Ky(t)+B\dot{y}(t)-Mg+F(t) \tag{3.38}$$

3.3 Mekanik Sistemler içim Alternatif Hamilton Prensibi

Mekanik sistemler içim Hamilton prensibinin alternatif formu aşağıdaki gibidir:

Bir dinamik sistem t_1 zamanında sabit bir konfigürasyondan t_2 zamanında başka bir sabit konfigürasyona giderken yaptığı tabii hareketten olan rastgele, kabul edilebilir, küçük varyasyonlar için aşağıdaki Hamilton integralini sıfır yapar.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\sum_j V_j^* - \sum_k T_k \right) + \sum_i \delta W_i \right] dt \qquad (3.39)$$

Burada terimler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\sum_j V_j^*(f_j)$: Korunumlu elemanların potansiyel ko-enerjileri (yaylar)

$\sum_k T_k(p_k)$: Korunumlu elemanların kinetik enerjileri (kütle ve atalet momentlerinin kinetik enerjileri)

$\sum_i \delta W_i = v_i \delta p_i$: Korunumlu olmayan elemanlar tarafından yapılan iş terimleri (sönümleyiciler, sisteme dışarıdan uygulanan hız zorlamaları)

Bu yöntemde kuvvet ve moment zorlamaları, kuvvet ve moment denge denklemlerini kullanarak sistem kabul edilebilirlik şartları içinde ele alınır.

Çizelge 3.2'de öteleme ve dönel türdeki lineer mekanik elemanların yapısal ilişkileri ve Hamilton integralinin alternatif formuna katkıları verilmiştir. Çizelgeden görüldüğü gibi, potansiyel ko-enerji terimleri kuvvet ve momentlerin (akım değişkenlerinin), kinetik enerji terimleri ise momentum ve açısal momentumun (integral akım değişkenlerinin) fonksiyonudur.

Örnek 1:

Şekil 3.1'de verilen mekanik sistemin dinamik denklemlerini elde etmek için alternatif Hamilton prensibi ifadesini kullanalım.

Potansiyel ko-enerji terimi:

$$V_K^*(f_K) = \frac{1}{2}\frac{f_K^2}{K} = \frac{1}{2}\frac{\dot{p}_K^2}{K} \qquad (3.40)$$

Kinetik enerji terimi:

$$T(p_M) = \frac{1}{2}\frac{p_M^2}{M} \qquad (3.41)$$

İş terimi:

$$\delta W_B = -v_B f_B \delta t = -v_B \delta p_B = -\frac{f_B}{B}\delta p_B = -\frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B \qquad (3.42)$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$f_M = -f_K - f_B + F(t) \qquad (3.43)$$

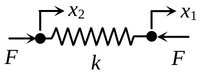
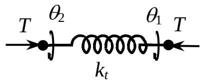
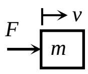
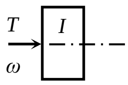
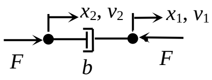
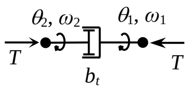
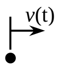
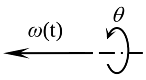
ya da

$$\dot{p}_B = -\dot{p}_K - \dot{p}_M + F(t) \qquad (3.44)$$

$$\delta p_B = -\delta p_K - \delta p_M \qquad (3.45)$$

Not: Kitapta p_K, p_B gibi değişkenler sadece integral akım değişkenleridir. Fiziksel bir anlam taşımayabilir.

Çizelge 3.2 Lineer Mekanik Elemanlar ve Hamilton İntegraline Katkıları (Alternatif Form)

Eleman Tipi	Fiziksel Eleman	Diyagram	Yapısal İlişki	Hamilton İntegraline Katkı
Korunumlu İki-kuvvet Elemanı	Öteleme Yayı		$F = k(x_2 - x_1)$	$E_T^* = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$
	Dönel Yay		$T = k_t(\theta_2 - \theta_1)$	$E_T^* = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k_t}$
Kütle	Öteleme Halinde Kütle		$p = mv$	$E = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$
	Dönel Kütle		$h = I\omega$	$E = \frac{1}{2}\frac{h^2}{I}$
Sönümleyici	Öteleme Sönümleyici		$F = bv_{21}$	$\delta W = -\frac{F}{b}\delta p$
	Dönel Sönümleyici		$T = b_t\omega_{21}$	$\delta W = -\frac{T}{b_t}\delta h$
Dış Zorlama	Hız Kaynağı		$v = v(t)$	$\delta W = v(t)\delta p$
	Açısal Hız Kaynağı		$\omega = \omega(t)$	$\delta W = \omega(t)\delta h$
	Kuvvet veya Moment Zorlaması; Ağırlık Kuvveti	-	$F = F(t)$, $T = T(t)$ $F_g = mg$	Hamilton integralinde iş terimi olarak yer almaz. Kuvvet ve moment denge denklemlerini kullanarak sistem kabul edilebilirlik şartları olarak işlem görür.

F = kuvvet
v = hız
k = öteleme yay sabiti
b = öteleme sönüm sabiti

T = moment
ω = açısal hız
k_t = açısal yay sabiti
b_t = açısal sönüm sabiti

p = momentum
x = konum
m = kütle

h = açısal momentum
θ = açısal konum
I = atalet momenti

Hamilton Integrali:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{p}_K^2}{K} - \frac{1}{2}\frac{p_M^2}{M}\right) - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B\right]dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{K}\dot{p}_K\delta\dot{p}_K - \frac{1}{M}p_M\delta p_M - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B\right)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(-\frac{1}{K}\ddot{p}_K\delta p_K - \frac{1}{M}p_M\delta p_M - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B\right)dt \qquad (3.46)$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa,

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{1}{K}\ddot{p}_K \delta p_K - \frac{1}{M} p_M \delta p_M - \frac{\left(-\dot{p}_K - \dot{p}_M + F(t)\right)}{B}(-\delta p_K - \delta p_M)\right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-\frac{1}{K}\ddot{p}_K - \frac{\dot{p}_K}{B} - \frac{\dot{p}_M}{B} + \frac{F(t)}{B} \right]\delta p_K + \left[-\frac{\dot{p}_M}{B} - \frac{1}{M} p_M - \frac{\dot{p}_K}{B} + \frac{F(t)}{B} \right]\delta p_M \right\} dt = 0$$

(Rastgele δp_K ve δp_M için.) (3.47)

İntegralin altındaki köşeli parantezler sıfıra eşitlenirse dinamik denklemler bulunur:

$$\frac{1}{K}\ddot{p}_K + \frac{\dot{p}_K}{B} + \frac{\dot{p}_M}{B} = \frac{F(t)}{B} \tag{3.48}$$

$$\frac{\dot{p}_M}{B} + \frac{1}{M} p_M + \frac{\dot{p}_K}{B} = \frac{F(t)}{B} \tag{3.49}$$

Bu denklemler sistemin akım değişkenleri cinsinden (kuvvetler) aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\frac{1}{K}\dot{f}_K + \frac{f_K}{B} + \frac{f_M}{B} = \frac{F(t)}{B} \tag{3.50}$$

$$\frac{\dot{f}_M}{B} + \frac{1}{M} f_M + \frac{\dot{f}_K}{B} = \frac{\dot{F}(t)}{B} \tag{3.51}$$

Denklem (3.50)'de kuvvetler eleman denklemleri kullanılarak *x* cinsiden yazılırsa,

$$\frac{1}{K}K\dot{x} + \frac{Kx}{B} + \frac{M\ddot{x}}{B} = \frac{F(t)}{B} \tag{3.52}$$

Denklemin iki tarafı *B* ile çarpılıp terimler düzenlenirse, sistemin *x* cinsinden daha önce denklem (3.26) olarak elde edilmiş olan dinamik denklemi bulunur.

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t) \tag{3.53}$$

Denklem (3.51)'deki kuvvetler eleman denklemleri kullanılarak *x* cinsiden yazılırsa,

$$\frac{1}{B}M\dddot{x} + \frac{1}{M}M\ddot{x} + \frac{1}{B}K\dot{x} = \frac{\dot{F}(t)}{B} \tag{3.54}$$

bulunur. Bu denklemin bir defa integrali alınır ve iki tarafı *B* ile çarpılırsa *x* cinsinden aşağıdaki ifade bulunur:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t) \tag{3.55}$$

Görüldüğü gibi hem denklem (3.50) hem de denklem (3.51), *x* cinsinden aynı dinamik denklemi verir.

Örnek 2:

Şekil 3.2'de verilen mekanik sistemin dinamik denklemlerini elde etmek için alternatif Hamilton prensibi ifadesini kullanalım.

Potansiyel ko-enerji terimleri:

$$V_{K1}^{*}(f_{K1}) = \frac{1}{2}\frac{f_{K1}^{2}}{K_1} = \frac{1}{2}\frac{\dot{p}_{K1}^{2}}{K_1} \tag{3.56}$$

$$V_{K2}^{*}(f_{K2}) = \frac{1}{2}\frac{f_{K2}^{2}}{K_2} = \frac{1}{2}\frac{\dot{p}_{K2}^{2}}{K_2} \tag{3.57}$$

Kinetik enerji terimi:

$$T(p_M) = \frac{1}{2}\frac{p_M^{2}}{M} \tag{3.58}$$

İş terimleri:

$$\delta W_B = -v_B f_B \delta t = -v_B \delta p_B = -\frac{f_B}{B}\delta p_B = -\frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B \tag{3.59}$$

$$\delta W_y = v_y f_y \delta t = \dot{y}\delta p_y \tag{3.60}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$f_M = -f_{K1} - f_{K2} - f_B \tag{3.61}$$

$$f_y = -f_{K1} - f_B \tag{3.62}$$

Ayrıca y dışarıdan giriş olarak verildiğinden, bilinen bir x için f_{K1} ve f_{K2} birbirine bağımlıdır. Zira,

$$f_{K1} = K_1(x - y) \tag{3.63}$$

$$f_{K2} = K_2 x \tag{3.64}$$

olduğundan, aşağıdaki ilişki bulunur.

$$\frac{f_{K2}}{K_2} = \frac{f_{K1}}{K_1} + y \tag{3.65}$$

Denklemler (3.65), (3.61) ve (3.62) ile verilen şartlar aşağıdaki hale indirgenebilir:

$$f_{K1} = \frac{K_1}{K_2} f_{K2} - K_1 y \tag{3.66}$$

$$f_B = -\left(\frac{K_1 + K_2}{K_2}\right) f_{K2} - f_M + K_1 y \tag{3.67}$$

$$f_y = f_{K2} + f_M \tag{3.68}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları integral akım değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{p}_{K1} = \frac{K_1}{K_2} \dot{p}_{K2} - K_1 y \tag{3.69}$$

$$\dot{p}_B = -\left(\frac{K_1 + K_2}{K_2}\right) \dot{p}_{K2} - \dot{p}_M + K_1 y \tag{3.70}$$

$$\dot{p}_y = \dot{p}_{K2} + \dot{p}_M \tag{3.71}$$

Varyasyonlar arasındaki şartlar ise aşağıdaki gibidir:

$$\delta p_{K1} = \frac{K_1}{K_2} \delta p_{K2} \tag{3.72}$$

$$\delta p_B = -\left(\frac{K_1 + K_2}{K_2}\right) \delta p_{K2} - \delta p_M \tag{3.73}$$

$$\delta p_y = \delta p_{K2} + \delta p_M \tag{3.74}$$

Hamilton Integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{p}_{K1}^2}{K_1} + \frac{1}{2}\frac{\dot{p}_{K2}^2}{K_2} - \frac{1}{2}\frac{p_M^2}{M} \right) - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B + \dot{y}\delta p_y \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{K_1}\dot{p}_{K1}\delta\dot{p}_{K1} + \frac{1}{K_2}\dot{p}_{K2}\delta\dot{p}_{K2} - \frac{1}{M}p_M\delta p_M - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B + \dot{y}\delta p_y \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{1}{K_1}\ddot{p}_{K1}\delta p_{K1} - \frac{1}{K_2}\ddot{p}_{K2}\delta p_{K2} - \frac{1}{M}p_M\delta p_M - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B + \dot{y}\delta p_y \right) dt \end{aligned} \tag{3.75}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa,

$$\begin{aligned} H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ &-\frac{1}{K_1}\left(\frac{K_1}{K_2}\ddot{p}_{K2} - K_1\dot{y}\right)\frac{K_1}{K_2}\delta p_{K2} - \frac{1}{K_2}\ddot{p}_{K2}\delta p_{K2} - \frac{1}{M}p_M\delta p_M \\ &-\frac{1}{B}\left[-\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)\dot{p}_{K2} - \dot{p}_M + K_1 y)\right]\left[-\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)\delta p_{K2} - \delta p_M\right] + \dot{y}(\delta p_{K2} + \delta p_M)\Bigg\} dt \end{aligned} \tag{3.76}$$

ya da,

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[-\frac{1}{K_2}\left(\frac{K_1}{K_2}\ddot{p}_{K2}-K_1\dot{y}\right)-\frac{1}{K_2}\ddot{p}_{K2}-\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)^2\dot{p}_{K2}-\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)\dot{p}_M\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{K_1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)y+\dot{y}\right]\delta p_{K2}+\left[-\frac{1}{M}p_M-\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)\dot{p}_{K2}-\frac{1}{B}\dot{p}_M+\frac{K_1}{B}y+\dot{y}\right]\delta p_M\right\}dt=0$$

(Rastgele δp_{K2} ve δp_M için.) (3.77)

İntegralin altındaki köşeli parantezler sıfıra eşitlenirse aşağıdaki dinamik denklemler bulunur:

$$\frac{1}{K_2}\ddot{p}_{K2}+\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)\dot{p}_{K2}+\frac{1}{B}\dot{p}_M=\frac{K_1}{B}y+\dot{y} \tag{3.78}$$

$$\frac{1}{B}\dot{p}_M+\frac{1}{M}p_M+\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)\dot{p}_{K2}=\frac{K_1}{B}y+\dot{y} \tag{3.79}$$

Yukarıdaki iki denklem sistemin akım değişkenleri cinsinden (kuvvetler) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{1}{K_2}\dot{f}_{K2}+\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)f_{K2}+\frac{1}{B}f_M=\frac{K_1}{B}y+\dot{y} \tag{3.80}$$

$$\frac{1}{B}\dot{f}_M+\frac{1}{M}f_M+\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)\dot{f}_{K2}=\frac{K_1}{B}\dot{y}+\ddot{y} \tag{3.81}$$

Denklem (3.80)'de kuvvetler eleman denklemleri kullanılarak x cinsiden yazılırsa,

$$\frac{1}{K_2}K_2\dot{x}+\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)K_2x+\frac{1}{B}M\ddot{x}=\frac{K_1}{B}y+\dot{y} \tag{3.82}$$

bulunur. Bu denklemin iki tarafı B ile çarpılıp terimler düzenlenirse, sistemin x cinsinden daha önce denklem (3.32) olarak elde edilmiş olan dinamik denklemi bulunur.

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+(K_1+K_2)x=B\dot{y}+K_1y \tag{3.83}$$

Denklem (3.81)'deki kuvvetler eleman denklemleri kullanılarak x cinsiden yazılırsa,

$$\frac{1}{B}M\dddot{x}+\frac{1}{M}M\ddot{x}+\frac{1}{B}\left(\frac{K_1+K_2}{K_2}\right)K_2\dot{x}=\frac{K_1}{B}\dot{y}+\ddot{y} \tag{3.84}$$

olur. Bu denklemin bir defa integrali alınır ve iki tarafı B ile çarpılırsa x cinsinden aşağıdaki ifade bulunur:

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+(K_1+K_2)x=B\dot{y}+K_1y \quad (3.85)$$

Görüldüğü hem denklem (3.80) hem de denklem (3.81), x cinsinden aynı dinamik denklemi verir.

Örnek 3:

Şekil 3.3'de verilen mekanik sistemin dinamik denklemlerini elde etmek için alternatif Hamilton prensibi ifadesini kullanalım.

Potansiyel ko-enerji terimleri:

$$V_K^*(f_K)=\frac{1}{2}\frac{f_K^2}{K}=\frac{1}{2}\frac{\dot{p}_K^2}{K} \quad (3.86)$$

Kinetik enerji terimi:

$$T(p_M)=\frac{1}{2}\frac{p_M^2}{M} \quad (3.87)$$

İş terimleri:

$$\delta W_B=-v_Bf_B\delta t=-v_B\delta p_B=-\frac{f_B}{B}\delta p_B=-\frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B \quad (3.88)$$

$$\delta W_y=v_yf_y\delta t=\dot{y}\delta p_y \quad (3.89)$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$F(t)=f_M+f_K+f_B+Mg \quad (3.90)$$

$$f_y+f_K+f_B=0 \quad (3.91)$$

Ayrıca y dışarıdan giriş olarak verildiğinden, bilinen bir x için f_K ve f_B birbirine bağımlıdır. Zira,

$$f_K=K(x-y) \quad (3.92)$$

$$f_B=B(\dot{x}-\dot{y}) \quad (3.93)$$

olduğundan aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{\dot{f}_K}{K}=\frac{f_B}{B} \quad (3.94)$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları integral akım değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F(t) = \dot{p}_M + \dot{p}_K + \dot{p}_B + Mg \tag{3.95}$$

$$\dot{p}_y + \dot{p}_K + \dot{p}_B = 0 \tag{3.96}$$

$$\frac{\dot{p}_K}{K} = \frac{p_B}{B} \tag{3.97}$$

Yukarıdaki üç denklemden aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$p_B = \frac{B}{K}\dot{p}_K \tag{3.98}$$

$$\delta p_B = \frac{B}{K}\delta\,\dot{p}_K \tag{3.99}$$

$$p_y = -p_K - \frac{B}{K}\dot{p}_K \tag{3.100}$$

$$\delta p_y = -\delta p_K - \frac{B}{K}\delta\,\dot{p}_K \tag{3.101}$$

$$\dot{p}_M = F(t) - Mg - \dot{p}_K - \dot{p}_B \tag{3.102}$$

$$p_M = \int F(t)dt - \int Mgdt - p_K - \frac{B}{K}\dot{p}_K \tag{3.103}$$

$$\delta p_M = -\delta p_K - \frac{B}{K}\delta\,\dot{p}_K \tag{3.104}$$

Hamilton Integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{p}_K^2}{K} - \frac{1}{2}\frac{p_M^2}{M}\right) - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B + \dot{y}\delta p_y\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{K}\dot{p}_K\delta\,\dot{p}_K - \frac{1}{M}p_M\delta p_M - \frac{\dot{p}_B}{B}\delta p_B + \dot{y}\delta p_y\right)dt \end{aligned} \tag{3.105}$$

Denklemler (3.98), (3.99), (3.101), (3.103) ve (3.104) kullanılırsa,

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{K}\dot{p}_K\delta\ddot{p}_K \\ -\frac{1}{M}\left[\int F(t)dt-\int Mgdt-p_K-\frac{B}{K}\dot{p}_K\right] \\ \times\left(-\delta p_K-\frac{B}{K}\delta\dot{p}_K\right)-\frac{1}{B}\frac{B}{K}\ddot{p}_K\frac{B}{K}\delta\dot{p}_K \\ +\dot{y}(t)\left(-\delta p_K-\frac{B}{K}\delta\dot{p}_K\right)\end{array}\right\}dt \tag{3.106}$$

Varyasyonların türevini içeren terimlerin kısmi integrali alınırsa ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{K}\ddot{p}_K\delta p_K \\ +\frac{1}{M}\left[\int F(t)dt-\int Mgdt-p_K-\frac{B}{K}\dot{p}_K\right]\delta p_K \\ -\frac{B}{K}\frac{1}{M}\left[F(t)-Mg-\dot{p}_K-\frac{B}{K}\ddot{p}_K\right]\delta p_K \\ +\frac{B}{K^2}\dddot{p}_K\delta p_K-\dot{y}(t)\delta p_K+\frac{B}{K}\ddot{y}(t)\delta p_K\end{array}\right\}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{K}\ddot{p}_K \\ +\frac{1}{M}\left[\int F(t)dt-\int Mgdt-p_K-\frac{B}{K}\dot{p}_K\right] \\ -\frac{B}{K}\frac{1}{M}\left[F(t)-Mg-\dot{p}_K-\frac{B}{K}\ddot{p}_K\right] \\ +\frac{B}{K^2}\dddot{p}_K-\dot{y}(t)+\frac{B}{K}\ddot{y}(t)\end{array}\right\}\delta p_K\,dt=0$$

(Rastgele δp_K için.) (3.107)

Parantez içindeki terim sıfıra eşitlenirse, denklem (3.103) kullanılırsa ve terimler düzenlenirse aşağıdaki denklem bulunur.

$$\begin{array}{l}\frac{B}{K^2}\dddot{p}_K+\frac{1}{M}p_M-\frac{1}{K}\ddot{p}_K+\frac{B^2}{K^2M}\ddot{p}_K+\frac{B}{KM}\dot{p}_K \\ -\frac{B}{KM}F(t)+\frac{B}{KM}Mg-\dot{y}(t)+\frac{B}{K}\ddot{y}(t)=0\end{array} \tag{3.108}$$

$\dot{p}_K = f_K$, $f_K = K(x-y)$ ve $p_M = M\dot{x}$ olduğu dikkate alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{B}{K^2}K\left[\ddot{x}-\ddot{y}(t)\right]+\frac{1}{M}M\dot{x}-\frac{1}{K}K\left[\dot{x}-\dot{y}(t)\right]+\frac{B^2}{K^2M}K\left[\dot{x}-\dot{y}(t)\right] \\ &+\frac{B}{KM}K\left[x-y(t)\right]-\frac{B}{KM}F(t)+\frac{B}{KM}Mg-\dot{y}(t)+\frac{B}{K}\ddot{y}(t)=0 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Birbirini götüren terimler yok edilir ve terimler düzenlenirse dinamik denklem x cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx = Ky(t)+B\dot{y}(t)-Mg+F(t) \tag{3.110}$$

Bu denklem daha önce aynı sistem için bulunan denklem (3.38) ile aynıdır.

.

4

HAMİLTON PRENSİBİNİN MEKANİK OLMAYAN SİSTEMLERE GENELLEŞTİRİLMESİ

4.1 Hamilton Prensibini Genelleştirilmesi

Bölüm 3'de Hamilton prensibinin mekanik sistemlere uygulanmasında kullanılan klasik formun özelliği Lagrange fonksiyonelinin argümanında kinetik ko-enerji ve potansiyel enerjinin kullanılmasıdır. Kinetik ko-enerjiler hızların, potansiyel enerjiler konumların fonksiyonudur. İş terimleri de hızlar ve konumlar cinsinden ifade edilir. Dolayısıyla Hamilton integrali sistemin gerilim (hızlar) ve integral gerilim değişkenleri (konumlar) cinsindendir. Daha sonra gerilim değişkenleri integral gerilim değişkenlerinin türevleri olarak alınır ve dinamik denklemler integral gerilim değişkenleri cinsinden elde edilir. Bu yöntemde kuvvet ve moment zorlamaları iş terimlerine katkıda bulunur, hız ve konum zorlamaları ise sistem kabul edilebilirlik şartları içinde ele alınır.

Mekanik sistemlerde Hamilton prensibinin alternatif formu kullanıldığında ise potansiyel ko-enerji ve kinetik enerji kullanılır. Potansiyel ko-enerjiler kuvvet ve momentlerin, kinetik enerjiler momentum ve açısal momentumun fonksiyonudur. İş terimleri de kuvvet ve momentler ile momentum ve açısal momentumlar cinsinden ifade edilir. Bu yöntemde Hamilton integrali sistemin akım değişkenleri (kuvvetler ve momentler) ve integral akım değişkenleri (lineer ve açısal momentumlar) cinsindendir. Daha sonra akım değişkenleri integral akım değişkenlerinin türevleri olarak yazılır ve dinamik denklemler integral akım değişkenleri cinsinden bulunur. Bu yöntemde hız ve konum zorlamaları iş terimlerine; kuvvet ve moment zorlamaları ise kuvvet ve moment denge denklemlerinden elde edilen sistem kabul edilebilirlik şartlarına katkıda bulunur. Alternatif form kullanılarak elde edilen dinamik denklemlerdeki integral akım değişkenleri eleman denklemlerinden yararlanarak integral gerilim değişkenleri cinsinden yazılırsa Hamilton prensibinin klasik formundan bulunan denklemler elde edilir.

Hamilton prensibinin mekanik olmayan sistemlere genelleştirilmesinde önemli olan, klasik ve alternatif formülasyonlar sırasında kullanılan fiziksel değişkenlerin kendileri değil, benzeşim karakteristikleridir. Yani bu değişkenlerin akım, gerilim, integral akım ya da integral gerilim türünde olmaları hususudur. Zira daha önce Bölüm 2'de farklı enerji türüne sahip sistemlerin değişkenlerinin akım, gerilim, integral akım ve gerilim değişkenleri olarak gruplanabileceğini, aynı gruptaki değişkenlerin fiziksel olarak farklı olsalar dahi benzeşim içinde oldukları görülmüştü. Bir enerji kapısına sahip farklı türde enerjiye sahip elemanlar ortak gruplara toplanmış ve aynı gruptaki elemanların dinamik davranış yönünden benzeşim halinde olduğu görülmüştü. Farklı enerji türüne sahip sistemlerin değişkenleri ve elemanları arasındaki benzeşim, Hamilton prensibinin mekanik olmayan sistemlere genelleştirilmesine olanak sağlar.

Mekanik sistemlerde kullanılan Hamilton prensibinin klasik ve alternatif form uygulamaları mekanik olmayan sistemlere genelleştirilebilir. Klasik formdan genelleştirilen Hamilton prensibi aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Bu yöntem bundan sonra Hamilton prensibinin *integral gerilim değişkeni formu* olarak anılacaktır.

Hamilton Prensibi – İntegral Gerilim Değişkeni Formu:

Bir dinamik sistem t_1 *zamanında sabit bir konfigürasyondan* t_2 *zamanında başka bir sabit konfigürasyona giderken yaptığı tabii hareketten olan rastgele, kabul edilebilir, küçük varyasyonlar için aşağıdaki Hamilton integralini sıfır yapar.*

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\sum_j (E_A^*)_j - \sum_k (E_T)_k \right) + \sum_i \delta W_i \right] dt \tag{4.1}$$

Burada terimler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\sum_j \left[E_A^*(v_A)\right]_j$: Sistemdeki A-tipi enerji depolayan elemanların gerilim değişkenleri cinsinden yazılan ko-enerjileri.

$\sum_k \left[E_T(x_T)\right]_k$: Sistemdeki T-tipi enerji depolayan elemanların integral gerilim değişkenleri cinsinden yazılan enerjileri.

$\sum_i \delta W_i = f_i(x_i)\delta x_i$: D-tipi elemanların akım değişkenleri ve integral gerilim değişkenlerinin varyasyonları cinsinden iş terimleri (akım değişkenleri elemanların yapısal ilişkileri kullanılarak integral gerilim değişkenleri cinsinden ifade edilecek)

T-tipi kaynakların kaynak fonksiyonları ve integral gerilim değişkenlerinin varyasyonları cinsinden iş terimleri.

Yukarıdaki ifade belli enerji türüne sahip bir sistem için kullanılırken genelleştirilmiş değişkenlerin simgeleri yerine fiziksel sistemin karşılık gelen değişkenleri yazılır. Bu yöntemde sistem kabul edilebilirlik şartları sistemin uyarlık denklemlerinden türetilir. A-tipi kaynakların (gerilim kaynakları) zorlamaları sistem kabul edilebilirlik şartları içinde ele alınır.

Bölüm 3'de sunulan Hamilton prensibinin alternatif ifadesinin genelleştirilmiş hali aşağıdaki gibi olup, bundan sonra Hamilton prensibinin *integral akım değişkeni formu* olarak anılacaktır.

Hamilton Prensibi – İntegral Akım Değişkeni Formu:

Bir dinamik sistem t_1 *zamanında sabit bir konfigürasyondan* t_2 *zamanında başka bir sabit konfigürasyona giderken yaptığı tabii hareketten olan rastgele, kabul edilebilir, küçük varyasyonlar için aşağıdaki Hamilton integralini sıfır yapar.*

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\sum_j (E_T^*)_j-\sum_k (E_A)_k\right)+\sum_i \delta W_i\right]dt \tag{4.2}$$

Burada terimler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\sum_j \left[E_T^*(f_T)\right]_j$: Sistemdeki T-tipi enerji depolayan elemanların akım değişkenleri cinsinden yazılan ko-enerjileri.

$\sum_k \left[E_A(h_A)\right]_k$: Sistemdeki A-tipi enerji depolayan elemanların integral akım değişkenleri cinsinden yazılan enerjileri.

$\sum_i \delta W_i = v_i(h_i)\delta h_i$: D-tipi elemanların gerilim değişkenleri ve integral akım değişkenlerinin varyasyonları cinsinden iş terimleri (gerilim değişkenleri elemanların yapısal ilişkileri kullanılarak integral akım değişkenleri cinsinden ifade edilecek)

A-tipi kaynakların kaynak fonksiyonları ve integral akım değişkenlerinin varyasyonları cinsinden iş terimleri.

Yukarıdaki ifade belli enerji türüne sahip bir sistem için kullanılırken genelleştirilmiş değişkenlerin simgeleri yerine fiziksel sistemin karşılık gelen değişkenleri yazılır. Bu yöntemde sistem kabul edilebilirlik şartları sistemin süreklilik denklemlerinden türetilir. T-tipi kaynakların (akım kaynakları) zorlamaları sistem kabul edilebilirlik şartları içinde ele alınır.

Bir enerji kapılı saf elemanların *İntegral Gerilim Değişkeni Formu* ve *İntegral Akım Değişkeni Formu* halindeki Hamilton integrallerine katkıları Çizelge 4.1'de liste halinde verilmiştir.

Çizelge 4.1 Bir Enerji Kapılı Saf ve Lineer Elemanlar

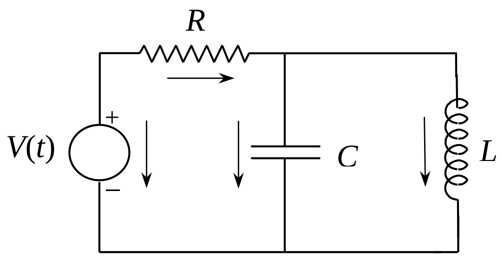
Eleman Tipi	Fiziksel Eleman	Yapısal İlişki	Hamilton İntegraline Katkı (İntegral Gerilim Değişkeni Formu)	Hamilton İntegraline Katkı (İntegral Akım Değişkeni Formu)
T-Tipi, Enerji Depolayan (Endüktif)	Öteleme Yayı	$x_{21} = \frac{1}{k}F$	$E_T = \frac{1}{2}k{x_{21}}^2$	$E_T^* = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$
	Dönel Yay	$\theta_{21} = \frac{1}{k_t}T$	$E_T = \frac{1}{2}k_t{\theta_{21}}^2$	$E_T^* = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k_t}$
	Endüktans	$\lambda_{21} = Li$	$E_T = \frac{1}{2}\frac{{\lambda_{21}}^2}{L}$	$E_T^* = \frac{1}{2}Li^2$
	Akışkan İnertansı	$\Gamma_{21} = IQ$	$E_T = \frac{1}{2}\frac{{\Gamma_{21}}^2}{I}$	$E_T^* = \frac{1}{2}IQ^2$
A-Tipi, Enerji Depolayan (Kapasitif)	Kütle	$p = mv$	$E_A^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$E_A = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$
	Dönel Kütle	$h = J\omega$	$E_A^* = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$	$E_A = \frac{1}{2}\frac{h^2}{J}$
	Elektrik Kapasitansı	$q = Cv_{21}$	$E_A^* = \frac{1}{2}C{v_{21}}^2$	$E_A = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
	Akışkan Kapasitansı	$\upsilon = C_f p$	$E_A^* = \frac{1}{2}C_f p^2$	$E_A = \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{C_f}$
	Isıl Kapasitans	$\kappa = C_t T$	$E_A^* = \frac{1}{2}C_t T^2$	$E_A = \frac{1}{2}\frac{\kappa^2}{C_t}$
D-Tipi, Enerjiyi Isıya Dönüştüren (Direnç)	Öteleme Sönümleyici	$F = bv_{21}$	$\delta W = -bv_{21}\delta x_{21}$	$\delta W = -\frac{F}{b}\delta p$
	Dönel Sönümleyici	$T = b_t\omega_{21}$	$\delta W = -b_t\omega_{21}\delta\theta_{21}$	$\delta W = -\frac{T}{b_t}\delta h$
	Elektrik Direnci	$i = \frac{1}{R}v_{21}$	$\delta W = -\frac{v_{21}}{R}\delta\lambda_{21}$	$\delta W = -iR\delta q$
	Akışkan Direnci	$Q = \frac{1}{R_f}p_{21}$	$\delta W = -\frac{p_{21}}{R_f}\delta\Gamma_{21}$	$\delta W = -QR_f\delta\upsilon$
	Isıl Direnç	$Q_h = \frac{1}{R_t}T_{21}$	$\delta W = -\frac{T_{21}}{R_t}\delta\gamma_{21}$	$\delta W = -QR_t\delta\kappa$
Gerilim Kaynağı (*A*-Tipi)*	Hız Kaynağı	$v_{21} = v(t)$	-	$\delta W = v(t)\delta p$
	Açısal Hız Kaynağı	$\omega = \omega(t)$	-	$\delta W = \omega(t)\delta h$
	Voltaj Kaynağı	$v_{21} = V(t)$	-	$\delta W = V(t)\delta q$
	Basınç Kaynağı	$p = p(t)$	-	$\delta W = p(t)\delta\upsilon$
	Sıcaklık Kaynağı	$T = T(t)$		$\delta W = T(t)\delta\kappa$
Akım Kaynağı (*T*-Tipi)*	Kuvvet Kaynağı	$F = F(t)$	$\delta W = F(t)\delta x$	-
	Moment Kaynağı	$T = T(t)$	$\delta W = T(t)\delta\theta$	-
	Akım Kaynağı	$i = i(t)$	$\delta W = i(t)\delta\lambda_{21}$	-
	Debi Kaynağı	$Q = Q(t)$	$\delta W = Q(t)\delta\Gamma_{21}$	-
	Isı Debisi Kaynağı	$Q_h = Q_h(t)$	$\delta W = Q_h(t)\delta\gamma$	-

* Akımın pozitif yönü, gerilimin pozitif kabul edilen düşüş yönüyle aynı ise δW negatif, aksi yönde ise pozitiftir.

4.2 Örnekler

Örnek 1: Elektrik Sistemi

Şekil 4.1'de verilen elektrik devresinin dinamik denklemlerini Hamilton integralinin her iki formu için bulalım. Önce devre üzerinde akım değişkenlerinin pozitif akış ve gerilim değişkenlerinin pozitif düşüş yönlerini tanımlamak için yönlendirme okları koyalım.



Şekil 4.1

i) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral gerilim değişkeni formunu kullanarak bulunması:

Sistem elemanları:	Kapasitans:	C
	Endüktans:	L
	Direnç:	R
	Gerilim kaynağı:	$V(t)$

Ko-enerji terimleri:

$$E_C^* = \frac{1}{2} C v_C^{\ 2} \tag{4.3}$$

Enerji terimleri:

$$E_L = \frac{1}{2} \frac{\lambda_L^{\ 2}}{L} \tag{4.4}$$

İş terimleri:

$$\delta W_R = -\frac{v_R}{R} \delta\lambda_R \tag{4.5}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$v_C = \dot{\lambda}_C \qquad v_L = \dot{\lambda}_L \qquad v_R = \dot{\lambda}_R \tag{4.6}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$v_R + v_C - V(t) = 0 \qquad v_C - v_L = 0 \tag{4.7}$$

Hamilton integrali:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}Cv_C^2-\frac{1}{2L}\lambda_L^2\right)-\frac{v_R}{R}\delta\lambda_R\right]dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[Cv_C\delta v_C-\frac{1}{L}\lambda_L\delta\lambda_L-\frac{v_R}{R}\delta\lambda_R\right]dt \quad (4.8)$$

Eleman ve sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa,

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[C\dot{\lambda}_C\delta\dot{\lambda}_C-\frac{1}{L}\lambda_C\delta\lambda_C-\frac{V(t)-\dot{\lambda}_C}{R}(-\delta\lambda_C)\right]dt \quad (4.9)$$

bulunur. Birinci terimin kısmi integrali alınır, t_1 ve t_2'de varyasyonların sıfır olduğu dikkate alınır ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[-C\ddot{\lambda}_C-\frac{1}{L}\lambda_C-\frac{1}{R}\dot{\lambda}_C+\frac{1}{R}V(t)\right]\delta\lambda_C dt=0 \quad \text{(Rastgele } \delta\lambda_C \text{ için.)} \quad (4.10)$$

Bu ifadenin rastgele $\delta\lambda_C$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadenin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifade sıfıra eşitlenir ve terimler düzenlenirse dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$RCL\ddot{\lambda}_C+L\dot{\lambda}_C+R\lambda_C=LV(t) \quad (4.11)$$

Dinamik denklem eleman kabul edilebilirlik şartı kullanılarak v_C cinsinden de yazılabilir:

$$RCL\ddot{v}_C+L\dot{v}_C+Rv_C=L\dot{V}(t) \quad (4.12)$$

ii) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral akım değişkeni formunu kullanarak bulunması:

Sistem elemanları:	Kapasitans:	*C*
	Endüktans:	*L*
	Direnç:	*R*
	Gerilim kaynağı:	*V*(*t*)

Ko-enerji terimleri:

$$E_L^*=\frac{1}{2}Li_L^2 \quad (4.13)$$

Enerji terimleri:

$$E_C=\frac{1}{2}\frac{q_C^2}{C} \quad (4.14)$$

İş terimleri:

$$\delta W_R=-Ri_R\delta q_R \quad (4.15)$$

$$\delta W_V=-V(t)\delta q_V \quad (4.16)^1$$

[1]Kabul edilen i_V yönü için kaynak elemanı *tarafından* yapılan iş negatif işaretlidir.

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$i_C = \dot{q}_C \qquad i_L = \dot{q}_L \qquad i_R = \dot{q}_R \qquad i_V = \dot{q}_V \tag{4.17}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$i_R + i_V = 0 \qquad i_R - i_C - i_L = 0 \tag{4.18}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} L i_L^2 - \frac{1}{2C} q_C^2 \right) - R i_R \delta q_R - V(t)\delta q_V \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L i_L \delta i_L - \frac{1}{C} q_C \delta q_C - R i_R \delta q_R - V(t)\delta q_V \right] dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

Eleman ve sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa,

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[L\dot{q}_L \delta\dot{q}_L - \frac{1}{C} q_C \delta q_C - R(\dot{q}_C + \dot{q}_L)(\delta q_C + \delta q_L) - V(t)(-\delta q_C - \delta q_L) \right] dt \tag{4.20}$$

bulunur. Birinci terimin kısmi integrali alınır, t_1 ve t_2'de varyasyonların sıfır olduğu dikkate alınır ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-L\ddot{q}_L - R\dot{q}_C - R\dot{q}_L + V(t) \right] \delta q_L + \left[-\frac{1}{C} q_C - R\dot{q}_C - R\dot{q}_L + V(t) \right] \delta q_C \right\} dt = 0$$

(Rastgele δq_L ve δq_C için.) (4.21)

Bu ifadenin rastgele δq_L ve δq_C için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantezlerin içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenir ve terimler düzenlenirse dinamik denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

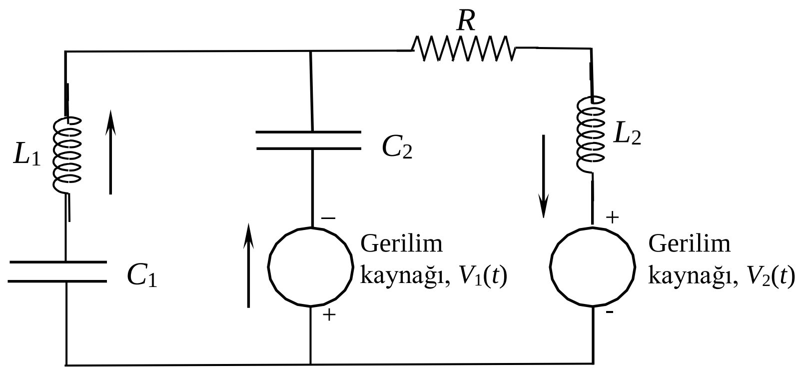
$$L\ddot{q}_L + R\dot{q}_L + R\dot{q}_C = V(t) \tag{4.22}$$

$$RC\dot{q}_C + q_C + RC\dot{q}_L = CV(t) \tag{4.23}$$

Bu sistemin daha önce v_C cinsinden bulunan dinamik denklemi (denklem 4.12) yukarıda verilen dinamik denklemlerden de kolayca bulunabilir. Denklem (4.22) ve denklem (4.23)'den q_L yok edilirse ve *C*'nin yapısal ilişkisi kullanılırsa, denklem (4.12) elde edilir.

Örnek 2: Elektrik Sistemi

Şekil 4.2'de verilen sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibiyle bulalım. Şekilde kolların yanındaki oklar akım değişkeninin pozitif akış yönlerini ve gerilim değişkeninin pozitif düşüş yönlerini göstermektedir.



Şekil 4.2

i) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral gerilim değişkeni formunu kullanarak bulunması:

Sistem elemanları:	Kapasitanslar:	C_1, C_2
	Endüktanslar:	L_1, L_2
	Direnç,	R
	Gerilim kaynakları:	$V_1(t)$, $V_2(t)$

Ko-enerji terimleri:

$$E^*_{C1} = \frac{1}{2} C_1 v_{C1}{}^2 \tag{4.24}$$

$$E^*_{C2} = \frac{1}{2} C_2 v_{C2}{}^2 \tag{4.25}$$

Enerji terimleri:

$$E_{L1} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{L1}{}^2}{L_1} \tag{4.26}$$

$$E_{L2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{L2}{}^2}{L_2} \tag{4.27}$$

İş terimleri:

$$\delta W_R = -\frac{v_R}{R} \delta\lambda_R \tag{4.28}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$v_{C1} = \dot{\lambda}_{C1} \qquad v_{C2} = \dot{\lambda}_{C2} \qquad v_{L1} = \dot{\lambda}_{L1} \qquad v_{L2} = \dot{\lambda}_{L2} \qquad v_R = \dot{\lambda}_R \tag{4.29}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$v_{C1} + v_{L1} - v_{C2} - V_1(t) = 0 \tag{4.30}$$

$$v_{C1} + v_{L1} + v_R + v_{L2} + V_2(t) = 0 \tag{4.31}$$

Denklemler (4.29), (4.30) ve (4.31)'den aşağıdaki ifadeler de yazılabilir:

$$v_{C1} = V_1(t) + v_{C2} - v_{L1} \tag{4.32}$$

$$\dot{\lambda}_{C1} = V_1(t) + \dot{\lambda}_{C2} - \dot{\lambda}_{L1} \tag{4.33}$$

$$\delta\dot{\lambda}_{C1} = \delta\dot{\lambda}_{C2} - \delta\dot{\lambda}_{L1} \tag{4.34}$$

$$v_R = -V_2(t) - v_{L2} - v_{C2} - V_1(t) \tag{4.35}$$

$$\dot{\lambda}_R = -V_2(t) - \dot{\lambda}_{L2} - \dot{\lambda}_{C2} - V_1(t) \tag{4.36}$$

$$\delta\lambda_R = -\delta\lambda_{L2} - \delta\lambda_{C2} \tag{4.37}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} C_1 v_{C1}{}^2 + \frac{1}{2} C_2 v_{C2}{}^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda_{L1}{}^2}{L_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_{L2}{}^2}{L_2} \right) - \frac{v_R}{R}\delta\lambda_R \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[C_1 v_{C1}\delta v_{C1} + C_2 v_{C2}\delta v_{C2} - \frac{1}{L_1}\lambda_{L1}\delta\lambda_{L1} - \frac{1}{L_2}\lambda_{L2}\delta\lambda_{L2} - \frac{v_R}{R}\delta\lambda_R \right] dt \end{aligned} \tag{4.38}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa,

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[C_1 \dot{\lambda}_{C1}\delta\dot{\lambda}_{C1} + C_2 \dot{\lambda}_{C2}\delta\dot{\lambda}_{C2} - \frac{1}{L_1}\lambda_{L1}\delta\lambda_{L1} - \frac{1}{L_2}\lambda_{L2}\delta\lambda_{L2} - \frac{\dot{\lambda}_R}{R}\delta\lambda_R \right] dt \tag{4.39}$$

olur. Denklemler (4.33), (4.34), (4.36) ve (4.37) ile verilen sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} C_1\left[V_1(t) + \dot{\lambda}_{C2} - \dot{\lambda}_{L1}\right](\delta\dot{\lambda}_{C2} - \delta\dot{\lambda}_{L1}) + C_2\dot{\lambda}_{C2}\delta\dot{\lambda}_{C2} - \frac{1}{L_1}\lambda_{L1}\delta\lambda_{L1} \\ -\frac{1}{L_2}\lambda_{L2}\delta\lambda_{L2} - \frac{1}{R}\left[V_2(t) + \dot{\lambda}_{L2} + \dot{\lambda}_{C2} + V_1(t)\right](\delta\lambda_{L2} + \delta\lambda_{C2}) \end{bmatrix} dt \tag{4.40}$$

Türevli varyasyon içeren terimlerin kısmi integrali alınırsa aşağıdaki denklemler bulunur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} -C_1\frac{d}{dt}\left[V_1(t) + \dot{\lambda}_{C2} - \dot{\lambda}_{L1})(\delta\lambda_{C2} - \delta\lambda_{L1}\right] - C_2\frac{d}{dt}(\dot{\lambda}_{C2})\delta\lambda_{C2} - \frac{1}{L_1}\lambda_{L1}\delta\lambda_{L1} \\ -\frac{1}{L_2}\lambda_{L2}\delta\lambda_{L2} - \frac{1}{R}\left[V_2(t) + \dot{\lambda}_{L2} + \dot{\lambda}_{C2} + V_1(t)\right](\delta\lambda_{L2} + \delta\lambda_{C2}) \end{bmatrix} dt \tag{4.41}$$

Terimler düzenlenip Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{aligned} &\left[-C_1 \frac{d}{dt}(V_1(t) + \dot{\lambda}_{C2} - \dot{\lambda}_{L1}) - C_2 \frac{d}{dt}(\dot{\lambda}_{C2}) - \frac{1}{R}\left(V_2(t) + \dot{\lambda}_{L2} + \dot{\lambda}_{C2} + V_1(t)\right) \right] \delta\lambda_{C2} \\ &+ \left[C_1 \frac{d}{dt}(V_1(t) + \dot{\lambda}_{C2} - \dot{\lambda}_{L1}) - \frac{1}{L_1}\lambda_{L1} \right] \delta\lambda_{L1} \\ &+ \left[-\frac{1}{R}\left(V_2(t) + \dot{\lambda}_{L2} + \dot{\lambda}_{C2} + V_1(t)\right) - \frac{1}{L_2}\lambda_{L2} \right] \delta\lambda_{L2} \end{aligned} \right\} dt = 0$$

(Rastgele $\delta\lambda_{C2}$, $\delta\lambda_{L1}$ ve $\delta\lambda_{L2}$ için.) (4.42)

Bu ifadenin rastgele $\delta\lambda_{C2}$, $\delta\lambda_{L1}$ ve $\delta\lambda_{L2}$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse üç adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$C_1 \frac{d}{dt}\left[V_1(t) + \dot{\lambda}_{C2} - \dot{\lambda}_{L1}\right] + C_2 \frac{d}{dt}(\dot{\lambda}_{C2}) + \frac{1}{R}\left[V_2(t) + \dot{\lambda}_{L2} + \dot{\lambda}_{C2} + V_1(t)\right] = 0 \quad (4.43)$$

$$C_1 \frac{d}{dt}\left[V_1(t) + \dot{\lambda}_{C2} - \dot{\lambda}_{L1}\right] - \frac{1}{L_1}\lambda_{L1} = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{1}{R}\left[V_2(t) + \dot{\lambda}_{L2} + \dot{\lambda}_{C2} + V_1(t)\right] + \frac{1}{L_2}\lambda_{L2} = 0 \quad (4.45)$$

Denklem (4.45)'den $\dot{\lambda}_{C2}$ aşağıdaki gibi çözülürse,

$$\dot{\lambda}_{C2} = -\frac{R}{L_2}\lambda_{L2} - V_1(t) - V_2(t) - \dot{\lambda}_{L2} \quad (4.46)$$

bulunur ve bu ifade diğer iki denklemde yerine koyulursa dinamik denklemler iki değişken cinsinden aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{aligned} &C_1 \frac{d}{dt}\left[\dot{\lambda}_{L1} + \dot{\lambda}_{L2} + \frac{R}{L_2}\lambda_{L2} + V_2(t) \right] \\ &+ C_2 \frac{d}{dt}\left[\dot{\lambda}_{L2} + \frac{R}{L_2}\lambda_{L2} + V_1(t) + V_2(t) \right] + \frac{1}{L_2}\lambda_{L2} = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$C_1 \frac{d}{dt}\left[\dot{\lambda}_{L1} + \dot{\lambda}_{L2} + \frac{R}{L_2}\lambda_{L2} + V_2(t) \right] + \frac{1}{L_1}\lambda_{L1} = 0 \quad (4.48)$$

ii) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral akım değişkeni formunu kullanarak bulunması:

Sistem elemanları: Kapasitanslar: C_1, C_2
Endüktanslar: L_1, L_2
Direnç: R
Gerilim kaynakları: $V_1(t), V_2(t)$

Ko-enerji terimleri:

$$E_{L1}^* = \frac{1}{2} L_1 i_{L1}^2 \tag{4.49}$$

$$E_{L2}^* = \frac{1}{2} L_2 i_{L2}^2 \tag{4.50}$$

Enerji terimleri:

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \frac{q_{C1}^2}{C_1} \tag{4.51}$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \frac{q_{C2}^2}{C_2} \tag{4.52}$$

İş terimleri:

$$\delta W_R = -R i_R \delta q_R \tag{4.53}$$

$$\delta W_{V1} = -V_1(t) \delta q_{V1} \qquad (4.54)^1$$

$$\delta W_{V2} = -V_2(t) \delta q_{V2} \qquad (4.55)^1$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{aligned} &i_{C1} = \dot{q}_{C1} \quad i_{C2} = \dot{q}_{C2} \quad i_{L1} = \dot{q}_{L1} \quad i_{L2} = \dot{q}_{L2} \\ &i_R = \dot{q}_R \quad\;\; i_{V1} = \dot{q}_{V1} \quad i_{V2} = \dot{q}_{V2} \end{aligned} \tag{4.56}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$i_R = i_{L2} \qquad i_{L2} = i_{V2} \qquad i_{C2} = i_{V1} \qquad i_{C1} = i_{L1} \qquad i_{L1} + i_{C2} - i_{L2} = 0 \tag{4.57}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \left(\frac{1}{2} L_1 i_{L1}^2 + \frac{1}{2} L_2 i_{L2}^2 - \frac{1}{2} \frac{q_{C1}^2}{C_1} - \frac{1}{2} \frac{q_{C2}^2}{C_2} \right) - R i_R \delta q_R - V_1(t) \delta q_{V1} - V_2(t) \delta q_{V2} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L_1 i_{L1} \delta i_{L1} + L_2 i_{L2} \delta i_{L2} - \frac{1}{C_1} q_{C1} \delta q_{C1} - \frac{1}{C_2} q_{C2} \delta q_{C2} - R i_R \delta q_R - V_1(t) \delta q_{V1} - V_2(t) \delta q_{V2} \right] dt \end{aligned} \tag{4.58}$$

[1]Kabul edilen akım yönleri için kaynak elemanları *tarafından* yapılan işler negatif işaretlidir.

Eleman ve sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa,

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} L_1 \dot{q}_{L1} \delta\dot{q}_{L1} + L_2 \dot{q}_{L2} \delta\dot{q}_{L2} - \dfrac{1}{C_1} q_{L1} \delta q_{L1} - \dfrac{1}{C_2} (q_{L2} - q_{L1})(\delta q_{L2} - \delta q_{L1}) \\ - R\dot{q}_{L2} \delta q_{L2} - V_1(t)(\delta q_{L2} - \delta q_{L1}) - V_2(t) \delta q_{L2} \end{bmatrix} dt \quad (4.59)$$

bulunur. Birinci ve ikinci terimlerin kısmi integralleri alınır, t_1 ve t_2'de varyasyonların sıfır olduğu dikkate alınır ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \left[-L_1 \ddot{q}_{L1} - \dfrac{1}{C_1} q_{L1} + \dfrac{1}{C_2} (q_{L2} - q_{L1}) + V_1(t) \right] \delta q_{L1} \\ + \left[-L_2 \ddot{q}_{L2} - \dfrac{1}{C_2} (q_{L2} - q_{L1}) - R\dot{q}_{L2} - V_1(t) - V_2(t) \right] \delta q_{L2} \end{array} \right\} dt = 0$$

(Rastgele δq_{L1} ve δq_{L2} için.) (4.60)

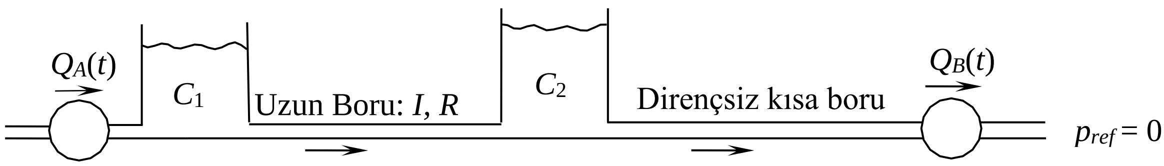
Bu ifadenin rastgele δq_L ve δq_C için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantezlerin içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenir ve terimler düzenlenirse integral akım değişkenleri cinsinden dinamik denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

$$L_1 \ddot{q}_{L1} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q_{L1} - \frac{1}{C_2} q_{L2} - V_1(t) = 0 \quad (4.61)$$

$$L_2 \ddot{q}_{L2} + R\dot{q}_{L2} + \frac{1}{C_2} q_{L2} - \frac{1}{C_2} q_{L1} + V_1(t) + V_2(t) = 0 \quad (4.62)$$

Örnek 3: Akışkanlı Sistem

Şekil 4.3'de akışkanlı bir sistem verilmiştir. Oklar debilerin pozitif kabul edilen akış yönlerini ve basınçların pozitif kabul edilen düşme yönlerini göstermektedir.



Şekil 4.3

i) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral gerilim değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C_1 ve C_2 tanklarının tabanındaki basınçlar sırasıyla p_1 ve p_2; uzun borudaki inertans ve direncin arasındaki sanal birleşim noktasındaki basınç ise p_3 olsun. Bu değişkenlerin integralleri ise sırasıyla Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 olarak tanımlansın.

Sistem elemanları:	Açık tank kapsitansları:	C_1, C_2
	Boru direnci:	R
	Boru inertansı:	I
	Akım kaynakları:	$Q_A(t)$, $Q_B(t)$

Ko-enerji terimleri:

$$E^*_{C1} = \frac{1}{2} C_1 p_1^{\ 2} = \frac{1}{2} C_1 \dot{\Gamma}_1^{\ 2} \tag{4.63}$$

$$E^*_{C2} = \frac{1}{2} C_2 p_2^{\ 2} = \frac{1}{2} C_2 \dot{\Gamma}_2^{\ 2} \tag{4.64}$$

Enerji terimleri:

$$E_I = \frac{1}{2} \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_3)^2}{I} \tag{4.65}$$

İş terimleri:

$$\delta W_R = -\frac{p_R}{R} \delta\Gamma_R = -\frac{(p_3 - p_2)}{R} \delta(\Gamma_3 - \Gamma_2) = -\frac{(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2)}{R} \delta(\Gamma_3 - \Gamma_2) \tag{4.66}$$

$$\delta W_{QA} = Q_A(t) \delta\Gamma_1 \tag{4.67}$$

$$\delta W_{QB} = -Q_B(t) \delta\Gamma_2 \tag{4.68}$$

İntegral gerilim değişkenlerinin tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$p_1 = \dot{\Gamma}_1 \qquad p_2 = \dot{\Gamma}_2 \qquad p_3 = \dot{\Gamma}_3 \tag{4.69}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

Düğümlerdeki gerilim değerleri kullanıldığından ve bunlardan herhangi birini sınırlayan bir gerilim kaynağı olmadığından ek bir kabul edilebilirlik şartı kullanılmasına gerek yoktur.

Hamilton integrali:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} \delta\left(\frac{1}{2} C_1 \dot{\Gamma}_1^{\ 2} + \frac{1}{2} C_2 \dot{\Gamma}_2^{\ 2} - \frac{1}{2I} (\Gamma_1 - \Gamma_3)^2 \right) \\ -\frac{1}{R} (\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2) \delta(\Gamma_3 - \Gamma_2) + Q_A(t) \delta\Gamma_1 - Q_B(t) \delta\Gamma_2 \end{bmatrix} dt \tag{4.70}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa integral ifade aşağıdaki gibi olur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} C_1\dot{\Gamma}_1\delta\dot{\Gamma}_1 + C_2\dot{\Gamma}_2\delta\dot{\Gamma}_2 - \frac{1}{I}(\Gamma_1 - \Gamma_3)(\delta\Gamma_1 - \delta\Gamma_3) \\ -\frac{1}{R}(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2)(\delta\Gamma_3 - \delta\Gamma_2) + Q_A(t)\delta\Gamma_1 - Q_B(t)\delta\Gamma_2 \end{bmatrix} dt \tag{4.71}$$

Varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{aligned} &\left[-C_1\ddot{\Gamma}_1 - \frac{1}{I}(\Gamma_1 - \Gamma_3) + Q_A(t) \right]\delta\Gamma_1 \\ &+ \left[-C_2\ddot{\Gamma}_2 + \frac{1}{R}(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2) - Q_B(t) \right]\delta\Gamma_2 \\ &+ \left[\frac{1}{I}(\Gamma_1 - \Gamma_3) - \frac{1}{R}(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2) \right]\delta\Gamma_3 \end{aligned} \right\} dt = 0$$

(Rastgele $\delta\Gamma_1$, $\delta\Gamma_2$ ve $\delta\Gamma_3$ için.) (4.72)

Bu ifadenin rastgele $\delta\Gamma_1$, $\delta\Gamma_2$ ve $\delta\Gamma_3$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse üç adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$C_1\ddot{\Gamma}_1 + \frac{1}{I}\Gamma_1 - \frac{1}{I}\Gamma_3 - Q_A(t) = 0 \tag{4.73}$$

$$C_2\ddot{\Gamma}_2 + \frac{1}{R}\dot{\Gamma}_2 - \frac{1}{R}\dot{\Gamma}_3 + Q_B(t) = 0 \tag{4.74}$$

$$\frac{1}{I}\Gamma_1 + \frac{1}{R}\dot{\Gamma}_2 - \frac{1}{I}\Gamma_3 - \frac{1}{R}\dot{\Gamma}_3 = 0 \tag{4.75}$$

Eğer $s = d/dt$ operatörü tanımlanarak denklem (4.75)'den Γ_3 bulunur ve denklemler (4.73) ve (4.74)'de yerine koyulursa, dinamik denklemler Γ_1 ve Γ_2 cinsinden aşağıdaki iki denkleme de indirgenebilir.

$$IC_1\dddot{\Gamma}_1 + C_1R\ddot{\Gamma}_1 + \dot{\Gamma}_1 - \dot{\Gamma}_2 - I\dot{Q}_A(t) - RQ_A(t) = 0 \tag{4.76}$$

$$IC_2\dddot{\Gamma}_2 + C_2R\ddot{\Gamma}_2 + \dot{\Gamma}_2 - \dot{\Gamma}_1 + I\dot{Q}_B(t) + RQ_B(t) = 0 \tag{4.77}$$

Denklemler (4.69) kullanılırsa dinamik denklemler gerilim değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$IC_1\ddot{p}_1 + C_1R\dot{p}_1 + p_1 - p_2 - I\dot{Q}_A(t) - RQ_A(t) = 0 \tag{4.78}$$

$$IC_2\ddot{p}_2 + C_2R\dot{p}_2 + p_2 - p_1 + I\dot{Q}_B(t) + RQ_B(t) = 0 \tag{4.79}$$

ii) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral akım değişkeni formunu kullanarak bulunması:

Sistem elemanları:	Açık tank kapsitansları:	C_1, C_2
	Boru direnci:	R
	Boru inertansı:	I
	Akım kaynakları:	$Q_A(t)$, $Q_B(t)$

Ko-enerji terimleri:

$$E_T^* = \frac{1}{2} I Q_I^{\ 2} \tag{4.80}$$

Enerji terimleri:

$$E_A = \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C1}^2}{C_1} \tag{4.81}$$

$$E_A = \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C2}^2}{C_2} \tag{4.82}$$

İş terimleri:

$$\delta W_R = -Q_R R \delta\upsilon_R \tag{4.83}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{aligned} &Q_{C1} = \dot{\upsilon}_{C1} \quad Q_{C2} = \dot{\upsilon}_{C2} \quad Q_I = \dot{\upsilon}_I \quad Q_R = \dot{\upsilon}_R \\ &Q_A(t) = \dot{\upsilon}_A \quad Q_B(t) = \dot{\upsilon}_B \end{aligned} \tag{4.84}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$Q_A(t) = Q_{C1} + Q_I \qquad Q_R = Q_I \qquad Q_R = Q_{C2} + Q_B(t) \tag{4.85}$$

Hamilton integrali:

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} I \dot{\upsilon}_I^2 - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C1}^2}{C_1} - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C2}^2}{C_2} \right) - R\dot{\upsilon}_R \delta\upsilon_R \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[I\dot{\upsilon}_I \delta\dot{\upsilon}_I - \frac{1}{C_1}\upsilon_{C1}\delta\upsilon_{C1} - \frac{1}{C_2}\upsilon_{C2}\delta\upsilon_{C2} - R\dot{\upsilon}_R\delta\upsilon_R \right] dt \end{aligned} \tag{4.86}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartlarından,

$$\left.\begin{array}{l} Q_I = Q_A(t) - Q_{C1} \quad Q_R = Q_A(t) - Q_{C1} \\ Q_{C2} = Q_A(t) - Q_B(t) - Q_{C1} \end{array}\right\} \tag{4.87}$$

ya da,

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\upsilon}_I = Q_A(t) - \dot{\upsilon}_{C1} \quad \dot{\upsilon}_R = Q_A(t) - \dot{\upsilon}_{C1} \\ \dot{\upsilon}_{C2} = Q_A(t) - Q_B(t) - \dot{\upsilon}_{C1} = \dot{\upsilon}_A - \dot{\upsilon}_B - \dot{\upsilon}_{C1} \\ \delta\dot{\upsilon}_I = -\delta\dot{\upsilon}_{C1} \qquad \delta\upsilon_{C2} = -\delta\upsilon_{C1} \qquad \delta\upsilon_R = -\delta\upsilon_{C1} \end{array}\right\} \tag{4.88}$$

olduğundan Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} -I\left[Q_A(t) - \dot{\upsilon}_{C1}\right]\delta\dot{\upsilon}_{C1} - \dfrac{1}{C_1}\upsilon_{C1}\delta\upsilon_{C1} \\ + \dfrac{1}{C_2}\left[\upsilon_A - \upsilon_B - \upsilon_{C1}\right]\delta\upsilon_{C1} + R\left[Q_A(t) - \dot{\upsilon}_{C1}\right]\delta\upsilon_{C1} \end{array} \right\} dt \tag{4.89}$$

Birinci terimin kısmi integrali alınır, t_1 ve t_2'de varyasyonların sıfır olduğu dikkate alınır ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[\begin{array}{l} I\left[\dot{Q}_A(t) - \ddot{\upsilon}_{C1}\right] - \dfrac{1}{C_1}\upsilon_{C1} \\ + \dfrac{1}{C_2}\left[\upsilon_A - \upsilon_B - \upsilon_{C1}\right] + R\left[Q_A(t) - \dot{\upsilon}_{C1}\right] \end{array} \right] \delta\upsilon_{C1} dt = 0$$

(Rastgele $\delta\upsilon_{C1}$ için.) (4.90)

Bu ifadenin rastgele $\delta\upsilon_{C1}$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantezin içindeki ifadenin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifade sıfıra eşitlenir, terimler düzenlenir ve denklemin türevi alınırsa, integral akım değişkeni υ_{C1} cinsinden dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{array}{l} I\dddot{\upsilon}_{C1} + R\ddot{\upsilon}_{C1} + \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)\dot{\upsilon}_{C1} \\ - I\ddot{Q}_A(t) - R\dot{Q}_A(t) - \dfrac{1}{C_2}Q_A(t) + \dfrac{1}{C_2}Q_B(t) = 0 \end{array} \tag{4.91}$$

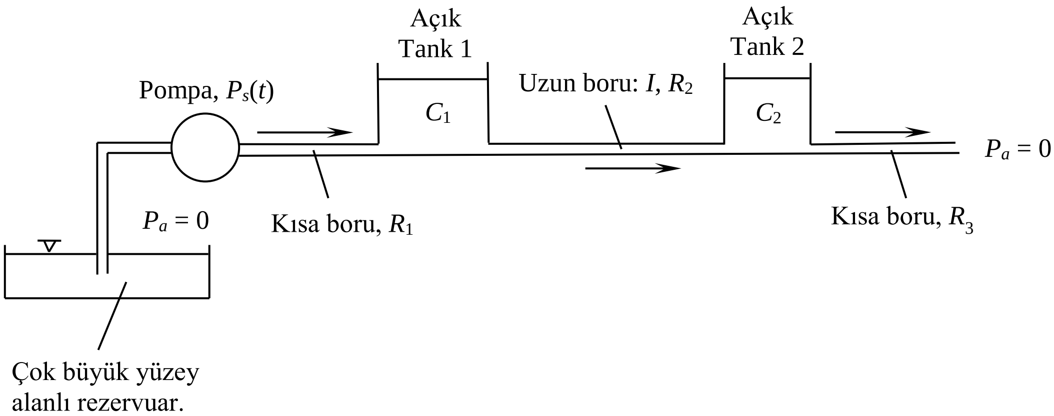
Yukarıdaki denklemde (4.84) kullanılırsa dinamik denklem akım değişkeni Q_{C1} cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{array}{l} I\ddot{Q}_{C1} + R\dot{Q}_{C1} + \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)Q_{C1} \\ - I\ddot{Q}_A(t) - R\dot{Q}_A(t) - \dfrac{1}{C_2}Q_A(t) + \dfrac{1}{C_2}Q_B(t) = 0 \end{array} \tag{4.92}$$

Bu örnekteki sistem için elde edilen denklemler (4.76)-(4.79) ve (4.92) incelendiğinde, denklemlerde dış zorlamaların birinci ve ikinci mertebe türevlerinin yer aldığı, sistem mertebesinin seçilen değişkene göre farklı olduğu görülmektedir. Bunun sebebi Γ'lar cinsinden ifade edildiğinde dejenere bir üçüncü mertebe sistem olmasıdır. Bu sistemin mekanik karşıtı yatay düzlemde öteleme hareketi yapan, aralarında seri olarak bağlı bir yay ve sönümleyici olan iki kütle ve bu kütlelere karşılıklı olarak uygulanan farklı kuvvet girişleridir. Sistemin yatay yöndeki hareketi herhangi bir eleman ile sınırlanmadığında, böyle bir sistemde kütlelerin konumlarını çözme imkanı yoktur. Ancak hızlar ve elemanlar üzerinden akan kuvvetler belirlenebilir. Bu düşünce tarzına parallel olarak, incelenen örnekte de Γ'lar çözülemez ve ancak türevleri çözülebilir.

Örnek 4: Akışkanlı Sistem

Şekil 4.4'de akışkanlı bir sistem görülmektedir. Oklar debilerin pozitif kabul edilen akış yönlerini ve basınçların pozitif kabul edilen düşme yönlerini göstermektedir.



Şekil 4.4

i) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral gerlim değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C_1 ve C_2 tanklarının tabanındaki basınçlar sırasıyla p_1 ve p_2; uzun borudaki inertans ve direncin arasındaki sanal noktadaki basınç ise p_3 olsun. Bu değişkenlerin integralleri ise sırasıyla Γ_1, Γ_2 ve Γ_3 olarak tanımlansın.

Sistem elemanları:	Açık tank kapsitansları:	C_1, C_2
	Boru dirençleri:	R_1, R_2, R_3
	Boru inertansı:	I
	Gerilim kaynağı:	$p_s(t)$

Integral gerilim değişkenlerinin tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$p_1 = \dot{\Gamma}_1 \quad p_2 = \dot{\Gamma}_2 \quad p_3 = \dot{\Gamma}_3 \tag{4.93}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

Düğümlerdeki gerilim değerleri kullanıldığından sistem kabul edilebilirlik şartı kullanılmasına gerek yoktur.

Ko-enerji terimleri:

$$E_{C1}^{*} = \frac{1}{2} C_1 p_1^{\,2} = \frac{1}{2} C_1 \dot{\Gamma}_1^{\,2} \tag{4.94}$$

$$E_{C2}^{*} = \frac{1}{2} C_2 p_2^{\,2} = \frac{1}{2} C_2 \dot{\Gamma}_2^{\,2} \tag{4.95}$$

Enerji terimleri:

$$E_I = \frac{1}{2} \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_3)^2}{I} \tag{4.96}$$

İş terimleri:

$$\delta W_{R1} = -\frac{p_{R1}}{R_1} \delta \Gamma_{R1} = -\frac{p_s(t) - p_1}{R_1} \delta(-\Gamma_1) = \frac{p_s(t) - \dot{\Gamma}_1}{R_1} \delta \Gamma_1 \tag{4.97}$$

$$\delta W_{R2} = -\frac{p_{R2}}{R_2} \delta \Gamma_{R2} = -\frac{(p_3 - p_2)}{R_2} \delta(\Gamma_3 - \Gamma_2) = -\frac{(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2)}{R_2} \delta(\Gamma_3 - \Gamma_2) \tag{4.98}$$

$$\delta W_{R3} = -\frac{p_{R3}}{R_3} \delta \Gamma_{R3} = -\frac{p_2}{R_3} \delta \Gamma_2 = -\frac{\dot{\Gamma}_2}{R_3} \delta \Gamma_2 \tag{4.99}$$

Hamilton integrali:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} \delta\left(\frac{1}{2} C_1 \dot{\Gamma}_1^{\,2} + \frac{1}{2} C_2 \dot{\Gamma}_2^{\,2} - \frac{1}{2I} (\Gamma_1 - \Gamma_3)^2 \right) \\ + \frac{\left[p_s(t) - \dot{\Gamma}_1 \right]}{R_1} \delta \Gamma_1 - \frac{(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2)}{R_2} \delta(\Gamma_3 - \Gamma_2) - \frac{\dot{\Gamma}_2}{R_3} \delta \Gamma_2 \end{bmatrix} dt \tag{4.100}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa integral ifade aşağıdaki gibi olur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} C_1 \dot{\Gamma}_1 \delta \dot{\Gamma}_1 + C_2 \dot{\Gamma}_2 \delta \dot{\Gamma}_2 - \frac{1}{I} (\Gamma_1 - \Gamma_3)(\delta \Gamma_1 - \delta \Gamma_3) \\ + \frac{\left[p_s(t) - \dot{\Gamma}_1 \right]}{R_1} \delta \Gamma_1 - \frac{(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2)}{R_2} (\delta \Gamma_3 - \delta \Gamma_2) - \frac{\dot{\Gamma}_2}{R_3} \delta \Gamma_2 \end{bmatrix} dt \tag{4.101}$$

Varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{aligned} & \left[-C_1\ddot{\Gamma}_1 - \frac{1}{I}(\Gamma_1 - \Gamma_3) + \frac{\left[p_s(t) - \dot{\Gamma}_1\right]}{R_1} \right]\delta\Gamma_1 \\ & + \left[-C_2\ddot{\Gamma}_2 + \frac{1}{R_2}(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2) - \frac{\dot{\Gamma}_2}{R_3} \right]\delta\Gamma_2 \\ & + \left[\frac{1}{I}(\Gamma_1 - \Gamma_3) - \frac{1}{R_2}(\dot{\Gamma}_3 - \dot{\Gamma}_2) \right]\delta\Gamma_3 \end{aligned} \right\} dt = 0$$

(Rastgele $\delta\Gamma_1$, $\delta\Gamma_2$ ve $\delta\Gamma_3$ için.) (4.102)

Bu ifadenin rastgele $\delta\Gamma_1$, $\delta\Gamma_2$ ve $\delta\Gamma_3$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse üç adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$C_1\ddot{\Gamma}_1 + \frac{1}{R_1}\dot{\Gamma}_1 + \frac{1}{I}\Gamma_1 - \frac{1}{I}\Gamma_3 - \frac{1}{R_1}p_s(t) = 0 \tag{4.103}$$

$$C_2\ddot{\Gamma}_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\dot{\Gamma}_2 - \frac{1}{R_2}\dot{\Gamma}_3 = 0 \tag{4.104}$$

$$\frac{1}{R_2}\dot{\Gamma}_3 + \frac{1}{I}\Gamma_3 - \frac{1}{R_2}\dot{\Gamma}_2 - \frac{1}{I}\Gamma_1 = 0 \tag{4.105}$$

Eğer denklem (4.105)'den Γ_3 bulunur ve denklemler (4.103) ve (4.104)'de yerine koyulursa, dinamik denklemler Γ_1 ve Γ_2 cinsinde aşağıdaki iki denkleme indirgenir.

$$IC_1\dddot{\Gamma}_1 + \left(R_2C_1 + \frac{I}{R_1}\right)\ddot{\Gamma}_1 + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)\dot{\Gamma}_1 - \dot{\Gamma}_2 - \frac{I}{R_1}\dot{p}_s(t) - \frac{R_2}{R_1}p_s(t) = 0 \tag{4.106}$$

$$IC_2\dddot{\Gamma}_2 + \left(R_2C_2 + \frac{I}{R_3}\right)\ddot{\Gamma}_2 + \left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right)\dot{\Gamma}_2 - \dot{\Gamma}_1 = 0 \tag{4.107}$$

Denklemler (4.93) kullanılırsa dinamik denklemler gerilim değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$IC_1\ddot{p}_1 + \left(R_2C_1 + \frac{I}{R_1}\right)\dot{p}_1 + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)p_1 - p_2 - \frac{I}{R_1}\dot{p}_s(t) - \frac{R_2}{R_1}p_s(t) = 0 \qquad (4.108)^1$$

$$IC_2\ddot{p}_2 + \left(R_2C_2 + \frac{I}{R_3}\right)\dot{p}_2 + \left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right)p_2 - p_1 = 0 \qquad (4.109)^1$$

---

[1]Bu sistem üçüncü mertebedir. Bölüm 4.2, Örnek 3'deki sistem için verilen açıklamanın benzeri bu sistem için de geçerlidir.

ii) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral akım değişkeni formunu kullanarak bulunması:

Sistem elemanları:	Açık tank kapsitansları:	C_1, C_2
	Boru dirençleri:	R_1, R_2, R_3
	Boru inertansı:	I
	Gerilim kaynağı:	$p_s(t)$

Ko-enerji terimleri:

$$E_I^* = \frac{1}{2} I Q_I^{\,2} \tag{4.110}$$

Enerji terimleri:

$$E_{C1} = \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C1}^2}{C_1} \tag{4.111}$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C2}^2}{C_2} \tag{4.112}$$

İş terimleri:

$$\delta W_{R1} = -Q_{R1} R_1 \delta\upsilon_{R1} \tag{4.113}$$

$$\delta W_{R2} = -Q_{R2} R_2 \delta\upsilon_{R2} \tag{4.114}$$

$$\delta W_{R3} = -Q_{R3} R_3 \delta\upsilon_{R3} \tag{4.115}$$

$$\delta W_s = p_s(t)\delta\upsilon_s \tag{4.116}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{aligned} &Q_{C1} = \dot{\upsilon}_{C1} \quad Q_{C2} = \dot{\upsilon}_{C2} \quad Q_I = \dot{\upsilon}_I \quad Q_{R1} = \dot{\upsilon}_{R1} \\ &Q_{R2} = \dot{\upsilon}_{R2} \quad Q_{R3} = \dot{\upsilon}_{R3} \quad Q_s = \dot{\upsilon}_s \end{aligned} \tag{4.117}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$Q_s = Q_{R1} \qquad Q_{R1} = Q_{C1} + Q_I \qquad Q_I = Q_{R2} \qquad Q_{R2} = Q_{C2} + Q_{R3} \tag{4.118}$$

Hamilton integrali:

Eleman Kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}I\dot{\upsilon}_I^2-\frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C1}^2}{C_1}-\frac{1}{2}\frac{\upsilon_{C2}^2}{C_2}\right)-\dot{\upsilon}_{R1}R_1\delta\upsilon_{R1}-\dot{\upsilon}_{R2}R_2\delta\upsilon_{R2}-\dot{\upsilon}_{R3}R_3\delta\upsilon_{R3}+p_s(t)\delta\upsilon_s\right]dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\begin{bmatrix}I\dot{\upsilon}_I\delta\dot{\upsilon}_I-\dfrac{1}{C_1}\upsilon_{C1}\delta\upsilon_{C1}-\dfrac{1}{C_2}\upsilon_{C2}\delta\upsilon_{C2}\\-\dot{\upsilon}_{R1}R_1\delta\upsilon_{R1}-\dot{\upsilon}_{R2}R_2\delta\upsilon_{R2}-\dot{\upsilon}_{R3}R_3\delta\upsilon_{R3}+p_s(t)\delta\upsilon_s\end{bmatrix}dt \qquad (4.119)$$

Sistem kabul edilebilirlik şartlarından,

$$\left.\begin{aligned}Q_{R1}&=Q_{C1}+Q_I \qquad Q_{R2}=Q_I\\Q_{R3}&=Q_I-Q_{C2} \qquad Q_s=Q_{C1}+Q_I\end{aligned}\right\} \qquad (4.120)$$

ya da,

$$\left.\begin{aligned}\upsilon_{R1}&=\upsilon_{C1}+\upsilon_I \qquad \upsilon_{R2}=\upsilon_I\\\upsilon_{R3}&=\upsilon_I-\upsilon_{C2} \qquad \upsilon_s=\upsilon_{C1}+\upsilon_I\end{aligned}\right\} \qquad (4.121)$$

yazılırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{aligned}&I\dot{\upsilon}_I\delta\dot{\upsilon}_I-\frac{1}{C_1}\upsilon_{C1}\delta\upsilon_{C1}-\frac{1}{C_2}\upsilon_{C2}\delta\upsilon_{C2}-R_1(\dot{\upsilon}_{C1}+\dot{\upsilon}_I)(\delta\upsilon_{C1}+\delta\upsilon_I)\\&-R_2\dot{\upsilon}_I\delta\upsilon_I-R_3(\dot{\upsilon}_I-\dot{\upsilon}_{C2})(\delta\upsilon_I-\delta\upsilon_{C2})+p_s(t)(\delta\upsilon_{C1}+\delta\upsilon_I)\end{aligned}\right\}dt \qquad (4.122)$$

t_1 ve t_2'de varyasyonların sıfır olduğu dikkate alınarak birinci terimin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{aligned}&\left[-I\ddot{\upsilon}_I-R_1(\dot{\upsilon}_{C1}+\dot{\upsilon}_I)-R_2\dot{\upsilon}_I-R_3(\dot{\upsilon}_I-\dot{\upsilon}_{C2})+p_s(t)\right]\delta\upsilon_I\\&+\left[-\frac{1}{C_1}\upsilon_{C1}-R_1(\dot{\upsilon}_{C1}+\dot{\upsilon}_I)+p_s(t)\right]\delta\upsilon_{C1}\\&+\left[-\frac{1}{C_2}\upsilon_{C2}+R_3(\dot{\upsilon}_I-\dot{\upsilon}_{C2})\right]\delta\upsilon_{C2}\end{aligned}\right\}dt=0$$

(Rastgele $\delta\upsilon_I$, $\delta\upsilon_{C1}$ ve $\delta\upsilon_{C2}$ için.) (4.123)

Bu ifadenin rastgele $\delta\upsilon_I$, $\delta\upsilon_{C1}$ ve $\delta\upsilon_{C2}$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantezlerin içindeki ifadelerin her birinin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenir ve terimler düzenlenirse, integral akım değişkenleri υ_I, υ_{C1} ve υ_{C2} cinsinden dinamik denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

$$I\ddot{\upsilon}_I+(R_1+R_2+R_3)\dot{\upsilon}_I+R_1\dot{\upsilon}_{C1}-R_3\dot{\upsilon}_{C2}-p_s(t)=0 \qquad (4.124)$$

$$R_1\dot{\upsilon}_I+R_1\dot{\upsilon}_{C1}+\frac{1}{C_1}\upsilon_{C1}-p_s(t)=0 \qquad (4.125)$$

$$R_3\dot{\upsilon}_I-R_3\dot{\upsilon}_{C2}-\frac{1}{C_2}\upsilon_{C2}=0 \qquad (4.126)$$

Denklemler (4.125) ve (4.126)'nın türevi alınır ve (4.117) ile verilen tanımlar kullanılırsa, dinamik denklemler akım değişkenleri Q_I , Q_{C1} ve Q_{C2} cinsinden aşağıdaki gibi de yazılabilir:

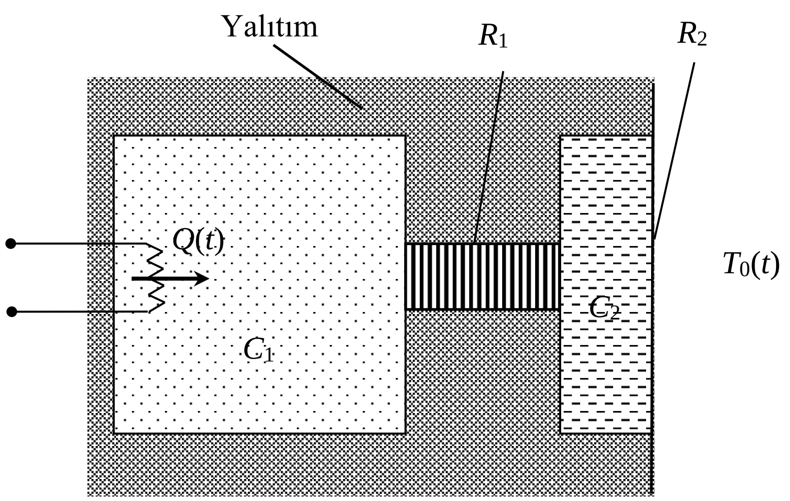
$$I\dot{Q}_I + (R_1 + R_2 + R_3)Q_I + R_1 Q_{C1} - R_3 Q_{C2} - p_s(t) = 0 \qquad (4.127)$$

$$R_1\dot{Q}_I + R_1\dot{Q}_{C1} + \frac{1}{C_1}Q_{C1} - \dot{p}_s(t) = 0 \qquad (4.128)$$

$$R_3\dot{Q}_I - R_3\dot{Q}_{C2} - \frac{1}{C_2}Q_{C2} = 0 \qquad (4.129)$$

Örnek 5: Isıl Sistem

Şekil 4.5'de C_1 ve C_2 sistemdeki iki metal bloğun ısıl kapasitansları, R_1 bloklar arasındaki ısı iletim direnci, R_2 metal blokla ortam arasındaki konveksiyon direnci, $Q(t)$ elektrikli ısıtıcının verdiği ısı debisi, $T_0(t)$ ise ortam sıcaklığıdır. Bu sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibini kullanarak bulalım.



Şekil 4.5

i) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral gerilim değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C_1 ve C_2 kapasitanslarının sıcaklıkları sırasıyla T_1 ve T_2 olsun. Bu değişkenlerin integralleri ise sırasıyla γ_1 ve γ_2 olarak tanımlansın. Isı akımı kapasitanlara giriyorsa "artı", R_1 ve R_2 dirençlerinde sağa doğru akıyorsa "artı", ısıl akım kaynağı kapasitansa ısı veriyorsa $Q(t)$ "artı" kabul edilsin. Bu yönler aynı zamanda ilgili elemanlar üzerindeki sıcaklık düşüşlerinin "artı" yönleri olarak kabul edilsin.

Sistem elemanları:	Isıl kapsitanslar:	C_1, C_2
	Isıl dirençler:	R_1, R_2
	Akım kaynağı:	$Q(t)$
	Gerilim kaynağı:	$T_0(t)$

İntegral gerilim değişkenlerinin tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$T_1 = \dot{\gamma}_1 \quad T_2 = \dot{\gamma}_2 \tag{4.130}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

Düğümlerdeki gerilim değerleri kullanıldığından sistem kabul edilebilirlik şartı kullanılmasına gerek yoktur.

Ko-enerji terimleri:

$$E_{C1}^{*} = \frac{1}{2} C_1 T_1^{\,2} = \frac{1}{2} C_1 \dot{\gamma}_1^{\,2} \tag{4.131}$$

$$E_{C2}^{*} = \frac{1}{2} C_2 T_2^{\,2} = \frac{1}{2} C_2 \dot{\gamma}_2^{\,2} \tag{4.132}$$

İş terimleri:

$$\delta W_Q = -Q(t)\delta\gamma_Q = Q(t)\delta\gamma_1 \tag{4.133}$$

$$\delta W_{R1} = -\frac{1}{R_1} T_{R1}\delta\gamma_{R1} = -\frac{1}{R_1}(T_1 - T_2)\delta(\gamma_1 - \gamma_2) = -\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)\delta(\gamma_1 - \gamma_2) \tag{4.134}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{R2} &= -\frac{1}{R_2} T_{R2}\delta\gamma_{R2} = -\frac{1}{R_2}\left[T_2 - T_0(t)\right]\delta\left[\gamma_2 - T_0(t)\right] \\ &= -\frac{1}{R_2}\left[T_2 - T_0(t)\right]\delta\gamma_2 = -\frac{1}{R_2}\left[\dot{\gamma}_2 - T_0(t)\right]\delta\gamma_2 \end{aligned} \tag{4.135}$$

Hamilton integrali:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} \delta\left(\frac{1}{2} C_1 \dot{\gamma}_1^{\,2} + \frac{1}{2} C_2 \dot{\gamma}_2^{\,2}\right) - \frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)\delta(\gamma_1 - \gamma_2) \\ -\frac{1}{R_2}\left[\dot{\gamma}_2 - T_0(t)\right]\delta\gamma_2 + Q(t)\delta\gamma_1 \end{bmatrix} dt \tag{4.136}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa integral ifade aşağıdaki gibi olur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} C_1\dot{\gamma}_1\delta\dot{\gamma}_1 + C_2\dot{\gamma}_2\delta\dot{\gamma}_2 - \frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)\delta\gamma_1 \\ +\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)\delta\gamma_2 - \frac{1}{R_2}\left[\dot{\gamma}_2 - T_0(t)\right]\delta\gamma_2 + Q(t)\delta\gamma_1 \end{bmatrix} dt \tag{4.137}$$

Varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \left[-C_1\ddot{\gamma}_1 - \dfrac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) + Q(t) \right] \delta\gamma_1 \\ + \left[-C_2\ddot{\gamma}_2 + \dfrac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2) - \dfrac{1}{R_2}\dot{\gamma}_2 + \dfrac{1}{R_2} T_0(t) \right] \delta\gamma_2 \end{array} \right\} dt = 0$$

(Rastgele $\delta\gamma_1$ ve $\delta\gamma_2$ için.) (4.138)

Bu ifadenin rastgele $\delta\gamma_1$ ve $\delta\gamma_2$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse iki adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$C_1\ddot{\gamma}_1 + \frac{1}{R_1}\dot{\gamma}_1 - \frac{1}{R_1}\dot{\gamma}_2 - Q(t) = 0 \qquad (4.139)$$

$$C_2\ddot{\gamma}_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)\dot{\gamma}_2 - \frac{1}{R_1}\dot{\gamma}_1 - \frac{1}{R_2} T_0(t) = 0 \qquad (4.140)$$

Denklemler (4.127) kullanılırsa dinamik denklemler gerilim değişkenleri T_1 ve T_2 cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_1\dot{T}_1 + \frac{1}{R_1}T_1 - \frac{1}{R_1}T_2 - Q(t) = 0 \qquad (4.141)$$

$$C_2\dot{T}_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)T_2 - \frac{1}{R_1}T_1 - \frac{1}{R_2} T_0(t) = 0 \qquad (4.142)$$

ii) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral akım değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C_1 ve C_2 kapasitanslarına akan debiler sırasıyla Q_{C1} ve Q_{C2} olsun. Bu değişkenlerin integralleri ise κ_{C1} ve κ_{C2} olarak tanımlansın. Isıl dirençler üzerinden akan debiler ise sırasıyla Q_{R1} ve Q_{R2}, bunların integralleri κ_{R1} ve κ_{R2} olsun.

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{array}{lll} Q_{C1} = \dot{\kappa}_{C1} & Q_{C2} = \dot{\kappa}_{C2} & Q_{R1} = \dot{\kappa}_{R1} \\ Q_{R2} = \dot{\kappa}_{R2} & Q_{T0} = \dot{\kappa}_{T0} & \end{array} \qquad (4.143)$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$Q(t) = Q_{C1} + Q_{R1} \qquad Q_{R1} = Q_{C2} + Q_{R2} \qquad Q_{T0} = Q_{R2} \qquad (4.144)$$

Sistem elemanları:	Isıl kapsitanslar:	C_1, C_2
	Isıl dirençler:	R_1, R_2
	Akım kaynağı:	$Q(t)$
	Gerilim kaynağı:	$T_0(t)$

Ko-enerji terimleri:

Yok .

Enerji terimleri:

$$E_{C1} = \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C1}^2}{C_1} \tag{4.145}$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C2}^2}{C_2} \tag{4.146}$$

İş terimleri:

$$\delta W_{R1} = -Q_{R1}R_1\delta\kappa_{R1} = -R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} \tag{4.147}$$

$$\delta W_{R2} = -Q_{R2}R_2\delta\kappa_{R2} = -R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} \tag{4.148}$$

$$\delta W_{T0} = -T_0(t)\delta\kappa_{T0} \tag{4.149}$$

Hamilton integrali:

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(-\frac{1}{2}\frac{\kappa_{C1}^2}{C_1} - \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C2}^2}{C_2}\right) - R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} - R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} - T_0(t)\delta\kappa_{T0}\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{1}{C_1}\kappa_{C1}\delta\kappa_{C1} - \frac{1}{C_2}\kappa_{C2}\delta\kappa_{C2} - R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} - R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} - T_0(t)\delta\kappa_{T0}\right]dt \end{aligned}$$

(4.150)

Sistem kabul edilebilirlik şartlarından,

$$\left.\begin{aligned} &Q_{R1} = Q(t) - Q_{C1} \qquad Q_{R2} = Q(t) - Q_{C1} - Q_{C2} \\ &Q_{T0} = Q(t) - Q_{C1} - Q_{C2} \end{aligned}\right\} \tag{4.151}$$

ya da,

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\kappa}_{R1} = Q(t) - \dot{\kappa}_{C1} \qquad \dot{\kappa}_{R2} = Q(t) - \dot{\kappa}_{C1} - \dot{\kappa}_{C2} \\ &\dot{\kappa}_{T0} = Q(t) - \dot{\kappa}_{C1} - \dot{\kappa}_{C2} \end{aligned}\right\} \tag{4.152}$$

kullanılırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\kappa_{C1}\delta\kappa_{C1} - \frac{1}{C_2}\kappa_{C2}\delta\kappa_{C2} - R_1[Q(t) - \dot{\kappa}_{C1}](-\delta\kappa_{C1}) \\ -R_2[Q(t) - \dot{\kappa}_{C1} - \dot{\kappa}_{C2}]\delta(-\kappa_{C1} - \kappa_{C2}) - T_0(t)\delta(-\kappa_{C1} - \kappa_{C2}) \end{bmatrix}dt \tag{4.153}$$

t_1 ve t_2'de varyasyonların sıfır olduğu dikkate alınarak birinci terimin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{aligned} &\left[-\frac{1}{C_1}\kappa_{C1} + R_1 Q(t) - R_1\dot{\kappa}_{C1} + R_2 Q(t) - R_2\dot{\kappa}_{C1} - R_2\dot{\kappa}_{C2} + T_0(t) \right]\delta\kappa_{C1} \\ &+\left[-\frac{1}{C_2}\kappa_{C2} + R_2 Q(t) - R_2\dot{\kappa}_{C1} - R_2\dot{\kappa}_{C2} + T_0(t) \right]\delta\kappa_{C2} \end{aligned} \right\} dt = 0$$

(Rastgele $\delta\kappa_{CI}$ ve $\delta\kappa_{C2}$ için.) (4.154)

Bu ifadenin rastgele $\delta\kappa_{CI}$ ve $\delta\kappa_{C2}$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantezlerin içindeki ifadelerin her birinin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenir ve terimler düzenlenirse, integral akım değişkenleri κ_{CI} ve κ_{C2} cinsinden dinamik denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

$$(R_1 + R_2)\dot{\kappa}_{C1} + \frac{1}{C_1}\kappa_{C1} + R_2\dot{\kappa}_{C2} - (R_1 + R_2)Q(t) - T_0(t) = 0 \qquad (4.155)$$

$$R_2\dot{\kappa}_{C2} + \frac{1}{C_2}\kappa_{C2} + R_2\dot{\kappa}_{C1} - R_2 Q(t) - T_0(t) = 0 \qquad (4.156)$$

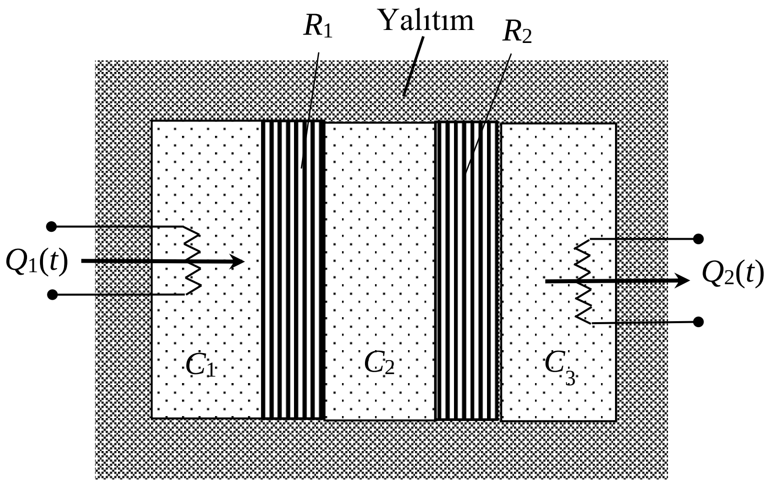
Denklemler (4.155) ve (4.156)'nın türevi alınır ve (4.143) ile verilen tanımlar kullanılırsa, dinamik denklemler akım değişkenleri Q_{C1} ve Q_{C2} cinsinden aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$(R_1 + R_2)\dot{Q}_{C1} + \frac{1}{C_1}Q_{C1} + R_2\dot{Q}_{C2} - (R_1 + R_2)\dot{Q}(t) - \dot{T}_0(t) = 0 \qquad (4.157)$$

$$R_2\dot{Q}_{C2} + \frac{1}{C_2}Q_{C2} + R_2\dot{Q}_{C1} - R_2\dot{Q}(t) - \dot{T}_0(t) = 0 \qquad (4.158)$$

Örnek 6: Isıl Sistem

Şekil 4.6'da görülen sistemde C_1, C_2 ve C_3 sistemdeki üç metal bloğun ısıl kapasitansları, R_1 ve R_2 bloklar arasındaki ısı iletim dirençleri, $Q_1(t)$ ve $Q_2(t)$ ısı pompaları tarafından aktarılan ısı debileridir. Bu sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibini kullanarak bulalım.



Şekil 4.6

i) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral gerilim değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C_1, C_2 ve C_3 kapasitanslarının sıcaklıkları sırasıyla T_1, T_2 ve T_3 olsun. Bu değişkenlerin integralleri ise sırasıyla γ_1, γ_2 ve γ_3 olarak tanımlansın. Isı akımı kapasitanslara giriyorsa "artı", R_1 ve R_2 dirençlerinde sağa doğru akıyorsa "artı", ısıl akım kaynakları $Q_1(t)$ ve $Q_2(t)$'de enerji ok yönlerinde akıyorsa "artı" kabul edilsin.

Sistem elemanları:	Isıl kapsitanslar:	C_1, C_2, C_3
	Isıl dirençler:	R_1, R_2
	Akım kaynakları:	$Q_1(t)$, $Q_2(t)$

İntegral gerilim değişkenlerinin tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$T_1 = \dot{\gamma}_1 \quad T_2 = \dot{\gamma}_2 \quad T_3 = \dot{\gamma}_3 \tag{4.159}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

Düğümlerdeki gerilim değerleri kullanıldığından sistem kabul edilebilirlik şartı kullanılmasına gerek yoktur.

Ko-enerji terimleri:

$$E_{C1}^* = \frac{1}{2}C_1T_1^{\ 2} = \frac{1}{2}C_1\dot{\gamma}_1^{\ 2} \tag{4.160}$$

$$E_{C2}^* = \frac{1}{2}C_2T_2^{\ 2} = \frac{1}{2}C_2\dot{\gamma}_2^{\ 2} \tag{4.161}$$

$$E_{C3}^* = \frac{1}{2}C_3T_3^{\ 2} = \frac{1}{2}C_3\dot{\gamma}_3^{\ 2} \tag{4.162}$$

İş terimleri:

$$\begin{aligned}\delta W_{R1} &= -\frac{1}{R_1}T_{R1}\delta\gamma_{R1} = -\frac{1}{R_1}(T_1 - T_2)\delta(\gamma_1-\gamma_2)\\ &= -\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1-\dot{\gamma}_2)\delta(\gamma_1-\gamma_2)\end{aligned} \tag{4.163}$$

$$\begin{aligned}\delta W_{R2} &= -\frac{1}{R_2}T_{R2}\delta\gamma_{R2} = -\frac{1}{R_2}(T_2 - T_3)\delta(\gamma_2-\gamma_3)\\ &= -\frac{1}{R_2}(\dot{\gamma}_2-\dot{\gamma}_3)\delta(\gamma_2-\gamma_3)\end{aligned} \tag{4.164}$$

$$\delta W_{Q1} = Q_1(t)\delta\gamma_1 \tag{4.165}$$

$$\delta W_{Q2} = -Q_2(t)\delta\gamma_3 \tag{4.166}$$

Hamilton integrali:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\begin{bmatrix}\delta\left(\frac{1}{2}C_1\dot{\gamma}_1{}^2+\frac{1}{2}C_2\dot{\gamma}_2{}^2+\frac{1}{2}C_3\dot{\gamma}_3{}^2\right)-\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1-\dot{\gamma}_2)\delta(\gamma_1-\gamma_2)\\ -\frac{1}{R_2}(\dot{\gamma}_2-\dot{\gamma}_3)\delta(\gamma_2-\gamma_3)+Q_1(t)\delta\gamma_1-Q_2(t)\delta\gamma_3\end{bmatrix}dt \tag{4.167}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa integral ifade aşağıdaki gibi olur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\begin{bmatrix}C_1\dot{\gamma}_1\delta\dot{\gamma}_1+C_2\dot{\gamma}_2\delta\dot{\gamma}_2+C_2\dot{\gamma}_3\delta\dot{\gamma}_3-\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1-\dot{\gamma}_2)\delta\gamma_1\\ +\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1-\dot{\gamma}_2)\delta\gamma_2-\frac{1}{R_2}(\dot{\gamma}_2-\dot{\gamma}_3)\delta\gamma_2\\ +\frac{1}{R_2}(\dot{\gamma}_2-\dot{\gamma}_3)\delta\gamma_3+Q_1(t)\delta\gamma_1-Q_2(t)\delta\gamma_3\end{bmatrix}dt \tag{4.168}$$

Varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\left[-C_1\ddot{\gamma}_1-\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1-\dot{\gamma}_2)+Q_1(t)\right]\delta\gamma_1\\ +\left[-C_2\ddot{\gamma}_2+\frac{1}{R_1}(\dot{\gamma}_1-\dot{\gamma}_2)-\frac{1}{R_2}(\dot{\gamma}_2-\dot{\gamma}_3)\right]\delta\gamma_2\\ +\left[-C_3\ddot{\gamma}_3-\frac{1}{R_2}(\dot{\gamma}_3-\dot{\gamma}_2)-Q_2(t)\right]\delta\gamma_3\end{array}\right\}dt = 0$$

(Rastgele $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$ ve $\delta\gamma_3$ için.) (4.169)

Bu ifadenin rastgele $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$ ve $\delta\gamma_3$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse iki adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$C_1\ddot{\gamma}_1 + \frac{1}{R_1}\dot{\gamma}_1 - \frac{1}{R_1}\dot{\gamma}_2 - Q_1(t) = 0 \tag{4.170}$$

$$C_2\ddot{\gamma}_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\dot{\gamma}_2 - \frac{1}{R_1}\dot{\gamma}_1 - \frac{1}{R_2}\dot{\gamma}_3 = 0 \tag{4.171}$$

$$C_3\ddot{\gamma}_3 + \frac{1}{R_2}\dot{\gamma}_3 - \frac{1}{R_2}\dot{\gamma}_2 + Q_2(t) = 0 \tag{4.172}$$

Denklemler (4.159) kullanılırsa dinamik denklemler gerilim değişkenleri T_1, T_2 ve T_3 cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_1\dot{T}_1 + \frac{1}{R_1}T_1 - \frac{1}{R_1}T_2 - Q_1(t) = 0 \tag{4.173}$$

$$C_2\dot{T}_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)T_2 - \frac{1}{R_1}T_1 - \frac{1}{R_2}T_3 = 0 \tag{4.174}$$

$$C_3\dot{T}_3 + \frac{1}{R_2}T_3 - \frac{1}{R_2}T_2 + Q_2(t) = 0 \tag{4.175}$$

ii) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral akım değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C_1, C_2 ve C_3 kapasitanslarına akan debiler sırasıyla Q_{C1}, Q_{C2} ve Q_{C3} olsun. Bu değişkenlerin integralleri ise κ_{C1}, κ_{C2} ve κ_{C3} olarak tanımlansın. Isıl dirençler üzerinden akan debiler ise sırasıyla Q_{R1} ve Q_{R2}, bunların integralleri κ_{R1} ve κ_{R2} olsun.

Integral akım değişkeni tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{aligned} &Q_{C1} = \dot{\kappa}_{C1} \quad Q_{C2} = \dot{\kappa}_{C2} \quad Q_{C3} = \dot{\kappa}_{C3} \\ &Q_{R1} = \dot{\kappa}_{R1} \quad Q_{R2} = \dot{\kappa}_{R2} \end{aligned} \tag{4.176}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$Q_1(t) = Q_{C1} + Q_{R1} \qquad Q_{R1} = Q_{R2} + Q_{C2} \qquad Q_{R2} = Q_{C3} + Q_2(t) \tag{4.177}$$

ya da,

$$\left.\begin{aligned} \dot{\kappa}_{R1} &= Q_1(t) - \dot{\kappa}_{C1} \\ \dot{\kappa}_{R2} &= Q_1(t) - \dot{\kappa}_{C1} - \dot{\kappa}_{C2} \\ \dot{\kappa}_{C3} &= Q_1(t) - \dot{\kappa}_{C1} - \dot{\kappa}_{C2} - Q_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.178}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\kappa_{R1} &= -\delta\kappa_{C1} \\ \delta\kappa_{R2} &= -\delta\kappa_{C1} - \delta\kappa_{C2} \\ \delta\kappa_{C3} &= -\delta\kappa_{C1} - \delta\kappa_{C2} \end{aligned}\right\} \tag{4.179}$$

Ko-enerji terimleri:

Yok.

Enerji terimleri:

$$E_{C1} = \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C1}^2}{C_1} \tag{4.180}$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C2}^2}{C_2} \tag{4.181}$$

$$E_{C3} = \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C3}^2}{C_3} \tag{4.182}$$

İş terimleri:

$$\delta W_{R1} = -Q_{R1}R_1\delta\kappa_{R1} = -R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} \tag{4.183}$$

$$\delta W_{R2} = -Q_{R2}R_2\delta\kappa_{R2} = -R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} \tag{4.184}$$

Hamilton integrali:

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(-\frac{1}{2}\frac{\kappa_{C1}^2}{C_1} - \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C2}^2}{C_2} - \frac{1}{2}\frac{\kappa_{C3}^2}{C_3} \right) - R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} - R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{1}{C_1}\kappa_{C1}\delta\kappa_{C1} - \frac{1}{C_2}\kappa_{C2}\delta\kappa_{C2} - \frac{1}{C_3}\kappa_{C3}\delta\kappa_{C3} - R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} - R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} \right] dt \end{aligned} \tag{4.185}$$

Denklemler (4.178) ve (4.179) kullanılırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1}\kappa_{C1}\delta\kappa_{C1}-\frac{1}{C_2}\kappa_{C2}\delta\kappa_{C2}\\ -\frac{1}{C_3}\left[\int Q_1(t)dt-\kappa_{C1}-\kappa_{C2}-\int Q_2(t)dt\right](-\delta\kappa_{C1}-\delta\kappa_{C2})\\ -R_1\left[Q_1(t)-\dot{\kappa}_{C1}\right](-\delta\kappa_{C1})-R_2\left[Q_1(t)-\dot{\kappa}_{C1}-\dot{\kappa}_{C2}\right]\delta(-\kappa_{C1}-\kappa_{C2})\end{bmatrix}dt \qquad (4.186)$$

Terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{aligned}&\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1}\kappa_{C1}+\frac{1}{C_3}\int Q_1(t)dt-\frac{1}{C_3}\kappa_{C1}-\frac{1}{C_3}\kappa_{C2}-\frac{1}{C_3}\int Q_2(t)dt\\ +R_1Q_1(t)-R_1\dot{\kappa}_{C1}+R_2Q_1(t)-R_2\dot{\kappa}_{C1}-R_2\dot{\kappa}_{C2}\end{bmatrix}\delta\kappa_{C1}\\ +&\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_2}\kappa_{C2}+\frac{1}{C_3}\int Q_1(t)dt-\frac{1}{C_3}\kappa_{C1}-\frac{1}{C_3}\kappa_{C2}-\frac{1}{C_3}\int Q_2(t)dt\\ +R_2Q_1(t)-R_2\dot{\kappa}_{C1}-R_2\dot{\kappa}_{C2}\end{bmatrix}\delta\kappa_{C2}\end{aligned}\right\}dt=0$$

(Rastgele $\delta\kappa_{CI}$ ve $\delta\kappa_{C2}$ için.) (4.187)

Bu ifadenin rastgele $\delta\kappa_{CI}$ ve $\delta\kappa_{C2}$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantezlerin içindeki ifadelerin her birinin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenir, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$'nin integral terimlerini kaldırmak için denklemlerin türevleri alınırsa ve terimler düzenlenirse, integral akım değişkenleri κ_{CI} ve κ_{C2} cinsinden dinamik denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}&(R_1+R_2)\ddot{\kappa}_{C1}+R_2\ddot{\kappa}_{C2}+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)\dot{\kappa}_{C1}+\frac{1}{C_3}\dot{\kappa}_{C2}\\ &\qquad-\frac{1}{C_3}Q_1(t)+\frac{1}{C_3}Q_2(t)-(R_1+R_2)\dot{Q}_1(t)=0\end{aligned} \qquad (4.188)$$

$$\begin{aligned}&R_2\ddot{\kappa}_{C1}+R_2\ddot{\kappa}_{C2}+\frac{1}{C_3}\dot{\kappa}_{C1}+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)\dot{\kappa}_{C2}\\ &\qquad-\frac{1}{C_3}Q_1(t)+\frac{1}{C_3}Q_2(t)-R_2\dot{Q}_1(t)=0\end{aligned} \qquad (4.189)$$

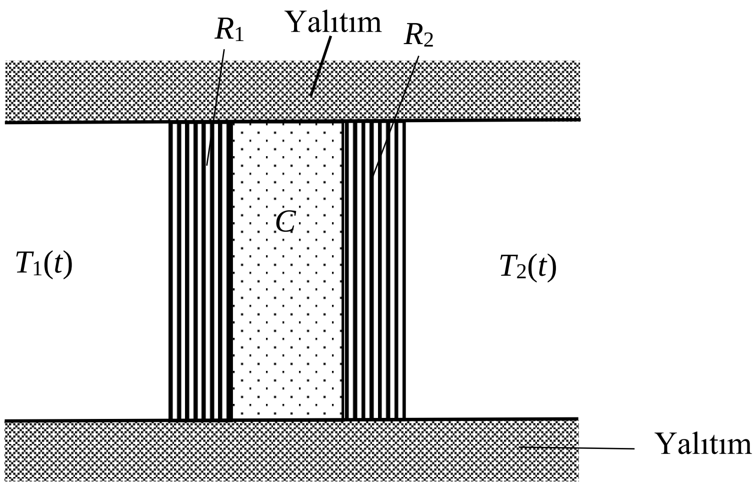
Denklemler (4.176) ile verilen tanımlar kullanılırsa, dinamik denklemler akım değişkenleri Q_{C1} ve Q_{C2} cinsinden aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\begin{aligned}&(R_1+R_2)\dot{Q}_{C1}+R_2\dot{Q}_{C2}+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)Q_{C1}+\frac{1}{C_3}Q_{C2}\\ &\qquad-\frac{1}{C_3}Q_1(t)+\frac{1}{C_3}Q_2(t)-(R_1+R_2)\dot{Q}_1(t)=0\end{aligned} \qquad (4.190)$$

$$R_2\dot{Q}_{C1} + R_2\dot{Q}_{C2} + \frac{1}{C_3}Q_{C1} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)Q_{C2}$$
$$-\frac{1}{C_3}Q_1(t) + \frac{1}{C_3}Q_2(t) - R_2\dot{Q}_1(t) = 0 \qquad (4.191)$$

Örnek 7: Isıl Sistem

Şekil 4.7'de görülen sistemde C sistemdeki metal bir bloğun ısıl kapasitansı, $T_1(t)$ ve $T_2(t)$ dış ortamlardaki sıcaklıklar, R_1 ve R_2 ise blokla bu ortamlar arasındaki ısıl dirençlerdir. Bu sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibini kullanarak bulalım.



Şekil 4.7

i) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral gerilim değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C kapasitansının sıcaklığı T olsun. Bu değişkenin integrali ise γ olarak tanımlansın. Isı akımı kapasitansa giriyorsa "artı", R_1 ve R_2 dirençlerinde sağa doğru akıyorsa "artı" kabul edilsin.

Sistem elemanları:	Isıl kapsitans:	C
	Isıl dirençler:	R_1, R_2
	Gerilim kaynakları:	$T_1(t)$, $T_2(t)$

İntegral gerilim değişkeninin tanımından gelen kabul edilebilirlik şartı:

$$T = \dot{\gamma} \qquad (4.192)$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

Düğümlerdeki gerilim değerleri kullanıldığından sistem kabul edilebilirlik şartı kullanılmasına gerek yoktur.

Ko-enerji terimleri:

$$E_C^* = \frac{1}{2}CT^2 = \frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2 \tag{4.193}$$

İş terimleri:

$$\delta W_{R1} = -\frac{1}{R_1}T_{R1}\delta\gamma_{R1} = -\frac{1}{R_1}\left[T_1(t) - T\right]\delta(-\gamma) = \frac{1}{R_1}\left[T_1(t) - \dot{\gamma}\right]\delta\gamma \tag{4.194}$$

$$\delta W_{R2} = -\frac{1}{R_2}T_{R2}\delta\gamma_{R2} = -\frac{1}{R_2}\left[T - T_2(t)\right]\delta\gamma = -\frac{1}{R_2}\left[\dot{\gamma} - T_2(t)\right]\delta\gamma \tag{4.195}$$

Hamilton integrali:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta\left(\frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2\right) + \frac{1}{R_1}\left[T_1(t) - \dot{\gamma}\right]\delta\gamma - \frac{1}{R_2}\left[\dot{\gamma} - T_2(t)\right]\delta\gamma\right\}dt \tag{4.196}$$

Varyasyon işlemi uygulanır, varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[-C\ddot{\gamma} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\dot{\gamma} + \frac{1}{R_1}T_1(t) + \frac{1}{R_2}T_2(t)\right]\delta\gamma\, dt = 0$$

(Rastgele $\delta\gamma$ için.) (4.197)

Bu ifadenin rastgele $\delta\gamma$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadenin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifade sıfıra eşitlenirse dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$C\ddot{\gamma} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\dot{\gamma} - \frac{1}{R_1}T_1(t) - \frac{1}{R_2}T_2(t) = 0 \tag{4.198}$$

Denklem (4.192) kullanılırsa dinamik denklem gerilim değişkeni T cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C\dot{T} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)T - \frac{1}{R_1}T_1(t) - \frac{1}{R_2}T_2(t) = 0 \tag{4.199}$$

ii) Dinamik denklemlerin Hamilton İntegralinin integral akım değişkeni formunu kullanarak bulunması:

C kapasitansına akan debi Q_C olsun. Bu değişkenin integrali ise κ_C olarak tanımlansın. Isıl dirençler üzerinden akan debiler sırasıyla Q_{R1} ve Q_{R2}, bunların integralleri κ_{R1} ve κ_{R2}; gerilim kaynakları $T_1(t)$, $T_2(t)$ üzerinden akan ısı debileri Q_{T1} ve Q_{T2}, bunların integralleri ise κ_{T1} ve κ_{T2} olsun.

İntegral akım değişkeni tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$Q_C = \dot{\kappa}_C \qquad Q_{R1} = \dot{\kappa}_{R1} \qquad Q_{R2} = \dot{\kappa}_{R2}$$
$$Q_{T1} = \dot{\kappa}_{T1} \qquad Q_{T2} = \dot{\kappa}_{T2} \tag{4.200}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$Q_{T1} + Q_{R1} = 0 \qquad Q_{R1} = Q_{R2} + Q_C \qquad Q_{R2} = Q_{T2} \tag{4.201}$$

ya da,

$$\dot{\kappa}_{T1} + \dot{\kappa}_{R1} = 0 \qquad \dot{\kappa}_{R1} = \dot{\kappa}_{R2} + \dot{\kappa}_C \qquad \dot{\kappa}_{R2} = \dot{\kappa}_{T2}$$

(4.202)

$$\delta\kappa_{T1} = -\delta\kappa_{R1} \qquad \delta\kappa_{R1} = \delta\kappa_{R2} + \delta\kappa_C \qquad \delta\kappa_{R2} = \delta\kappa_{T2} \tag{4.203}$$

Ko-enerji terimleri:

Yok .

Enerji terimleri:

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{\kappa_C^2}{C} \tag{4.204}$$

İş terimleri:

$$\delta W_{R1} = -R_1 Q_{R1}\delta\kappa_{R1} = -R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} \tag{4.205}$$

$$\delta W_{R2} = -R_2 Q_{R2}\delta\kappa_{R2} = -R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} \tag{4.206}$$

$$\delta W_{T1} = -T_1(t)\delta\kappa_{T1} \tag{4.207}$$

$$\delta W_{T2} = -T_2(t)\delta\kappa_{T2} \tag{4.208}$$

Hamilton integrali:

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(-\frac{1}{2}\frac{\kappa_C^2}{C}\right) - R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1} - R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2} - T_1(t)\delta\kappa_{T1} - T_2(t)\delta\kappa_{T2}\right]dt \tag{4.209}$$

Varyasyon işlemi uygulanır ve sistem kabul edilebilirlik şartlarını kullanılırsa, Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{1}{C}\kappa_C\delta\kappa_C-R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1}-R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2}-T_1(t)\delta\kappa_{T1}-T_2(t)\delta\kappa_{T2}\right]dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{1}{C}(\kappa_{R1}-\kappa_{R2})(\delta\kappa_{R1}-\delta\kappa_{R2})-R_1\dot{\kappa}_{R1}\delta\kappa_{R1}-R_2\dot{\kappa}_{R2}\delta\kappa_{R2}+T_1(t)\delta\kappa_{R1}-T_2(t)\delta\kappa_{R2}\right]dt$$

(4.210)

Terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki iafade elde edilir:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[-\frac{1}{C}(\kappa_{R1}-\kappa_{R2})-R_1\dot{\kappa}_{R1}+T_1(t)\right]\delta\kappa_{R1}+\left[\frac{1}{C}(\kappa_{R1}-\kappa_{R2})-R_2\dot{\kappa}_{R2}-T_2(t)\right]\delta\kappa_{R2}\right\}dt=0$$

(Rastgele $\delta\kappa_{R1}$ ve $\delta\kappa_{R2}$ için.) (4.211)

Bu ifadenin rastgele $\delta\kappa_{R1}$ ve $\delta\kappa_{R2}$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantezlerin içindeki ifadelerin her birinin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenir ve terimler düzenlenirse, integral akım değişkenleri κ_{R1} ve κ_{R2} cinsinden dinamik denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

$$R_1\dot{\kappa}_{R1}+\frac{1}{C}\kappa_{R1}-\frac{1}{C}\kappa_{R2}-T_1(t)=0 \tag{4.212}$$

$$R_2\dot{\kappa}_{R2}+\frac{1}{C}\kappa_{R2}-\frac{1}{C}\kappa_{R1}+T_2(t)=0 \tag{4.213}$$

Yukarıdaki iki denklemin türevleri alınır ve denklemler (4.200) ile verilen tanımlar kullanılırsa, dinamik denklemler akım değişkenleri Q_{R1} ve Q_{R2} cinsinden aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$R_1\dot{Q}_{R1}+\frac{1}{C}Q_{R1}-\frac{1}{C}Q_{R2}-\dot{T}_1(t)=0 \tag{4.214}$$

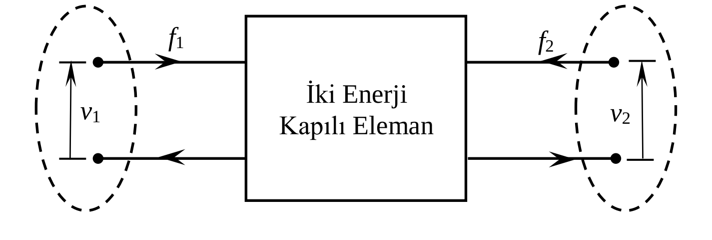
$$R_2\dot{Q}_{R2}+\frac{1}{C}Q_{R2}-\frac{1}{C}Q_{R1}+\dot{T}_2(t)=0 \tag{4.215}$$

5

İKİ ENERJİ KAPILI ELEMANI OLAN SİSTEMLERE HAMİLTON PRENSİBİNİN UYGULANMASI

5.1 İki Enerji Kapılı Elemanlar

Mühendislik sistemlerinde farklı ya da aynı türde enerjiler arasındaki dönüşümü modellemek için saf ve lineer iki kapılı elemanlar kullanılır. Şekil 5.1'de böyle bir eleman temsili olarak görülmektedir. Elemanın kapılarından birinin gerilim ve akım değişkenleri sırasıyla v_1 ve f_1; ikinci kapısındaki gerilim ve akım değişkenleri ise v_2 ve f_2 olsun. Saf bir iki kapılı elemanda enerji kaybı ya da enerji depolaması yoktur. Bu yüzden elemana giren net güç sıfırdır. Lineer bir iki kapılı elemanda bir kapının değişkenleri diğer kapının değişkenleri cinsinden lineer bir biçimde ifade edilir. Lineer olan ve net enerji girişi sıfır olan iki tür iki kapılı eleman vardır. Bunlardan birisi *tranformatör* olarak anılır. Bir transformatörün değişkenleri arasında denklem (5.1)'deki gibi bir ilişki vardır. Transformatörün özelliği, kapıların gerilim değişkenlerinin birbiriyle; akım değişkenlerinin de birbiriyle orantılı olmasıdır. Bu orantılar elemana giren net güç sıfır olacak biçimde, bir transformatör sabiti (T) ile belirlenir. Diğer lineer ve saf iki kapılı eleman ise *jiratör*'dür. Jiratörün değişkenleri arasındaki ilişki ise denklem (5.2)'deki gibidir. Bu elemanda kapıların gerilim ve akım değişkenleri çapraz olarak orantılıdır. Yani gerilim değişkenleri akım değişkenlerine orantılıdır. Bu orantı elemana giren net güç sıfır olacak biçimde bir jiratör sabiti (G) ile belirlenir.



Şekil 5.1

Transformatör Eleman Denklemleri:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad \text{ya da} \qquad \begin{aligned} v_1 &= T v_2 \\ f_1 &= -\frac{1}{T} f_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Jiratör Eleman Denklemleri:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -\dfrac{1}{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad \text{ya da} \qquad \begin{aligned} v_1 &= G f_2 \\ f_1 &= -\frac{1}{G} v_2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Çizelge 5.1'de uygulamalarda çok karşılaşılan bazı iki kapılı lineer elemanlar ve bunların eleman denklemleri verilmiştir.

5.2 İki Enerji Kapılı Elemanı Olan Sistemlerde Dinamik Denklemlerin Hamilton Prensibiyle Bulunması

İki enerji kapılı lineer elemanları olan sistemlerde bu elemanlar iş terimlerine ve eleman denklemleriyle sistem kabul edilebilirlik şartlarına katkıda bulunurlar. Örneğin, Şekil 5.1'deki sistemde pozitif akım ve gerilim düşme yönleri dikkate alınırsa, 1-numaralı kapıda elemana verilen güç $v_1 f_1$, 2-numaralı kapıda elemana verilen güç ise $v_2 f_2$ kadardır. Dolayısıyla eleman tarafından 1-numaralı kapıya bağlı olan sistem bölümüne $-v_1 f_1$ kadar, 2-numaralı kapıya bağlı olan sistem bölümüne ise $-v_2 f_2$ kadar güç aktarılır. İki kapılı eleman dolayısıyla Hamilton integralindeki iş terimi ise aşağıdaki gibi olur.

$$\delta W = -v_1 f_1 \delta t - v_2 f_2 \delta t \tag{5.3}$$

İki kapılı elemanı olan sistemlere Hamilton prensibinin uygulanması daha önce bir kapılı elemanları olan sistemlere benzer. İki kapılı elemanlar tarafından enerji türlerine göre birbirinden ayrılan kısımlarda integral akım değişkeni ya da integral gerilim değişkeni yaklaşımı serbestçe kullanılabilir. Örneğin, elektro-mekanik bir sistemde, sistemin elektrik kısmında integral gerilim değişkeni formu kullanılırken, mekanik kısımda integral akım değişkeni formu kullanılabilir. Eğer integral gerilim değişkeni *x* ile, integral akım değişkeni *p* ile gösterilirse, kullanılan değişkenlerin türüne göre denklem (5.3)'deki iş terimi Hamilton integraline aşağıdaki formlardan biri halinde katkıda bulunur.

Hamilton integralinde iki kapılı elemanın,

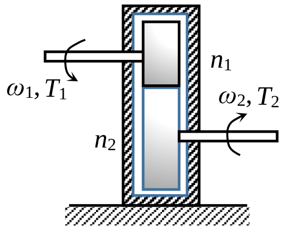
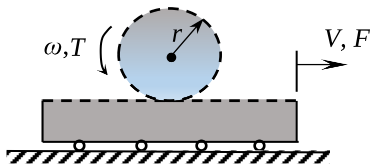
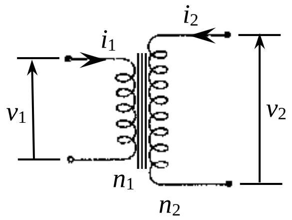
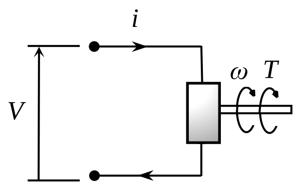
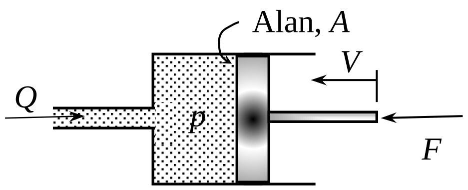
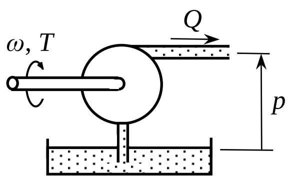
i) hem 1- hem 2-numaralı kapı tarafındaki sistem elemanları için integral gerilim değişkenleri kullanılıyorsa,

$$\delta W = -f_1 \delta x_1 - f_2 \delta x_2 \tag{5.4}$$

ii) hem 1- hem 2-numaralı kapı tarafındaki sistem elemanları için integral akım değişkenleri kullanılıyorsa,

$$\delta W = -v_1 \delta p_1 - v_2 \delta p_2 \tag{5.5}$$

Çizelge 5.1 Bazı İki Enerji Kapılı Elemanlar

<table>
<tr><th>İki Kapılı Eleman</th><th>Eleman Denklemleri</th><th>Türü</th></tr>
<tr><td>Dişli kutusu:
</td><td>$\omega_1 = \frac{n_2}{n_1}\omega_2$
$T_1 = -\frac{n_1}{n_2}T_2$</td><td>Transformatör</td></tr>
<tr><td>Kremayer-pinyon dişlisi.
</td><td>$\omega = \frac{1}{r}V$
$T = -rF$</td><td>Transformatör</td></tr>
<tr><td>Elektrik transformatörü
</td><td>$v_1 = \frac{n_1}{n_2}v_2$
$i_1 = -\frac{n_2}{n_1}i_2$</td><td>Transformatör</td></tr>
<tr><td>İdeal elektrik motoru/dinamo:
</td><td>$\omega = \kappa V$
$T = -\frac{1}{\kappa}i$</td><td>Transformatör</td></tr>
<tr><td>Hidrolik silindir-piston:
</td><td>$p = \frac{1}{A}F$
$Q = -AV$</td><td>Jiratör</td></tr>
<tr><td>İdeal hidrolik pompa/motor:
</td><td>$\omega = \frac{1}{\varepsilon}Q$
$T = -\varepsilon p$</td><td>Jiratör</td></tr>
</table>

iii) 1-numaralı kapı tarafındaki elemanlar için integral gerilim değişkenleri, 2-numaralı kapı tarafındaki elemanlar için integral akım değişkenleri kullanılıyorsa,

$$\delta W = -f_1 \delta x_1 - v_2 \delta p_2 \tag{5.6}$$

iv) 1-numaralı kapı tarafındaki elemanlar için integral akım değişkenleri, 2-numaralı kapı tarafındaki elemanlar için integral gerilim değişkenleri kullanılıyorsa,

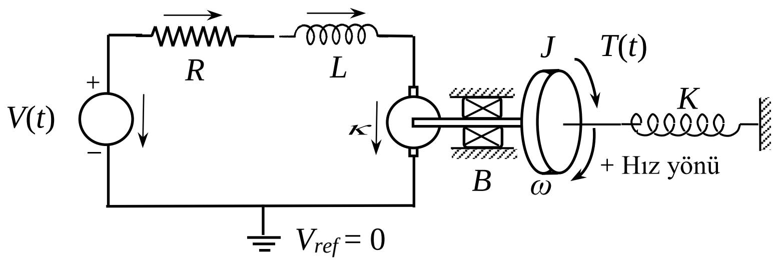
$$\delta W = -v_1 \delta p_1 - f_2 \delta x_2 \tag{5.7}$$

İki kapılı elemanın bir tarafında integral gerilim değişkeni kullanılırken diğer tarafında integral akım değişkeni kullanılması genellikle aşırı cebirsel işlemlerin yapılmasını gerektirir. Bu yüzden iki kapılı elemanın her iki tarafında da ya integral gerilim değişkeni ya da integral akım değişkeni kullanılması tercih edilmelidir.

5.3 Örnekler

Örnek 1: Elektro-mekanik Sistem

Şekil 5.2'de verilen elektro-mekanik sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibinin farklı yazılım biçimlerini kullanarak bulalım. Sistemdeki elektrik motorunun sargı direnci *R* ile, sargı endüktansı *L* ile, elektrik enerjisinden mekanik enerjiye dönüşüm ise dönüşüm sabiti κ olan lineer ve saf bir elektro-mekanik dönüştürme elemanıyla modellenmiştir. Elektro-mekanik dönüştürücü üzerindeki gerilim farkı v_κ ise, $\omega = \kappa v_\kappa$ ifadesi geçerlidir. *J, K* ve *B* sırasıyla yüke ait elemanları tanımlayan parametrelerdir. *T*(*t*) dışarıdan uygulanan bozucu bir moment girişidir. Şekilde görülen oklar, pozitif olarak kabul edilen gerilim düşme ve akım yönlerini göstermektedir. Hamilton prensibiyle dinamik denklemler bulunurken yöntemlere açıklık getirmek için iki alternatif yaklaşım kullanılacaktır. Sistemin, *i*) hem elektrik hem de mekanik kısmında integral gerilim değişkenleri kullanılması, *ii*) hem elektrik hem de mekanik kısmında integral akım değişkenleri kullanılması, *iii*) elektrik kısımda integral gerilim değişkeni ve mekanik kısımda integral akım değişkeni kullanılması.



Şekil 5.2

i) İntegral gerilim değişkenleri kullanılması

Sistem elemanları:

Elektrik elemanları:	Endüktans:	*L*
	Direnç:	*R*
	Gerilim kaynağı:	*V*(*t*)

Mekanik elemanlar:	Atalet momenti:	J
	Yay:	K
	Sönümleyici:	B
	Akım kaynağı:	$T(t)$
İki kapılı eleman:	Elektro-mekanik dönüştürücü	

Ko-enerji terimleri:

$$E_J^{\,*} = \frac{1}{2} J\omega^2 \tag{5.8}$$

Enerji terimleri:

$$E_L = \frac{1}{2}\frac{\lambda_L^{\,2}}{L} \tag{5.9}$$

$$E_K = \frac{1}{2} K\theta^2 \tag{5.10}$$

İş terimleri:

$$\delta W_R = -\frac{v_R}{R}\delta\lambda_R \tag{5.11}$$

$$\delta W_B = -B\omega\delta\theta \tag{5.12}$$

$$\delta W_T = T(t)\delta\theta \tag{5.13}$$

$$\delta W_\kappa = -i_\kappa\delta\lambda_\kappa - T_\kappa\delta\theta \tag{5.14}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$v_L = \dot{\lambda}_L \qquad v_R = \dot{\lambda}_R \qquad v_\kappa = \dot{\lambda}_\kappa \qquad \omega = \dot{\theta} \tag{5.15}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$v_R + v_L + v_\kappa - V(t) = 0 \tag{5.16}$$

$$\omega = \kappa v_\kappa \tag{5.17}$$

$$T_\kappa = -\frac{1}{\kappa} i_\kappa \tag{5.18}$$

(Mekanik kısımda düğümlerdeki gerilim değerleri kullanıldığından bu kısım için sistem kabul edilebilirlik şartları yazmaya gerek yoktur.)

Denklemler (5.16) ve (5.17)’den aşağıdaki ifadeler de yazılabilir:

$$\dot{\lambda}_R = V(t) - \dot{\lambda}_L - \dot{\lambda}_\kappa \tag{5.19}$$

$$\delta\dot{\lambda}_R = -\delta\dot{\lambda}_L - \delta\dot{\lambda}_\kappa \tag{5.20}$$

$$\delta\lambda_R = -\delta\lambda_L - \delta\lambda_\kappa \tag{5.21}$$

$$\dot{\theta} = \kappa\dot{\lambda}_\kappa \tag{5.22}$$

$$\theta = \kappa\lambda_\kappa \tag{5.23}$$

$$\delta\theta = \kappa\delta\lambda_\kappa \tag{5.24}$$

Ayrıca, $i_\kappa = i_L$ olduğundan,

$$\frac{di_\kappa}{dt} = \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_L = \frac{1}{L}\dot{\lambda}_L \tag{5.25}$$

$$i_\kappa = \frac{1}{L}\lambda_L \tag{5.26}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda_L{}^2}{L} - \frac{1}{2}K\theta^2\right) - \frac{v_R}{R}\delta\lambda_R - B\omega\delta\theta + T(t)\delta\theta - i_\kappa\delta\lambda_\kappa - T_\kappa\delta\theta\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[J\omega\delta\omega - \frac{1}{L}\lambda_L\delta\lambda_L - K\theta\delta\theta - \frac{v_R}{R}\delta\lambda_R - B\omega\delta\theta + T(t)\delta\theta - i_\kappa\delta\lambda_\kappa - T_\kappa\delta\theta\right]dt \end{aligned} \tag{5.27}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa,

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[J\dot{\theta}\delta\dot{\theta} - \frac{1}{L}\lambda_L\delta\lambda_L - K\theta\delta\theta - \frac{\dot{\lambda}_R}{R}\delta\lambda_R - B\dot{\theta}\delta\theta + T(t)\delta\theta - i_\kappa\delta\lambda_\kappa - T_\kappa\delta\theta\right]dt \tag{5.28}$$

olur. Denklemler (5.18)-(5.26) ile verilen sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l} J\dot{\theta}\delta\dot{\theta} - \frac{1}{L}\lambda_L\delta\lambda_L - K\theta\delta\theta + \frac{1}{R}\left(V(t) - \dot{\lambda}_L - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta}\right)(\delta\lambda_L + \frac{1}{\kappa}\delta\theta) - B\dot{\theta}\delta\theta \\ + T(t)\delta\theta - \frac{1}{L}\lambda_L\left(\frac{1}{\kappa}\delta\theta\right) + \frac{1}{\kappa L}\lambda_L\delta\theta \end{array}\right]dt \tag{5.29}$$

İlk terimin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenip Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\left[-J\ddot{\theta}-B\dot{\theta}-K\theta+T(t)+\dfrac{1}{R\kappa}\left(V(t)-\dot{\lambda}_L-\dfrac{1}{\kappa}\dot{\theta}\right)\right]\delta\theta \\ +\left[-\dfrac{1}{L}\lambda_L+\dfrac{1}{R}\left(V(t)-\dot{\lambda}_L-\dfrac{1}{\kappa}\dot{\theta}\right)\right]\delta\lambda_L\end{array}\right\}dt=0$$

(Rastgele $\delta\theta$ ve $\delta\lambda_L$ için.) (5.30)

Bu ifadenin rastgele $\delta\theta$ ve $\delta\lambda_L$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenir ve terimler düzenlenirse iki adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$J\ddot{\theta}+\left(B+\frac{1}{\kappa^2 R}\right)\dot{\theta}+K\theta+\frac{1}{R\kappa}\dot{\lambda}_L-T(t)-\frac{1}{R\kappa}V(t)=0 \tag{5.31}$$

$$\frac{1}{R}\dot{\lambda}_L+\frac{1}{L}\lambda_L+\frac{1}{\kappa R}\dot{\theta}-\frac{1}{R}V(t)=0 \tag{5.32}$$

Yukarıda ikinci denklemin türevi alınır ve denklem (5.15) kullanılırsa, dinamik denklemler θ ve v_L cinsinden de ifade edilebilir:

$$J\ddot{\theta}+\left(B+\frac{1}{\kappa^2 R}\right)\dot{\theta}+K\theta+\frac{1}{R\kappa}v_L-T(t)-\frac{1}{R\kappa}V(t)=0 \tag{5.33}$$

$$\frac{1}{R}\dot{v}_L+\frac{1}{L}v_L+\frac{1}{\kappa R}\ddot{\theta}-\frac{1}{R}\dot{V}(t)=0 \tag{5.34}$$

ii) İntegral akım değişkenleri kullanılması

Ko-enerji terimleri:

$$E_L^*=\frac{1}{2}Li_L^2 \tag{5.35}$$

$$E_K{}^*=\frac{1}{2}\frac{T_K{}^2}{K} \tag{5.36}$$

Enerji terimleri:

$$E_J=\frac{1}{2}\frac{h_J{}^2}{J} \tag{5.37}$$

İş terimleri:

$$\delta W_R=-Ri_R\delta q_R \tag{5.38}$$

$$\delta W_V=-V(t)\delta q_V \tag{5.39}$$

$$\delta W_B = -\frac{T_B}{B}\delta h_B \tag{5.40}$$

$$\delta W_\kappa = -v_\kappa \delta q_\kappa - \omega \delta h_\kappa \tag{5.41}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{array}{llll} i_L = \dot{q}_L & i_R = \dot{q}_R & i_V = \dot{q}_V & \\ T_K = \dot{h}_K & T_J = \dot{h}_J & T_B = \dot{h}_B & T_\kappa = \dot{h}_\kappa \end{array} \tag{5.42}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$i_R = i_L = i_\kappa = -i_V \tag{5.43}$$

$$T_\kappa = -T_J - T_K - T_B + T(t) \tag{5.44}$$

$$T_\kappa = -\frac{1}{\kappa} i_\kappa \tag{5.45}$$

$$\omega = \kappa v_\kappa \tag{5.46}$$

Denklemler (5.42) - (5.45)'den aşağıdaki ifadeler de yazılabilir:

$$q_R = q_L = q_\kappa = -q_V \tag{5.47}$$

$$\delta q_R = \delta q_L = \delta q_\kappa = -\delta q_V \tag{5.48}$$

$$\dot{h}_K = -\dot{h}_J - \dot{h}_\kappa - \dot{h}_B + T(t) \tag{5.49}$$

$$\delta h_K = -\delta h_J - \delta h_\kappa - \delta h_B \tag{5.50}$$

$$\dot{h}_\kappa = -\frac{1}{\kappa}\dot{q}_\kappa \tag{5.51}$$

$$\delta h_\kappa = -\frac{1}{\kappa}\delta q_\kappa \tag{5.52}$$

Ayrıca denklem (5.46), sönümleyicinin eleman denklemi ve denklem (5.42)'den aşağıdaki ifade bulunur.

$$v_\kappa = \frac{1}{\kappa}\omega = \frac{1}{\kappa B}T_B = \frac{1}{\kappa B}\dot{h}_B \tag{5.53}$$

Hamilton integrali:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}Li_L^2+\frac{1}{2}\frac{T_K^{\;2}}{K}-\frac{1}{2}\frac{h_J^{\;2}}{J}\right)-Ri_R\delta q_R-\frac{T_B}{B}\delta h_B-V(t)\delta q_V-v_\kappa\delta q_\kappa-\omega\delta h_\kappa\right]dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[Li_L\delta i_L+\frac{1}{K}T_K\delta T_K-\frac{1}{J}h_J\delta h_J-Ri_R\delta q_R-\frac{T_B}{B}\delta h_B-V(t)\delta q_V-v_\kappa\delta q_\kappa-\omega\delta h_\kappa\right]dt$$

(5.54)

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[L\dot{q}_L\delta\dot{q}_L+\frac{1}{K}\dot{h}_K\delta\dot{h}_K-\frac{1}{J}h_J\delta h_J-R\dot{q}_R\delta q_R-\frac{\dot{h}_B}{B}\delta h_B-V(t)\delta q_V-v_\kappa\delta q_\kappa-\omega\delta h_\kappa\right]dt$$

(5.55)

Denklemler (5.47)-(5.53) ile verilen sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\begin{bmatrix}L\dot{q}_R\delta\dot{q}_R+\dfrac{1}{K}\left[T(t)-\dot{h}_J-\dot{h}_B+\dfrac{1}{\kappa}\dot{q}_R\right]\left(-\delta\dot{h}_J-\delta\dot{h}_B+\dfrac{1}{\kappa}\delta\dot{q}_R\right)\\ -\dfrac{1}{J}h_J\delta h_J-R\dot{q}_R\delta q_R-\dfrac{\dot{h}_B}{B}\delta h_B+V(t)\delta q_R-\dfrac{1}{\kappa B}\dot{h}_B\delta q_R+\dfrac{1}{B}\dot{h}_B\dfrac{1}{\kappa}\delta q_R\end{bmatrix}dt \qquad (5.56)$$

Varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integralleri alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem bulunur:

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\left[-L\ddot{q}_R-\dfrac{1}{K\kappa}\left(\dot{T}(t)-\ddot{h}_J-\ddot{h}_B+\dfrac{1}{\kappa}\ddot{q}_R\right)-R\dot{q}_R+V(t)\right]\delta q_R\\ +\left[\dfrac{1}{K}\left(\dot{T}(t)-\ddot{h}_J-\ddot{h}_B+\dfrac{1}{\kappa}\ddot{q}_R\right)-\dfrac{1}{J}h_J\right]\delta h_J\\ +\left[\dfrac{1}{K}\left(\dot{T}(t)-\ddot{h}_J-\ddot{h}_B+\dfrac{1}{\kappa}\ddot{q}_R\right)-\dfrac{\dot{h}_B}{B}\right]\delta h_B\end{array}\right\}dt=0$$

(Rastgele δq_R, δh_J ve δh_B için.)

(5.57)

Bu ifadenin rastgele δq_R, δh_J ve δh_B için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse üç adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$\left(L+\frac{1}{K\kappa^2}\right)\ddot{q}_R+R\dot{q}_R-\frac{1}{K\kappa}\ddot{h}_J-\frac{1}{K\kappa}\ddot{h}_B+\frac{1}{K\kappa}\dot{T}(t)-V(t)=0 \qquad (5.58)$$

$$\frac{1}{K}\ddot{h}_J+\frac{1}{J}h_J+\frac{1}{K}\ddot{h}_B-\frac{1}{K\kappa}\ddot{q}_R-\frac{1}{K}\dot{T}(t)=0 \qquad (5.59)$$

$$\frac{1}{K}\ddot{h}_B + \frac{1}{B}\dot{h}_B + \frac{1}{K}\ddot{h}_J - \frac{1}{K\kappa}\ddot{q}_R - \frac{1}{K}\dot{T}(t) = 0 \tag{5.60}$$

Yukarıda ikinci denklemden $\ddot{h}_B$ alınır, üçüncü denklemin bir defa türevi alınarak bu denklemde ve birinci denklemde yerine koyulursa ve terimler düzenlenirse, dinamik denklemler q_R ve h_J cinsinden aşağıdaki hali alır:

$$L\ddot{q}_R + R\dot{q}_R + \frac{1}{J\kappa}h_J - V(t) = 0 \tag{5.61}$$

$$\ddot{h}_J + \frac{B}{J}\dot{h}_J + \frac{K}{J}h_J - \frac{1}{\kappa}\ddot{q}_R - \dot{T}(t) = 0 \tag{5.62}$$

iii) Elektrik kısımda gerilim, mekanik kısımda integral akım değişkenleri kullanılması Ko-enerji terimleri:

$$E_K^{\,*} = \frac{1}{2}\frac{T_K^{\,2}}{K} \tag{5.63}$$

Enerji terimleri:

$$E_L = \frac{1}{2}\frac{\lambda_L^{\,2}}{L} \tag{5.64}$$

$$E_J = \frac{1}{2}\frac{h_J^{\,2}}{J} \tag{5.65}$$

İş terimleri:

$$\delta W = -\frac{v_R}{R}\delta\lambda_R \tag{5.66}$$

$$\delta W_V = -\frac{T_B}{B}\delta h_B \tag{5.67}$$

$$\delta W_\kappa = -i_\kappa \delta\lambda_\kappa - \omega\delta h_\kappa \tag{5.68}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{array}{llll} v_L = \dot{\lambda}_L & v_R = \dot{\lambda}_R & v_\kappa = \dot{\lambda}_\kappa & i_\kappa = \dot{q}_\kappa \\ T_K = \dot{h}_K & T_J = \dot{h}_J & T_B = \dot{h}_B & T_\kappa = \dot{h}_\kappa \end{array} \tag{5.69}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$T_\kappa = -\frac{1}{\kappa}i_\kappa \tag{5.70}$$

$$\omega = \kappa v_\kappa \tag{5.71}$$

$$v_L + v_R + v_\kappa - V(t) = 0 \tag{5.72}$$

$$T_\kappa = -T_J - T_K - T_B + T(t) \tag{5.73}$$

Denklemler (5.69)-(5.73)'den aşağıdaki ifadeler de yazılabilir:

$$\dot{h}_\kappa = -\frac{1}{\kappa}\dot{q}_\kappa \tag{5.74}$$

$$h_\kappa = -\frac{1}{\kappa}q_\kappa \tag{5.75}$$

$$\omega = \kappa\dot{\lambda}_\kappa \tag{5.76}$$

$$\delta h_\kappa = -\frac{1}{\kappa}\delta q_\kappa \tag{5.77}$$

$$\dot{\lambda}_L + \dot{\lambda}_R + \dot{\lambda}_\kappa - V(t) = 0 \tag{5.78}$$

$$\delta\lambda_L + \delta\lambda_R + \delta\lambda_\kappa = 0 \tag{5.79}$$

$$\dot{h}_\kappa = -\dot{h}_J - \dot{h}_K - \dot{h}_B + T(t) \tag{5.80}$$

ya da

$$\dot{h}_K = -\dot{h}_J + \frac{1}{\kappa}\dot{q}_\kappa - \dot{h}_B + T(t) \tag{5.81}$$

Ama $i_L = i_R$ olduğundan, eleman denklemlerinden aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\lambda_L = \frac{L}{R}\dot{\lambda}_R \tag{5.82}$$

$$\delta\lambda_L = \frac{L}{R}\delta\dot{\lambda}_R \tag{5.83}$$

Diğer yandan $i_\kappa = i_L$ ve dolayısıyla $\dot{q}_\kappa = i_L$ ya da $\ddot{q}_\kappa = \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_L = \frac{1}{L}\dot{\lambda}_L = \frac{1}{R}\ddot{\lambda}_R$ olduğundan aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\dot{q}_\kappa = \frac{1}{L}\lambda_L = \frac{1}{R}\dot{\lambda}_R \tag{5.84}$$

Ayrıca denklemler (5.74), (5.84) ve (5.82); (5.77) ve (5.84); (5.79) ve (5.83) kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\dot{h}_\kappa = -\frac{1}{\kappa}\dot{q}_\kappa = -\frac{1}{\kappa L}\lambda_L = -\frac{1}{\kappa R}\dot{\lambda}_R \tag{5.85}$$

$$\delta h_\kappa = -\frac{1}{\kappa}\delta q_\kappa = -\frac{1}{\kappa R}\delta\lambda_R \tag{5.86}$$

$$\delta\lambda_\kappa = -\delta\lambda_L - \delta\lambda_R = -\frac{L}{R}\delta\dot{\lambda}_R - \delta\lambda_R \tag{5.87}$$

Denklem (5.78) ve (5.82)'den aşağıdaki denklem bulunur.

$$\dot{\lambda}_\kappa = V(t) - \dot{\lambda}_L - \dot{\lambda}_R = V(t) - \frac{L}{R}\ddot{\lambda}_R - \dot{\lambda}_R \tag{5.88}$$

Denklemler (5.81) ve (5.84)'den aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\dot{h}_K = -\dot{h}_J + \frac{1}{\kappa R}\dot{\lambda}_R - \dot{h}_B + T(t) \tag{5.89}$$

$$\delta\dot{h}_K = -\delta\dot{h}_J + \frac{1}{\kappa R}\delta\dot{\lambda}_R - \delta\dot{h}_B \tag{5.90}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}\frac{T_K^{\ 2}}{K} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_L^{\ 2}}{L} - \frac{1}{2}\frac{h_J^{\ 2}}{J}\right) - \frac{v_R}{R}\delta\lambda_R - \frac{T_B}{B}\delta h_B - i_\kappa\delta\lambda_\kappa - \omega\delta h_\kappa\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{K}T_K\delta T_K - \frac{1}{L}\lambda_L\delta\lambda_L - \frac{1}{J}h_J\delta h_J - \frac{v_R}{R}\delta\lambda_R - \frac{T_B}{B}\delta h_B - i_\kappa\delta\lambda_\kappa - \omega\delta h_\kappa\right]dt \end{aligned} \tag{5.91}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanır ve denklemler (5.70) ve (5.71) kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{K}\dot{h}_K\delta\dot{h}_K - \frac{1}{L}\lambda_L\delta\lambda_L - \frac{1}{J}h_J\delta h_J - \frac{\dot{\lambda}_R}{R}\delta\lambda_R - \frac{\dot{h}_B}{B}\delta h_B + \kappa\dot{h}_\kappa\delta\lambda_\kappa - \kappa\dot{\lambda}_\kappa\delta h_\kappa\right]dt \tag{5.92}$$

Şimdi sistem kabul edilebilirlik şartlarını uygulayarak değişken sayısı azaltalım. Denklemler (5.89), (5.90), (5.82), (5.83), (5.85), (5.87), (5.71), (5.88) ve (5.86) kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l} \frac{1}{K}\left[-\dot{h}_J + \frac{1}{\kappa R}\dot{\lambda}_R - \dot{h}_B + T(t)\right]\left(-\delta\dot{h}_J + \frac{1}{\kappa R}\delta\dot{\lambda}_R - \delta\dot{h}_B\right) \\ -\frac{L}{R^2}\dot{\lambda}_R\delta\dot{\lambda}_R - \frac{1}{J}h_J\delta h_J - \frac{\dot{\lambda}_R}{R}\delta\lambda_R - \frac{\dot{h}_B}{B}\delta h_B \\ +\frac{1}{R}\dot{\lambda}_R\left(\frac{L}{R}\delta\dot{\lambda}_R + \delta\lambda_R\right) - \kappa\left(V(t) - \frac{L}{R}\ddot{\lambda}_R - \dot{\lambda}_R\right)\left(-\frac{1}{\kappa R}\delta\lambda_R\right) \end{array}\right]dt \tag{5.93}$$

İşlemleri kolaylaştırmak için bir Γ terimini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Gamma = \frac{1}{K}\left[-\dot{h}_J + \frac{1}{\kappa R}\dot{\lambda}_R - \dot{h}_B + T(t)\right] \tag{5.94}$$

Denklem (5.93)'de Γ terimi yerine koyulur ve varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integralleri alınırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \begin{bmatrix} \dot{\Gamma}\delta h_J - \dot{\Gamma}\frac{1}{\kappa R}\delta\lambda_R + \dot{\Gamma}\delta h_B \\ + \frac{L}{R^2}\ddot{\lambda}_R\delta\lambda_R - \frac{1}{J}h_J\delta h_J - \frac{\dot{\lambda}_R}{R}\delta\lambda_R - \frac{\dot{h}_B}{B}\delta h_B \\ - \frac{L}{R^2}\ddot{\lambda}_R\delta\lambda_R + \frac{1}{R}\dot{\lambda}_R\delta\lambda_R + \frac{1}{R}\left(V(t) - \frac{L}{R}\ddot{\lambda}_R - \dot{\lambda}_R\right)\delta\lambda_R \end{bmatrix} dt \tag{5.95}$$

Terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa,

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \left[\dot{\Gamma} - \frac{1}{J}h_J\right]\delta h_J \\ + \left[-\dot{\Gamma}\frac{1}{\kappa R} - \frac{L}{R^2}\ddot{\lambda}_R + \frac{1}{R}V(t) - \frac{1}{R}\dot{\lambda}_R\right]\delta\lambda_R \\ + \left[\dot{\Gamma} - \frac{\dot{h}_B}{B}\right]\delta h_B \end{array} \right\} dt = 0$$

(Rastgele δh_J, $\delta\lambda_R$ ve δh_B için) (5.96)

Bu ifadenin rastgele δh_J, $\delta\lambda_R$ ve δh_B için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse üç adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$\dot{\Gamma} - \frac{1}{J}h_J = 0 \tag{5.97}$$

$$-\dot{\Gamma}\frac{1}{\kappa R} + \frac{1}{R}V(t) - \frac{L}{R^2}\ddot{\lambda}_R - \frac{1}{R}\dot{\lambda}_R = 0 \tag{5.98}$$

$$\dot{\Gamma} - \frac{\dot{h}_B}{B} = 0 \tag{5.99}$$

Bu denklemlerdeki Γ terimi denklem (5.94)'den alınarak yerine koyulursa dinamik denklemler aşağıdaki hali alır.

$$\frac{1}{K}\left[-\ddot{h}_J + \frac{1}{\kappa R}\ddot{\lambda}_R - \ddot{h}_B + \dot{T}(t)\right] - \frac{1}{J}h_J = 0 \tag{5.100}$$

$$-\frac{1}{\kappa RK}\left[-\ddot{h}_J+\frac{1}{\kappa R}\ddot{\lambda}_R-\ddot{h}_B+\dot{T}(t)\right]+\frac{1}{R}V(t)-\frac{L}{R^2}\ddot{\lambda}_R-\frac{1}{R}\dot{\lambda}_R=0 \tag{5.101}$$

$$\frac{1}{K}\left[-\ddot{h}_J+\frac{1}{\kappa R}\ddot{\lambda}_R-\ddot{h}_B+\dot{T}(t)\right]-\frac{\dot{h}_B}{B}=0 \tag{5.102}$$

Yukarıdaki denklemlerde h_B değişkeni kolaylıkla yok edilebilir ve dinamik denklemler iki bilinmeyen ve iki denklem halinde yazılabilir. Bunun için denklem (5.101)'den $\ddot{h}_B$ çözülürse,

$$\ddot{h}_B=-\kappa KV(t)+\frac{\kappa KL}{R}\ddot{\lambda}_R+\frac{1}{\kappa R}\ddot{\lambda}_R+\kappa K\dot{\lambda}_R-\ddot{h}_J+\dot{T}(t) \tag{5.103}$$

$$\dddot{h}_B=-\kappa K\dot{V}(t)+\frac{\kappa KL}{R}\dddot{\lambda}_R+\frac{1}{\kappa R}\dddot{\lambda}_R+\kappa K\ddot{\lambda}_R-\dddot{h}_J+\ddot{T}(t) \tag{5.104}$$

Bu ifade denklem (5.100)'de ve (5.102)'nin türevinde yerine koyulursa dinamik denklemler aşağıdaki hali alır.

$$\frac{\kappa L}{R}\ddot{\lambda}_R+\kappa\dot{\lambda}_R+\frac{1}{J}h_J-\kappa V(t)=0 \tag{5.105}$$

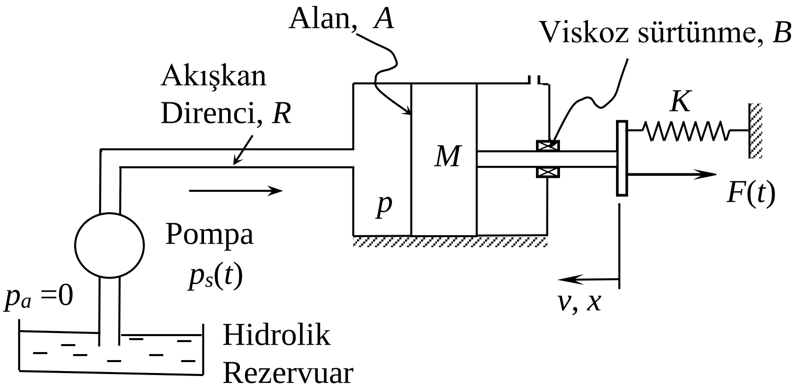
$$\begin{aligned}&\frac{\kappa L}{R}\dddot{\lambda}_R+\left(\kappa+\frac{\kappa KL}{RB}+\frac{1}{\kappa RB}\right)\ddot{\lambda}_R+\frac{\kappa K}{B}\dot{\lambda}_R\\&-\frac{1}{B}\ddot{h}_J-\frac{\kappa K}{B}V(t)-\kappa\dot{V}(t)+\frac{1}{B}\dot{T}(t)=0\end{aligned} \tag{5.106}$$

Bu örnekte yukarıda incelenen üç yaklaşımdan elde edilen dinamik denklemler, hangi yaklaşım kullanılırsa kullanılsın uygun işlemler sonucunda θ cinsinden aşağıdaki denklemi verir.

$$\begin{aligned}&J\dddot{\theta}+\left(B+\frac{RJ}{L}\right)\ddot{\theta}+\left(K+\frac{RB}{L}+\frac{1}{LK_a^{\,2}}\right)\dot{\theta}\\&+\frac{RK}{L}\theta-\frac{1}{LK_a}V(t)-\dot{T}(t)-\frac{R}{L}T(t)=0\end{aligned} \tag{5.107}$$

Örnek 2: Hidro-mekanik Sistem

Şekil 5.3'de verilen hidro-mekanik sistemin dinamik denklemlerini Hamilton Prensibinin farklı yazılım biçimlerini kullanarak bulalım. Bu sistemde akışkan ve mekanik enerjiler arasındaki dönüşüm bir jiratör (hidrolik silindir-piston) vasıtasıyla sağlanmaktadır. Şekilde görülen oklar, pozitif olarak kabul edilen gerilim düşme ve akım yönlerini göstermektedir. Dinamik denklemler bulunurken yöntemlere açıklık getirmek için Hamilton integrali iki farklı biçimde yazılacaktır, *i*) integral gerilim değişkenleri kullanılması, *ii*) akım değişkenleri kullanılması.



Şekil 5.3

i) İntegral gerilim değişkenleri kullanılması

Sistem elemanları:

Akışkanlı elemanlar:	Direnç:	R
	Gerilim kaynağı:	$p_s(t)$
Mekanik elemanlar:	Kütle:	M
	Yay:	K
	Sönümleyici:	B
	Akım kaynağı:	$F(t)$
İki kapılı eleman:	Hidro-mekanik dönüştürücü	

Ko-enerji terimleri:

$$E_M{}^* = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{5.108}$$

Enerji terimleri:

$$E_K = \frac{1}{2}Kx^2 \tag{5.109}$$

İş terimleri

$$\delta W_R = -\frac{p_R}{R}\delta\Gamma_{RR} \tag{5.110}$$

$$\delta W_B = -Bv\delta x \tag{5.111}$$

$$\delta W_F = -F(t)\delta x \tag{5.112}$$

$$\delta W_s = -Q\delta\Gamma - F_p\delta x \tag{5.113}$$

İntegral gerilim değişkenlerinin tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$p = \dot{\Gamma} \qquad p_R = \dot{\Gamma}_R = p_s(t) - \dot{\Gamma} \qquad \delta\Gamma_R = -\delta\Gamma \qquad v = \dot{x} \tag{5.114}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

Düğümlerdeki gerilim değerleri kullanıldığından sadece iki kapılı elemandan gelen kabul edilebilirlik şartları vardır.

$$p = \frac{1}{A} F_p \tag{5.115}$$

$$Q = -Av \tag{5.116}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\left(\frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} K x^2 \right) + \frac{p_s(t) - \dot{\Gamma}}{R} \delta\Gamma - B v \delta x - F(t)\delta x - Q\delta\Gamma - F_p \delta x \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[M v \delta v - K x \delta x + \frac{p_s(t) - \dot{\Gamma}}{R} \delta\Gamma - B v \delta x - F(t)\delta x - Q\delta\Gamma - F_p \delta x \right] dt \end{aligned} \tag{5.117}$$

Eleman ve sistem kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa aşağıdaki ifade bulunur.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[M\dot{x}\delta\dot{x} - Kx\delta x + \frac{p_s(t) - \dot{\Gamma}}{R} \delta\Gamma - B\dot{x}\delta x - F(t)\delta x + A\dot{x}\delta\Gamma - A\dot{\Gamma}\delta x \right] dt \tag{5.118}$$

İlk terimin kısmi integrali alınır, terimler düzenlenir ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem bulunur:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-M\ddot{x} - B\dot{x} - Kx - A\dot{\Gamma} - F(t) \right] \delta x + \left[-\frac{1}{R}\dot{\Gamma} + \frac{1}{R} p_s(t) + A\dot{x} \right] \delta\Gamma \right\} dt = 0$$

(Rastgele δx ve $\delta\Gamma$ için.) (5.119)

Bu ifadenin rastgele δx ve $\delta\Gamma$ için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse iki adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx + A\dot{\Gamma} + F(t) = 0 \tag{5.120}$$

$$\frac{1}{R}\dot{\Gamma} - \frac{1}{R} p_s(t) - A\dot{x} = 0 \tag{5.121}$$

Yukarıda ikinci denklemden $\dot{\Gamma}$ alınır, birinci denklemde yerine koyulursa ve terimler düzenlenirse, dinamik denklem sadece *x* cinsinden aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$M\ddot{x} + \left(B + A^2 R\right)\dot{x} + Kx + Ap_s(t) + F(t) = 0 \tag{5.122}$$

ii) İntegral akım değişkenleri kullanılması

Denklemleri yazarken elemanlar üzerindeki gerilim değişkeni farklarını düğümlerdeki gerilim değişkenleri cinsinden, yani p, $p_s(t)$ ve v cinsinden yazalım. Ayrıca sistem kabul edilebilirlik şartlarından gelen $Q_R = Q_p \ (= Q)$ ve $\upsilon_R = \upsilon_p \ (= \upsilon)$ eşitliklerini şimdiden uygulayalım.

Ko-enerji terimleri:

$$E_K{}^* = \frac{1}{2}\frac{F_K{}^2}{K} \tag{5.123}$$

Enerji terimleri:

$$E_M = \frac{1}{2}\frac{P_M{}^2}{M} \tag{5.124}$$

İş terimleri

$$\delta W_R = -RQ\delta\upsilon \tag{5.125}$$

$$\delta W_B = -\frac{F_B}{B}\delta P_B \tag{5.126}$$

$$\delta W_p = -p\delta\upsilon - v\delta P_p \tag{5.127}$$

İntegral akım değişkenlerinin tanımlarından gelen kabul edilebilirlik şartları:

$$\begin{matrix} Q = \dot{\upsilon} & F_M = \dot{P}_M & F_B = \dot{P}_B & F_K = \dot{P}_K & F_p = \dot{P}_p \\ \delta Q = \delta\dot{\upsilon} & \delta F_M = \delta\dot{P}_M & \delta F_B = \delta\dot{P}_B & \delta F_K = \delta\dot{P}_K & \delta F_p = \delta\dot{P}_p \end{matrix} \tag{5.128}$$

Sistem kabul edilebilirlik şartları:

$$p = \frac{1}{A}F_p \tag{5.129}$$

$$Q = -Av \tag{5.130}$$

$$F_p + F_K + F_B + F_M + F(t) = 0 \tag{5.131}$$

Denklem (5.131)'den aşağıdaki ifadeler de yazılabilir.

$$\dot{P}_p + \dot{P}_K + \dot{P}_B + \dot{P}_M + F(t) = 0 \tag{5.132}$$

Yayın eleman denkleminden $\ddot{P}_K = K\dot{x} = Kv$ olduğundan aşağıdaki denklem bulunur.

$$v = \frac{1}{K}\ddot{P}_K \tag{5.133}$$

Bu ifade denklem (5.130) ile birlikte kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\dot{\upsilon} = -Av = -\frac{A}{K}\ddot{P}_K \tag{5.134}$$

$$\upsilon = -\frac{A}{K}\dot{P}_K \tag{5.135}$$

$$\delta\upsilon = -\frac{A}{K}\delta\dot{P}_K \tag{5.136}$$

Akışkan direncinin eleman denkleminden ve denklem (5.134)'den aşağıdaki denklem bulunur.

$$p = p_s(t) - R\dot{\upsilon} = p_s(t) + \frac{AR}{K}\ddot{P}_K \tag{5.137}$$

Denklem (5.129) ve (5.137)'den aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\dot{P}_p = Ap = Ap_s(t) + \frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K \tag{5.138}$$

$$\delta P_p = \frac{A^2R}{K}\delta\dot{P}_K \tag{5.139}$$

Denklemler (5.132) ve (5.139)'dan aşağıdaki ifadeler yazilabilir.

$$\dot{P}_B = -F(t) - \dot{P}_M - \dot{P}_K - \dot{P}_p = -F(t) - \dot{P}_M - \dot{P}_K - Ap_s(t) - \frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K \tag{5.140}$$

$$\delta P_B = -\delta P_M - \delta P_K - \delta P_p = -\delta P_M - \delta P_K - \frac{A^2R}{K}\delta\dot{P}_K \tag{5.141}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{1}{2}\frac{F_K{}^2}{K} - \frac{1}{2}\frac{P_M{}^2}{M}\right) - RQ\delta\upsilon - \frac{F_B}{B}\delta P_B - p\delta\upsilon - v\delta P_p\right]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{K}F_K\delta F_K - \frac{1}{M}P_M\delta P_M - RQ\delta\upsilon - \frac{F_B}{B}\delta P_B - p\delta\upsilon - v\delta P_p\right]dt \end{aligned} \tag{5.142}$$

Eleman kabul edilebilirlik şartları uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{K}\dot{P}_K\delta\dot{P}_K-\frac{1}{M}P_M\delta P_M-R\dot{\upsilon}\delta\upsilon-\frac{\dot{P}_B}{B}\delta P_B-p\delta\upsilon-v\delta P_p\right]dt \tag{5.143}$$

Yukarıdaki ifadede denklemler (5.134), (5.136), (5.140), (5.141), (5.137), (5.133) ve (5.139)'dan alınan terimler yerine koyulursa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{K}\dot{P}_K\delta\dot{P}_K-\frac{1}{M}P_M\delta P_M-\frac{A^2R}{K^2}\ddot{P}_K\delta\dot{P}_K\\ -\frac{1}{B}\left(-F(t)-\dot{P}_M-\dot{P}_K-Ap_s(t)-\frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right)\left(-\delta P_M-\delta P_K-\frac{A^2R}{K}\delta\dot{P}_K\right)\\ +\left(p_s(t)+\frac{AR}{K}\ddot{P}_K\right)\frac{A}{K}\delta\dot{P}_K-\frac{1}{K}\ddot{P}_K\left(\frac{A^2R}{K}\delta\dot{P}_K\right)\end{array}\right]dt \tag{5.144}$$

Terimler düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{M}P_M+\frac{1}{B}\begin{pmatrix}-F(t)-\dot{P}_M-\dot{P}_K\\ -Ap_s(t)-\frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\end{pmatrix}\right]\delta P_M\\ +\left[\frac{1}{B}\left(-F(t)-\dot{P}_M-\dot{P}_K-Ap_s(t)-\frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right)\right]\delta P_K\\ +\left[\begin{array}{l}\frac{1}{K}\dot{P}_K+\frac{A^2R}{KB}\left(-F(t)-\dot{P}_M-\dot{P}_K-Ap_s(t)-\frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right)\\ +\frac{A}{K}p_s(t)-\frac{A^2R}{K^2}\ddot{P}_K\end{array}\right]\delta\dot{P}_K\end{array}\right\}dt \tag{5.145}$$

Yukarıdaki ifadeye Hamilton prensibinin uygulanabilmesi için önce üçüncü köşeli parantezdeki terimlerin kısmi integrallerinin alınması ve sonra da rastgele δP_M ve δP_K için integralin sıfıra götürülmesi gerekir. Ancak integralin altında δP_M teriminin türevi olmadığından Dinamik denklemlerden birisi ilk köşeli parantezin içini sıfıra eşitleyerek aşağıdaki gibi bulunur.

$$-\frac{1}{M}P_M+\frac{1}{B}\left(-F(t)-\dot{P}_M-\dot{P}_K-Ap_s(t)-\frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right)=0 \tag{5.146}$$

İşlemleri kolaylaştırmak için aşağıdaki gibi bir Γ terimi tanımlayalım.

$$\Gamma = \frac{1}{B}\left(-F(t) - \dot{P}_M - \dot{P}_K - Ap_s(t) - \frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right) = \frac{1}{M}P_M \tag{5.147}$$

Bu terim Hamilton integralindeki ikinci ve üçüncü parantezlerde yerine koyulursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{M}P_M + \frac{1}{B}\left(-F(t) - \dot{P}_M - \dot{P}_K - Ap_s(t) - \frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right)\right]\delta P_M \\ &+\frac{1}{M}P_M\delta P_K + \left[\frac{1}{K}\dot{P}_K + \frac{A^2R}{KM}P_M + \frac{A}{K}p_s(t) - \frac{A^2R}{K^2}\ddot{P}_K\right]\delta\dot{P}_K\end{aligned}\right\}dt \tag{5.148}$$

Varyasyonların türevlerini içeren terimlerin kısmi integralleri alınır ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{M}P_M + \frac{1}{B}\left(-F(t) - \dot{P}_M - \dot{P}_K - Ap_s(t) - \frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right)\right]\delta P_M \\ &+\left[\frac{1}{M}P_M - \frac{1}{K}\ddot{P}_K - \frac{A^2R}{KM}\dot{P}_M - \frac{A}{K}\dot{p}_s(t) + \frac{A^2R}{K^2}\dddot{P}_K\right]\delta P_K\end{aligned}\right\}dt = 0$$

(Rastgele δP_M ve δP_K için.) (5.149)

Bu ifadenin rastgele δP_M ve δP_K için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse iki adet dinamik denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$-\frac{1}{M}P_M + \frac{1}{B}\left(-F(t) - \dot{P}_M - \dot{P}_K - Ap_s(t) - \frac{A^2R}{K}\ddot{P}_K\right) = 0 \tag{5.150}$$

$$\frac{1}{M}P_M - \frac{1}{K}\ddot{P}_K - \frac{A^2R}{KM}\dot{P}_M - \frac{A}{K}\dot{p}_s(t) + \frac{A^2R}{K^2}\dddot{P}_K = 0 \tag{5.151}$$

Yukarıdaki denklemlerden denklem (5.122)'nin elde edilebileceğini gösterelim. Kütlenin eleman denkleminden,

$$\dot{P}_M = M\ddot{x} \tag{5.152}$$

yayın eleman denkleminden ise,

$$\dot{P}_K = Kx \tag{5.153}$$

olduğuna göre, bu ifadeler denklem (5.150)'de yerine koyulursa aşağıdaki denklem bulunur.

$$-\frac{1}{M}M\dot{x}+\frac{1}{B}\left(-F(t)-M\ddot{x}-Kx-Ap_s(t)-\frac{A^2R}{K}K\dot{x}\right)=0 \tag{5.154}$$

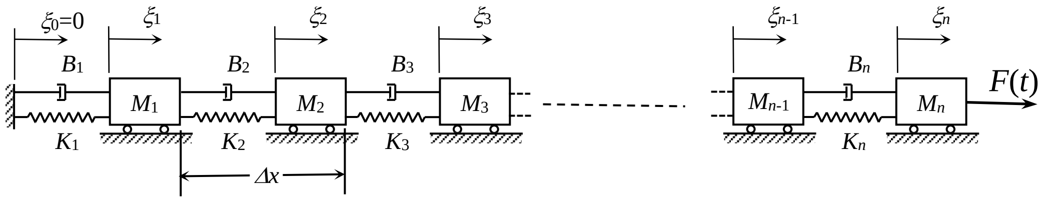
Yukarıdaki denklemde terimler yeniden düzenlenirse denklem (5.122) ile aynı olan aşağıdaki denklem bulunur.

$$M\ddot{x}+\left(B+A^2R\right)\dot{x}+Kx+Ap_s(t)+F(t)=0 \tag{5.155}$$

Denklemler (5.152) ve (5.153), denklem (5.151)'de yerine koyulursa ise bilinmeyenlerin tamamen birbirini götürdüğü ve bilinmeyenler cinsinden bir dinamik denklemin yok olduğu görülür.

6
HAMİLTON PRENSİBİNİN YAYILI PARAMETRELİ SİSTEMLERE UYGULANMASI

Yayılı parametreli sistemlerde özellikler sistem elemanlarında yayılı haldedir. Örneğin elastik bir çubukta kütle ve yay özellikleri çubuk boyunca sürekli bir şekilde yayılıdır. Yayılı parametreli bir sistem küçük elemanlardan oluşan kümesel parametreli bir sistem olarak düşünülebilir. Bu şekilde tanımlanan bir kümesel parametre modelinde elemanların boyu sıfıra doğru, eleman sayısı ise sonsuza doğru götürülürse, yayılı parametreli sistem elde edilir. Böyle düşünüldüğünde, yayılı parametreli bir sistemin modellenmesi için sonsuz sayıda genelleştirilmiş koordinat gerekeceği açıktır. Örneğin uzunlamasına yönde hareket edebilen; kütle, elastisite ve sönüm özelliklerinin yayılı olduğu bir çubuğun modeli Şekil 6.1'deki gibi kütle, yay ve sönümleyiciden oluşan birimlerin birleştirilmesiyle ve eleman sayısı n'yi sonsuza, eleman boyutu Δx'i ise sıfıra doğru götürerek elde edilebilir. Şekildeki ξ_i (i = 1, ...n) terimleri i'inci kütlenin yer değişimidir.



Şekil 6.1

Hamilton prensibi yayılı parametreli sistemler için de geçerlidir. Ancak bu durumda Lagrange fonksiyoneli $\mathcal{L}$ ve iş terimlerindeki toplamların yerini modellenen eleman boyunca alınan integraller alır. Hamilton prensibinin kümesel parametre sistemlerine uygulanması sonucu adi diferansiyel denklemler elde edilirken, yayılı parametreli sistemlerde kısmi diferansiyel denklemler ve bunlara ait doğal sınır şartları bulunur.

Aşağıda yayılı parametreli mekanik, akışkanlı, elektrik ve ısıl sistemlere Hamilton prensibinin uygulanışı örneklerle açıklanacaktır.

6.1 Mekanik Sistemler

Bü tür sistemler arasında parametrelerin yayılı olduğu kirişler ve miller, gergin tel ve halatlar, membranlar gibi elemanlara sahip sistemler sayılabilir. Bu sistemlerde kütle/atalet momenti, yay ve sönüm özellikleri yayılı halde olabilir. Sistem içinde yayılı parametreye sahip elemanların yanı sıra kümelenmiş parametrelerle modellenebilen elemanlar ve birden fazla noktaya uygulanmış konum, hız, kuvvet, moment gibi zorlamalar bulunabilir.

6.1.1 Yayılı Parametreli Kirişlerin Modellenmesi, Kinetik Ko-enerjileri, Potansiyel Enerjileri

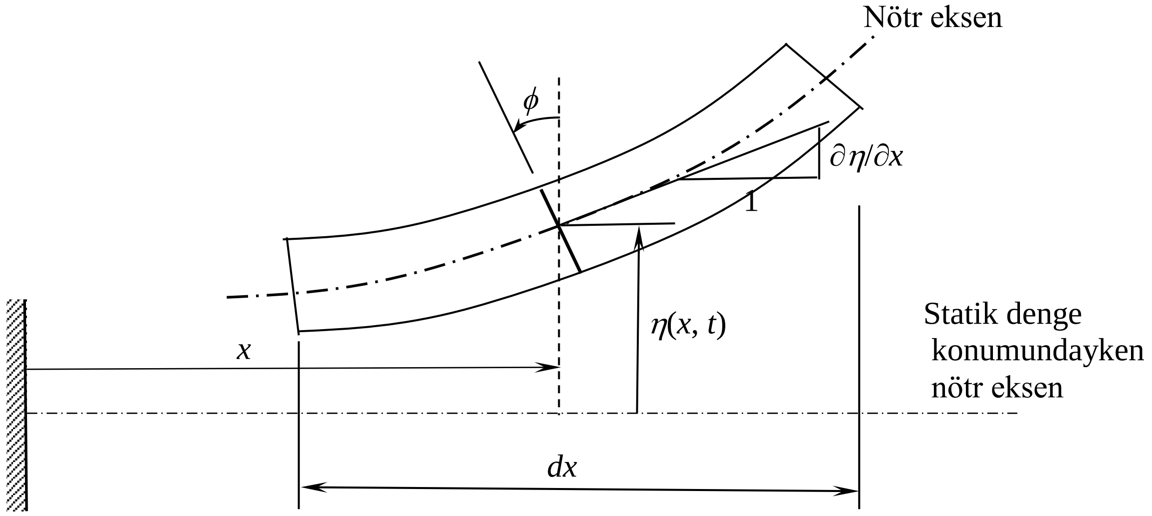
Yayılı parametreli kiriş ve millere uygulamada sıkça karşılaşılır. Sürekli ortam söz konusu olduğundan yayılı parametreli kiriş ve millerde sonsuz sayıda titreşim modu vardır. Bu kirişlerin modellenmesi için çeşitli dinamik modeller geliştirilmiştir. Bu modeller oluşturulmalarında kullanılan varsayımlara göre kirişin birinci ya da ilk iki modundaki davranışlarını iyi tanımlar. Bu kitabın konusu dışında olduğu için bu modlardaki titreşim biçimlerinin ayrıntılarına burada girilmeyecektir. Aşağıda başlıca modeller açıklanacak ve bu modeller için kinetik ko-enerji ve potansiyel enerji ifadeleri bulunacaktır.

i) Timoshenko Kirişi [2]

Timoshenko tarafından önerilen bu model burada verilen modeller arasında en genelidir. Yayılı parametreli kirişlerin birinci ve ikinci moddaki dinamik davranışını tüm frekanslarda iyi tanımlar. Bu modelde eğilmeden kaynaklanan yay özelliğinin yanı sıra kaymadan kaynaklanan yay özelliği de dikkate alınır. Kütlelerin kinetik ko-enerjileri hesaplanırken ise hem yanal hem de açısal hızların katkıları dahil edilir.

Bir Timoshenko kirişinin sol ucundan x kadar uzaklıkta, dx genişliğinde bir kiriş dilimini ele alalım. (Şekil 6.1.) Bu kirişin nötr ekseni herhangi bir zorlama yokken ve statik denge durumundayken şekildeki gibi olsun. Kiriş dilimi herhangi bir anda başlangıçtaki durumundan yanal yöne doğru $\eta(x,t)$ kadar ayrılmış olsun. Kiriş statik denge konumundayken elemanın kesit alanı nötr eksene dik olsun ve herhangi bir anda bu durumdan $\phi(x,t)$ kadar bir açı yapsın. Kirişle ilgili aşağıdaki parametreler verilmiş olsun.

Kiriş uzunluğu	:	L	Kesit atalet momenti	:	I
Kesit alanı	:	A	Malzeme yoğunluğu	:	ρ
Elastisite modülü	:	E	Şekil katsayısı	:	k
Kayma modülü	:	G			



Şekil 6.1

Timoshenko Kirişinin Kinetik Ko-enerjisi

Timoshenko kirişinin kinetik ko-enerjisine hem kütlelerin yanal yöndeki hızları hem de atalet momentlerinin açısal hızları katkıda bulunur. Yoğunluğu ρ olan, ince (kalınlık, t) elemanlarda kütlesel atalet momenti (I_m) ile kesit alanı atalet momenti (I_a) arasında $I_m = \rho I_a t$ ilişkisi olduğu dikkate alınırsa, dx kalınlığındaki elemanın kinetik ko-enerjisi (dT^*) aşağıdaki gibi bulunur.

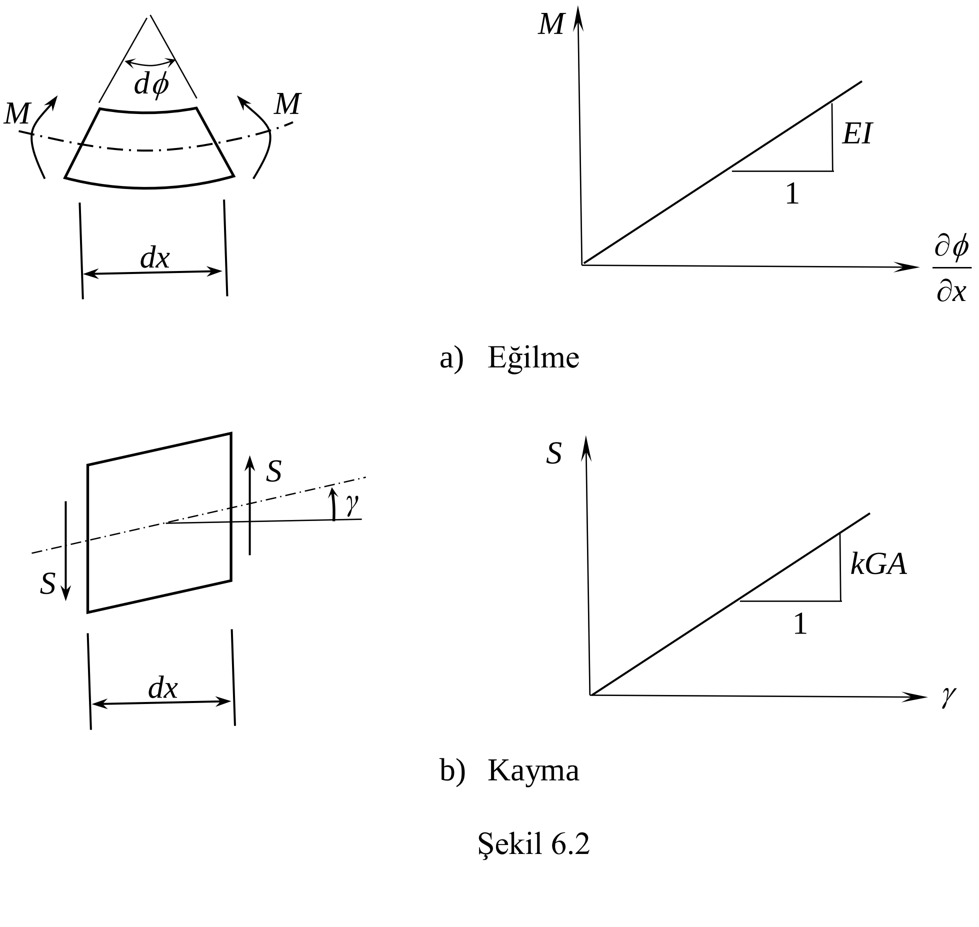
$$dT^* = \frac{1}{2}(\rho A dx)\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}(\rho I dx)\left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\right)^2 \qquad (6.1)$$

Kirişin toplam kinetik ko-enerji ise bu ifadenin kiriş boyunca integralini alarak elde edilir:

$$T^* = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho I\left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\right)^2\right] dx \qquad (6.2)$$

Timoshenko Kirişinin Potansiyel Enerjisi

Timoshenko kirişinde potansiyel enerji bulunurken hem eğilme hem de kaymadan kaynaklanan yay özellikleri dikkate alınır. Şekil 6.2'de elastik bir malzemenin eğilme ve kayma durumlarını tanımlayan eğriler görülmektedir.



Şekil 6.2

Şekil 6.2(b)'de geçen *A* terimi kiriş kesit alanı, *k* ise kesit alanına ilişkin kayma katsayısıdır. *k*'nın değeri dikdörtgen kesit için 0,83, dairesel kesit için 0,85 ve *I*-kesit için 0,95 kadardır.

Önce eğilmeden kaynaklanan potansiyel enerji terimini bulalım. *dx* kalınlığındaki elemanın eşdeğer yay sabiti k_e olsun. Buna göre,

$$M = k_e d\phi = k_e \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \tag{6.3}$$

olur. Diğer yandan Şekil 6.2(a)'daki grafikten

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{6.4}$$

yazılabilir. Denklemler (6.3) ve (6.4)'den k_e çözülürse, *dx* kalınlığındaki elemanın yay sabiti için aşağıdaki ifade bulunur.

$$k_e = \frac{EI}{dx} \tag{6.5}$$

Elemanın eğilmeden kaynaklanan potansiyel enerjisi (dV_e) aşağıdaki gibi bulunur.

$$dV_e = \frac{1}{2}\left(\frac{EI}{dx}\right)(d\phi)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{EI}{dx}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx\right)^2 = \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 dx \tag{6.6}$$

Şimdi de *dx* kalınlığındaki elemanın kaymadan kaynaklanan potansiyel enerjisini bulalım. Şekil 6.2(b)'de elemanın sol tarafını sabitleyelim ve *S* kuvvetinin uygulandığı noktadaki yay sabitini (k_k) bulalım. Bu noktada konum değişikliği γdx kadar olduğundan aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$S = k_k (\gamma dx) \tag{6.7}$$

Şekil 6.2(b)'deki grafikten ise aşağıdaki denklem yazılır:

$$S = kGA\gamma \tag{6.8}$$

Denklemler (6.7) ve (6.8)'den k_k çözülürse, *dx* kalınlığındaki elemanın kaymadan kaynaklanan yay sabiti için aşağıdaki ifade bulunur.

$$k_k = \frac{kGA}{dx} \tag{6.9}$$

Elemanın kaymadan kaynaklanan potansiyel enerjisi (dV_k) aşağıdaki gibi bulunur.

$$dV_k = \frac{1}{2}\left(\frac{kGA}{dx}\right)(\gamma dx)^2 = \frac{1}{2} kGA\gamma^2 dx \tag{6.10}$$

Diğer yandan Şekil (6.1)'de kesit alanı ϕ açısı kadar, nötr eksen ise $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ açısı kadar döndüğünden aralarındaki fark kayma açısı γ kadardır:

$$\gamma = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \phi \tag{6.11}$$

Bu ifade denklem (6.10)'da yerine koyulursa aşağıdaki denklem bulunur.

$$dV_k = \frac{1}{2} kGA \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \phi \right)^2 dx \tag{6.12}$$

dx kalınlığındaki elemanın kaymadan kaynaklanan toplam potansiyel enerjisi denklemler (6.6) ve (6.12) ile verilen ifadelerin toplamıdır:

$$dV = \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} kGA \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} - \phi(x,t) \right)^2 dx \tag{6.13}$$

Kirişin toplam potansiyel enerjisi ise bu ifadenin kiriş boyunca integralini alarak elde edilir:

$$V = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kGA \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} - \phi(x,t) \right)^2 \right] dx \tag{6.14}$$

ii) Bernoulli-Euler Kirişi

Bernoulli-Euler kiriş modeli yayılı parametreli bir kirişin dinamiğini incelemek için en basit modeldir. Bu modelde kirişin sadece eğilmesinden kaynaklanan yay özelliği olduğu ve yayılı kütlenin yanal yönde bir hıza sahip olduğu kabul edilir. Buna karşılık kaymadan kaynaklanan yay özelliği ve kütlelerin dönmelerinden kaynaklanan atalet özellikleri ihmal edilir. Bernoulli-Euler modeli kirişlerin birinci moddaki alçak frekanslı davranışlarını iyi tanımladığı halde, yüksek frekanslarda yetersiz kalır.

Bernoulli-Euler kirişinin kinetik ko-enerjisi, Timoshenko kirişi için bulunan kinetik ko-enerji ifadesinde (Denklem 6.2) dönmeyle ilgili terimi atarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \tag{6.15}$$

Potansiyel enerji ise yine Timoshenko kirişi için elde edilen potansiyel enerji ifadesinde (Denklem 6.14) kaymadan kaynaklanan terimi atarak bulunur:

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \tag{6.16}$$

iii) Rayleigh Kirişi

Rayleigh kirişinde kütlelerin hem yanal hareketlerinden hem de dönmeden kaynaklanan kinetik ko-enerjileri problem fomülasyonuna dahil edilir. Ama kayma deformasyonunun potansiyel enerjiye katkısı ihmal edilir. Rayleigh kiriş modeli kirişlerin alçak frekanslı birinci mod ve yüksek frekanslı ikinci moddaki davranışlarını iyi tanımlar. Bu kiriş modeli için kinetik ko-enerji ve potansiyel enerji ifadeleri, daha genel olan Timoshenko kirişi için bulunan ve denklemler (6.2) ve (6.14) ile verilen ifadelerin özel hali olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T^* = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho I \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \tag{6.17}$$

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \tag{6.18}$$

iv) Kayma Kirişi

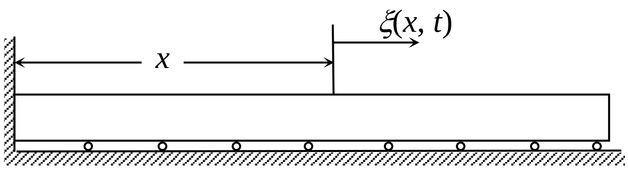
Kayma kirişi modeli dönmeden kaynaklanan kinetik ko-enerjiyi ihmal eder. Kayma deformasyonunun etkisini ise dikkate alır. Bu model kirişlerin birinci moddaki davranışlarını hem alçak hem de yüksek frekanslarda iyi tanımlar. Bu kiriş modeli için kinetik ko-enerji ve potansiyel enerji ifadeleri daha genel olan Timoshenko kirişi için bulunan ifadelerden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \tag{6.19}$$

$$V = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kGA \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} - \phi(x,t) \right)^2 \right] dx \tag{6.20}$$

6.1.2 Uzunlamasına Titreşen Elastik Çubuğun Kinetik Ko-Enerjisi ve Potansiyel Enerjisi [2]

Şekil 6.3'de uzunlamasına titreşebilen elastik bir çubuk görülmektedir. Çubuğun uzunluğu *L*, malzemesinin elastisite modülü *E*, yoğunluğu ρ olsun. Şekildeki $\xi(x,t)$ terimi sol duvardan *x* uzaklıktaki bir noktanın herhangi bir *t* anındaki konumudur.



Şekil 6.3

Şimdi sol duvardan *x* kadar uzaklıkta ve *dx* uzunluğunda bir eleman tanımlayalım. Bu elemanın kinetik ko-enerjisi *dT** aşağıdaki gibidir.

$$dT^* = \frac{1}{2}(\rho A dx)\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}\right)^2 \tag{6.21}$$

Çubuğun toplam kinetik ko-enerjisi ise denklem (6.21)'in çubuk boyunca integralini alarak bulunur:

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx \tag{6.22}$$

Şimdi de *dx* boyundaki elemanın potansiyel enerji ifadesini bulalım. Elemanın uzama miktarı $\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}dx$ kadar, eşdeğer yay sabiti ise $k = \frac{AE}{dx}$ olacağına göre, elemanın potansiyel enerjisi aşağıdaki gibidir.

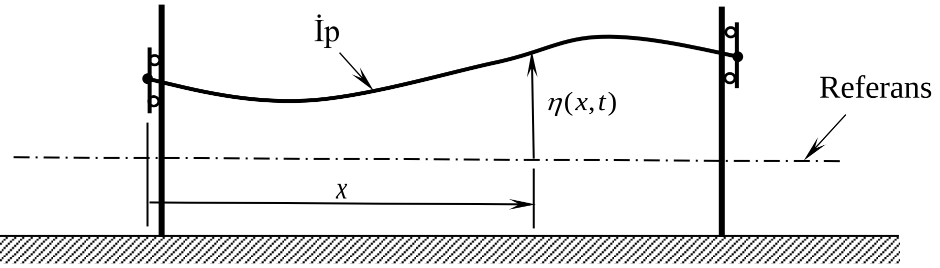
$$dV = \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{dx}\right)\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}dx\right)^2 \tag{6.23}$$

Çubuğun toplam potansiyel enerjisi ise denklem (6.23)'ün çubuk boyunca integralini alarak bulunur:

$$V = \int_0^L \frac{1}{2}AE\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx \tag{6.24}$$

6.1.3 Gergin Bir İpin Kinetik Ko-Enerjisi ve Potansiyel Enerjisi [2]

Şekil 6.4'deki ip referans durumundayken *P* kadar bir kuvvet uygulanarak gerdirilmiştir. İpin iki ucu düşey yönde serbestçe kayabilmekte, yatay yönde ise hareket edememektedir. İp referans durumundayken uzunluğu *L* kadardır. İpin kağıt düzlemi içinde olduğu kabul edilen dinamik hareketi sırasında sol ucundan *x* kadar uzaklıktaki bir noktasının herhangi bir *t* anında referans durumundan uzaklaşma miktarı $\eta(x,t)$ olsun.



Şekil 6.4

İpin üzerinde sol uçtan *x* uzaklığında ve *dx* uzunluğunda bir eleman olsun. İp malzemesinin yoğunluğu ρ ise, bu elemanın kinetik ko-enerjisi aşağıdaki gibi olur.

$$dT^* = \frac{1}{2}(\rho A dx)\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 \tag{6.25}$$

İpin toplam kinetik ko-enerjisi ise bu ifadenin ip boyunca integralini alarak bulunur:

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx \tag{6.26}$$

İpin dinamik hareketi sırasında herhangi bir t anında ipin boyu aşağıdaki integral ifadeden bulunabilir.

$$S(t) = \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2}\, dx \tag{6.27}$$

İpin referans durumundaki uzunluğu L olduğuna göre, herhangi bir t anındaki uzama miktarı $\delta(t)$ aşağıdaki gibi olur.

$$\delta(t) = \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2}\, dx - L = \int_0^L \left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2} - 1\right] dx \tag{6.28}$$

$\sqrt{1+z}$ teriminin seri açılımı,

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}z^4 + \frac{7}{256}z^5 - \cdots \tag{6.29}$$

olduğuna göre, ipin referans durumu etrafında küçük hareketler yaptığı varsayımıyla denklem (6.28)'deki kareköklü terimin seri açılımı yazılır ve yüksek mertebeli terimler ihmal edilirse $\delta(t)$ için aşağıdaki denklem bulunur.

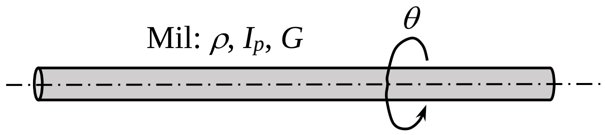
$$\delta(t) = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] dx \tag{6.30}$$

İp yeterince gerginse yukarıdaki uzama sonucu ipteki gerilme kuvvetindeki değişim miktarı ihmal edilebilir ve gerilme kuvveti P'nin sabit kaldığı kabul edilebilir. Bu durumda ipin potansiyel enerjisi $V = P\delta(t)$ olacağından aşağıdaki denklem elde edilir.

$$V = P\int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] dx \tag{6.31}$$

6.1.4 Torsiyon Titreşimi Yapan Bir Milin Kinetik Ko-Enerjisi ve Potansiyel Enerjisi

Şekil 6.5'deki mil sürtünmesiz yataklarla yeterince destekli olup yanal yönlerde hareket edememektedir. Milin uzunlamasına olan yönündeki hareketi de ihmal edilebilir. Mil malzemesinin yoğunluğu ρ, kayma modülü G; milin uzunluğu L, kesitinin polar atalet momenti I_p olsun. Torsiyon titreşimleri için milin kinetik ko-enerjisini ve potansiyel enerjisini bulalım.



Şekil 6.5

Milin sol ucundan x uzaklıkta dx uzunluğunda bir eleman olsun. Bu elemanın statik denge durumuna göre herhangi bir t anındaki açısal konumu $\theta(x,t)$ olsun. Kalınlığı t olan ince bir eleman için kütlesel atalet momenti ile polar atalet momenti arasında $I = \rho I_p t$ gibi bir ilişki olduğundan elemanın kinetik ko-enerjisi aşağıdaki gibidir.

$$dT^* = \frac{1}{2}(\rho I_p dx)\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}\right)^2 \tag{6.32}$$

Milin toplam kinetik ko-enerjisi ise bu ifadenin mil boyunca integralini alarak bulunur:

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho I_p \left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx \tag{6.33}$$

Kalınlığı dx olan elemanın torsiyon yay sabiti aşağıdaki gibidir.

$$k_t = \frac{I_p G}{dx} \tag{6.34}$$

Elemanın potansiyel enerjisi ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$dV = \frac{1}{2}\left(\frac{I_p G}{dx}\right)\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}dx\right)^2 = \frac{1}{2}I_p G\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx \tag{6.35}$$

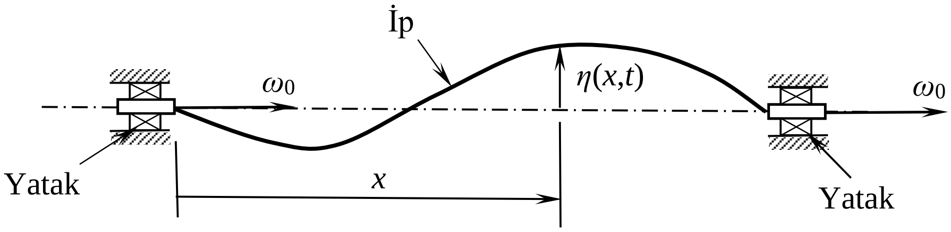
Milin toplam potansiyel enerjisi ise bu ifadenin mil boyunca integralini alarak bulunur:

$$V = \int_0^L \frac{1}{2}I_p G\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx \tag{6.36}$$

6.1.5 Dönen Gergin Bir İpin Kinetik Ko-Enerjisi ve Potansiyel Enerjisi

Şekil 6.6'daki ipteki gerilme kuvveti P, ipin uzunluğu L'dir. İp yataklar etrafında ω_0 açısal hızıyla dönmeye zorlanmaktadır. Dönme sırasında ipin bir düzlem içinde kaldığı ve bu düzlemin ω_0 hızıyla döndüğü kabul edilecektir. İpin kesit alanı A, ip malzemesinin yoğunluğu ρ'dur.

İpin üzerinde dx boyunda bir elemanın radyal yöndeki hızı $\partial\eta(x,t)/\partial t$ teğetsel yöndeki hızı $\omega_0\eta(x,t)$ olduğuna göre kinetik ko-enerjisi aşağıdaki gibi olur.



Şekil 6:6

$$dT^* = \frac{1}{2}(\rho A dx)\left[\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 + [\omega_0 \eta(x,t)]^2\right] \tag{6.37}$$

İpin toplam kinetik ko-enerjisi ise yukarıdaki ifadenin ip boyunca integralini alarak bulunur:

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A\left[\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 + [\omega_0 \eta(x,t)]^2\right]dx \tag{6.38}$$

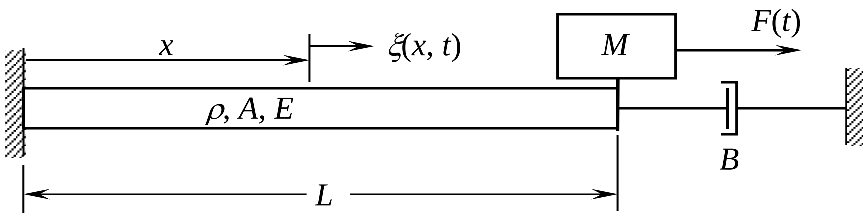
İpin potansiyel enerjisi ise daha önce denklem bölüm 6.1.3'de bulunmuştu ve aşağıdaki gibidir.

$$V = P\int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{6.39}$$

6.2 Yayılı Parametreli Mekanik Sistemlere Örnekler

6.2.1 Uzunlamasına Titreşen Elastik Çubuk, Kütle ve Sönümleyici Sistemi

Şekil 6.7'deki sistemde L uzunluğunda elastik bir çubuğun ucuna bir M kütlesi koyulmuştur. Çubuk sol tarafından sabitlenmiş olup, sağ ucuyla referans arasında bir sönümleyici vardır. Çubuğun sağ ucuna $F(t)$ kuvvet zorlaması uygulanmaktadır. Bu sistemin dinamiğini tanımlayan diferansiyel denklemi Hamilton prensibiyle bulalım.



Şekil 6.7

Denklemler (6.22 ve (6.24) kullanılırsa, sistemin kinetik ko-enerjisi, potansiyel enerjisi ve Lagrange fonksiyoneli aşağıdaki gibi bulunur.

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}M\left[\dot{\xi}(L,t)\right]^2 \tag{6.40}$$

$$V = \int_0^L \frac{1}{2}AE\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx \tag{6.41}$$

$$\mathcal{L} = T^* - V = \int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}\right)^2 - AE\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx + \frac{1}{2}M\left[\dot{\xi}(L,t)\right]^2 \tag{6.42}$$

İş terimleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\delta W = F(t)\delta\xi(L,t) - B\dot{\xi}(L,t)\delta\xi(L,t) \tag{6.43}$$

Denklemler (6.42) ve (6.43)'deki terimler Hamilton integralinde yerine koyulursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l}\delta\left[\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}\right)^2 - AE\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx + \frac{1}{2}M\left[\dot{\xi}(L,t)\right]^2\right] \\ + F(t)\delta\xi(L,t) - B\dot{\xi}(L,t)\delta\xi(L,t)\end{array}\right]dt \tag{6.44}$$

Uzunlamasına titreşim yapan elastik çubuğun daha önce Şekil 6.1'de verilen modelinde i'inci yayın esneme miktarı $\delta\xi_i - \delta\xi_{i-1}$ kadardır. Yayılı parametre modelinde bunun karşılığı $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)dx$ olur. Yayın esnemesi tek değerli olduğuna göre $\xi(x,t)$ ve $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$ terimleri $0 \le x \le L$ aralığında herhangi bir x için tek değerlidir.

Şekil 6.1'deki sistem için yazılan $(\delta\xi_i - \delta\xi_{i-1})/\Delta x$ ifadesinin yayılı parametre sistemdeki karşılığı aşağıdaki iki biçimde yorumlanabilir.

$$\frac{\delta\xi_i - \delta\xi_{i-1}}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(\delta\xi) \tag{6.45}$$

$$\frac{\delta\xi_i - \delta\xi_{i-1}}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta(\xi_i - \xi_{i-1})}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \delta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \tag{6.46}$$

(6.45) ve (6.46)'daki ifadelerden aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\delta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x} \tag{6.47}$$

Benzer düşünce tarzıyla aşağıdaki ifade de yazılabilir.

$$\delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)=\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial t} \tag{6.48}$$

Denklemler (6.47) ve (6.48)'den görüldüğü gibi, kısmi türev alma ve varyasyon alma işlemlerinin sırası değiştirilebilir.

Denklemler (6.47) ve (6.48) ile verilen ilişkileri dikkate alarak Hamilton integrali altındaki varyasyon işlemi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial t}\right)-AE\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x}\right)\right]dx+M\dot{\xi}(L,t)\delta\dot{\xi}(L,t)\\ +F(t)\delta\xi(L,t)-B\dot{\xi}(L,t)\delta\xi(L,t)\end{array}\right]dt \tag{6.49}$$

Varyasyonların türevlerini içeren birinci ve üçüncü terimlerin zamana göre, ikinci terimin ise x'e göre kısmi integrali alınırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left\{-\rho A\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)\delta\xi+AE\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)\delta\xi\right\}dx-AE\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\delta\xi\Bigg|_{x=0}^{x=L}\\ -M\ddot{\xi}(L,t)\delta\xi(L,t)+F(t)\delta\xi(L,t)-B\dot{\xi}(L,t)\delta\xi(L,t)\end{array}\right]dt \tag{6.50}$$

Hamilton prensibi gereği $\delta\xi(x,t_1)=0$ ve $\delta\xi(x,t_2)=0$ olduğundan, yukarıdaki ifadede zamana göre kısmi integrallerden gelen integralsiz terimler ortadan kalkmıştır. Diğer yandan $\xi(0,t)=0$ olduğundan $\delta\xi(0,t)=0$ olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left[-\rho A\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)+AE\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)\right]\delta\xi dx\\ \displaystyle-\left[\left(AE\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+M\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right)\Bigg|_{x=L}-F(t)\right]\delta\xi(L,t)\end{array}\right]dt=0$$

$$(0\le x\le L \text{ aralığında rastgele } \delta\xi(x,t) \text{ için.}) \tag{6.51}$$

$\delta\xi(x,t)$ ve $\delta\xi(L,t)$ rastgele varyasyonlar olduğundan, integrali sıfır yapmak için bu terimleri çarpan köşeli parantezler sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

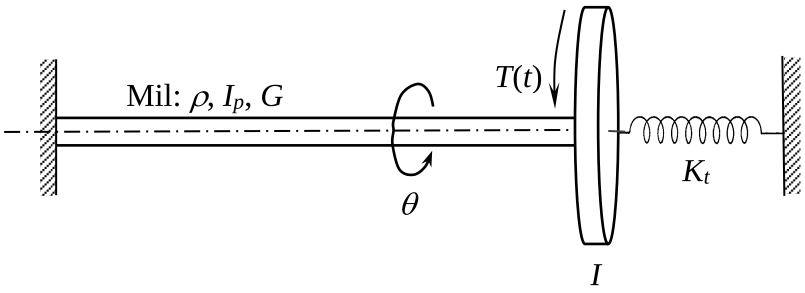
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\qquad (0\le x\le L) \tag{6.52}$$

$$\left[AE\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+M\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)+B\frac{\partial\xi}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=L}=F(t) \tag{6.53}$$

Yukarıda denklem (6.53) ile verilen şarta "doğal sınır şartı" denir. Denklem (6.52) çözülürken doğal sınır şartına ve $\xi(0,t)=0$ şartına ek olarak ayrıca $0 \le x \le L$ için $\xi(x,0)$ ve $\dfrac{\partial \xi(x,0)}{\partial t}$ başlangıç şartlarının da verilmesi gerekir.

6.2.2 Torsiyon Titreşimi Yapan Mil, Atalet Momenti ve Yay Sistemi

Şekil 6.8'de görülen L uzunluğundaki yayılı parametreli milin sol ucu sabitlenmiştir. Sağ ucuna ise atalet momenti I olan bir disk ve bir torsiyon yayı bağlıdır. Diske $T(t)$ gibi bir dış moment zorlaması uygulanmaktadır. Sistem sadece torsiyon titreşimi yapabilecek biçimde yataklanmıştır. Bu sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibini uygulayarak bulalım.



Şekil 6.8

Torsiyon titreşimi yapan mil için daha önce bulunan ve denklem (6.33) ile verilen kinetik ko-enerji ifadesinden yararlanılırsa, sistemin kinetik ko-enerjisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho I_p \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} I \left[\dot{\theta}(L,t)\right]^2 \tag{6.54}$$

Milin potansiyel enerjisi denklem (6.36)'da verildiği gibi olduğundan, sistemin toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibidir.

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} I_p G \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} K_t \left[\theta(L,t)\right]^2 \tag{6.55}$$

İş terimi aşağıdaki gibidir.

$$\delta W = T(t)\delta\theta(L,t) \tag{6.56}$$

Denklemler (6.54)-(6.56)'daki terimler Hamilton integralinde yerine koyulursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \delta\left[\displaystyle\int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho I_p \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} I_p G \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] dx + \frac{1}{2} I \left[\dot{\theta}(L,t)\right]^2 - \frac{1}{2} K_t \left[\theta(L,t)\right]^2 \right] \\ + T(t)\delta\theta(L,t) \end{array} \right\} dt \tag{6.57}$$

Denklemler (6.47) ve (6.48)'e göre kısmi türev alma ve varyasyon alma işlemlerinin sırasının değiştirilebilirliğini dikkate alarak Hamilton integrali altındaki varyasyon işlemi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left[\rho I_p\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}\right)-I_pG\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial x}\right)\right]dx\\ +I\dot{\theta}(L,t)\delta\dot{\theta}(L,t)-K_t\theta(L,t)\delta\theta(L,t)+T(t)\delta\theta(L,t)\end{array}\right\}dt \tag{6.58}$$

Varyasyonların türevlerini içeren birinci ve üçüncü terimlerin zamana göre, ikinci terimin ise x'e göre kısmi integrali alınsın. Hamilton prensibi gereği $\delta\theta(x,t_1)=0$ ve $\delta\theta(x,t_2)=0$ olduğundan, zamana göre kısmi integrallerden gelen integralsiz terimler ortadan kalkar ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left\{-\rho I_p\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)\delta\theta+I_pG\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)\delta\theta\right\}dx-I_pG\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\delta\theta\Bigg|_{x=0}^{x=L}\\ -I\ddot{\theta}(L,t)\delta\theta(L,t)-K_t\theta(L,t)\delta\theta(L,t)+T(t)\delta\theta(L,t)\end{array}\right\}dt \tag{6.59}$$

Çubuğun sol tarafı sabitlenmiş olduğundan $\theta(0,t)=0$ ve $\delta\theta(0,t)=0$ olur. Bu ifade kullanılır, gerekli düzenlemeler yapılır ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left[-\rho I_p\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)+I_pG\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)\right]\delta\theta dx\\ -\left[\left(I_pG\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+I\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)+K_t\theta\right)\Bigg|_{x=L}-T(t)\right]\delta\theta(L,t)\end{array}\right\}dt=0$$

($0\le x\le L$ aralığında rastgele $\delta\theta(x,t)$ için.) (6.60)

$\delta\theta(x,t)$ ve $\delta\theta(L,t)$ rastgele varyasyonlar olduğundan, integrali sıfır yapmak için bu terimleri çarpan köşeli parantezler sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\qquad(0\le x\le L) \tag{6.61}$$

$$\left[I_pG\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+I\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)+K_t\theta\right]\Bigg|_{x=L}=T(t) \tag{6.62}$$

Denklem (6.61) çözülürken, denklem (6.62) ile verilen doğal sınır şartına ve $\theta(0,t)=0$ şartına ek olarak ayrıca $0\le x\le L$ için $\theta(x,0)$ ve $\dfrac{\partial\theta(x,0)}{\partial t}$ başlangıç şartlarının da verilmesi gerekir.

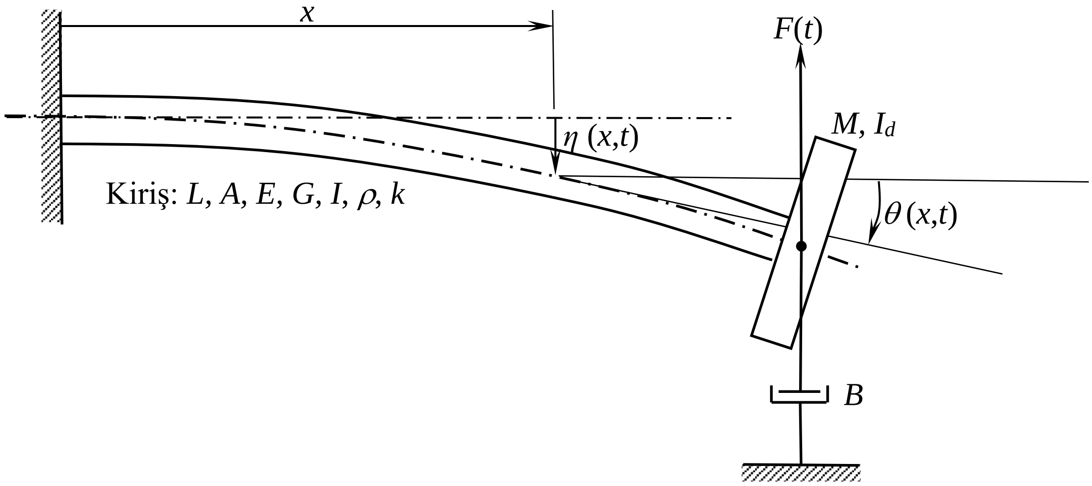
6.2.3 Ucunda Gövde ve Sönümleyici Olan Timoshenko Kirişi

Şekil 6.9’da görülen L uzunluğundaki Timoshenko kirişinin bir ucu sabitlenmiştir. Kirişin diğer ucunda ise kütlesi M ve atalet momenti I_d olan bir gövde ve bir sönümleyici bulunmaktadır. Sistemin hareketi kağıt düzlemi içindedir. Yerçekimi yoktur. Bu sistemin dinamik denklemlerini Hamilton prensibini uygulayarak bulalım.

Sistemin Kinetik Ko-enerjisi:

Denklem (6.2)’deki sonuç kullanılırsa, kinetik ko-enerji aşağıdaki gibi bulunur.

$$T^* = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho I \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t} \right]^2 + \frac{1}{2} I_d \left[\frac{\partial \theta(L,t)}{\partial t} \right]^2 \tag{6.63}$$



Şekil 6.9

Sistemin Potansiyel Enerjisi:

Denklem (6.14)’den sistemin potansiyel enerjisi aşağıdaki gibidir.

$$V = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kGA \left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right)^2 \right] dx \tag{6.64}$$

İş Terimleri:

$$\delta W = -F(t)\delta\eta(L,t) - B\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t} \right) \delta\eta(L,t) \tag{6.65}$$

Yukarıdaki terimler kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi olur.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\delta\left[\begin{array}{l}\int_0^L\left[\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\rho I\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}\right)^2\right]dx+\frac{1}{2}M\left[\frac{\partial\eta(L,t)}{\partial t}\right]^2+\frac{1}{2}I_d\left[\frac{\partial\theta(L,t)}{\partial t}\right]^2\\-\int_0^L\left[\frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}kGA\left(\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}-\theta(x,t)\right)^2\right]dx\end{array}\right]\\-F(t)\delta\eta(L,t)-B\dot{\eta}(L,t)\delta\eta(L,t)\end{array}\right\}dt \tag{6.66}$$

Hamilton integrali altındaki varyasyon işlemi uygulanırsa ve kısmi türev alma ve varyasyon alma işlemlerinin sırasının değiştirilebilirliği dikkate alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial(\delta\eta)}{\partial t}\right)+\rho I\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial t}\right)\right]dx+M\dot{\eta}(L,t)\delta\dot{\eta}(L,t)+I_d\dot{\theta}(L,t)\delta\dot{\theta}(L,t)\\-\int_0^L\left[EI\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(\delta\theta)}{\partial x}\right)+kGA\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\theta\right)\left(\frac{\partial(\delta\eta)}{\partial x}-\delta\theta\right)\right]dx\\-F(t)\delta\eta(L,t)-B\dot{\eta}(L,t)\delta\eta(L,t)\end{array}\right\}dt \tag{6.67}$$

Varyasyonların zamana göre türevlerini içeren terimlerin zamana göre, x'e göre türevlerini içeren terimlerin x'e göre kısmi integralleri alınırsa, $\delta\eta(x,t_1)=0$, $\delta\eta(x,t_2)=0$, $\delta\theta(x,t_1)=0$ ve $\delta\theta(x,t_2)=0$ olduğu için zamana göre kısmi integralden gelen integralsiz terimler ortadan kalkar ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\int_0^L\left\{-\rho A\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)\delta\eta-\rho I\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)\delta\theta\right\}dx\\-\int_0^L\left[-EI\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)\delta\theta-kGA\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\delta\eta-kGA\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\theta\right)\delta\theta\right]dx\\-\left[EI\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\delta\theta+kGA\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\theta\right)\delta\eta\right]\Bigg|_{x=0}^{x=L}-M\ddot{\eta}(L,t)\delta\eta(L,t)\\-I_d\ddot{\theta}(L,t)\delta\theta(L,t)-F(t)\delta\eta(L,t)-B\dot{\eta}(L,t)\delta\eta(L,t)\end{array}\right\}dt \tag{6.68}$$

Kirişin sol tarafı sabitlenmiş olduğundan $\eta(0,t)=0$, $\theta(0,t)=0$, $\delta\eta(0,t)=0$ ve $\delta\theta(0,t)=0$ olur. Bu ifadeler kullanılırsa ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^L \left\{ \begin{array}{l} \left[-\rho A\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right) + kGA\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right]\delta\eta \\ + \left[-\rho I\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right) + EI\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) + kGA\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \theta\right)\right]\delta\theta \end{array} \right\} dx \\ - EI\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\Big|_{x=L} \delta\theta(L,t) - kGA\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \theta\right)\Big|_{x=L} \delta\eta(L,t) \\ - M\ddot{\eta}(L,t)\delta\eta(L,t) - I_d\ddot{\theta}(L,t)\delta\theta(L,t) \\ - F(t)\delta\eta(L,t) - B\dot{\eta}(L,t)\delta\eta(L,t) \end{array} \right\rangle dt = 0$$

($0 \le x \le L$ aralığında rastgele $\delta\eta(x,t)$ ve $\delta\theta(x,t)$ için.) (6.69)

Bu ifadenin sıfıra eşit olması ancak rastgele varyasyonların katsayılarını sıfıra eşitleyerek sağlanacağından aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\rho A\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right) - kGA\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = 0 \qquad (0 \le x \le L) \qquad (6.70)$$

$$\rho I\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right) - EI\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) - kGA\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \theta\right) = 0 \qquad (0 \le x \le L) \qquad (6.71)$$

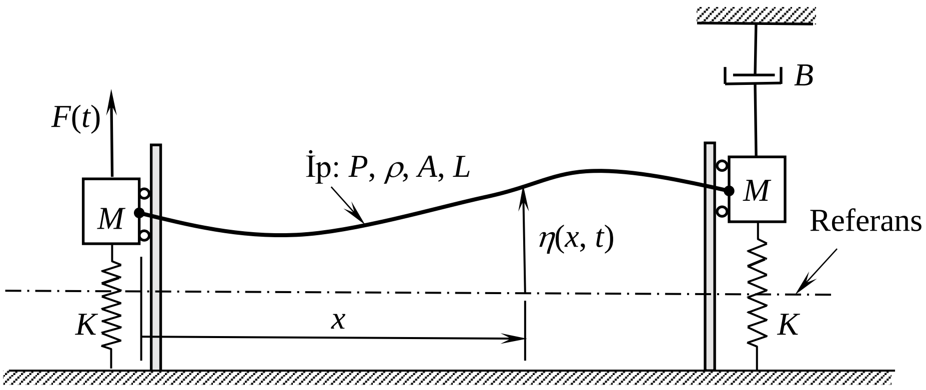
$$\left[M\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + B\frac{\partial\eta}{\partial t} + kGA\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \theta\right)\right]\Big|_{x=L} = -F(t) \qquad (6.72)$$

$$\left[I_d\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + EI\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\Big|_{x=L} = 0 \qquad (6.73)$$

Denklemler (6.70) ve (6.71) çözülürken, denklemler (6.72) ve (6.73) ile verilen doğal sınır şartları ve $\eta(0,t) = 0$, $\theta(0,t) = 0$, $\dot{\eta}(0,t) = 0$ ve $\dot{\theta}(0,t) = 0$ şartlarına ek olarak $0 \le x \le L$ için $\eta(x,0)$, $\theta(x,0)$, $\dot{\eta}(x,0)$ ve $\dot{\theta}(x,0)$ başlangıç şartlarının da verilmesi gerekir.

6.2.4 Uçlarında Kütle, Sönümleyici ve Yay Olan Gergin İp

Şekil 6.10'daki ip $F(t) = 0$ iken ve statik denge durumundayken referans çizgisi üzerindedir. İp bu durumdayken P kadar bir kuvvet uygulanarak gerdirilmiştir. İpin iki ucu düşey yönde serbestçe kayabilmekte, yatay yönde ise hareket edememektedir. İp referans durumundayken uzunluğu L kadardır. İpin hareketi kağıt düzlemi içindedir. Hareket sırasında ipin sol ucundan x kadar uzaklıktaki bir noktasının herhangi bir t anında referans durumundan uzaklaşma miktarı $\eta(x,t)$ kadardır. Yerçekimi ihmal edilebilir.



Şekil 6.10

Sistemin Kinetik Ko-enerjisi:

Denklem (6.26)'daki sonuç kullanılırsa, sistemin kinetik ko-enerjisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$T^* = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial \eta(0,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t}\right)^2 \tag{6.74}$$

Sistemin Potansiyel Enerjisi:

Denklem (6.31)'den yararlanılırsa sistemin potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V = P\int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] dx + \frac{1}{2}K[\eta(0,t)]^2 + \frac{1}{2}K[\eta(L,t)]^2 \tag{6.75}$$

İş Terimleri:

$$\delta W = F(t)\delta\eta(0,t) - B\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t}\right)\delta\eta(L,t) \tag{6.76}$$

Yukarıdaki terimler kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi olur.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \delta \left[\begin{array}{l} \int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2\right] dx + \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial \eta(0,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t}\right)^2 \\ -\int_0^L \left[\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right] dx - \frac{1}{2}K[\eta(0,t)]^2 - \frac{1}{2}K[\eta(L,t)]^2 \end{array} \right] \\ + F(t)\delta\eta(0,t) - B\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t}\right)\delta\eta(L,t) \end{array} \right\} dt \tag{6.77}$$

Hamilton integrali altındaki varyasyon işlemi uygulanırsa ve kısmi türev alma ve varyasyon alma işlemlerinin sırasının değiştirilebilirliği dikkate alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial (\delta \eta)}{\partial t} \right) \right] dx + M \frac{\partial \eta(0,t)}{\partial t} \frac{\partial \delta \eta(0,t)}{\partial t} + M \frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t} \frac{\partial \delta \eta(L,t)}{\partial t} \\ - \int_0^L \left[P \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial (\delta \eta)}{\partial x} \right) \right] dx - K\eta(0,t)\delta\eta(0,t) - K\eta(L,t)\delta\eta(L,t) \\ + F(t)\delta\eta(0,t) - B\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t} \right) \delta\eta(L,t) \end{array} \right\} dt \qquad (6.78)$$

Varyasyonların zamana göre türevlerini içeren terimlerin zamana göre, x'e göre türevlerini içeren terimlerin ise x'e göre kısmi integralleri alınırsa, Hamilton prensibi gereği $\delta\eta(x,t_1) = 0$ ve $\delta\eta(x,t_2) = 0$ olduğundan zamana göre kısmi integrallerden gelen integralsiz terimler ortadan kalkar ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \left\{ -\rho A \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \delta\eta \right\} dx - M \frac{\partial^2 \eta(0,t)}{\partial t^2} \delta\eta(0,t) - M \frac{\partial^2 \eta(L,t)}{\partial t^2} \delta\eta(L,t) \\ - \int_0^L \left[-P \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \delta\eta \right] dx - \left[P \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \delta\eta \right]_{x=0}^{x=L} - K\eta(0,t)\delta\eta(0,t) - K\eta(L,t)\delta\eta(L,t) \\ + F(t)\delta\eta(0,t) - B\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t} \right) \delta\eta(L,t) \end{array} \right\} dt$$

(6.79)

Terimler düzenlenirse ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \left[-\rho A \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) + P \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right] \delta\eta dx \\ + \left[-M \frac{\partial^2 \eta(0,t)}{\partial t^2} + P \left(\frac{\partial \eta(0,t)}{\partial x} \right) - K\eta(0,t) + F(t) \right] \delta\eta(0,t) \\ + \left[-M \frac{\partial^2 \eta(L,t)}{\partial t^2} - P \left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial x} \right) - K\eta(L,t) - B\left(\frac{\partial \eta(L,t)}{\partial t} \right) \right] \delta\eta(L,t) \end{array} \right\} dt = 0$$

($0 \le x \le L$ aralığında rastgele $\delta\eta(x,t)$ için.) (6.80)

Bu ifadenin sıfıra eşit olması ancak rastgele varyasyonların katsayılarını sıfıra eşitleyerek sağlanacağından aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\rho A}{P} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) \qquad (0 \le x \le L) \qquad (6.81)$$

$$\left[M \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - P \frac{\partial \eta}{\partial x} + K\eta \right]_{x=0} = F(t) \qquad (6.82)$$

$$\left[M\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + B\frac{\partial \eta}{\partial t} + K\eta + P\frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{x=L} = 0 \tag{6.83}$$

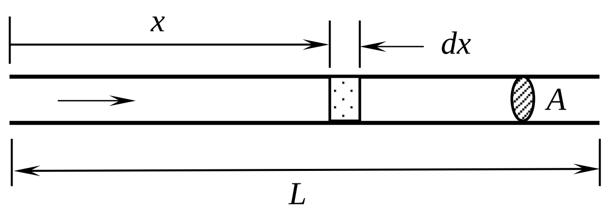
Denklem (6.81) çözülürken, denklemler (6.82) ve (6.83) ile verilen doğal sınır şartlarına ek olarak ayrıca $0 \le x \le L$ için $\eta(x,0) = 0$ ve $\dot{\eta}(x,0) = 0$ başlangıç şartlarının da verilmesi gerekir.

6.3 Akışkanlı Sistemler

Yayılı parametreli akışkanlı sistemlere tipik bir örnek uzun borularda direnç ve inertans ve akışkanın sıkıştırılabilme özelliğinin boru boyunca bir arada yayılı olmasıdır. Bu tür analizler genelde uzun borular boyunca basınç dalgalanmalarını incelemek ve basıncın güvenli sınırlar içinde kalmasını sağlamak amacıyla yapıldığından Hamilton integralinin integral gerilim değişkeni formunu kullanmak daha uygun olur. Uzun boru yatay ise inertans, direnç ve akışkanın sıkıştırılabilirliğinden kaynaklanan kapasitans özelliğinin boru boyunca yayılı olduğu varsayılır. Uzun düşey borularda ise akışkanın yerçekimi alanındaki yüksekliğinden kaynaklanan bir etki daha vardır. Aşağıda her iki durum için ko-enerji ve enerji terimleri bulunacaktır.

6.3.1 Yatay Uzun Boru

Şekil 6.11'de yatay uzun bir boru görülmektedir. Bu sistemde Lagrange fonksiyoneline boru içindeki akışkanın inertansı ve kapasitansı katkıda bulunur. Borunun boyu L, kesit alanı A olsun. Burada kesit alanının sabit olduğu kabul edilecektir. Ancak geliştirilecek olan yöntem kolaylıkla kesit alanının boru boyunca değiştiği durumlara da genişletilebilir. Boruda akan akışkan sıvı, bu sıvının yoğunluğu ρ ve bulk modülü β olsun. Borunun girişinden x uzaklıktaki debi $Q(x,t)$, basınç $p(x,t)$, yoğunluk $\rho(x,t)$ olsun.



Şekil 6.11

Borunun girişinden x uzaklıkta dx kalınlığında ve A kesit alanlı bir eleman olsun. Bu elemanın inertansı dI aşağıdaki gibidir.

$$dI = \frac{\rho(x,t)}{A}dx \cong \frac{\rho_0}{A}dx \tag{6.84}$$

Yukarıdaki denklemde $\rho(x,t)$ yerine referans basıncındaki yoğunluk olan ρ_0'ın kullanılması nonlinear bir inertans yerine lineer bir inertans elemanının kullanılması demektir.

Bir inertans elemanı üzerindeki basınç farkı $p_{21} = I(dQ/dt)$ olduğuna göre, basınç farkını yaratan esas sebep Q'nun değişmesidir. Bu varsayımla, yoğunluk değişmesi sonucu I değerinin değişmesinin etkisi ihmal edilmekte, böylece Hamilton integralinde nonlinear katsayılarla karşılaşılmasından kaçınılmaktadır.

Çizelge 4.1'deki sonuçlardan yararlanarak, dx boyundaki elemanın bu inertans dolayısıyla integral gerilim değişkeni formunda yazılan Hamilton integraline enerji terimi olarak katkısı aşağıdaki gibidir.

$$dE_T = \frac{1}{2}\frac{\left[\dfrac{\partial\Gamma(x,t)}{\partial x}dx\right]^2}{\left(\dfrac{\rho_0}{A}dx\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\left[\frac{\partial\Gamma(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{6.85}$$

Tüm borudaki akışkanın enerji terimi ise bu ifadenin boru boyunca integralini alarak bulunur.

$$E_T = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\left[\frac{\partial\Gamma(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{6.86}$$

dx uzunluğundaki akışkan elemanının sıkıştırılabilmesinden kaynaklanan kapasitans değeri, elemanın hacmi Adx, akışkanın bulk modülü ise β olduğuna göre aşağıdaki gibidir.

$$C_f = \frac{V}{\beta} = \frac{Adx}{\beta} \tag{6.87}$$

Elemanın akışkan kapasitansı dolayısıyla Hamilton integraline olan ko-enerji katkısı ise Çizelge 4.1'den yazılabilir.

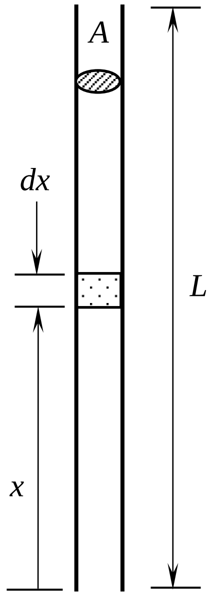
$$dE_A^* = \frac{1}{2}\left(\frac{Adx}{\beta}\right)[p(x,t)]^2 \tag{6.88}$$

Tüm borunun ko-enerji terimi ise yukarıdaki denklemin boru boyunca integralini alarak elde edilir.

$$E_A^* = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\beta}\right)[p(x,t)]^2 dx \tag{6.89}$$

6.3.2 Düşey Uzun Boru

Şekil 6.12'de düşey bir uzun boru görülmektedir. Bu sistemde Lagrange fonksiyoneline boru içindeki akışkanın inertansı ve sıkıştırılabilirliğinden kaynaklanan kapasitansının yanı sıra borudaki akışkanın yerçekimi alanı içindeki yüksekliğinden kaynaklanan potansiyel enerjisi de katkıda bulunur. Borunun boyu L, kesit alanı A olsun. Boruda akan akışkan sıvı, bu sıvının yoğunluğu ρ_0 ve bulk modülü β olsun. Borunun girişinden x uzaklıktaki debi $Q(x,t)$ ve basınç $p(x,t)$ olsun.



Şekil 6.12

Akışkanın sıkıştırılabilmesinden kaynaklanan kapasitansın toplam ko-enerji katkısı daha önce yatay boru için bulunan denklem (6.89) ile verildiği gibidir:

$$E_A^* = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\beta}\right)[p(x,t)]^2 \right\} dx \tag{6.90}$$

Daha önce yatay borunun inertansı için bulunan ve denklem (6.86) ile verilen enerji terimi bu sistem için de aynen geçerlidir. Ancak bu denklemle verilen enerji terimine ek olarak akışkan kütlelerinin yerçekimi alanındaki yüksekliği dolayısıyla bir potansiyel enerji terimi daha vardır. *dx* uzunluğundaki elemanın kütlesi için bu terim aşağıdaki gibidir.

$$dE_{Ag} = [\rho_0 A dx] g x = A g \rho_0 x dx \tag{6.91}$$

Tüm boru içindeki akışkan kütlesinin yerçekimi alanındaki yüksekliğinden kaynaklanan toplam potansiyel enerji denklem (6.91)'in boru boyunca integralini alarak bulunur.

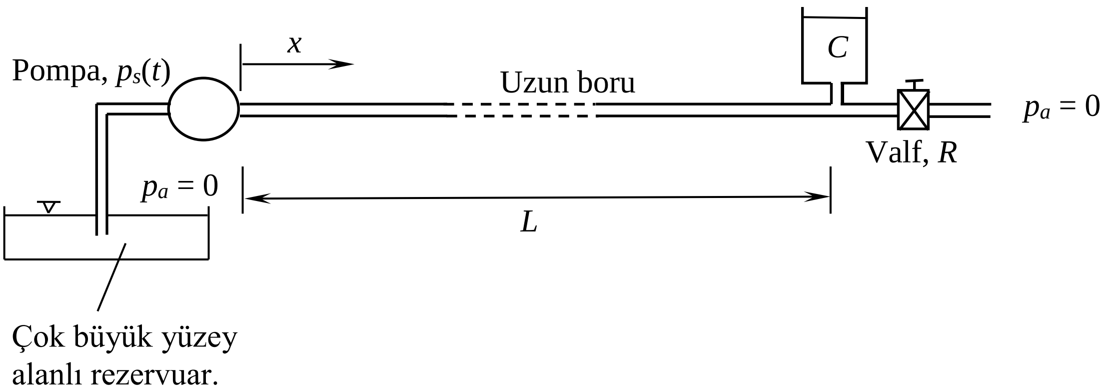
$$E_{Ag} = \int_0^L A g \rho_0 x dx \tag{6.92}$$

Sistemin toplam enerji terimi ise denklemler (6.86) ve (6.92)'nin toplamıdır:

$$E_T = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\left[\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right]^2 + A g \rho_0 x \right\} dx \tag{6.93}$$

6.3.3 Sürtünmeli Boru Hattı

Şekil 6.13'de uzun bir boru hattı görülmektedir. Basınç şoklarını önlemek için borunun çıkışında bir akışkan kapasitansı bulunmaktadır. Borunun boyu L, kesit alanı A; boruda akan akışkan sıvı, sıvının yoğunluğu ρ_0 ve bulk modülü β 'dır. Borunun girişinden x uzaklıktaki debi $Q(x,t)$ ve basınç $p(x,t)$ olsun. Boruda sürtünme vardır. Borunun birim uzunluğunun akışkan direnci γ_r kadardır.



Şekil 6.13

Sistemin Ko-enerji Terimi:

Denklem (6.89)'dan yararlanılırsa sistemin toplam ko-enerjisi aşağıdaki gibi olur.

$$E_A^* = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\beta}\right)[p(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2}C[p(L,t)]^2 \tag{6.94}$$

Sistemin Enerji Terimi:

Sistemin enerji terimi denklem (6.86)'da verildiği gibidir:

$$E_T = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\left[\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{6.95}$$

İş Terimi

Boru çıkışındaki R direncinin iş terimi aşağıdaki gibidir.

$$\delta W_R = -\frac{p(L,t)}{R}\delta\Gamma(L,t) \tag{6.96}$$

Uzun borunun dx uzunluğundaki bir elemanının akışkan direncinden kaynaklanan iş terimi ise,

$$\delta W_{\gamma dx} = -\frac{1}{\gamma_r dx}\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}dx\right)\delta\left(\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}dx\right) = -\frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \tag{6.97}$$

kadar olduğundan, borunun akışkan direncinden kaynaklanan toplam iş terimi bu ifadenin boru boyunca integralini alarak bulunur:

$$\delta W_{\gamma} = -\int_0^L \frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \tag{6.98}$$

Hamilton integralinin integral gerilim değişkeni formu kullanılacağından basınç kaynağı $p_s(t)$ sınır şartı olarak ele alınır:

$$p(0,t) = p_s(t) \tag{6.99}$$

Denklemler (6.94), (6.95), (6.96) ve (6.98) ile bulunan terimler kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l} \delta\left[\int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\beta}\right)[p(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2}C[p(L,t)]^2 - \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\left[\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx\right] \\ -\frac{p(L,t)}{R}\delta\Gamma(L,t) - \int_0^L \frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \end{array}\right\}dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l} \delta\left[\int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\beta}\right)[\dot{\Gamma}(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2}C[\dot{\Gamma}(L,t)]^2 - \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\left[\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx\right] \\ -\frac{\dot{\Gamma}(L,t)}{R}\delta\Gamma(L,t) - \int_0^L \frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial \dot{\Gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \end{array}\right\}dt \end{aligned} \tag{6.100}$$

Varyasyon işlemi uygulanırsa Hamilton integrali aşağıdaki hali alır:

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l} \int_0^L \left(\frac{A}{\beta}\right)\dot{\Gamma}(x,t)\delta\dot{\Gamma}(x,t)dx + C\dot{\Gamma}(L,t)\delta\dot{\Gamma}(L,t) \\ -\int_0^L \left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \\ -\frac{\dot{\Gamma}(L,t)}{R}\delta\Gamma(L,t) - \int_0^L \frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial \dot{\Gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \end{array}\right\}dt \tag{6.101}$$

Kısmi türev alma ve varyasyon alma işlemlerinin sırası değiştirilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l} \int_0^L \left(\frac{A}{\beta}\right)\dot{\Gamma}(x,t)\delta\dot{\Gamma}(x,t)dx + C\dot{\Gamma}(L,t)\delta\dot{\Gamma}(L,t) \\ -\int_0^L \left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\left(\frac{\partial \delta\Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \\ -\frac{\dot{\Gamma}(L,t)}{R}\delta\Gamma(L,t) - \int_0^L \frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial \dot{\Gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \delta\Gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \end{array}\right\}dt \tag{6.102}$$

Varyasyonların zamana göre türevlerini içeren terimlerin zamana göre, x'e göre türevlerini içeren terimlerin ise x'e göre kısmi integralleri alınırsa, Hamilton prensibi gereği $\delta\Gamma(x,t_1)=0$ ve $\delta\Gamma(x,t_2)=0$ olduğundan zamana göre kısmi türevden gelen integralsiz terimler düşer ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left[-\frac{A}{\beta}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}\right)\delta\Gamma(x,t)\right]dx-C\frac{\partial^2\Gamma(L,t)}{\partial t^2}\delta\Gamma(L,t)\\ \displaystyle+\int_0^L\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}\delta\Gamma(x,t)dx-\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\delta\Gamma(x,t)\Bigg|_{x=0}^{x=L}\\ \displaystyle-\frac{\dot{\Gamma}(L,t)}{R}\delta\Gamma(L,t)+\int_0^L\frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial^2\dot{\Gamma}}{\partial x^2}\right)\delta\Gamma(x,t)dx-\frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial\dot{\Gamma}}{\partial x}\right)\delta\Gamma(x,t)\Bigg|_{x=0}^{x=L}\end{array}\right\}dt \qquad (6.103)$$

Ayrıca $\dot{\Gamma}(0,t)=p_s(t)$ olduğundan $\delta\Gamma(0,t)=0$ olur. Bu ifade kullanılırsa ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left[-\frac{A}{\beta}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}\right)+\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}+\frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^2\partial t}\right)\right]\delta\Gamma(x,t)dx\\ \displaystyle+\left[-C\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}-\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}-\frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x\partial t}\right)\right]\Bigg|_{x=L}\delta\Gamma(L,t)\end{array}\right\}dt=0$$

($0\le x\le L$ aralığında rastgele $\delta\Gamma(x,t)$ için.) (6.104)

Bu ifadenin sıfıra eşit olması ancak rastgele varyasyonların katsayılarını sıfıra eşitleyerek sağlanacağından aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{A}{\beta}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}\right)-\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}-\frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^2\partial t}\right)=0 \qquad (0\le x\le L) \qquad (6.105)$$

$$\left[C\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}+\left(\frac{A}{\rho_0}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{1}{\gamma_r}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x\partial t}\right)\right]\Bigg|_{x=L}=0 \qquad (6.106)$$

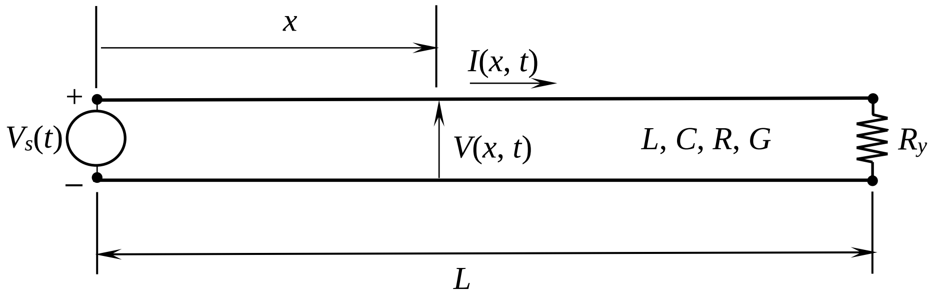
Denklem (6.105) çözülürken, denklem (6.106) ile verilen doğal sınır şartlarına ek olarak ayrıca $0\le x\le L$ için $\Gamma(x,0)=0$ ve $\dot{\Gamma}(x,0)=0$ başlangıç şartlarının verilmesi ve $\dot{\Gamma}(0,t)=p_s(t)$ şartının uygulanması gereklidir.

6.4 Elektrik Sistemleri

Yayılı parametreli elektrik sistemlerine örnek olarak bir bobinde endüktans ve direncin bir arada yayılı olarak bulunması ya da havai hatlarda ve koaksiyel kablolarda kapasitans, direnç ve endüktansın yayılı olması gösterilebilir. Aşağıda örnek olarak iki iletkenli bir nakil hattı ele alınacaktır.

6.4.1 İki İletkenli Nakil Hattı

Şekil 6.14’de iki iletkenli bir nakil hattı verilmiştir. Hattın uzunluğu *L*, birim uzunluğunun endüktansı *L*, kapasitansı *C*, direnci *R*; iki iletken arasındaki dielektrik malzemenin iletkenliği (1/direnç) *G* olsun. (Hatların endüktans, kapasitans ve direnç değerleri, çeşitli hat ve iletken geometrileri, iletken yapıları, malzeme özellikleri v.b. için iletim hatlarıyla ilgili kaynaklarda bulunabilir [6].) Hattın ucundan itibaren *x* uzaklıkta bir noktasındaki gerilim $V(x,t)$, akım ise $I(x,t)$ olsun. Hattın sol ucuna $V_s(t)$ gerilimi veren bir kaynak, sağ ucuna ise direnci R_y olan bir yük bağlıdır.



Şekil 6.14

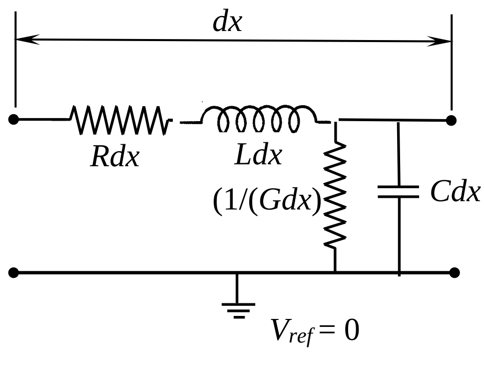
Şekil 6.15’de hattın *dx* uzunluğunda bir elemanı görülmektedir. Daha önce belirtilen parametre değerleri birim uzunluk için olduğundan, şekilde görülen direnç, kapasitans, endüktans ve dielektrik malzeme direnci değerleri sırasıyla *Rdx*, *Cdx*, *Ldx* ve 1/(*Gdx*) olarak alınmıştır. Burada sunulacak olan analizde hatta kayıp olmadığı kabul edilecek ve Şekil 6.16’daki gibi bir model kullanılacaktır.

Hamilton integralinin integral gerilim değişkeni formu kullanılırsa ko-enerji, enerji ve iş terimleri aşağıdaki gibi bulunur.

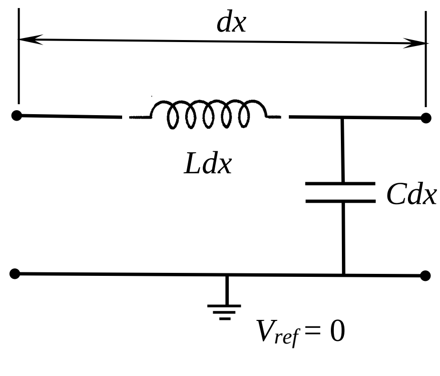
Ko-enerji terimi:

$$dE_C^* = \frac{1}{2}(Cdx)[V(x,t)]^2 = \frac{1}{2}C\left[\dot{\lambda}(x,t)\right]^2 dx \tag{6.107}$$

$$E_C^* = \int_0^L \frac{1}{2}C\left[\dot{\lambda}(x,t)\right]^2 dx \tag{6.108}$$



Şekil 6.15



Şekil 6.16

Enerji terimi:

$$dE_L = \frac{1}{2}\frac{\lambda_L{}^2}{(Ldx)} = \frac{1}{2}\frac{\left[\dfrac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}dx\right]^2}{(Ldx)} = \frac{1}{2L}\left[\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{6.109}$$

$$E_L = \int_0^L \frac{1}{2L}\left[\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{6.110}$$

İş terimi:

Problemin çözümünde Hamilton integralinin integral gerilim değişkeni formu kullanılacağından $V_s(t)$ gerilim kaynağı sınır şartı olarak ele alınır. İş terimine sadece yük direnci R_y katkıda bulunur.

$$\delta W_R = -\frac{\dot{\lambda}(L,t)}{R_y}\delta\lambda(L,t) \tag{6.111}$$

Hamilton integrali:

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta\left[\int_0^L \frac{1}{2}C\left[\dot{\lambda}(x,t)\right]^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2L}\left[\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx\right] - \frac{\dot{\lambda}(L,t)}{R_y}\delta\lambda(L,t)\right\}dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L\left[C\dot{\lambda}(x,t)\delta\dot{\lambda}(x,t) - \frac{1}{L}\left(\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\right)\right]dx - \frac{\dot{\lambda}(L,t)}{R_y}\delta\lambda(L,t)\right\}dt \end{aligned} \tag{6.112}$$

Varyasyon alma ve türev alma işlemlerinin sırası değiştirilirse ve varyasyonların zamana göre türevlerini içeren terimlerin zamana göre, x'e göre türevlerini içeren terimlerin ise x'e göre kısmi integralleri alınırsa, Hamilton prensibi gereği $\delta\lambda(x,t_1)=0$ ve $\delta\lambda(x,t_2)=0$ olduğundan zamana göre kısmi integralden gelen integralsiz terim düşer ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L\left[C\dot{\lambda}(x,t)\delta\dot{\lambda}(x,t) - \frac{1}{L}\left(\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\lambda(x,t)\right]dx - \frac{\dot{\lambda}(L,t)}{R_y}\delta\lambda(L,t)\right\}dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^L\left[\begin{array}{l} \displaystyle -C\frac{\delta^2\lambda(x,t)}{\partial t^2}\delta\lambda(x,t) \\ \displaystyle +\frac{1}{L}\left(\frac{\partial^2\lambda(x,t)}{\partial x^2}\right)\delta\lambda(x,t)\end{array}\right]dx \\ \displaystyle -\left[\frac{1}{L}\left(\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\right)\delta\lambda(x,t)\right]_{x=0}^{x=L} - \frac{\dot{\lambda}(L,t)}{R_y}\delta\lambda(L,t)\end{array}\right\}dt \end{aligned} \tag{6.113}$$

Sol uçta $\dot{\lambda}(0,t) = V_s(t)$ olduğundan $\delta\lambda(0,t) = 0$ alınırsa ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \left[-C \dfrac{\delta^2 \lambda(x,t)}{\partial t^2} + \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{\partial^2 \lambda(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] \delta\lambda(x,t) dx \\ - \left[\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{\partial \lambda(x,t)}{\partial x} \right) + \dfrac{\dot{\lambda}(x,t)}{R_y} \right]\Bigg|_{x=L} \delta\lambda(L,t) \end{array} \right\} dt = 0$$

($0 \le x \le L$ aralığında rastgele $\delta\lambda(x,t)$ için.) (6.114)

Bu ifadenin rastgele varyasyonlar için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \qquad (0 \le x \le L) \tag{6.115}$$

$$\left[\frac{1}{L}\left(\frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{R_y}\left(\frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial t} \right) \right]\Bigg|_{x=L} = 0 \tag{6.116}$$

Denklem (6.115) çözülürken denklem (6.116) ile verilen doğal sınır şartına ek olarak, $\dot{\lambda}(0,t) = V_s(t)$ sınır şartı ve $0 \le x \le L$ için $\lambda(x,0)$ ve $\dot{\lambda}(x,0)$ başlangıç şartları kullanılmalıdır.

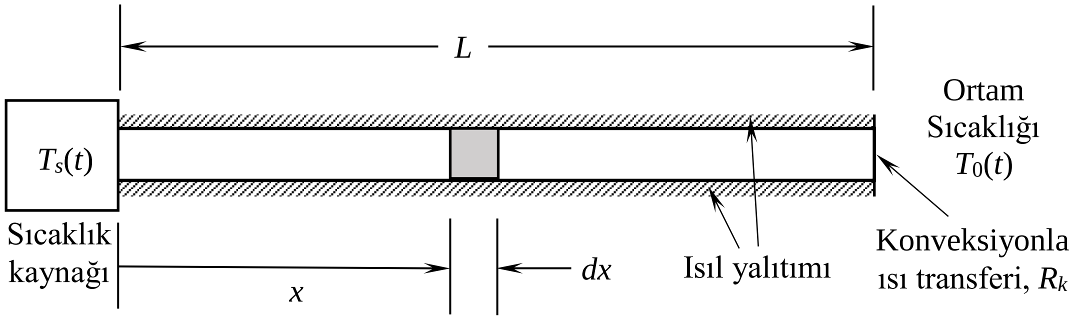
6.5 Isıl Sistemler

Isının iletim yoluyla aktarıldığı elemanlarda direnç ve kapasitans bir arada ve yayılı haldedir. Duvar, kanatçık, ısı ileten uzun elemanlardaki sıcaklık dağılımının incelenmesinde bu elemanların birden fazla katmandan oluştuğu kabul edilerek kaba bir kümesel parametre modeli kullanmak mümkündür. Ancak özellikle dinamik şartlar altında sıcaklık dağılımını doğrulukla belirleyebilmek için yayılı parametre temelli bir modelin kullanılması gerekebilir.

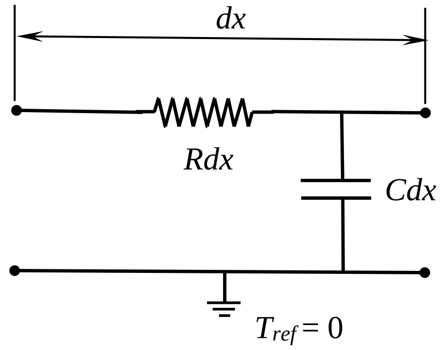
6.5.1 Uzun Bir Elemanda Isı İletimi

Şekil 6.17'de yan yüzeyleri yalıtılmış uzun bir iletken görülmektedir. Elemanın sol tarafında sıcaklık $T_s(t)$ olarak değişmektedir. Sağ uçta ise R_k gibi bir ısıl dirençle modellenen konveksiyonla ısı transferi olmaktadır. Sağ uçtaki ortam sıcaklığı $T_0(t)$'dir. Elemanın uzunluğu *L* kadardır. İletkenin birim uzunluğunun ısıl kapasitansı *C*, birim uzunluğunun ısıl direnci ise *R* kadardır. Bu parametrelerin malzeme özellikleri ve iletkenin geometrik özellikleri cinsinden ne olduğu konuyla ilgili kaynaklardan bulunabilir [6].

İletkenin sol tarafından itibaren *x* uzaklığında bir noktada *dx* kalınlığında bir eleman olsun. Bu elemanın ısıl direnci *Rdx* kadar, ısıl kapasitansı ise *Cdx* kadardır. Eleman Şekil 6.18'deki gibi modellenebilir.



Şekil 6.17



Şekil 6.18

İletkenin sol ucundan x kadar uzaklıkta sıcaklık $T(x,t)$ olsun. Hamilton integralinin integral gerilim değişkeni formu kullanılırsa, integrale katkıda bulunan terimler aşağıdaki gibi bulunur.

Ko-enerji terimi:

$$dE_C^* = \frac{1}{2}(Cdx)[T(x,t)]^2 = \frac{1}{2}C[\dot{\gamma}(x,t)]^2\,dx \tag{6.117}$$

$$E_C^* = \int_0^L \frac{1}{2}C[\dot{\gamma}(x,t)]^2\,dx \tag{6.118}$$

İş terimleri:

Problemin çözümünde Hamilton integralinin integral gerilim değişkeni formu kullanılacağından $T_s(t)$ gerilim kaynağı sınır şartı olarak ele alınır. İş terimine iletkenin yayılı direnci ve R_k katkıda bulunur. İletkenin dx uzunluğundaki elemanının katkısı,

$$\delta W_{Rdx} = -\frac{1}{Rdx}\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}dx\right)\delta\left(\frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x}dx\right) = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \dot{\gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx \tag{6.119}$$

kadar olduğundan, ısıl iletkenin direnci dolayısıyla enerji terimine toplam katkısı bu ifadenin boru boyunca integralini alarak bulunur:

$$\delta W_R = -\int_0^L \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\dot{\gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\gamma(x,t)}{\partial x}\right)dx = -\int_0^L \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\dot{\gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\gamma(x,t)dx \qquad (6.120)$$

Konveksiyon direnci R_k 'nın iş terimi ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\delta W_{Rk} &= -\frac{1}{R_k}\left[T(L,t)-T_0(t)\right]\delta\left[\gamma(L,t)-\gamma_0(t)\right]\\ &= -\frac{1}{R_k}\left[\dot{\gamma}(L,t)-T_0(t)\right]\delta\gamma(L,t)\end{aligned} \qquad (6.121)$$

Hamilton integrali:

Denklemler (6.118), (6.120) ve (6.121) ile verilen ifadeler kullanılırsa Hamilton integrali aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}H.I. &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta\left[\int_0^L \frac{1}{2}C\left[\dot{\gamma}(x,t)\right]^2\right]dx - \int_0^L \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\dot{\gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\gamma(x,t)dx - \frac{1}{R_k}\left[\dot{\gamma}(L,t)-T_0(t)\right]\delta\gamma(L,t)\right\}dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L C\dot{\gamma}(x,t)\delta\dot{\gamma}(x,t)dx - \int_0^L \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\dot{\gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\gamma(x,t)dx - \frac{1}{R_k}\left[\dot{\gamma}(L,t)-T_0(t)\right]\delta\gamma(L,t)\right\}dt\end{aligned} \qquad (6.122)$$

Varyasyonların zamana göre türevlerini içeren terimlerin zamana göre, x'e göre türevlerini içeren terimlerin ise x'e göre kısmi integralleri alınsın. Hamilton prensibi gereği $\delta\gamma(x,t_1)=0$ ve $\delta\gamma(x,t_2)=0$ olduğundan zamana göre kısmi integralden gelen integralsiz terim düşer ve Hamilton integrali aşağıdaki hali alır.

$$H.I. = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{aligned}&\int_0^L\left[-C\frac{\partial^2\gamma(x,t)}{\partial t^2}\delta\gamma(x,t)\right]dx\\ &+\int_0^L \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2\dot{\gamma}(x,t)}{\partial x^2}\right)\delta\gamma(x,t)dx - \left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\dot{\gamma}(x,t)}{\partial x}\right)\delta\gamma(x,t)\right]_{x=0}^{x=L}\\ &-\frac{1}{R_k}\left[\dot{\gamma}(L,t)-T_0(t)\right]\delta\gamma(L,t)\end{aligned}\right\}dt \qquad (6.123)$$

Sol uçta $\dot{\lambda}(0,t)=T_s(t)$ olduğundan $\delta\gamma(0,t)=0$ alınırsa ve Hamilton prensibi uygulanırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$H.I.=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^L\left[-C\frac{\partial^2\gamma(x,t)}{\partial t^2}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^3\gamma(x,t)}{\partial x^2\partial t}\right)\right]\delta\gamma(x,t)dx \\ \displaystyle -\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2\gamma(x,t)}{\partial x\partial t}\right)+\frac{1}{R_k}\left[\frac{\partial\gamma(x,t)}{\partial t}-T_0(t)\right]\right]\Bigg|_{x=L}\delta\gamma(L,t)\end{array}\right\}dt=0$$

($0\le x\le L$ aralığında rastgele $\delta\gamma(x,t)$ için.) (6.124)

Bu ifadenin rastgele varyasyonlar için sıfır olabilmesi ancak köşeli parantez içindeki ifadelerin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu ifadeler sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^2\partial t}=RC\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}\qquad (0\le x\le L)\qquad (6.125)$$

$$\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2\gamma(x,t)}{\partial x\partial t}\right)+\frac{1}{R_y}\left[\frac{\partial\gamma(x,t)}{\partial t}-T_0(t)\right]\right]\Bigg|_{x=L}=0\qquad (6.126)$$

Denklem (6.125) çözülürken denklem (6.126) ile verilen doğal sınır şartına ek olarak, $\dot{\gamma}(0,t)=T_s(t)$ sınır şartı ve $0\le x\le L$ için $\gamma(x,0)$ ve $\dot{\gamma}(x,0)$ başlangıç şartları kullanılmalıdır.

KAYNAKÇA

Bu kitap hazırlanırken aşağıdaki kaynaklardan yararlanılmıştır.

[1] *Ardema, M. D., Analytical Dynamics Theory and Applications, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2005.*

[2] Crandall, S. H. (ed.), *A Unified Approach to Dynamics via Hamilton's Principle*, MIT, Cambridge, 1962.

[3] Crandall, S.H., Dahl, N.D., *An Introduction to Mechanics of Solids*, McGraw-Hill, New York, 1959.

[4] Crandall, S. H., Karnopp, D.C., Kurtz, E.F., Pridmore-Brown, D.C., *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*, Krieger Publishing, Malabar, 1982.

[5] Ercan, Y., *İleri Dinamik*, ISBN 978-605-83437-1-9, Ankara, 2016.

[6] Ercan, Y., *Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği 3. Basım*, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2015.

[7] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J., *Classical Mechanics*, Addison Wesley, San Francisco, 2000.

[8] Greenwood, D. T., *Advanced Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[9] Han, S.M., Benaroya, H., Wei, T., Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories, *Journal of Sound and Vibration*, (1999) 225(5), 935-988.

[10] Harrison, H. R., Nettleton, T., *Advanced Engineering Dynamics*, Arnold, London, 1997.

[11] Hayt, W.H., Buck, J.A., *Engineerimg Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 2012.

[12] Jazar, R. N., *Advanced Dynamics*, John Wiley, Hoboken, 2011.

[13] Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, Mc-Graw Hill, New York, 1970.

[14] Ogata, K., *System Dynamics*, Pearson, London, 2004.

[15] Rowell, D., Wormley, D.N., *System Dynamics, An Introduction*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[16] Shabana, A., *Vibrations of Discrete and Continuous Systems*, Springer Verlag, New York, 1991.

[17] Shearer, J.L., Murphy, A.T., Richardson, H.H., *Introduction to System Dynamics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.

[18] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.

[19] Ying, S. J., *Advanced Dynamics*, AIAA, Reston, 1997.