

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SABİT KANATLI HAVA ARACI İÇİN KUATERNİYON TABANLI OPTİMAL
DOĞRUSAL KARESEL DÜZENLEYİCİ VE İNTEGRAL KONTROLÇÜ
TASARIMI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ece Nur DEMİRHAN COŞKUN

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU

ŞUBAT 2021

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Doç. Dr. Tolga GİRİCİ
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 181211047 öğrenci numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Ece Nur DEMİRHAN COŞKUN** 'nun ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "**SABİT KANATLI HAVA ARACI İÇİN KUATERNİYON TABANLI OPTİMAL DOĞRUSAL KARESEL DÜZENLEYİCİ VE İNTEGRAL KONTROLÇÜ TASARIMI**" başlıklı tezi **01.02.2021** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Coşku KASNAKOĞLU**
TOBB Ekonomive Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Doç. Dr. Tolga GİRİCİ (Başkan)**
TOBB Ekonomive Teknoloji Üniversitesi

Doç. Dr. Cengiz Polat UZUNOĞLU
İstanbul Üniversitesi Cerrahpaşa

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Ece Nur Demirhan Coşkun

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

SABİT KANATLI HAVA ARACI İÇİN KUATERNİYON TABANLI OPTİMAL
DOĞRUSAL KARESEL DÜZENLEYİCİ VE İNTEGRAL KONTROLCÜ
TASARIMI

Ece Nur Demirhan Coşkun

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Coşku Kasnakoğlu

Tarih: Şubat 2021

Literatürde, Euler tabanlı uçak modellerine dayanan birçok çalışma, düzenleme ve takip sorunları üzerinde durmaktadır. Ancak, kuaterniyonlar, tekilliklerden kaçınma ve cebirsel özelliklerin kolaylığı gibi birçok iyi özelliklere sahip olsalar da, sabit kanatlı uçaklar için bu problemleri çözmekte nadiren kullanıldıkları görülmüştür. Kuaterniyonlar, Euler açılarının neden olduğu üç boyutlu serbestlik derecesinin kaybı anlamına gelen gimbal kilitlemesini önler ve bu gibi birçok yönden avantaj sağlar. Literatürde kuaterniyon çalışmaları daha çok uzay araçları, uydu araçları ve drone'lar için tercih edilmiştir. Bu çalışmada ise, mevcut araştırma durumunun genişletilmesi amacıyla Airlib kütüphanesinin sağladığı Euler tabanlı uçak modeli, kuaterniyon tabanlı bir uçak modeline dönüştürülmüştür. Daha sonra, kuaterniyon tabanlı doğrusal karesel düzenleyici ve kuaterniyon tabanlı doğrusal karesel integral kontrolcüsü sentezlenmiş ve Cessna 172 uçak modeline uygulanmıştır. Kontrolcü tasarımı ve tüm sistemin simülasyonu MATLAB / Simulink ortamında yapılmıştır.

Kontrol teorisinde, düzenleme problemi, optimal kontrol problemlerinin önemli bir sınıfıdır. Düzenleyici problemlerini çözmek için amaç, durum vektörlerini, durumların sıfır olmayan herhangi bir başlangıç değerinden durum vektörünün orijinine mümkün olduğu kadar yaklaştırmaktır. Ayrıca bunu, aşırı kontrol çabası olmadan gerçekleştirmek istenir. Bu tezde, farklı sistemler için farklı düzenleme problemlerine ve bunların çözümlerine değinilmiştir. Doğrusal karesel düzenleyici, optimizasyon problemini uygun ağırlık matrislerinin seçimi ile çözerek optimal durum geri besleme kontrol yasası ile performans endeksini (yani maliyet fonksiyonunu) en aza indirmeyi

amaçlamaktadır. Ağırlık matrislerinin seçimi, optimizasyon problemi için birbiriyle çelişen iki kriteri tanımlamak için kullanılır. Birincisi, sistemin regülasyonun ne kadar hızlı olması gerektiğini, ikinci kriter ise kontrolcü girişinin ne kadar az olması gerektiğini belirtir. Sistemin ihtiyaçlarına göre bu iki kriterden hangisinin daha önemli olduğuna karar verilir ve ağırlık matrisleri için katsayılar seçilir. Bu tezde tasarlanan düzenleyici ve kontrolcüler için hedef, daha az kontrol kullanarak satürasyon ihtimalinin önüne geçmektir. Cessna 172 uçağı için tasarlanmış kuaterniyon tabanlı doğrusal karesel düzenleyici ile elde edilen benzetim sonuçlarından, sistem durumlarının başarılı bir şekilde başlangıç değerlerinden istenilen değerlere gittiği, sistem girişleri ve kuaterniyon değerlerinin regüle edildiği gözlemlenmektedir.

Kuaterniyon tabanlı doğrusal karesel düzenleyici tasarımına integral bir eylem eklenerek elde edilen kuaterniyon tabanlı doğrusal karesel integral yaklaşımı ile referans takibi amaçlanmıştır. Ayrıca, geri besleme kontrolcüsüne integral eylem eklenerek, sürekli hal hatası, integratör durumunun bir birikimi ile giderilmiştir. Benzetim sonuçları, tezde hedeflerin yerine getirildiğini göstermektedir.

Bu çalışma literatürde az bulunan kuaterniyon tabanlı kontrolcülerin sabit kanatlı hava araçlarına uygulanmasını ele alarak araştırma alanını genişletmiştir. Gelecek çalışmalarda, tezdeki çalışmalara ek olarak bir durum gözlemleyicisi eklenerek sistem durumlarının tahmin edilmesi ve gürültülerin giderilmesi sağlanabilir. Tasarımları doğrulamak için oldukça gerçekçi bir benzetim programı olan X-plane kullanılarak bir uçuş benzetimi gerçekleştirilerek sonuçlar iki kez doğrulanabilir. Son olarak yapılan tasarımlar tüm hava araçlarına uyarlanabilir olduğu için güncellenerek farklı hava araçlarına uygulanabilir.

Anahtar Kelimeler: Sabit-kanatlı, Kuaterniyon, Optimal kontrol, Doğrusal karesel düzenleyici, Doğrusal karesel integral.

ABSTRACT

Master of Science

QUATERNION-BASED LINEAR QUADRATIC REGULATOR AND INTEGRAL CONTROLLER DESIGN FOR A FIXED-WING AIRCRAFT

Ece Nur Demirhan Coşkun

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Coşku Kasnakoğlu

Date: February 2021

In literature, lots of works that build on Euler-based aircraft models dwell on regulation and tracking problems. However, quaternions are rarely used for solving those problems for fixed-wing aircraft though they have nice features such as avoidance of singularities and ease of algebraic properties. Moreover, quaternions prevent gimbal lock which means the loss of a three-dimensional degree of freedom caused by Euler angles and provide advantages in many ways. In numerous works, quaternions are preferred for spacecraft, satellite vehicles, or drones. In this work, for the purpose of extending the current state of research, the Euler-based aircraft model provided by Airlib library has been transformed into a quaternion-based aircraft model. Additionally, quaternion-based linear quadratic regulator and quaternion-based linear quadratic integral controller are synthesized and implemented for the Cessna 172 aircraft. The design of the controller and the simulation of the whole system was done in the MATLAB/Simulink environment.

In control theory, the regulation problem is an important class of optimal control problems. The aim of solving regulator problems is to drive the state vectors as close as possible to the origin of the state vector from any nonzero initial values of states.

Furthermore, it is desired to perform that without excessive control effort. In this thesis, different kinds of regulation problems for different systems and their solutions are touched on. The linear quadratic regulator aims to minimize the performance index (i.e. the cost function) with an optimal state feedback control law by solving the optimization problem with the selection of appropriate weight matrices. The selection of weight matrices is used to identify two conflicting criteria for the optimization problem. First, the system regulation should be fast, while the second criterion requires the controller input to be low. According to the needs of the system, it is decided which of these two criteria is more important and the coefficients for the weight matrices are selected. In this thesis, the aim of the designed regulator and controller is to avoid saturation by using less control. It is observed from the simulation results, obtained with the quaternion-based linear quadratic regulator designed for the Cessna 172 aircraft, that the system states successfully go from the initial values to the desired values and that the system inputs and quaternion values are regulated.

Reference tracking is aimed with the quaternion-based linear quadratic integral approach obtained by adding an integral action in quaternion-based linear quadratic regulator design. Also, by adding the integral action to the feedback controller, the steady-state error has been improved with an accumulation of the integrator state. The simulation results show that the objectives are fulfilled.

This study has expanded the research area by addressing the application of quaternion-based controllers, which are rarely found in the literature, to fixed wing aircraft. In future studies, in addition to the studies in the thesis, a state observer can be added to predict system states and surpass process and measurement noise. The results can be verified twice by performing a flight simulation using X-plane, a highly realistic simulation program. Lastly, both designs in this thesis are adaptable to all aircraft, they can be updated and applied to different aircraft models.

Keywords: Fixed-wing, Quaternion, Optimal control, Linear quadratic regulator, Linear quadratic integral.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını, engin bilgileriyle tereddütsüzce sunan, kabul edildiğim günden bu yana, her zaman, her konuda destek olan, laboratuvarlarda çalışma olanağı sağlayıp yürütmekte olduğu projelerinde yer almamı sağlayan, bana kontrol sistemleri alanını sevdiiren, ders anlatımını en çok sevdiğim hocam Prof. Dr. Coşku Kasnakoğlu'na ne kadar teşekkür etsem azdır. Enerjisine hayran kaldığım Dr. Burak Kürkçü hocam en yoğun zaman dilimlerinde dahi bizlere akademik çalışmalarda destek olmuştur. Kendisi benim gözümde yürüyen bir ansiklopedidir, müteşekkirim. Ayrıca TOBB ETÜ Kontrol Sistemleri Laboratuvarındaki arkadaşlarıma, bu alanda yetişmemde verdikleri katkılarından dolayı teşekkür ederim. Hem akademik süreçte hem de proje yürütme sürecinde güzel işler başardık, hepsinin başarılarının devamını dilerim. Laboratuvar arkadaşım, meslektaşım, hayat arkadaşım, motivasyon kaynağım, destekçim, her zaman yanımda olup varlığı ile bana moral olan Kemal Çağlar Coşkun'a çok teşekkür ederim. İleride, beraber, kontrol alanına büyük katkılar sağlamamızı dilerim.

Bana tam burs vererek ücretsiz eğitim imkânı sağlayan, üstelik maddi desteği ile akademik çalışmalarına odaklanmamı sağlayan TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkür ederim. Bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. Tolga Girici hocama ve Fen Bilimleri Enstitüsü müdürü sayın Prof. Dr. Osman Eroğul hocama, yüksek lisans eğitimim boyunca gösterdikleri ilgiden dolayı ayrıca teşekkürlerimi sunarım. "Boru Bağlantılı Test Altyapısı Kontrol Sistemi Geliştirilmesi" isimli proje ile çalışmalarına 4 ay boyunca destek olan ROKETSAN'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, değerli jüri üyelerime değerli katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Hayatımın her anında bana koşulsuz maddi ve manevi destek olan, yoğun çalışma zamanlarımda beni anlayışla karşılayan ve uygun ortam sağlayan, varlıkları ile beni mutlu edip neşelendiren, gece gündüz demeden benim için koşuşturan canım aileme çok teşekkür ederim, onların sayesinde bugünlerdeyim. Hayatımın her basamağında, başarılı olduğum her ne varsa, bu onların güzel öğütleri ve bana olan inançları sayesinde. Bu tez çalışmamı, sevgili anneciğim Badenur Demirhan, sevgili babacığım Ali Ekber Demirhan, canım kardeşim Atakan Veli Demirhan ve sevgili eşim Kemal Çağlar Coşkun'a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
İÇİNDEKİLER	xiii
ŞEKİL LİSTESİ	xv
ÇİZELGE LİSTESİ	xvii
KISALTMALAR	xviii
SEMBOL LİSTESİ	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 İnsansız Hava Araçları	1
1.2 Tez Konusu, Hedefleri ve Katkısı	4
1.3 Tezin Yapısı	4
2. SABİT KANATLI HAVA ARACI SİSTEMİ	7
2.1 Uçağa Etki Eden Kuvvetler ve Momentler	7
2.1.1 İtme kuvveti	8
2.1.2 Aerodinamik kuvvet ve momentler.....	9
2.1.2.1 Kaldırma kuvveti.....	9
2.1.2.2 Sürüklenme kuvveti	10
2.1.2.3 Aerodinamik kuvvet ve moment denklemleri.....	11
2.1.3 Yer çekimi kuvveti.....	12
2.2 Uçuş Denetimleri.....	13
2.2.1 Uçağın hareket eksenleri	13
2.2.2 Temel kontrol yüzeyleri	15
2.2.2.1 Kanatçık	15
2.2.2.2 İrtifa dümeni.....	16
2.2.2.3 Yön dümeni.....	17
2.3 Uçağın Modeli ve Benzetim Ortamı	18
2.3.1 Sabit kanatlı hava aracı Cessna 172	18
2.3.2 FDC.12 Matematiksel hava aracı modeli.....	21
2.3.3 Benzetim ortamı	21
3. KUATERNİYON	23
3.1 Kuaterniyonun Özellikleri.....	26
3.1.1 Kuaterniyon sıra bağımlılığı	26
3.1.2 Kuaterniyon normu	26
3.1.3 Bir çarpımın normu	26
3.1.4 Çarpmanın birleşme özelliği	26
3.1.5 Kuaterniyonun tersi.....	27
3.1.6 Bir çarpımın tersi	27
3.2 Kuaterniyonlarla Vektör Dönüşümü	27
3.3 Kuaterniyon Koordinat Dönüşümü	29
3.4 Kuaterniyon Tabanlı Kinematik Denklemler	30
3.4.1 Bir yalpa, yunuslama ve yuvarlanma dizini için kuaterniyon.....	32

3.5 Kuaterniyondan Doğrultu Kosinüs Matrisine Geçiş	32
3.6 Doğrultu Kosinüs Matrisinden Kuaterniyona Geçiş	33
4. DOĞRUSAL KARESEL DÜZENLEYİCİ YAKLAŞIMI	35
4.1 Optimal Kontrol.....	35
4.1.1 Optimal kontrol tarihçesi.....	37
4.2 Düzenleyici Problemi	39
4.2.1 Optimal düzenleyici temel teorisi	40
4.2.2 Hamilton-Jacobi Denklemi	45
4.3 Düzenleyici Problemine Çözümler.....	49
4.3.1 Sonsuz zaman düzenleyici problemi ve çözümü.....	50
4.3.2 Zamanla değişmeyen düzenleyici problemi ve çözümü	50
4.3.3 Asimptotik kararlı zamanla değişmeyen düzenleyici problemi ve çözümü	50
4.3.4 Sonlu zaman düzenleyicisi ve çözümü.....	52
5. DOĞRUSAL KARESEL İNTEGRAL.....	55
5.1 Kontrol Edilebilirlik ve Gözlemlenebilirlik	56
5.2 DKİ ile Kontrolcü Tasarımı.....	58
6. CESSNA 172 İÇİN KONTROLCÜ TASARIMI.....	60
6.1 Doğrusallaştırma.....	63
6.1.1 Denge noktasının bulunması	65
6.1.2 Denge noktasına göre küçük-sinyal / büyük-sinyal değişimleri	69
6.2 Cessna 172 Uçağı için Kuaterniyon Tabanlı DKD Tasarımı	71
6.3 Cessna 172 Uçağı için Kuaterniyon Tabanlı DKİ Tasarımı.....	75
7. SONUÇLAR VE GELECEK ÇALIŞMALAR.....	79
KAYNAKLAR.....	81
ÖZGEÇMİŞ.....	85

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Zipline Drone fırlatılma anı (Roksenhorn, 2018).....	2
Şekil 1.2 : Anakonda modelinin fırlatılma anı (Narodowej, 2012).....	2
Şekil 1.3 : Amazon Prime Air Kargo Drone (Cuthbertson, 2020).....	3
Şekil 1.4 : Bayraktar TB2 Runway Modeli (Bayhaluk, 2014).....	3
Şekil 2.1 Turbofan motorları iç yapısı (Enbeauce, 2020).....	8
Şekil 2.2 : Lycoming IO-360-A1B6 uçak pistonlu motor, Kraliyet Hava Kuvvetleri Müzesi, Cosford (Nimbus227, 2009).....	9
Şekil 2.3 : Airbus A321 yolcu uçağının açılmış vaziyetteki sol kanat spoileri (Arpingstone, 2006).....	11
Şekil 2.4 : Uçağa etki eden kuvvetler (Mendoza, 2013).....	13
Şekil 2.5 : Yuvarlanma, sapma ve yunuslama hareketlerinin gösterimi (Smithsonian, 2011).....	14
Şekil 2.6 : Uçağın hareket eksenleri.....	15
Şekil 2.7 Kanatçık Hareketi (Lopez, 2020).....	16
Şekil 2.8 İrtifa Dümeni (BİNGÖL, 2020).....	16
Şekil 2.9 Cessna 172 Hava Aracı Profil Görünümleri (Murmman, 2020).....	18
Şekil 2.10 Cessna 172R Modeli.....	18
Şekil 2.11 Cessna 172R Kontrol Paneli (Wikipedia D. a., 2006).....	19
Şekil 2.12 : Airlib kütüphanesinde yer alan Cessna 172 uçak modelinin blok şeması.....	22
Şekil 2.13 : Airlib kütüphanesinde yer alan herhangi bir uçağının uçuş parametrelerinin katsayılarının ayarlandığı giriş penceresi.....	22
Şekil 3.1 : Bir uçak için gimbal kilitlenmesinin gösterimi.....	24
Şekil 4.1 : Brachistochrone Problemi.....	38
Şekil 4.2 : Klasik kontrol geri besleme düzeni.....	41
Şekil 4.3 : DKD tasarım blok şeması.....	52
Şekil 5.1 : DKİ optimal durum geri besleme kontrol kanunu ile takibi içeren blok şeması.....	56
Şekil 6.1 : Euler tabanında hazırlanmış bir uçak modelinin özeti.....	60
Şekil 6.2 : Euler tabanlı hareket modelinden dönüştürülen kuaterniyon tabanlı hareket modeli.....	62
Şekil 6.3 : Cessna172 uçağı için denge noktasında başlatılan 10 saniye süreli test benzetimi ile sistem cevabı.....	67
Şekil 6.4 : Cessna 172 uçağı için denge noktası test benzetimi eyleyici sinyalleri ...	68
Şekil 6.5 : Cessna 172 uçağı için denge noktası test benzetimi kuaterniyon değerleri.....	69
Şekil 6.6 : Düzenleyici problemini çözmek için tasarlanan küçük-sinyal, büyük-sinyal açıklamalı blok şeması.....	70
Şekil 6.7 : Takip problemini çözmek için tasarlanan küçük-sinyal, büyük-sinyal açıklamalı blok şeması.....	70
Şekil 6.8 : Cessna 172 uçağın DKD tasarımındaki benzetimi boyunca girişleri.....	73

Şekil 6.9 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKD'ye göre benzetim boyunca sistem durumları	74
Şekil 6.10 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKD'nin sonucunda kuaterniyonların değerleri.....	74
Şekil 6.11 : Uçağın benzetim boyunca 3D yörüngesi	75
Şekil 6.12 : Cessna 172 uçağın DKİ kontrolcüsü tasarımındaki benzetimi boyunca girişleri	76
Şekil 6.13 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKİ'ye göre benzetim boyunca sistem durumları	77
Şekil 6.14 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKİ kontrolcüsü sonucunda kuaterniyonların değerleri	78
Şekil 6.15 : Uçağın benzetim boyunca 3D yörüngesi	78



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Cessna 172 Uçağının Parametreleri.....	19
Çizelge 2.2 : Cessna 172 Uçağı Eyleyicilerinin Doyum Noktaları.....	20
Çizelge 3.1 : Kuaterniyon Dönüşüm Formülleri.....	29
Çizelge 6.1 : Cessna 172 uçak modeli için denge noktası hesaplama işlemleri için değişken kısıtlamaları.....	65
Çizelge 6.2 : Cessna 172 uçağı için denge noktası test benzetimi sonuçları	65
Çizelge 6.3 : Cessna 172 uçağı için kuaterniyon denge noktaları	67
Çizelge 6.4 : Benzetim için ayarlanan başlangıç değerlerinden sapma değerleri	72

KISALTMALAR

İHA	: İnsansız Hava Aracı
DKİ	: Doğrusal Karesel İntegral
DKM	: Doğrultu Kosinüs Matrisi
DKD	: Doğrusal Karesel Düzenleyici
LOS	: Line Of Sight



SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
V	Uçağın gerçek hava sürati (m/s)
α	Hücum açısı (rad)
β	Yana kayma açısı (rad)
p	Yalpalama açısal hızı (rad/s)
q	Yunuslama açısal hızı (rad/s)
r	Sapma açısal hızı (rad/s)
ψ	Sapma açısı (rad)
θ	Yunuslama açısı (pozitif değerler burnunu yukarı vermiş uçağı temsil eder) (rad)
φ	Yalpalama açısı (pozitif değerler sağa yatmış uçağı temsil eder) (rad)
x	Yere paralel eksenlerden biri (m)
y	Yere paralel eksenlerden ilk eksene dik olan ikincisi (m)
z	Deniz seviyesine göre yükseklik (m)
F_B	Orijini uçağın ağırlık merkezinde bulunan, uçak gövdesine hizalı, ortogonal koordinat sistemi.
X_B	F_B koordinat sisteminde uçağın burnu yönündeki eksen.
Y_B	F_B koordinat sisteminde uçağın sancak kanadı yönündeki eksen.
Z_B	F_B koordinat sisteminde uçağın altı yönündeki eksen.
F_x	X_B eksen yönündeki harici kuvvet (N)
F_y	Y_B eksen yönündeki harici kuvvet (N)
F_z	Z_B eksen yönündeki harici kuvvet (N)
L	Harici yalpalama momenti (Nm)
M	Harici yunuslama momenti (Nm)
N	Harici sapma momenti (Nm)
F_p	İleri yönde uygulanan itiş kuvveti (N)
δa	Kanatçıklarda simetrik sapma açısı (sağa yatırma hareketi pozitif yöndedir) (rad)
δe	Yükseliş dümeninde sapma açısı (burnu yukarı verme hareketi pozitif yöndedir) (rad)
δr	Yön dümeninde sapma açısı (dümenin sağa saptığı hareket pozitif yöndedir) (rad)

1. GİRİŞ

Sabit kanatlı hava araçları için modern kontrol teknolojileri ile kuaterniyon benzeri modern matematiksel altyapılarla geliştirilen kontrol teorisine olan ihtiyaç, havacılık pazarındaki insansız hava araçlarının yaygınlaşmasına bağlı büyümeden doğmaktadır.

1.1 İnsansız Hava Araçları

İnsansız Hava Araçları (İHA), uçuş kontrolünü otonom olarak kendi donanımı sayesinde gerçekleştirebilen veya uzaktan kontrol edilebilen hava araçlarına verilen genel adlandırmadır.

İHA'lar gelişen yüksek teknoloji ve araştırmacıların artan ilgileri sayesinde, kontrol sistemleri alanında, uzun süredir dünyada yankı yaratmaktadır. İHA'ların zor şartlarda dahi çalışabilir olması, kullanım yelpazesini genişletmiş ve bu sayede askeri ve sivil havacılıkta, hedef tespiti ve takibi, gözetim, arama-kurtarma, coğrafi çalışmalar, güvenlik uygulamaları gibi farklı kullanım alanları bulmuştur (KURNAZ, 2009). Ayrıca, artan pil kapasiteleri, motorlar ve işlemciler gibi daha ucuz bileşenler ve düşük güç tüketimi, İHA için geniş perspektifte çalışmalara zemin hazırlamıştır. Bu gibi gelişmeler sayesinde İHA'ların modellenmesi ve kontrolü alanında birçok çalışmaya imza atılmış, güvenilirliği ve performansı artırmak adına çalışmaların devamlılığı süregelmektedir.

İHA'ların birçok farklı tasarım modelleri vardır. Bunlar, küçük araç modellerinden büyük araç modellerine kadar uzanan, görev tanımlarına uygun kullanımlı modellerdir.

İHA'ların en büyük avantajlarından biri de askeri görevlerdeki tehlikenin yüksek risk taşınması, olası kaza veya bombardımanlarda aracın içinde insan barındırmaması sayesinde büyük zafiyetlerin önüne geçmesidir. Bu durumda olabilecek en kötü senaryo, maddi kayıp olarak karşımıza çıkmaktadır (Kürkcü, 2018).



Şekil 1.1 : Zipline Drone fırlatılma anı (Roksenhorn, 2018)



Şekil 1.2 : Anakonda modelinin fırlatılma anı (Narodowej, 2012)

Araçların içerisinde insan olmadığı için uçuşu kontrol edebilmek amacıyla iki ayrı yöntem tercih edilmektedir. İlki, yer istasyonu bağlantılı uzaktan kumanda ile uçuş

sağlama ve bir diğeri de tasarlanan kontrol ünitesinin ürettiği sinyaller vasıtasıyla aracı yöneterek yön sağlamaktır.



Şekil 1.3 : Amazon Prime Air Kargo Drone (Cuthbertson, 2020)

Kararlı bir uçuş sağlayabilmek için denge kontrolü oldukça önemlidir. Denge kontrolü, hava aracının yönünü istenen bir değerde korur (Demirhan, 2019). Bu nedenle, gerekli sistem çıkışını bir referans sinyalini izletmek için bir kontrolcü tasarlayabilmek çok önemlidir (Carr, 2016).



Şekil 1.4 : Bayraktar TB2 Runway Modeli (Bayhaluk, 2014)

Bu tez çalışmasında benzetim için Cessna 172R uçağı kullanılacaktır. Cessna 172R uçağı bir insansız hava aracı değildir ve bu uçağın tercih edilme sebebi Bölüm 2’de yer almaktadır. Tasarlanan düzenleyici ve kontrolcü uçuş dinamikleri bilinen her hava aracına, uygun katsayılarla değiştirilerek uyarlanabilir.

1.2 Tez Konusu, Hedefleri ve Katkısı

Bu tez, insan etkileşimi olmaksızın otonom olarak uçuşun dışında, geleneksel uçaklara benzeyecek şekilde gövdeye sabitlenmiş kanatları olan sabit kanatlı hava araçlarını ele almaktadır. Bu tezin amacı doğrusal karesel kontrol metodolojisi aracılığı ile sabit kanatlı hava aracı için kuaterniyon tabanlı kontrol sistemi tasarımı ile uçuş kontrol problemini çözümlenmek, hızı istenen yöne çevirmek ve istenen hıza ulaşımı sağlamaktır. Bu sayede belli değerlerde başlatılan uçağın, uçuş esnasında belli saniyelerde verilen sapma değerlerine göre düzgün ve hızlı bir şekilde verdiği tepki görülebilecektir. Ayrıca, geliştirilen kontrolcü tasarımı diğer hava araçlarında da kullanılabilir olacaktır.

Bu tez sayesinde, literatürde nadir rastlanan, sabit kanatlı hava araçları için kuaterniyon tabanlı DKİ kontrolcüsü ile optimal bir uçuş sağlanacak ve referans takibi gerçekleşecektir. Nadir bulunmasının nedeni, kuaterniyon tabanlı kontrolcülerin serbest hareket özelliğiyle, genellikle uzay araçları ve dört pervaneli robot helikopterler için tasarlanmasıdır. Bu tez çalışması ile birlikte kuaterniyon tabanlı kontrolcülerin uçaklar için de uygulanabilir olduğu gösterilmiş ve literatürde devamlılığı sağlanabilecek bir araştırma ve geliştirme kapısı açılmıştır.

1.3 Tezin Yapısı

Tez 6 bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2’de sabit kanatlı hava aracı sisteminin hava aracına etki eden kuvvetleri, uçuş denetimleri, uçağın modeli ve benzetim ortamı ile ilgili detaylı bilgiler yer almaktadır. Bölüm 3’te kuaterniyonun tanımı, tarihçesi, matematiksel özellikleri, vektör ve koordinat dönüşümleri ve kinematik denklemler yer almaktadır. Ayrıca dönüşüm matrisleri ile uçağın farklı tabanlarda ifade edilebilmesi için gerekli işlemler de tezin bu bölümünde yer almıştır. Bölüm 4’te doğrusal karesel düzenleyici yaklaşımını daha iyi kavrayabilmek açısından optimal kontrolün tanımından ve tarihçesinden bahsedilmiştir. Bu bölümde farklı şekillerde

tanımlanmış düzenleyici problemleri ve çözümleri yer almaktadır. Bölüm 5'te doğrusal karesel integral yaklaşımı ile kontrolcü tasarımı anlatılmaktadır. Bölüm 6'da ise tezde üzerinde çalışılan uçak için düzenleyici ve kontrolcü tasarımı adımları tek tek anlatılmıştır. Ayrıca sonuçlar da bu bölümün her alt başlığında özel olarak verilmiş ve yorumlanmıştır.



2. SABİT KANATLI HAVA ARACI SİSTEMİ

2.1 Uçağa Etki Eden Kuvvetler ve Momentler

Kuvvet, kütleyle sahip olan bir cisme hareket kazandıran, yönü ve büyüklüğü olan vektörel bir niceliktir. Uygulanan net kuvvet, cismin kazandığı momentumun zamana bağlı değişimine eşittir. Üç boyutlu cisimlerde uygulanan kuvvet, cismin yönünü değişmesi gibi bazı fiziksel değişimlere sebep olabilir. Aerodinamik kuvvet ise akış halinde olan gazın cisimlere etkilediği kuvveti tanımlamaktadır. Aerodinamik kuvveti, cismin yüzeyindeki basınçtan kaynaklı kuvvet ve gazların akışkanlık özelliğinden kaynaklanan kayma kuvveti oluşturmaktadır. Bir hava aracı olarak tanımlanan uçaklar da uçuş sırasında inişi, kalkışı, havada süzülüşü sağlayan aerodinamik kuvvetlere sahiptir. Uçuş mekanizmasını anlayabilmek için uçağa etki eden kuvvetlerin neler olduğunu ve nasıl etki ettiğini bilmek oldukça önemlidir. Bir uçağın üzerinde temel olarak dört aerodinamik kuvvet bulunmaktadır. Bunlar; kaldırma kuvveti, itme kuvveti, yer çekimi kuvveti ve sürüklenme kuvvetidir. Manevrasız, düz bir uçuş esnasında uçağa etki eden sürüklenme kuvveti ile itme kuvvetinin, kaldırma kuvveti ile yer çekimi kuvvetinin birbirine eşit olması gerekmektedir. Ek olarak, hava akımı, uçağa tek bir noktada etki etmemektedir. Uçak ile havanın uçağa temas yüzeyinin her noktasına etkiyen bir kuvvet dağılımı vardır. Bu yüzey boyunca yayılı kuvvet dağılımı ile ayrıntılı ilgilenilmez, entegre edilerek bileşke kuvvetle ve bunun yaratmış olduğu bileşke moment ile ilgilenilir. Örneğin, uçağın hız kazanması istenildiğinde, bileşke sürüklenme kuvvetinden büyük toplam itme kuvvetine sahip olması sağlanarak hızın ivmeli olarak artışı gerçekleştirilir. Newton'un hareket yasalarına göre bir cisme etki eden kuvvetler birbirine eşit olduğunda ya da herhangi bir dış kuvvet etki etmedikçe cisim dengede kalır, yani hareket durumunu korur. Aynı şekilde uçağın belli bir irtifada uçuşunu sağlamak adına bileşke kaldırma kuvvetinin yer çekimine etki eden ağırlık kuvvetine eşit olması, uçağın yükselmesi için bu kuvvet bileşkesinin daha fazla olması, uçağın alçalması için de daha az olması beklenmektedir.

Bir uçağı temsil eden kuvvetler ve momentler,

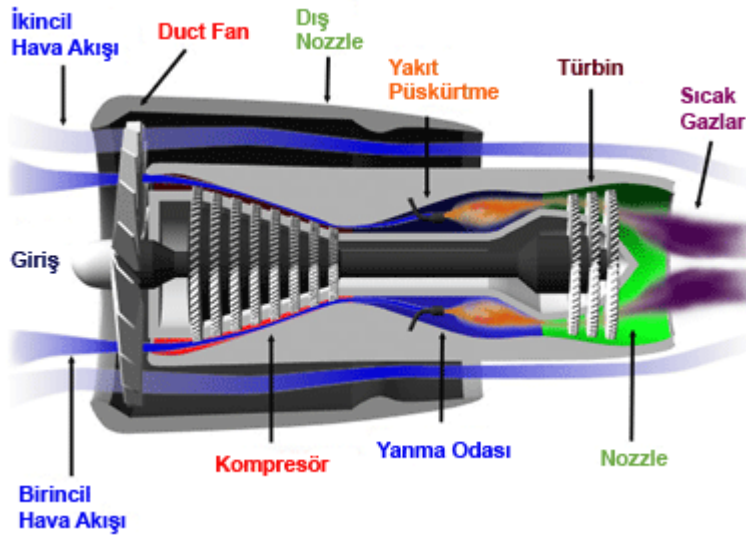
$$F_{toplam} = F_{uçak} + F_p + F_{yerçekimi} \quad (2.1)$$

$$M_{toplam} = M_{uçak}$$

olarak basitçe tanımlanabilir. $F_{uçak}$ ve $M_{uçak}$ aerodinamik tesirlerden kaynaklı kuvvet ve momentleri, $F_{yerçekimi}$ ise uçağa etki eden yer çekimi kuvvetinin uçak gövde eksenindeki karşılığıdır (Coşkun, 2019). Tezde yer almayıp FDC araç setinde bulunan diğer etkilerden bazıları da pervane ve motorun momentleridir. Ayrıca rüzgarın etkileri de teorikte gerekli görülmediğinden denklemlerde yer almamaktadır.

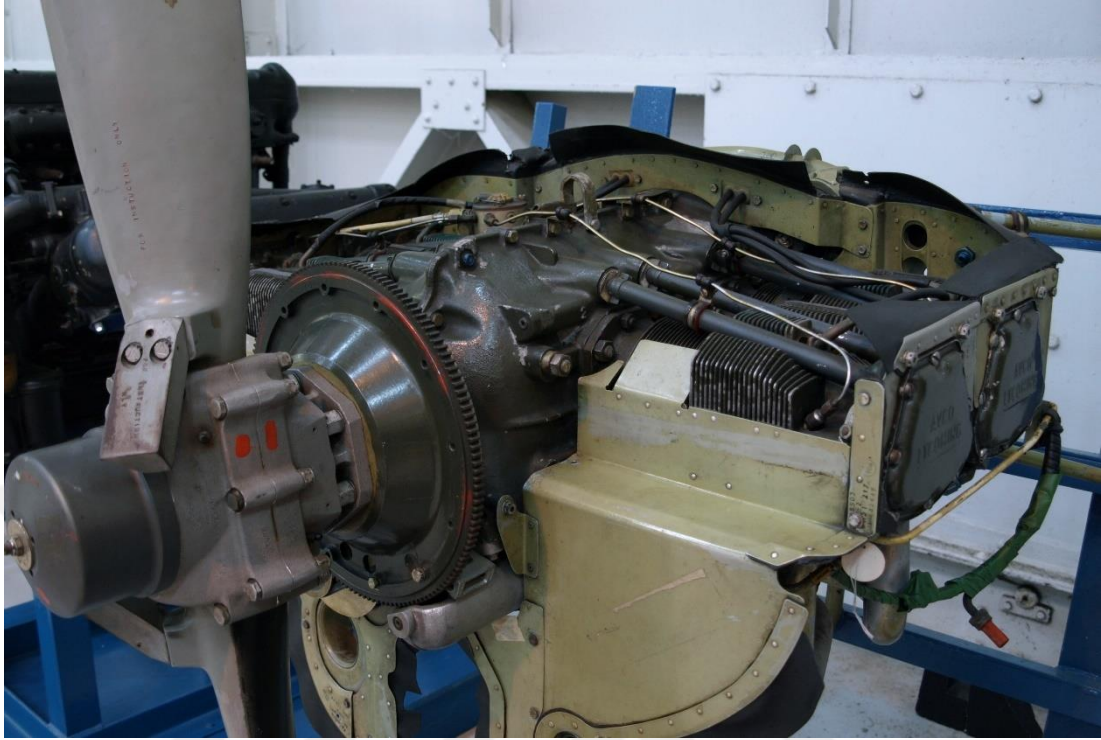
2.1.1 İtme kuvveti

Uçuşun sağlanabilmesi için gerekli itme kuvveti, havanın göstermiş olduğu sürtünme kuvvetine karşı gelebilmek için uçağın sahip olduğu pervane, jet motoru veya benzeri itiş sistemi ile sağlanabilir. Uçak motoru sayesinde uçağa itiş gücü verilerek mekanik enerji üretilmiş olur. Uçak motorları, uçağın kullanım alanı, gücü ve yapısına göre değişiklik gösterir. Uçak motor türleri genel olarak içten yanmalı ve dıştan yanmalı olarak şaftlı motorlar ve türbin motoru, roket, termojet, pulsejet, ramjet olarak tepkili motorlar şeklinde örnek gösterilebilir. Günümüzde uçaklarda en yaygın olarak tercih edilen turbofan motorlardır. Turbofan motorlar, turbojet ve turboprop motorlarının pozitif bulunan özelliklerinin bir araya getirilmesiyle tasarlanmış ve iç işleyiş mekaniğiyle uzun menzil uçuşlar için uygun hale getirilmiştir motorlardır.



Şekil 2.1 Turbofan motorları iç yapısı (Enbeauce, 2020)

Tezde üzerinde çalışılan Cessna 172 uçağına ait motor dört silindirli yatay olarak zıt uçak motorudur. Motorun benzer bir modeli Şekil 2.2’de yer almaktadır.



Şekil 2.2 : Lycoming IO-360-A1B6 uçak pistonlu motor, Kraliyet Hava Kuvvetleri Müzesi, Cosford (Nimbus227, 2009)

Uçaklarda itme gücünün büyüklüğü, motor tipi, motor sayısı ve gaz pedalı ayarı gibi özellikleri içeren tahrik sistemi ile ilgili özelliklere bağlıdır. Uçağın hız faktörünün temelinde, uçağın motoru ve sahip olduğu gücü oldukça önemlidir. Motor gücü arttırıldığı zaman bileşke itme kuvveti, hava akışının yaratmış olduğu sürtünme kuvvetinden fazla gelecek ve uçak hızlanmış olacaktır.

2.1.2 Aerodinamik kuvvet ve momentler

2.1.2.1 Kaldırma kuvveti

Uçak kanatlarının, Bernoulli ilkesine uygun tasarımları sayesinde havanın daha hızlı hareket ettiği yerlerde basınç düşük, yavaş hareket ettiği yerlerde basınç yüksektir. Bu nedenden dolayı uçaklar tasarlanırken, kanat kısımlarının üstü bombeli, alt kısımları ise düz şekildedir. Bombeli kısımlarda hava daha hızlı akıp daha düşük basınç oluşturmakta ve düz kısımlarda hava yavaş hareket edip yüksek basınç oluşturmaktadır. Oluşan hava akışı, kanatlarda yukarı yönlü kaldırma kuvveti ile uçağın havalanmasında etkili olur.

Uçağın kaldırma kuvveti, merkez basınç adı verilen tek bir noktaya doğru davranış sergiler. Sabit kanatlı hava araçları kaldırma kuvvetini sahip oldukları kanatlarının profil yapıları ile sağlarlar. Kaldırma kuvvetinin büyüklüğü, uçağın şekli, boyutu ve hızı gibi çeşitli etkenlere bağlıdır. Ağırlığa etkiyen uçağın her bir parçası, uçağın kaldırma kuvvetine de etki eder. Uçağa etkiyen kaldırma kuvveti L (lift) ile gösterilir ve inceleme amacıyla basitleştirilmiş denklemi,

$$L = \frac{C_L \rho V^2 S}{2}$$

şeklindedir.

Denklemden yer alan C_L kanat için kaldırma katsayısını, ρ havanın yoğunluğunu, V uçak kanat hızını, S uçağın kanat alanını ifade etmektedir. Bu denklemden yola çıkarak, hız arttıkça kaldırma kuvvetinin de arttığı görülmektedir. Düz bir uçuş sağlayabilmek için hız artırılırken kaldırma kuvvetinin sabit tutulması gerekir. Bir diğer faktör olan havanın yoğunluğu uçak yükseğe çıktıkça azalış gösterir ve doğru orantılı olarak kaldırma kuvveti de azalış gösterir. Bu durumu dengeleyebilmek için uçak hızının hava hızından daha fazla olması gerekir. Havanın yoğunluğunu değiştiren sıcaklık ve nem faktörü de uçağın kaldırma kuvvetine etki eder. Sıcaklık arttıkça yoğunluk azalır ve dolayısıyla kaldırma kuvveti azalır. Havanın nem oranı arttıkça yoğunluğu azalır ve kaldırma kuvveti de azalır. Bu çevresel faktörler göz önünde bulundurularak uçağa verilen hücum açısı için uygun bir hava hızında uçuş sağlanmalıdır.

Uçak kanadının üst görünüm alanı ile kaldırma kuvveti arasında doğru orantılı bir ilişki vardır. Büyük bir uçağın kaldırma kuvveti, küçük bir uçağa göre daha büyüktür.

Spoilerler, kanatların üzerindeki hava akışını dağıtarak veya bozarak kaldırma kuvvetini azaltmak amacıyla kullanılır. Ayrıca spoilerler uçakların sürat kazanmadan alçalmasını sağlarlar.

2.1.2.2 Sürüklenme kuvveti

Aerodinamik bileşke kuvvetin yatay bileşkesi olan sürüklenme kuvveti, uçağın hedef aldığı hareket yönünün tersine etkiyen kuvvet bileşenidir. Bir diğer deyişle, havanın, uçağın hareketine karşı gösterdiği direnç kuvveti sürüklenme kuvveti olarak tanımlanabilir. Sürüklenme kuvveti çeşitlerinden biri olan ve uçağın yapısal dizaynından kaynaklı olan parazit sürüklenme üç farklı şekilde oluşabilir: Şekil

sürüklemesi (uçanın dış şeklinden kaynaklı), sürtünme sürüklemesi (uçanın dışında bulunan perçin, civata, anten, kapak gibi yüzey pürüzlerinden kaynaklı), engel sürüklemesi (uçanın dış yüzeyinden geçen hava akımı keskin köşelerden ve kaporta yüzeylerinden geçerken oluşan kuvvet). Bir diğeri sürüklenme kuvveti ise indüklenmiş sürüklenmedir. Oluşma nedeni, kanat açıklık oranı ve kaldırma kuvvetini düşük hızlarda arttırmak için verilen hücum açısının yarattığı türbülanslı akış ile alt kanat yüzeyindeki yüksek basınca sahip havanın üst kanat yüzeyine geçme eğilimidir.



Şekil 2.3 : Airbus A321 yolcu uçağının açılmış vaziyetteki sol kanat spoileri (Arpingstone, 2006)

Atmosfer yoğunluğu ile sürtünme kuvvetinin doğrudan ilişkisi vardır. Belirli bir hacimdeki hava moleküllerinin miktarı atmosfer yoğunluğudur. Atmosfer yoğunluğunun azalmasını sürüklenme kuvvetini azaltır. Dolayısıyla azalan sürüklenme kuvveti uçağın kalkış-iniş mesafelerini uzatır.

2.1.2.3 Aerodinamik kuvvet ve moment denklemleri

Denklemler, boyutsuz katsayılar cinsinden kuvvetleri ve momentleri ifade eder, ancak boyutsuz katsayılardan boyutsal kuvvetleri ve momentleri elde etmek için,

- Boyutsal kuvvetler [N]
 - $X_a = C_{D_a} q_{dyn} S$
 - $Y_a = C_{Y_a} q_{dyn} S$
 - $Z_a = C_{L_a} q_{dyn} S$
- Boyutsal momentler [Nm]
 - $L_a = C_{l_a} q_{dyn} S$
 - $M_a = C_{m_a} q_{dyn} S$
 - $N_a = C_{n_a} q_{dyn} S$

Gövdeye sabitlenmiş referans çerçevesinde ölçülen aerodinamik kuvvet ve moment katsayıları:

$$C_{D_a} = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha + C_{D_q} \frac{q\bar{c}}{V} + C_{D_{\delta e}} \delta e$$

$$C_{Y_a} = C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_p} \frac{pb}{2V} + C_{Y_r} \frac{rb}{2V} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r$$

$$C_{L_a} = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_q} \frac{q\bar{c}}{V} + C_{L_{\delta e}} \delta e$$

$$C_{l_a} = C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \frac{pb}{2V} + C_{l_r} \frac{rb}{2V} + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r$$

$$C_{m_a} = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{q\bar{c}}{V} + C_{m_{\delta e}} \delta e$$

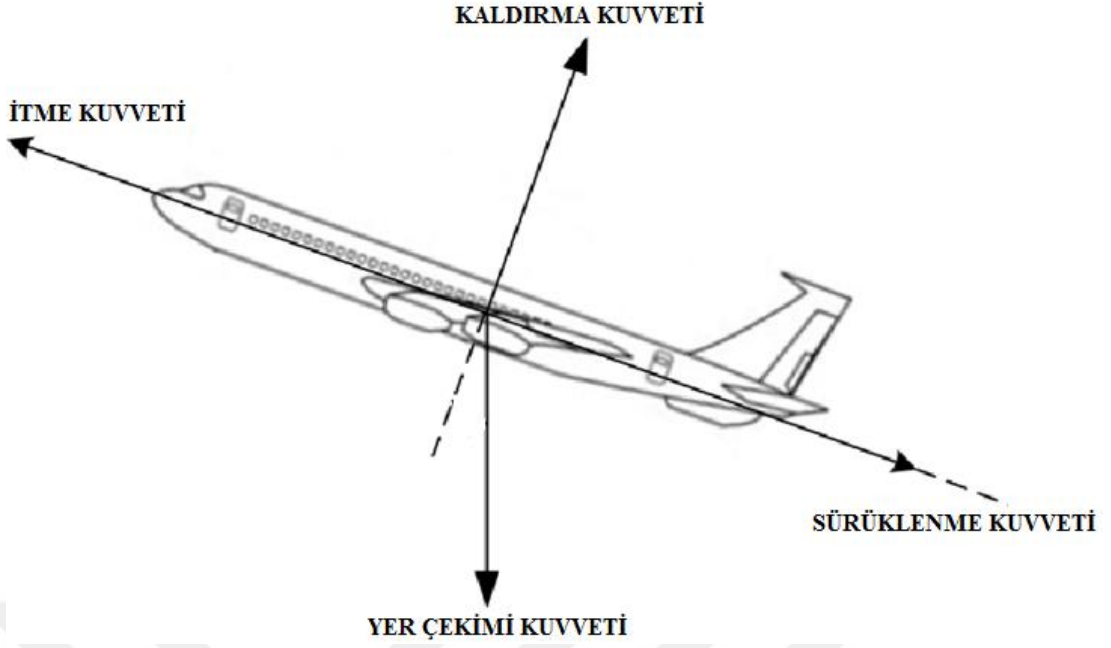
$$C_{n_a} = C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{pb}{2V} + C_{n_r} \frac{rb}{2V} + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r$$

olarak tanımlanabilir.

2.1.3 Yer çekimi kuvveti

Uçağın ağırlığı, uçağa etkiyen toplam yer çekimi kuvvetine eşittir. Ağırlık kuvveti, uçağın ağırlık merkezinden, yerin merkezine doğrudur.

Uçağın aynı irtifada kalabilmesi için kaldırma kuvvetinin yer çekimi kuvvetine yani ağırlık kuvvetine eşit olması gerekir. Bir uçuş boyunca, uçak yakıt tükettikçe ağırlığı sürekli değişim gösterir. Bu nedenle pilot, uçağı dengede veya trimlenmiş halde tutabilmek için sürekli olarak ayarlama yapmalıdır.



Şekil 2.4 : Uçağa etki eden kuvvetler (Mendoza, 2013)

2.2 Uçuş Denetimleri

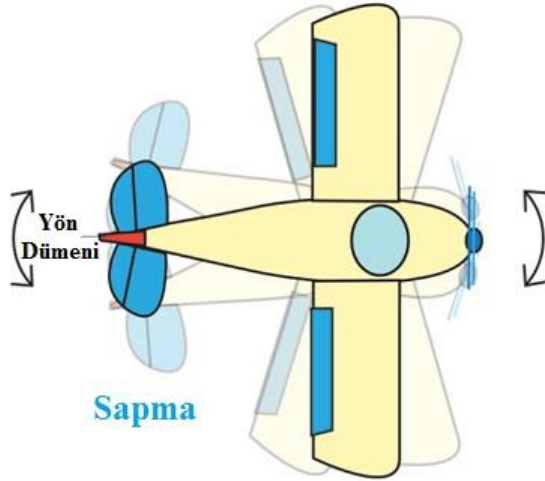
Uçağın uçuş yönünü ve durumunu kumanda etmeyi sağlayan uçak parçaları, uçuş denetimidir. İyi bir uçuş denetiminin gerçekleşebilmesi için uçağın hareket eksenlerine, temel kontrol yüzeylerine, ikincil kontrol yüzeylerine hakim olunması gerekmektedir.

2.2.1 Uçağın hareket eksenleri

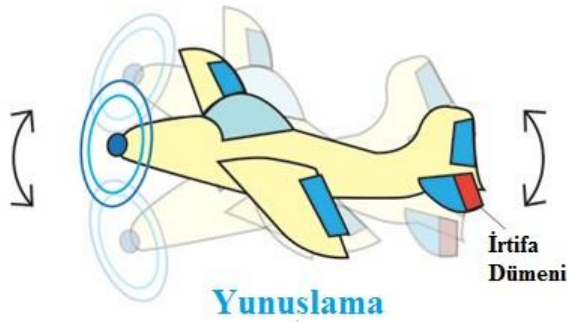
Uçaklar, birbirine dik olan ve uçağın ağırlık merkezinde kesişen dikey eksen, uzunlamasına eksen ve yatay eksen olmak üzere üç hayali eksenle serbestçe hareket edebilirler. Uçağın bu hayali eksenlerde yapmış olduğu hareketler sonucu oluşan açıların kumanda edilmesi ile uçak kontrol edilebilir hale gelmektedir. Sabit kanatlı bir uçağın çalışma prensibi, kontrol yüzeylerinin hava akışına karşı durarak yüksek basınçlı bir bölge yaratmasıdır. Sabit kanatlı uçaklarda hareketi sağlayan, kontrol yüzeylerinin uçağın zıt iki tarafındaki simetrisinin bozulmasıdır.



Yuvarlanma kontrolü için kanatçıkları kullanılmalı



Sapma kontrolü için yön dümeni kullanılmalı

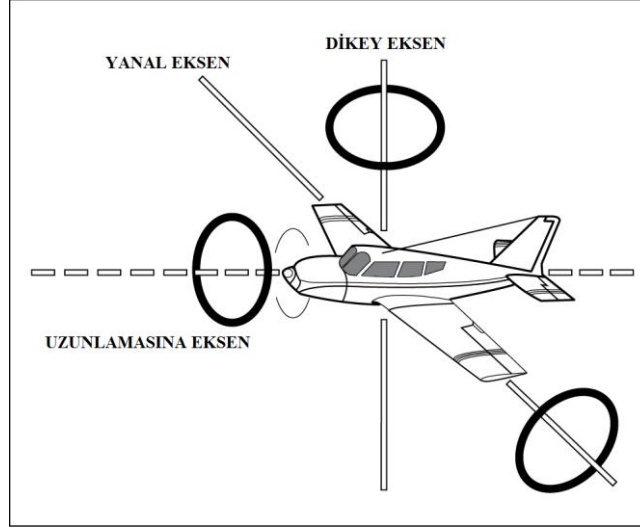


Yunuslama kontrolü için irtifa dümeni kullanılmalı

Şekil 2.5 : Yuvarlanma, sapma ve yunuslama hareketlerinin gösterimi (Smithsonian, 2011)

Uçağın tabanına doğru dik inen sanal eksen, dikey eksendir. Dikey eksen etrafındaki hareket, sapma hareketidir. Yön dümeni ise sapma hareketini sağlayan temel kontrol yüzeyidir. Yön dümeninin çalışma prensibi, pilotun pedalı sola çevirmesi ile sola dönen dümenin yüksek basınçlı bölge oluşturmasıdır.

Uçağın bir kanat ucundan diğer kanat ucuna doğru giden paralel eksen yanal eksen olarak adlandırılır. Yanal eksen etrafındaki harekete yunuslama denir. Hücüm açısının değişmesine neden olan yunuslamadır. Yanal eksenin temel kontrol yüzeyini oluşturan da irtifa dümenidir.



Şekil 2.6 : Uçağın hareket eksenleri

Uzunlamasına eksen ise uçağın burnundan kuyruğa paralel uzanan eksenidir. Uzunlama eksen etrafındaki yuvarlanma hareketi kanatçıklar sayesinde.

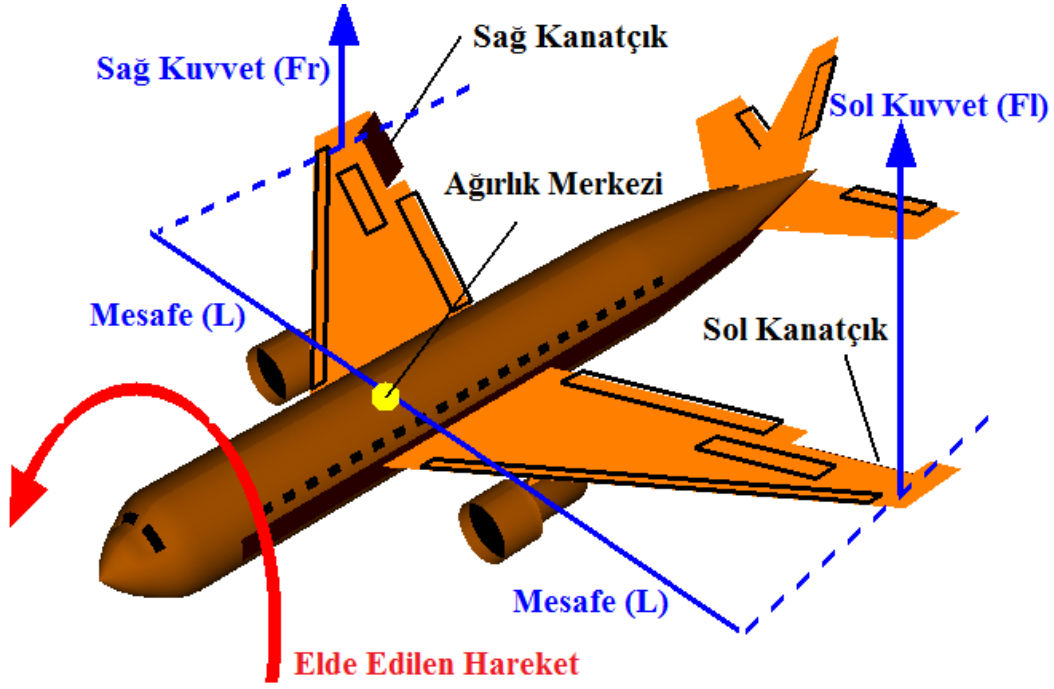
2.2.2 Temel kontrol yüzeyleri

Temel kontrol yüzeylerini, kanatçıklar, irtifa dümeni ve yön dümeni oluşturur. Sabit kanatlı bir uçak için temel kontrol yüzeyleri, uçağın hareket eksenleri etrafındaki hareketleri sonucu oluşan basınç simetrisinin bozulması ile uçağın hareketini sağlar.

2.2.2.1 Kanatçık

Uçaklarda yuvarlanma veya diğer bir ifadeyle yatma hareketinin oluşmasını sağlayan kontrol yüzeyi, kanatçıktır. Kanatçık, bir kanat üzerindeki dıştan takma motorun üzerinde yer alan, küçük açılır kapanır bölümlerdir.

Kanatçıklar, bir kanat ucunun yukarı, diğer kanat ucunun aşağı hareket etmesini sağlayarak uçağı yatırmak için kullanılır. Sağ tarafta yer alan kanatçık yukarı yönünde saparak, sol tarafta yer alan kanatçık ise aşağı yönde saparak ya da tasarım gereği tam tersi şekilde bir pozisyonda çalışır. Dönerken yan yatma hareketi, uçağın uçuş yolunun kıvrılmasına neden olan büyük kanat kaldırma kuvvetinin dengesiz bir yan kuvvet bileşenini oluşturur. Uçaklar, bir yön dümeni girdisi ile değil, dönerken yan yatma hareketi sayesinde dönerler.

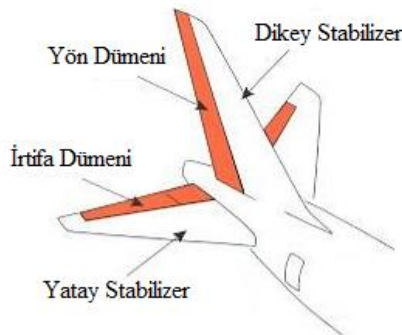


Şekil 2.7 Kanatçık Hareketi (Lopez, 2020)

2.2.2.2 İrtifa dümeni

Uçağın dikey ekseninde yukarı ve aşağı hareket etmesine yardımcı olarak bu sayede uçağın yükselip alçalmasını sağlayan, yatay stabilizatörün arka kenarına monteli kontrol yüzeyi, irtifa dümenidir. Uçağın burnunun havaya kalkması veya inmesi yunuslama hareketi olarak ifade edilir ve irtifa dümeni yunuslama hareketinin kontrolünü sağlar. Bu kontrole bağlı olarak uçağın tırmanış ve dalış hareketi ortaya çıkar.

İrtifa dümenin çalışma prensibi yatay stabilizatörün kanat profilinin etkin şeklini değiştirmesidir. Örneğin, geri yönlü çekilen kontrol dümenine karşın, irtifa dümeni yukarı yönlü hareket eder. Buna bağlı olarak da uçak burunu yukarı kaldırır. Diğer ihtimal olan ileri yönlü itmede ise uçak burunu aşağı verir.



Şekil 2.8 İrtifa Dümeni (BİNGÖL, 2020)

İrtifa dümeni, uçağın burnunun konumunu ve kanadın hücum açısını kontrol etmek için kullanılır. Kalkış sırasında irtifa dümeni, tırmanışa başlamak için uçağın burnunu yukarı kaldırmak için kullanılır. Sıralı bir dönüş sırasında, irtifa dümeni girişleri irtifa dümenini artırabilir ve daha sıkı bir dönüşe neden olabilir. Bu nedenle irtifa dümeninin performansı özellikle savaş uçakları için çok önemlidir.

Bir kanat profilinin arkasındaki sapma açısının değiştirilmesi, kanat tarafından üretilen kaldırma kuvvetinin büyüklüğünü değiştirir. Arka kenarın aşağı doğru fazla sapmasıyla kaldırma kuvveti artar. Arka kenarın yukarı doğru sığmasıyla ise kaldırma kuvveti azalır ve hatta negatif hale gelebilir. Kaldırma kuvveti, yatay stabilizatörün, uçağın ağırlık merkezinden biraz uzakta olan basınç merkezine doğru uygulanır. Pilot, uçağı istenilen istikamete doğrultabilmek için ya da istikametteki uçağı sapma özelliğini kullanarak dengeleyebilir. Pilot, eğer ki irtifa dümenini aşağı doğru çevirirse, uçak ters yönde eğilir.

2.2.2.3 Yön dümeni

Uçağın dikey eksenindeki hareketini kontrol eden ve stabilizatörün arka kısmındaki küçük hareketli bölüm yön dümenidir. Yön dümeninin hareketi sayesinde kuyruk yüzeyinde oluşan birçok kuvvet çeşitlenir ve bu da uçağın sapma hareketinin oluşumunda ve kontrolünde kullanılır.

Yön dümeni, uçağın burnunun pozisyonunun kontrolünde kullanılır. Ancak, yön dümeninin uçuş sırasında uçağı döndürmek için kullanılmayacağını bilmek gerekir. Uçağın dönmesini sağlayan, yana yatma hareketidir.

Yön dümeni girişi, uçağın manevra sırasında kavisli bir uçuş yoluna uygun hizalanmasını garantiler. Eğer düzgün olmasa idi kontrol yüzeyinde artan sürüklenme nedeniyle uçak ekstra sürüklenme ve hatta ters sapma hareketi durumunda kalabilirdi. Buna bağlı olarak da uçağın burnu istikametten daha uzak hareket edebilirdi.

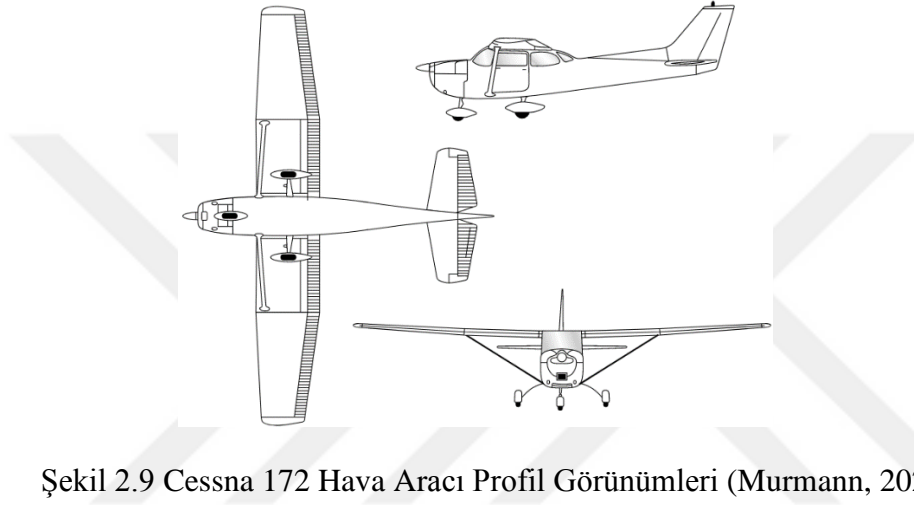
Yön dümeni, dikey stabilizatörün kanat profilinin etkin şeklinin değişmesi prensibine dayalı çalışır. Kanat yüzeyinin arka kısmındaki sapma açısındaki değişim ile kanat yüzeyi tarafından oluşturulan kaldırma kuvvetinin büyüklüğü değişim gösterir. Artan sapma ile kaldırma kuvveti de ters yönde artış gösterecektir. Yön dümeni ve yatay stabilizatör, aşağıdan yukarı değil de bir yandan diğer yana kuvvet oluşturabilmek için birbiriyle montelenmiştir. Yan kuvvet uçağın ağırlık merkezinden biraz uzakta olan dikey stabilizatörün basınç merkezine doğru uygulanır. Bu da uçakta tork oluşturur ve

uçak ağırlık merkezine doğrudur. Sol tarafa daha büyük bir irtifa dümeni sapması ile sağ taraftaki kuvvet artar. Eğer pilot irtifa dümeni sapmasını sağa doğru değiştirirse, uçak ters yönde sapar (yaw).

2.3 Uçağın Modeli ve Benzetim Ortamı

2.3.1 Sabit kanatlı hava aracı Cessna 172

Çalışma ortamı olarak sabit kanatlı hava aracı olan Cessna 172 seçilmiştir.



şekil 2.9 Cessna 172 Hava Aracı Profil Görünümleri (Murmman, 2020)

Bu hava aracının seçilmesindeki kriter, aviyonik sistemler camiasındaki popülerliği ve uçak modeline ve parametrelerine kolay ulaşım özelliğidir. Aviyonik sistemlerde popüler olmasının bir nedeni, eğitim uçağı olarak kullanılmasıdır (Aviation, 15). Cessna 172 yüksek kanat tipi ve tek motorlu bir uçak olup ilk kez 1956 yılında üretilmeye başlanmıştır.



şekil 2.10 Cessna 172R Modeli

Çalışmada kullanılan uçak, Cessna 172R dinamik modeline aittir. Cessna 172R modeli 1996 yılında piyasaya sürülmüş olup yakıt enjeksiyonlu motora sahip ilk uçaktır. Bir mürettebat ve 3 yolcu taşıma kapasitesine sahiptir.



Şekil 2.11 Cessna 172R Kontrol Paneli (Wikipedia D. a., 2006)

Çizelge 2.1 : Cessna 172 Uçağının Parametreleri

Geometri ve Kütle		Aerodinamik L-Kuvvet Türevleri	
\bar{c}	1.4935 m	C_{L_0}	0.31
S	16.1651 m ²	C_{L_α}	5.143
I_x	1285.3 kg. m ²	C_{L_q}	3.9
I_y	1824.9 kg. m ²	$C_{L_{\delta e}}$	0.43
I_z	2666.9 kg. m ²	Aerodinamik D-Kuvvet Türevleri	
b	10.912 m	C_{D_0}	0.031
m	1043.3 kg	C_{D_α}	0.13
J_{xy}	0	C_{D_q}	0
J_{xz}	0	$C_{D_{\delta e}}$	0.06
J_{yz}	0		
Aerodinamik Y-Kuvvet Türevleri		Aerodinamik X-Moment Türevleri	
C_{Y_0}	0	C_{l_0}	0
C_{Y_β}	-0.31	C_{l_β}	-0.089
C_{Y_p}	-0.037	C_{l_p}	-0.47
C_{Y_r}	0.21	C_{l_r}	0.096
$C_{Y_{\delta a}}$	0	$C_{l_{\delta a}}$	-0.178
$C_{Y_{\delta r}}$	0.187	$C_{l_{\delta r}}$	0.0147
Aerodinamik Y-Moment Türevleri		Aerodinamik Z-Moment Türevleri	
C_{m_0}	-0.015	C_{n_0}	0
C_{m_α}	-0.89	C_{n_β}	0.065
C_{m_q}	-12.4	C_{n_p}	-0.03
$C_{m_{\delta e}}$	-1.28	C_{n_r}	-0.099
		$C_{n_{\delta a}}$	-0.053
		$C_{n_{\delta r}}$	-0.0657

Cessna 172 uçağına ait parametrelerin yer aldığı Airlib'in yazarları kaynak olarak (Michael S. Selig, 15) kullanmışlar ve bu kaynak herkese açık olup (Michael Basler, 2020) Tony Peden tarafından geliştirilen FlightGear programının 0.7.3 versiyonu ile karşımıza çıkmaktadır. Cessna 172 uçak parametreleri Çizelge 2.1'de yer almaktadır.

Cessna 172R modeline ait bu parametrelere ek olarak çalışma koşullarını sınırlayan bir sınırlayıcıya ihtiyaç doğmuştur. Airlib kütüphanesinde bir sınırlayıcı özelliği olmadığından bunun manuel olarak uygulamayla hesaplanması gerekmektedir. Hesaplama için öncelikle Simulink ortamında eyleyiciler saturasyon bloğu ile sınırlandırılmıştır. Hesaplanan maksimum ve minimum değerler,

Çizelge 2.2 : Cessna 172 Uçağı Eyleyicilerinin Doyum Noktaları

Eyleyici	Minimum Değer	Maksimum Değer
İtiş Kuvveti	0	1500 N
Kanatçık	-28°	25°
İrtifa Dümeni	-37°	37°
Yön Dümeni	-24°	24°

olarak verilmiştir. Bu çizelgede yer alan değerlerden kontrol yüzeyleri için olanları X-plane benzetim ortamında benzer özellikler gösteren Cessna 172 SP modelinden alınmıştır. Ancak bu model, Cessna 172R'dan farklı olarak iki yön dümenine sahiptir. Bundan dolayı, iki yön dümeninin değerlerine bakılmış ve ortalaması alınarak $\pm 24^\circ$ olarak hesaplanmıştır.

İtiş kuvvetinin maksimum ve minimum doyum noktaları hesaplanırken de aynı şekilde X-plane programında yer alan Cessna 172 SP aracı kullanılmıştır (Coşkun, 2019). Çizelgede yer alan itiş kuvvetinin minimum değerinin 0 olmasının nedeni, motora sıfır girdisi verilirken, motorun rölantide çalışmaya devam etmesinden ötürü pozitif yönde payın, ileri yöndeki kuvvete negatif etki etmesine neden olan durağan pervanenin, çalışma koşullarındaki hıza çok etki etmeyeceği düşünülerek yok sayılmıştır. Maksimum değere etki eden iki unsur ise yükseklik ve uçağın hızıdır. Standart bir uçuş hızı ve yüksekliği göz önünde bulundurularak yapılan benzetimde maksimum 1500 N

itiş kuvvetine sahip olabileceği görülmüştür. Bahsedilen hesaplamaların temelindeki hava aracı modelinin denklemleri, hareket denklemleri, durum değişkenlerinin hesaplanması ve kuvvet-moment denklemlerinin hesaplanması olmak üzere 3 temel kısımdan meydana gelir. Uçağın hareket denklemleri, 3 boyutlu uzaydaki nesnelerin dinamiklerine göre yazılmıştır.

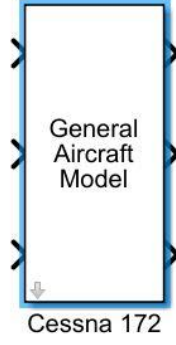
2.3.2 FDC.12 Matematiksel hava aracı modeli

Üzerinde çalışılacak Cessna 172 için gerekli parametreler Airlib kütüphanesinde yer almaktadır. Farklı uçak modellerinin parametreleri de ayrıca bu kütüphanede mevcuttur. FDC 1.2 araç setinde farklı ataletsel ve aerodinamik parametreleri bulunan farklı uçak modelleri de yer almaktadır. Ayrıca Simulink ortamında bir araya getirilmiş Airlib kütüphanesindeki bu modellerin üzerinde oynama izni de vardır. Bu sayede tasarımlara farklı ayar yapılabilme özelliği de verilmiştir. FDC 1.2’de gerçekleştirilen kuvvet-moment hesaplama denklemleri bölüm 2.1 ile verilen denklemler ile aynıdır.

2.3.3 Benzetim ortamı

Bu çalışmada, hava aracı dinamiklerinin benzetiminin yapılabilmesi için geliştirilmiş MATLAB ortamındaki "Flight Dynamics and Control toolbox FDC 1.2" araç seti, kullanılmıştır. FDC 1.2 araç seti ile birçok hava aracının tasarımı ve benzetimi yapılabilmektedir. Ayrıca bu araç setinin kullanım kılavuzu sayesinde tasarım süreci kolaylaştırılmış ve benzetim tekniklerinin detaylarının öğrenilebilmesi sağlanarak gelecek projelere taban oluşturulmuştur.

Airlib kütüphanesi, FDC 1.2 araç setinde yer alan bilgilerin harmanlanarak oluşturulduğu ve hava aracı modellerini içinde barındıran bir alt sistem olarak kullanılır. Bu alt sistemde girişler, kontrol yüzeylerini temsil eden, kanatçık, irtifa dümeni, yön dümeni olmak üzere 4 adet, 3 yönde kuvvet ve 3 yönde tork olmak üzere toplamda 6 tane harici kuvvet komutu, hava aracı hareket durumu ve hareket durumlarının türevlerini temsil eden 12 adet çıkış, vücut eksenleri tarafında 3 adet rüzgar hızı ve rüzgar hızının türevlerini içeren 6 adet hava bilgisi, 3 tane vücut eksenleri yönündeki hız türevleri, 3 adet boyutsuz açışal hız, ve 6 tane vücut eksenleri yönünde kinematik ivme yer almaktadır. Airlib kütüphanesini ifade eden model Şekil 2.12 ile verilmiştir.



Şekil 2.12 : Airlib kütüphanesinde yer alan Cessna 172 uçak modelinin blok şeması

Airlib kütüphanesinde yer alan Cessna 172 modelinin parametreleri otomatik olarak gelmektedir. Ancak üzerinde parametre değişikliği yapmaya da izin verir. Girilen parametreler ile Airlib kütüphanesi uçağın uçuş dinamiklerini oluşturur.

General Nonlinear Aircraft Model (mask) (link)

The first input contains the wind velocity and acceleration. The second input contains external forces and moments in body axis. The third input contains the deflections of elevators, ailerons, rudder, and flaps. For a list of outputs look under the mask. The International measurement system (MKS) is adopted.

Parameters

Geometry and Mass : [cbar b S Ix Iy Iz Jxy Jxz Jyz m]

Aerodynamic D-Force Derivatives : [CD0 CDa CDq CDde CDih]

Aerodynamic L-Force Derivatives : [CL0 CLa CLq CLde CLih]

Aerodynamic Y-Moment Derivatives : [Cm0 Cma Cm q Cmde Cmih]

Aerodynamic Y-Force Derivatives : [CY0 CYb Cyp CYr CYda CYdr]

Aerodynamic X-moment Derivatives : [Cl0 Clb Clp Clr Cl da Cl dr]

Aerodynamic Z-moment Derivatives : [Cn0 Cnb Cnp Cnr Cnda Cndr]

Initial Condition x0 [v alpha beta p q r psi theta phi xe ye H]

OK Cancel Help Apply

Şekil 2.13 : Airlib kütüphanesinde yer alan herhangi bir uçağın uçuş parametrelerinin katsayılarının ayarlandığı giriş penceresi

3. KUATERNİYON

Kuaterniyonlar, matematikte büyüleyici bir sayı sistemidir. Tıpkı, karmaşık sayıların, gerçek sayıların iki boyutlu bir genişletmesi olması gibi, kuaterniyonlar da karmaşık sayıların dört boyutlu bir genişletmesidir. Ayrıca, kuaterniyonlar, kuantum mekaniğini ve üç boyutta dönüşü açıklamak için oldukça pragmatik bir faydaya sahiptir.

Kuaterniyonların keşfinin hikayesi matematik dünyasında oldukça ünlüdür. İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton, hayatının çoğunu, karmaşık sayılara benzer, üç boyutlu bir sayı sistemi arayarak geçirmiştir. Oğlu, her sabah uçleri nasıl böleceğini çözüp çözmediğini sorar ve o da her zaman "hayır, henüz değil", der. Ancak 16 Ekim 1843'te Dublin'deki Broome Köprüsü'nü geçerken, fark etmiştir ki, ihtiyaç duyduğu şey karmaşık sayılara tek bir boyut eklemek değil, iki sanal boyut daha eklemektir: Üç hayali boyut uzayı tanımlayan boyutlar ve bir tür dördüncü boyutta ona dik oturan gerçek sayılar. Bu üç hayali birimi tanımlayan çok önemli denklemi,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

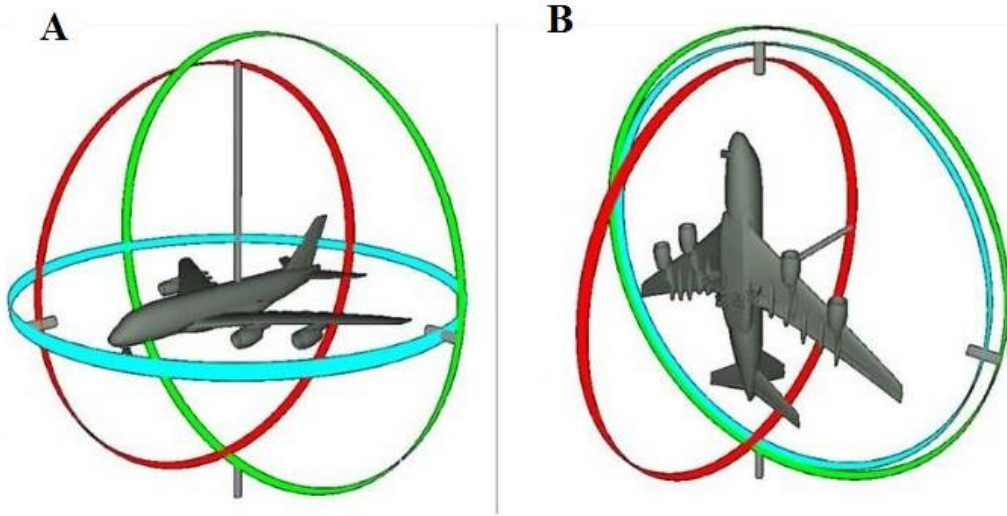
taşıyan ifadeyi köprüye kazımıştır. Daha sonra, kuaterniyonları yaymak için resmi bir kuaterniyon toplumu oluşturmuştur.

Bir yüzyıl sonra, bilgi işlem endüstrisi, grafik, robotik gibi 3-boyutlu uzay oryantasyonu içeren alanlarda kuaterniyonların kullanımı canlanmıştır. Bunun nedeni, kuaterniyonların, 3-boyutlu rotasyonları tanımlamanın ve hesaplamaların zarif bir yolunu vermesidir. Öyle ki kuaterniyonlar, diğer yöntemlerde ortaya çıkan birçok sayısal hatayı da önler.

Aviyonik sistemlerde de oldukça popüler olan kuaterniyonlar, sahip oldukları özellikleri sayesinde bu tezde Euler açıları yerine tercih edilmiştir.

Bir uçağın geniş vaziyet manevralarında gezinme olasılığı, tekillik içermeyen yükseklik kontrolünü gerektirir. Bu nedenle, kuaterniyon durum geri beslemesi, Euler açı tabanlı kontrolcülerin yaşadığı gimbal kilit durumundan kaçınırken hava aracı motorları için kontrol komutlarını hesaplamak için kullanılır. Gimbal kilitlenmesi, üç gimbalden herhangi ikisinin ekseni, paralel bir konfigürasyona sürüldüğünde meydana

gelen üç boyutlu, üç gimbal mekanizmada bir derecelik serbestlik kaybıdır ve sistemi dejenere bir iki boyutlu uzay olarak rotasyona kilitler.



Şekil 3.1 : Bir uçak için gimbal kilitlenmesinin gösterimi

Şekil 3.1 A'da yer alan uçak gimbal kilitlenmesi olmayan, B'de yer alan uçak ise gimbal kilitlenmesine bir örnektir.

Sözgelimi, kuzeye doğru uçan bir uçakta, karşılıklı olarak dikey olan üç gimbal çemberi eksenini (yani, her biri sıfır yuvarlanma, yunuslama ve sapma açıları) ile bir seviye algılama platformu düşünüldüğünde, Şekil 3.1 B'de de gösterildiği gibi uçağın burnu 90 derece yükselirse, uçağın ve platformun sapma eksenini gimbaline paralel hale gelir ve sapma ile ilgili değişiklikler artık telafi edilemez.

Uçağın istenilen istikameti takip etmesi üzerine yapılan çalışmaların çoğunda, Euler açıları güdüm stratejilerini formüle etmek için kullanılır ve kuaterniyonları kullanarak üç boyutlu yol izleme stratejileri tasarlamak için daha az çalışma yapılmıştır. Literatüre bakıldığında (J. Hall, 2012)'de akrobatik manevralar için bir kuaterniyon yolu takip kontrolcüsü türetilmiş ve (Fossen, 2013)'de geleneksel LOS güdümü kuaterniyon formuna dönüştürülmüştür.

Bir diğer avantaj ise birim kuaterniyonların kullanılması, algoritma hesaplama açısından daha verimlidir ve bu sayede matematiksel tekillikleri arındırır (Ananda, 2016). Ek olarak, kuaterniyon uygulaması, trigonometrik parametrelerin yokluğundan dolayı durum tahmininin genel karmaşıklığını azaltır (R. Kumar, 2020).

Bu çalışmada, kuaterniyonların kullanılmasındaki en büyük etmen, simülasyon ve kontroldeki "tüm-irtifa" kabiliyetleri ve sayısal avantajlarıdır. Kuaterniyonlar, benzetim, robotik, güdüm ve navigasyon hesaplamaları, irtifa kontrolü ve grafik animasyonlarında yaygın olarak kullanılmaktadırlar. İlk olarak W. R. Hamilton (1805-1865) kuaterniyon formunu:

$$x_0 + x_1^i + x_2^j + x_3^k$$

şeklinde verilen sanal operatörler ile

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad ki = j = -ik$$

olarak tanımlayarak bir düzlemdeki karmaşık sayıları üç boyuta genelleymeye çalışmıştır. Matematiksel açıdan kuaterniyonlar, çarpmanın değişimi kuralı hariç, cebirin normal yasalarına uyar. Çarpma işareti olan '*', birleştirici yasa ile tanımlanır. Örneğin, eğer,

$$r = p * q = (p_0 + p_1^i + p_2^j + p_3^k) * (q_0 + q_1^i + q_2^j + q_3^k)$$

olursa

$$r = p_0q_0 + p_0q_1i + p_0q_2j + p_0q_3k + p_1q_0i + p_1q_1i^2 + \dots$$

şeklindedir.

i, j, k çarpım ve toplama terimleri için kuralları kullanarak cevap çeşitli şekillerde yazılabilir, örneğin,

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Alternatif olarak, i, j, k terimleri birim vektör olarak tanımlandığında, kuaterniyonlar, $q_0 + \mathbf{q}$ olarak ele alınabilir. Burada \mathbf{q} ifadesi, kuaterniyonun vektör kısmını, q_1, q_2, q_3 bileşenlerini sırasıyla i, j, k ile ifade eder. Kuaterniyonlar bir aralık olarak tanımlandığında, q_0 ve vektör bileşenlerinden oluşur. Böylelikle,

$$p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p}^r \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}^r \end{bmatrix}$$

vektörlerin bileşenlerinin, kuaterniyon uygulandığında seçilecek bir r referans sisteminde alındığını gösterir. Yukarıdaki çarpma şu şekilde yazılabilir:

$$p * q = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^r \\ (p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q})^r \end{bmatrix}$$

Bu denklemler kullanılarak kuaterniyon özellikleri türetilebilir.

3.1 Kuaterniyonun Özellikleri

3.1.1 Kuaterniyon sıra bağımlılığı

Kuaterniyonlarda sıra bağımlılığı,

$$p * q - q * p = \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{p})^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\mathbf{p} \times \mathbf{q})^r \end{bmatrix}$$

ve

$$p * q \neq q * p$$

olarak ifade edilebilir.

3.1.2 Kuaterniyon normu

Kuaterniyonun normu, öğelerin karelerinin toplamı olarak ifade edilir:

$$norm(q) = \sum_{i=0}^{i=3} q_i^2$$

3.1.3 Bir çarpımın normu

Tanımlanan norm özelliği ve vektör işlemleri kullanılarak, bir çarpımın normu, ayrı normların çarpımına eşit olduğu kolayca gösterilebilir:

$$norm(p * q) = norm(p) norm(q)$$

3.1.4 Çarpmanın birleşme özelliği

Çarpmanın birleşme özelliği,

$$(p * q) * r = p * (q * r)$$

şeklindedir.

3.1.5 Kuaterniyonun tersi

Çarpma işlemi dikkate alındığında,

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}^r \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \\ (q_0 \mathbf{q} - q_0 \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q})^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum q_i^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denklemdaki ifade ile bir kuaterniyonu, vektör parçasının işaretindeki bir değişiklikle farklı bir şekilde, başka bir kuaterniyonla çarpmanın, yalnızca skaler kısmı bir kuaterniyon ürettiği görülmektedir. İkinci formun bir kuaterniyonu, çarpmada (bir sabitle çarpma) çok basit özelliklere sahip olmakta ve kuaterniyon normuyla bölüldüğünde, "özdeşlik kuaterniyonu" olarak işlev sağlamaktadır. Bu nedenle, bir kuaterniyonun tersi şöyle tanımlanır:

$$q^{-1} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}^r \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{norm(q)} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}^r \end{bmatrix}$$

Ancak, kuaterniyon üzerinde çalışılırken genellikle basitleştirmek adına, birim-normlu kuaterniyonlar kullanılmaktadır.

3.1.6 Bir çarpımın tersi

Bir kuaterniyon çarpımının tersi, ters sırada ayrı ayrı terslerin çarpımı ile verilir. Bu,

$$\begin{aligned} (p * q)^{-1} &= \frac{1}{norm(p * q)} \begin{bmatrix} p_0 q_0 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^r \\ -(p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q})^r \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{norm(q)} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}^r \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_0 \\ -\mathbf{p}^r \end{bmatrix} \frac{1}{norm(p)} \end{aligned}$$

olarak görülmektedir. Böylelikle,

$$(p * q)^{-1} = q^{-1} * p^{-1}$$

olarak ifade edilebilir.

3.2 Kuaterniyonlarla Vektör Dönüşümü

Bir kuaterniyon, bir Euler vektörünü döndürme formülü ile aynı şekilde döndürmek için kullanılabilir ve kuaterniyon dönüşü, biçim olarak çok daha basittir. Kuaterniyonun vektör kısmı, dönüş eksenini tanımlamak için ve skaler kısım ise dönüş

açısını tanımlamak için kullanılır. Dönme eksenini, referans koordinat sistemindeki yön kosinüsleri ile belirtilir ve kuaterniyona bir birim normu kısıtlamasıyla sınırlandırmak uygundur. Bu nedenle, eksenin yön açıları α , β , γ ve dönüş açısının bir ölçüsü δ ise, dönüş kuaterniyonu şöyle yazılır,

$$q = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \cos \alpha \cdot \sin \delta \\ \cos \beta \cdot \sin \delta \\ \cos \gamma \cdot \sin \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \mathbf{n}^r \end{bmatrix}$$

ve bu ifadede yer alan \mathbf{n} , rotasyon eksenini boyunca bir birim vektörünü tanımlar. Ayrıca,

$$\mathbf{n}^r = [\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma]^T$$

ve

$$\text{norm}(q) = \cos^2 \delta + \sin^2 \delta (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1$$

Bu formülasyon ayrıca $\pm 180^\circ$ aralığındaki her δ değeri için bir değerli bir kuaterniyon olduğunu garanti eder, böylece tüm olası dönüşleri kapsar. Vektörler ve kuaterniyonlar arasındaki çarpım uyumluluğu için, bir Euler vektörü, sıfırın skaler kısmı ile bir kuaterniyon olarak yazılır; Böylece

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}^r \end{bmatrix}$$

Döndürmenin sonucu aynı zamanda skaler kısmı sıfır olan bir kuaterniyon olmalı, dönüşüm dörtlü ters kuaterniyon aracılığıyla tersine çevrilebilir ve Euler uzunluğu korunmalıdır. Dönüşümler,

$$v = q * u * q^{-1} \text{ ya da } v = q^{-1} * u * q$$

ters alma işleminin v üzerindeki performansı itibarıyla tersinirdir. Bu dönüşümlerden ikincisi, en yaygın kullanılanıdır,

$$v = q^{-1} * u * q = \begin{bmatrix} q_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) - (q_0 \mathbf{u} - \mathbf{q} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{q} \\ ((\mathbf{q} \cdot \mathbf{u})\mathbf{q} + q_0(q_0 \mathbf{u} - \mathbf{q} \times \mathbf{u}) + (q_0 \mathbf{u} - \mathbf{q} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{q})^r \end{bmatrix},$$

sadeleştirilirse,

$$v = q^{-1} * u * q = \begin{bmatrix} 0 \\ (2q_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) + (q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{u} - 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{u}))^r \end{bmatrix}$$

Böylelikle, bu dönüşüm sıfır skaler kısmın gerekliliğini karşılar. Ayrıca, kuaterniyon normunun özelliklerinden dolayı, Euler uzunluğu korunur. Kuaterniyon dönüşüm formülleri Çizelge 3.1’de yer almaktadır.

Çizelge 3.1 : Kuaterniyon Dönüşüm Formülleri

Dönüşüm Formülü	Kuaterniyon Dönüşümü
$(1 - \cos \mu) \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$	$2 \sin^2 \delta \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$
$\cos \mu \mathbf{u}$	$(\cos^2 \delta - \sin^2 \delta) \mathbf{u}$
$-\sin \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{u})$	$-2 \cos \delta \sin \delta (\mathbf{n} \times \mathbf{u})$

Eğer $\delta = \mu/2$ alınır ve yarım-açı trigonometri özellikleri uygulanırsa bu tablodaki durumlar elde edilecektir. Dolayısıyla, kuaterniyonlar,

$$q = \begin{bmatrix} \cos (\mu/2) \\ \sin (\frac{\mu}{2}) \mathbf{n}^r \end{bmatrix}$$

ve dönüşüm,

$$\mathbf{u} = q^{-1} * \mathbf{u} * q$$

vektör \mathbf{u} 'nun, μ pozitif olduğu zaman, \mathbf{n} etrafındaki μ açısına doğru sol el kuralı dönüşümünü verir.

3.3 Kuaterniyon Koordinat Dönüşümü

Kuaterniyon döndürme formüllerinden yola çıkıldığında pozitif μ 'nün bir vektörün sol elle dönüşü yerine sağ elle yapılan bir koordinat dönüşü olduğu bakış açısı ele alındığında, a sisteminden b sistemine koordinat dönüşünü gerçekleştiren kuaterniyon $q_{b/a}$ olarak tanımlanır; bu nedenle

$$q_{b/a} = \begin{bmatrix} \cos (\mu/2) \\ \sin (\mu/2) \mathbf{n}^r \end{bmatrix}$$

ve koordinat dönüşümü,

$$\mathbf{u}^b = q_{b/a}^{-1} * \mathbf{u}^a * q_{b/a}$$

şeklindedir. Bu denklem doğrultu kosinüs matrisinin yerini alır. Bu dönüşüm sayesinde kuaterniyonun vektör kısmı $\mathbf{n} \sin(\mu/2)$ ile bağlı bir eksen etrafındaki tek bir rotasyon ile halledilmiş olur.

Euler teoremi, aynı koordinat rotasyonunun, rotasyon matrisinin bir özvektörüne karşılık gelen tek eksen etrafında bir düzlem rotasyonu ile elde edilebileceğini göstermektedir. Bu nedenle, n vektörü bu özvektöre paralel olmalıdır ve bu nedenle

$$n^b = C_{b/a} n^a = n^a$$

olur. Bu, kuaterniyon vektör parçasının sistem a veya sistem b'de aynı bileşenlere sahip olduğunu gösterir. Referans koordinat sistemi r, a veya b olabilir. Ters dönüşüm,

$$q_{b/a}^{-1} = q_{a/b}$$

Ayrıca çoklu dönüşümler için,

$$u^c = q_{c/b}^{-1} * q_{b/a}^{-1} * u^a * q_{b/a} * q_{c/b}$$

birleşme özelliğinden kaynaklanır, bu da tek bir kuaterniyon ile bu dönüşümün gerçekleştirilebileceği anlamına gelir,

$$q_{c/a}^{-1} = q_{c/b}^{-1} * q_{b/a}^{-1}$$

ya da

$$q_{c/a} = q_{b/a} * q_{c/b}$$

Kuaterniyon koordinat dönüşümü, aslında u^a 'nın, doğrultu kosinüs matrisi tarafından ön çarpılmasından daha fazla aritmetik işlem içerir. Bununla birlikte, koordinat dönüşümü zamanla değiştiğinde, kuaterniyonun zaman güncellemesi, sayısal olarak Euler kinematik denklemlerine tercih edilen ve Poisson kinematik denklemlerinden daha verimli olan diferansiyel denklemleri içerir. Ek olarak, kuaterniyon formülasyonu, Euler denklemlerinin tekiliğinden kaçınır ve hata birikimini azaltmak için kolayca yeniden normalleştirilir.

3.4 Kuaterniyon Tabanlı Kinematik Denklemler

Zamanla değişen bir kuaterniyonun türevi için bir ifade bulma ve dolayısıyla uçağın davranışı için bir durum denklemi elde etme amacıyla, mevcut bir $q(t)$ durumundan bir $q(t + \delta t)$ artışı için sıfır olmayan bir açısal hız vektörüne yanıt olarak bir ifade türetilecektir. İki "ileri" kuaterniyonun çarpımı,

$$q(t + \delta t) = q(t) * \delta q(\delta t)$$

ifadesini kullanarak

$$q(t) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\mu}{2} \\ \mathbf{n}^r \sin \frac{\mu}{2} \end{bmatrix}, \quad \delta q(\delta t) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mathbf{n}^r \delta \mu}{2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\mu(t)$ rotasyon açısını, \mathbf{n} Euler açısını ve r referans koordinat sistemini ifade eder. Bu ifadenin türevi,

$$\dot{q} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \delta t) - q(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{q(t) * (\delta q - I_q)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} q * \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{n}^r \frac{\delta \mu}{\delta t} \end{bmatrix},$$

ve $I_{(q)}$ birim kuaterniyonu temsil eder. Bu ifade, belirtilen limit alındığında ve açısal hız vektörü \mathbf{w} türetilen kuaterniyon ile birleştirildiğinde,

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q * \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}^r \frac{d\mu}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} q * \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}^r \end{bmatrix}$$

olur.

Bu denklem, a sisteminden b sistemine bir koordinat rotasyonu ile birleştirildiğinde notasyon,

$$\dot{q}_{b/a} = \frac{1}{2} q_{b/a} * \mathbf{w}_{b/a}^b$$

olur. Ayrıca, bu denklem matris denklemi olarak gösterilirse,

$$\dot{q}_{b/a} = \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{w}_{b/a}^b)^T \\ \mathbf{w}_{b/a}^b & \tilde{\mathbf{w}}_{b/a}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}^b \end{bmatrix}$$

Tüm bilgiler kullanıldığında, $w_{b/a}$ 'nın gövde sistemi,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2} \Omega q \quad (3.1)$$

ve p, q, r açısal hızı ifade etmektedir.

Bu kuaterniyon durum denklemleri, katı-gövde açısal hareketinin gerçekleşmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrık zaman formu ise genelde dijital durum kontrol sistemlerinde (ör. uydular) ve ataletli seyrüsefer dijital işlemede kullanılırlar.

Simülasyon ve kontrolde, genellikle bir kuaterniyonla yönelim takip edilir ve gerektiğinde kuaterniyondan doğrultu kosinüs matrisi veya Euler açıları oluşturulur. Euler ekseni aşikar olduğundan, kuaterniyonu basit bir düzlem dönüşü için başlatmak

kolaydır. Bir bileşik dönüş için (örneğin, sapma, yükseklik ve dönüş) Euler eksenini usulen belirlemeye ve bir kuaterniyon oluşturmak için DKM'nin bir özvektör analizine ihtiyaç duyulur. Ancak, bu gerekli değildir, belirli bir dönüş için Euler eksenleri benzersizdir ve bu nedenle kuaterniyon benzersizdir. Bu nedenle, kuaterniyonu başka bir şekilde düzenlersek, dönme eksenleri dolaylı olarak doğru olacaktır.

3.4.1 Bir yalpa, yunuslama ve yuvarlanma dizini için kuaterniyon

Bir yalpa, yunuslama ve yuvarlanma dizini için kuaterniyon denklemi,

$$v^{frd} = q_{\phi}^{-1} q_{\theta}^{-1} q_{\Psi}^{-1} * v^{ned} * q_{\Psi} * q_{\theta} * q_{\phi}$$

şeklindedir. Her bir kuaterniyon için rotasyon eksenleri,

$$q_{\Psi} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Psi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\Psi}{2} \end{bmatrix}, \quad q_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_{\phi} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu dönüşümler kuaterniyon çarpımı ile çarpılabilir ve sonuç olarak,

$$q_{frd/ned} = q_{\Psi} * q_{\theta} * q_{\phi} = \begin{bmatrix} \pm (\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Psi}{2}) \\ \pm (\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Psi}{2}) \\ \pm (\cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Psi}{2}) \\ \pm (\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Psi}{2}) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Denklemlere artı-eksi işaretinin eklenmesinin sebebi, hangi işaret seçilirse seçilsin koordinat dönüşümü denklemi ve $w_{b/a}$ 'nın gövde sistemi denkleminde bir etkisi olmamasıdır. Ancak, seçilen bir işaret tüm denklemlerde aynı işaret olarak alınmalıdır.

3.5 Kuaterniyondan Doğru Kosinüs Matrisine Geçiş

Kuaterniyonun vektör kısmı kullanılarak kuaterniyon dönme formülü dizi işlemleri cinsinden yazılırsa,

$$u^b = [2q^a (q^a)^T + (q_0^2 - (q^a)^T q^a)I - 2q_0 \tilde{q}^a] u^a \equiv C_{\frac{b}{a}} u^a$$

olur. Çapraz çarpım matrisi \tilde{q}^a şu şekilde verilir:

$$\tilde{q}^a = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tüm bilgiler birleştirildiğinde elde edilen dönüşüm matrisi,

$$C_{b/a} = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix}$$

şeklinde. Dönüşüm matrisi için bu ifade, kuaterniyon parametrelerine göre, kuaterniyon koordinat dönüşümü formülünde yer alan μ açısının n boyunca sağ el rotasyonu etrafında elde edilmesiyle ilişkilidir. Dönüşüm matrisi, Euler açılarının herhangi bir seçiminden bağımsızdır. Koordinat rotasyonun ifade edilmesine bağlı olarak Euler açıları belirlenebilir.

3.6 Doğrultu Kosinüs Matrisinden Kuaterniyona Geçiş

Kuaterniyon parametreleri ayrıca genel doğrultu kosinüs matrisinin öğelerinden $\{c_{i,j}\}$ hesaplanabilir. Kuaterniyondan doğrultu kosinüs matrisine geçiş için belirlenen matrisin ana köşegenindeki terimler birleştirilirse, aşağıdaki ilişkiler elde edilir:

$$4q_0^2 = 1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}$$

$$4q_1^2 = 1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}$$

$$4q_2^2 = 1 - c_{11} + c_{22} - c_{33}$$

$$4q_3^2 = 1 - c_{11} - c_{22} + c_{33}$$

Bu ilişkiler, kuaterniyon elemanlarının büyüklüklerini verir, ancak işaretleri vermez. Kuaterniyondan doğrultu kosinüs matrisine geçiş için belirlenen matristeki köşegen dışı terimler ek ilişkileri verir,

$$4q_0q_1 = c_{23} - c_{32}$$

$$4q_0q_2 = c_{31} - c_{13}$$

$$4q_0q_3 = c_{12} - c_{21}$$

$$4q_1q_2 = c_{12} + c_{21}$$

$$4q_2q_3 = c_{23} + c_{32}$$

$$4q_1q_3 = c_{31} + c_{13}$$

İlk denklem setinden, en büyük büyüklüğe sahip kuaterniyon elemanı (dördünden en az biri sıfırdan farklı olmalıdır) seçilebilir. Karekök ile ilişkili işaret isteğe bağlı olarak seçilebilir ve sonra bu değişken, kalan kuaterniyon elemanlarını bulmak için ikinci denklem seti ile bölen olarak kullanılabilir. Bu algoritmanın ilginç bir yanı, algoritma bir dizi yeni başlangıç koşuluyla yeniden başlatılırsa kuaterniyonun işaretini değiştirebilmesidir. Bunun kuaterniyondan doğrultu kosinüs matrisine geçiş için belirlenen rotasyon matrisi üzerinde hiçbir etkisi olmayacaktır. Bunun gibi algoritmalar Shoemake (1985) ve Shepperd (1978) tarafından tartışılmıştır.



4. DOĞRUSAL KARESEL DÜZENLEYİCİ YAKLAŞIMI

4.1 Optimal Kontrol

Temelde, klasik kontrol adı altında düşünülebilecek sistemler, doğrusal ve zamanla değişmeyen, tek girdi ve tek çıktıya sahiptir. Klasik kontrol tasarım yöntemlerini kullanan tasarımcının temel amacı, bir modeli stabilize etmektir, oysa ikincil amaçlar, belirli bir geçici yanıtına, bant genişliğine, bozulma reddine, sürekli hal hatasına ve model varyasyonlarına veya belirsizliklere karşı gürbüzlük elde etmeyi içerebilir. Daha yüksek mertebeli sistemler, çok girdili sistemler veya genellikle klasik kontrol yaklaşımında varsayılan özelliklere sahip olmayan sistemler için, tasarımcının yaratıcılığı genellikle makul bir tasarıma ulaşmada sınırlayıcı faktördür. Klasik kontrolün aksine modern kontrolün temel amaçları, kontrol sistemi tasarımını deneyselleştirmek ve klasik kontrolün üstesinden gelebileceğinden çok daha geniş bir kontrol problemi sınıfına çözümler sunmaktır. Modern kontrolün bu amaçlara ulaşmak için belirlediği ana yollardan biri, tasarım görevini kolaylaştıran bir dizi analitik tasarım prosedürü sağlamaktır.

Birçok yönetim bilimi uygulaması (finans, ekonomi, üretim ve envanter, pazarlama, bakım ve değiştirme, doğal kaynakların tüketimi vb.), dinamik sistemlerin, yani zaman içinde değişen sistemlerin kontrolünü içerir. Zamanın sürekli mi yoksa aralıklı mı değiştiğine bağlı olarak sürekli zaman sistemleri veya ayrık zaman sistemleri olarak adlandırılırlar.

Optimal kontrol teorisi, dinamik bir sistemi kontrol etmenin optimal yollarını bulmak için geliştirilmiş bir matematiksel optimizasyon dalıdır (Ross I. , 2015). Mühendislikte çok sayıda uygulamaya sahiptir. Örneğin, dinamik sistem olarak roket iticilerine karşılık gelen kontrollere sahip bir uzay aracı ele alındığında, amaç minimum yakıt harcamasıyla aya ulaşmak olabilir (Luenberger, 1979) ya da dinamik sistem olarak, bir ülkenin ekonomisine bağlı olan işsizlik ele alındığında, işsizliği en aza indirmek amaçlanabilir; bu durumda kontroller maliye ve para politikası olabilir. (Kamien, 2013)

Optimal kontrol, bir performans indeksini en aza indirmek için belirli bir süre boyunca dinamik bir sistemin kontrol ve durum yörüngelerini belirleme sürecidir ve belirli bir optimallik kriterine ulaşılabacak şekilde belirli bir sistem için bir kontrol yasası bulma sorunuyla ilgilidir. Bir kontrol problemi, durum ve kontrol değişkenlerinin bir fonksiyonu olan bir maliyet fonksiyonu içerir. Optimal bir kontrol, maliyet fonksiyonunu en aza indiren kontrol değişkenlerinin yollarını tanımlayan bir dizi diferansiyel denklemdir. Optimal kontrol, Pontryagin'in maksimum prensibi (Pontryagin'in minimum prensibi olarak da bilinen gerekli bir koşul-Pontryagin Prensibi) (Ross I. M., 2009) kullanılarak veya Hamilton-Jacobi-Bellman denklemini çözerek elde edilebilir.

Optimal kontrol ve sonuçları günümüzde, havacılık, proses kontrolü, robotik, biyomühendislik, ekonomi, finans ve yönetim bilimi dahil olmak üzere birçok farklı alanda uygulama bulmuştur ve kontrol teorisi içinde aktif bir araştırma alanı olmaya devam etmektedir.

Örneğin, engebeli bir yolda düz bir çizgide giden bir arabanın toplam seyahat süresini en aza indirmek için sürücünün gaz pedalına nasıl basması gerektiği bu konu ile ilgilidir. Bu örnekte, kontrol yasası terimi özellikle sürücünün gaza basma ve vites değiştirme şeklini ifade eder. Sistem hem arabadan hem de yoldan oluşur ve optimallik kriteri, toplam seyahat süresinin en aza indirilmesidir. Kontrol problemleri, genellikle yardımcı kısıtlamaları (mevcut yakıt miktarı sınırlı olabilir, gaz pedalına aracın zemini, hız sınırları vb.) içerir.

Uygun bir maliyet fonksiyonu, hızın, geometrik hususların ve sistemin başlangıç koşullarının bir fonksiyonu olarak seyahat süresini veren matematiksel bir ifade olacaktır. Kısıtlamalar genellikle maliyet işleviyle değiştirilebilir.

Bir başka ilgili optimal kontrol problemi, belirli bir rotayı belirli bir miktarı aşmayan bir sürede tamamlaması gerektiği göz önüne alındığında, yakıt tüketimini en aza indirecek şekilde aracı sürmenin yolunu bulmak olabilir. Yine bir başka ilgili kontrol sorunu, zaman ve yakıt için varsayılan parasal fiyatlar göz önüne alındığında, yolculuğu tamamlamanın toplam parasal maliyetini asgariye indirmek olabilir.

Bu tez çalışmasında amaç uçağın belirli giriş kısıtları dahilinde, verilen referans değerlerinin gerçek değerleri arasındaki farkın zamana bağlı integralinin ve uygulanan kontrol girişlerinin büyüklüklerinin zamana bağlı integralinin ağırlıklı toplamının

minimize edilmesidir. Buna bir örnek olarak uçak 68 m/s hızla hareket ederken, 65 m/s hıza yavaşlamasının en optimal şekilde gerçekleşmesi için yöntem belirlenmesi optimal kontrol konusuna dahildir.

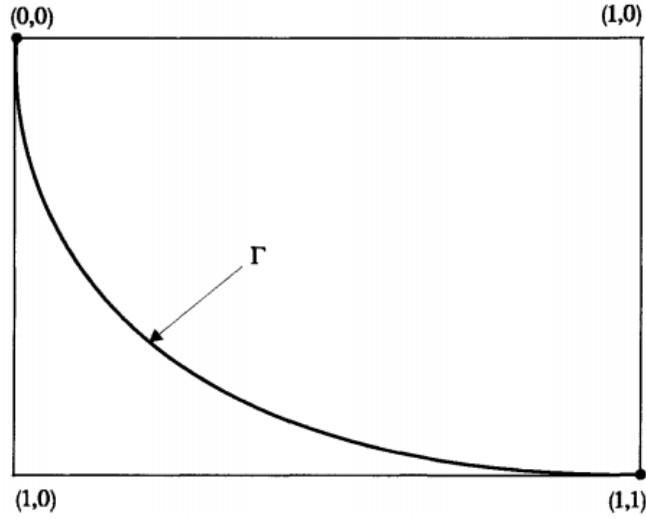
4.1.1 Optimal kontrol tarihçesi

Optimal kontrol, kökenleri açısından varyasyonlar hesabı teorisi ile yakından ilgilidir. Eski zamanlardaki optimal kontrol teorisine ve varyasyonlar hesabına bazı önemli katkılar arasında Isaac Newton, Ludovico Lagrange, Johann Bernoulli, Andrien Legendre, Leonhard Euler, Carl Jacobi, William Hamilton, Adolph Mayer, Karl Weierstrass ve Oskar Bolza bulunmaktadır.

20. yüzyılda optimal kontrolün geliştirilmesindeki bazı önemli dönüm noktaları arasında, 1950'lerde Richard Bellman tarafından formülasyon dinamik programlaması, Lev Pontryagin ve çalışma arkadaşları tarafından minimum ilkenin geliştirilmesi yer almaktadır. 1950'ler ve 1960'larda Rudolf Kalman tarafından doğrusal karesel düzenleyici ve Kalman filtresinin formülasyonu bulunmuştur.

Optimal kontrol, varyasyonlar hesabının bir uzantısıdır ve kontrol yasalarının türetilmesi için matematiksel bir optimizasyon yöntemidir. Varyasyonlar hesabının oluşturulması, analizin Newton ve Leibniz tarafından icat edilmesinden veya formüle edilmesinden hemen sonra meydana gelmiştir. Analizdeki önemli bir problem, fonksiyonun maksimumunu veya minimumunu aldığı bir fonksiyonun argümanını bulmaktır. Varyasyonlar hesabında ortaya çıkan bu problemin uzantısı, o fonksiyonun bir integralinin veya fonksiyonunun değerini maksimize eden veya en aza indiren bir fonksiyon bulmaktır. Euler ve Lagrange genellikle varyasyonlar hesabının kurucuları olarak kabul edilir. Alanın gelişimine katkıda bulunan diğerleri, Newton, Legendre ve Bernoulli kardeşler gibi en büyük matematikçilerden bazılarıdır (Ross & Karpenko, 2012).

İlk olarak varyasyonlar hesabı tarafından ele alınan ünlü bir problem, en kısa zamanın yolu veya Brachistochrone probleimidir. Dikey düzlemde (0,0) ve (1,1) iki noktayı, yerçekimi etkisi altında eğri boyunca kayan bir kordonun (0,0) 'dan (1,1) ' e mümkün olan en kısa sürede hareket edeceği özelliğiyle birleştiren bir F eğrisi bulmayı içerir (Becerra, 2020).



Şekil 4.1 : Brachistochrone Problemi

Problem 1696'da Johann Bernoulli tarafından ortaya atılmış ve 1697'de kendisi ve kardeşi Jacob Bernoulli tarafından bağımsız olarak çözülmüştür. Çözüm eğrisi bir sikloid'dir. On dokuzuncu ve yirminci yüzyılın başlarında, birçok matematikçi varyasyon analizi problemlerinin çözümü teorisine katkıda bulunmuştur. Bunlar arasında Hamilton, Jacobi, Bolza, Weierstrass, Caratheodory ve Bliss bulunur.

Varyasyon problemlerinin hesabını kontrol teorisi problemlerine dönüştürmek, bir tane daha kavramsal uzantı gerektirir. Bu da durum denklemlerine kontrol değişkenlerinin eklenmesidir. Rufus Isaacs (1965), 1948-1955 döneminde iki kişilik takip-kaçınma oyunlarında böyle bir uzantı yapmıştır. Richard Bellman (1957), dinamik programlama fikri ile benzer bir uzantı yapmıştır. Modern kontrol teorisinin başlangıç tarihi, Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze ve Mischenko'nun (1962) yazdığı Optimal Süreçlerin Matematiksel Teorisi kitabının 1958'de Rusça (1962) yayınlanmasıyla birlikte.

Maksimum ilkeye göre, Valentine, McShane, Hestenes, Berkovitz, Neustadt, Pontryagin ve ark.'nın kitabının önemi sadece sınırlı kontrol değişkenleri ile bir varyasyon hesabı probleminin titiz bir formülasyonunda değil, aynı zamanda optimal kontrol problemleri için maksimum prensibinin ispatında da yatmaktadır. Maksimum ilke, dinamik problemin zaman içinde eş değişkenler veya gölge fiyatlar olarak bilinenleri kullanarak, her biri tek bir anda tutulan bir dizi soruna ayrılmasına izin verir. Anlık problemlerin optimal çözümünün, genel probleme en uygun çözümü verdiği gösterilebilir.

4.2 Düzenleyici Problemi

Bir tasarımın ilk aşamalarında, tasarımcı, mantıklı bir matematik problemi oluşturmak için mühendislik durumuna olan aşinalığını ve temelde yatan fizik anlayışını kullanır ve diğer aşamalarda oluşturulan problemi analitik oz mlemek için çalışır. Optimal kontrol, analitik tasarımlar sağlamayı amaçlayan modern kontrolün bir dalıdır. Optimal bir tasarımın nihai sonucu olan sistemin yalnızca kararlı olması, belirli bir bant genişliğine sahip olması veya klasik kontrolle ilişkili istenen kısıtlamalardan herhangi birini karşılaması beklenmez, ancak belirli bir sistem için mümkün olan en iyi sistem olduğu varsayılır. Doğrusal optimal kontrol, özel bir tür optimal kontroldür. Kontrol edilen modelin doğrusal olduğu varsayılır ve optimal kontrolü üreten kontrolcü, doğrusal olarak sınırlandırılır. Doğrusal kontrolcüler, kuadratik performans endeksleri ile çalışılarak elde edilir. Bunlar, kontrol ve düzenleme-izleme hatası değişkenlerinde ikinci dereceden oluşur. Doğrusal optimal kontrol sağlayan bu tür yontemler, Doğrusal Karesel yontemler olarak adlandırılır.

Çoğu optimal kontrol probleminin hesaplanabilir oz mleri yoktur veya sadece büyük bir hesaplama çabasıyla elde edilebilecek oz mleri vardır. Aksine, neredeyse tüm doğrusal optimal kontrol problemlerinin kolayca hesaplanabilir oz mleri vardır. Doğrusal optimal kontrol sonuçları, küçük bir sinyal temelinde çalışan doğrusal olmayan sistemlere de uygulanabilir. Daha kesin olarak, bazı doğrusal olmayan sistemler için bu sistemin belirli bir başlangıç durumunda başlayacağı varsayımıyla optimum bir kontrolün geliştirildiği varsayılarak üzerinde çalışılabilir. Doğrusal optimal tasarım için gerekli hesaplama prosedürleri genellikle doğrusal olmayan optimal problemlere taşınabilir. Örneğin, doğrusal olmayan optimal tasarım prosedürleri, doğrusal olmayan problemi bir dizi doğrusal problem ile değiştiren hesaplama algoritmalarından oluşur (Anderson & Moore, 1971).

Sistem durumlarının ölçülebilir olduğu doğrusal optimal kontrol tasarımları, optimalliğin dışında bir dizi özelliğe sahiptir. Bu tür özelliklerin önekleri, iyi kazanç marđı, faz marđı ve doğrusal olmayanlıklara iyi toleranstır. Bu tür gürbüzlük özellikleri, durum tahmini gerekli olduğunda bile sıklıkla elde edilebilir. Gürbüzlük  zellikleri, doğrusal olmayan sistemler için denetleyici tasarımlarının bazen sistemin doğrusal olduğu varsayımıyla tasarlanarak ve optimal olarak tasarlanmış bir doğrusal sistemin tolere edebileceği gerçeğine dayanarak elde edilebileceğini göstermektedir.

Dolayısıyla, doğrusal optimal tasarım yöntemleri bazı şekillerde doğrusal olmayan sistemlere uygulanabilir.

Doğrusal optimal kontrol, klasik yöntemlerle incelenen kontrol problemlerinin birleşik uygulaması için bir çerçeve sağlar. Aynı zamanda, kontrol tasarımlarının gerçekleştirilebileceği sistemler sınıfını büyük ölçüde genişletir.

Zamanla değişmeyen sistemler için doğrusal optimal kontrol tasarımı, büyük ölçüde bir kontrol kanunu sentezi meselesidir.

4.2.1 Optimal düzenleyici temel teorisi

Bu bölümde, doğrusal düzenleyici problemi tanıtılacak ve onunla ilişkili temel matematiksel sonuçlar oluşturulacaktır. Optimal kontrol problemlerini çözmek için Optimallik Prensibi ve Hamilton-Jacobi denklemi tanıtılacak ve ardından sonlu zaman ve sonsuz zaman aralığı üzerinden performansın ilgi çekici olduğu problemler için birer çözüm elde edilecektir. Sonsuz zaman aralığı problemi, optimal düzenleyicilerin kararlılık özelliklerini içeren ve öngörülen kararlılık derecesine sahip bir düzenleyici tasarımına nasıl ulaşılabileceği de gösterilecektir. Doğrusal olmayan bir sistemin doğrusallaştırılması ve optimize edilmiş bir endeksin ikinci varyasyonunun hesaplanmasıyla optimal bir doğrusal düzenleyici probleminin formülasyonu da dikkate alınır (Anderson & Moore, 1971).

Doğrusal, sonlu boyutlu sistemler ele alındığında sistemler;

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) &= H'(t)x(t)\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada boyutları sırasıyla $n \times n$, $n \times p$, $n \times m$ olan $F(t)$, $H(t)$, ve $G(t)$ genellikle sürekli girdilerle birlikte zamana bağlı matris fonksiyonudur. Boyutu n olan $x(t)$ vektörü 't' anında sistem durumunu, m boyutlu $u(t)$ vektörü 't' zamanında sistem girişini veya sistem kontrolünü ve p boyutlu $y(t)$ vektörü 't' zamanında sistem çıktısını temsil eder. Üst simge asal matris transpozisyonunu gösterir.

Klasik kontrol çalışmasında genellikle sadece bir girişi ve çıkışı olan sistemler dikkate alınır. Sistem denklemlerindeki bu kısıtlamalarla, $u(t)$ ve $y(t)$ vektörleri skaler hale gelir, $H(t)$ ve $G(t)$ matrisleri vektör olur ve buna göre çoğu zaman özel vektör karakterlerini ayırt etmek için küçük harflerle gösterilir. Dikkate alınan sistemler de

normalde zamanla değişmezdir. Sistem denklemleri açısından, bu, başlangıçta sıfır durumu için giriş $u(t)$ ve çıktının $y(t)$ zamanla değişmeyen bir dürtü yanıtı ile ilişkili olduğu anlamına gelir. Ayrıca, zamanla değişmeyen sistemlerin en yaygın durum-uzay tanımları, $F(t)$, $h(t)$, ve $g(t)$ 'nin zamanla sabit olduğu durumlardır. Yine de sabit olmayan $F(t)$, $h(t)$, ve $g(t)$ zamanla değişmeyen bir dürtü yanıtı tanımlayabilir. Örneğin, $F(t) = 0$, $g(t) = e^t$, $h(t) = e^{-t}$ zamanla değişmeyen bir dürtü yanıtı tanımlar.

$$y(t) = \int_{t_0}^t \exp[-(t - \tau)u(\tau)d\tau]$$

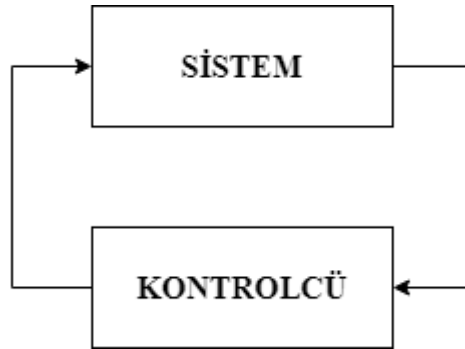
Bir sistemin klasik tanımlaması, normalde, $W(s)$ ile ifade edilen, s Laplace dönüşüm değişkeni olan transfer fonksiyonu matrisi ile ilgilidir. $W(s)$ ile sistem denklemlerinin matrisleri arasındaki bir bağlantı vardır ve bunlar sabitse,

$$W(s) = H'(sI - F)^{-1}G$$

şeklinde tanımlanabilir.

Genellikle kontrol problemleri, düzenleyici sorununu ve takip etme sorununu çözmek gibi amaçlardan birini başarmak için bir kontrolcünün arzu edildiği bir sistemi içerir.

Klasik kontrol teorisi kullanılarak düzenleyici problemi ele alınırken, bir kontrol oluşturmak için çıktıların ve türevlerinin geri beslemesini kullanan bir çözüm aranır. Sistem çıkışı ile sistem girişi arasına transfer fonksiyonuna sahip bir kontrolcü yerleştirilir. Sistem çıkışı, kontrolcü girdisidir ve kontrolcü çıkışı, sistem girdisidir. Geri besleme düzenlemesi,



Şekil 4.2 : Klasik kontrol geri besleme düzeni

şeklinde gösterilmiştir. Hem sistemin hem de kontrolcünün tek bir girişi ve çıkışı vardır ve zamanla değişmezdir. Her birinin bir transfer işlevi vardır. Bu optimal kontrol yaklaşımında, ilk olarak, sistem durumlarının ölçüm için uygun olduğu

varsayılır, eğer böyle değilse, genellikle her iki sistem tarafından çalıştırılan, bir ‘durum gözleyicisi’ olarak adlandırılan fiziksel bir cihazın girişleri ve çıkışları inşa etmek için kullanılması mümkündür. Bu, sistem durumlarının çıktı tahminlerini üretir ve bunlar durumların yerine kullanılabilir (Anderson & Moore, 1971).

Durumların mevcudiyetini varsaymanın yanı sıra, ilk etapta dinamik olmayan veya hafızasız kontrolcüler aramak olağandır. Diğer bir deyişle, kontrolcü çıktısının veya sistem girdisinin $u(t)$, sistem durumu $x(t)$ 'nin anlık bir fonksiyonu olduğu varsayılır. Bu işlevin durumunun zamanla değişmesine izin verilebilir, bu durumda kontrol yasası,

$$u(t) = k(x(t), t)$$

şeklinde ve bu da hem $u(t)$ 'nin hem de $x(t)$ 'nin t 'ye bağımlı olduğunu gösterir.

Ancak uygulama kolaylığı açısından ilgi çekici olan doğrusal kontrol yasasıdır. Bu da,

$$u(t) = K'(t)x(t)$$

şeklinde, uygun boyuttaki bir K matrisi için tanımlanabilir. Sistemin doğrusal olduğu varsayılır ancak çok girdi çok çıktı ve zamanla değişen bir sistem olabilir. Durumların doğrusal kombinasyonları doğrusal bir sistem için tanımlanan kontrol yasası uyarınca sistem girişine geri beslenir.

Düzenleyici problemi için bir kontrolcü oluşturmaya çalışılırken, rastgele sıfır olmayan bir başlangıç durumunu, tercihen olabildiğince hızlı bir şekilde sıfır durumuna götüreceği bir kontrol şeması aranır. Eğer F ve G sabitse ve $[F, G]$ çiftleri tamamen kontrol edilebilirse, böyle bir kontrol şeması bulunabilir. Aslında, F 'nin ve G 'nin sabit olduğu durumlar için ve bazı $F(t), G(t)$ sınıfları için, sistemin seçilen bir 0 noktasına götürülebildiği an, T , istenildiği kadar başlangıç anına, t_0 'a, yakın alınabilir. Böyle bir planla iki şey yanlış olur.

Birincisi, T , t_0 'a ne kadar yakınsa, durum transferini gerçekleştirmek için gereken kontrol enerjisi miktarı o kadar büyüktür (ve kontrolün büyüklüğü de o kadar büyüktür).

Herhangi bir mühendislik sisteminde, pratik değerlendirmelerle sistemdeki çeşitli değişkenlerin büyüklüğü üzerine bir üst sınır belirlenir. Bu nedenle, bu sınırlar aşılmadan keyfi bir şekilde yaklaştırılmaz.

İkinci olarak, $K(T)$ 'de, yani T zamanında kontrolcü kazancında, sonsuz değerler tolere edilmedikçe, sonlu T için geri besleme yasası doğrusal olarak uygulanamaz. Yani, doğrusal bir geri besleme kontrolü bu durum için söz konusu olamaz.

Bahsedilen bu yanışlardan birinin veya her ikisinin geçerli olduğu diğer herhangi bir kontrol şeması da aynı şekilde kabul edilemez. İlk yanışı karşılama çabası içinde, bir kontrol eylemi sırasında bazı kontrol büyüklüğü ölçüsünü sınırlı ve hatta küçük tutmanın gerekli olduğu düşünülebilir; bu tür ölçüler,

$$\int_{t_0}^T u'(t)u(t)dt, \quad \int_{t_0}^T [u'(t)u(t)]^{1/2}dt, \quad \max_{t \in [t_0, T]} \|u(t)\|, \quad \int_{t_0}^T u'(t)R(t)u(t)dt$$

olabilir ve burada $R(t)$, genellik kaybı olmaksızın her zaman simetrik olarak alınabilen, tüm t için pozitif tanımlı bir matristir.

İlk olarak, mühendislikte "yeterince yakın yeterince iyi" olduğu gerçeği göz önünde bulundurulduğunda, sistemin sıfır durumuna ulaşması hedefi gevşetilebilir ve yalnızca bazı normlarla ölçülen durumun küçük olması sağlanabilir. Bunun gerekli olduğu sabit bir T anı olsaydı, $x'(T)Ax(T)$ ifadesinin, bazı pozitif tanımlı A matrisleri ile küçük yapılması sağlanabilirdi.

İkinci olarak, kontrol açısından bakıldığında, kontrolün uygulandığı aralıktaki herhangi bir t için $\|x(t)\|$ küçüktür ve bu gerçeği, örneğin $Q(t)$ matrisinin simetrik pozitif tanımlı olduğu,

$$\int_{t_0}^T x'(t)Q(t)x(t)dt$$

ifadesinin küçük olmasını isteyerek ifade edebiliriz. Bazı durumlarda ise $Q(t)$ negatif olmayan kesin tanımlı bir matris olması yeterli olur.

Bu bilgiler ışığında, bir düzenleyici sistem,

- $u(t) = K'(t)x(t)$ formunda bir doğrusal kontrol kanunu içermelidir.
- Düzenleyici tasarımında, $\int_{t_0}^T u'(t)R(t)u(t)dt$, $x'(T)Ax(T)$ ifadesinin ve $R(\cdot)$, A ve $Q(\cdot)$ matrislerinin pozitif olduğu $\int_{t_0}^T x'(t)Q(t)x(t)dt$ ifadesinin küçüklüğünün sağlanması gerekir. Bu özelliği sağlamak için performans endeksi,

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T (u' Ru + x' Q x) dt + x'(T) A x(T)$$

olsun. $V, x(t_0)$ 'ın başlangıç durumuna bağlıdır.

Özellikle yukarıda verilen ikinci bilgiye ulaşmak için makul bir yaklaşım, performans endeksini (her zaman böyle bir $u(\cdot)$ var olduğunu varsayarak) en aza indiren $u(\cdot)$ kontrolünü seçmek olacaktır. Bu fikir düzenleyici problemini tanımlarken önemli olacaktır.

O halde, düzenleyici problemi şu şekilde tanımlanabilir:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

denklemindeki $F(t)$ ve $G(t)$ matrislerinin sürekli olduğunun varsayıldığı bir sistem düşünüldüğünde $Q(t)$ ve $R(t)$ matrislerinin simetrik olduğu, sırasıyla negatif olmayan ve pozitif tanımlı olduğu, matris girdilerinin sürekli olduğu ve ayrıca 'A' matrisinin, negatif olmayan belirli bir simetrik matris olduğu varsayalım. Performans endeksi

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T (u' Ru + x' Q x) dt + x'(T) A x(T)$$

şeklinde tanımlansın. V 'yi en aza indiren optimal bir kontrol

$$u^*(t), t \in [t_0, T]$$

bulma görevi olarak ve ilişkili optimum performans endeksi

$$V^*(x(t_0), u(\cdot), t_0)$$

yani V 'nin değeri olan minimizasyon problemi, optimum kontrol kullanılarak elde edilir. T sonlu ise, problem sonlu zaman olarak adlandırılır. Sonsuz T ile sonsuz zaman problemi elde edilir.

Daha önce A 'nın pozitif tanımlı olması gerektiği belirtilmişken, düzenleyici sorunun ifadesi sadece negatif olmayan tanımlı olması gerektiğini öne sürüyordu. $x(T)$ son durumunun boyutu sıklıkla, yalnızca gevşetilmiş gereksinimle küçük yapılabilir. Aslında, $A = 0$ seçimi çoğu zaman tatmin edici bir sonuca götürür. Daha önce de belirtildiği gibi, karesel performans endeksinin küçültülmesi, doğrusal bir geri besleme yasası ile elde edilebilir. Önerilen diğer karesel olmayan ölçümlerin tümü, genel olarak doğrusal geri besleme yasalarına yol açmaz.

Genel olarak toparlayacak olursak, düzenleyici probleminin ikinci dereceden performans endeksi sıfırdan farklı durumları ve kontrolleri sınırlandırır.

Minimizasyonun uygulanması için bir durum tahmincisi gerektirebilecek bir doğrusal durum geri besleme yasasına ihtiyaç duyulabilir ancak bu çalışmada bir durum tahmincisi üretilmemiştir. Sadece düzenleyici problemine uygun Q ve R matrisleri seçilerek performans endeksini minimuma indirgeyecek bir K_{DKD} kazancı üretilmiştir.

4.2.2 Hamilton-Jacobi Denklemi

Bu bölümde, bir performans endeksinin en aza indirilmesini gerektiren daha geniş bir optimizasyon problemi sınıfı ele alınacaktır. Ayrıca, belirli türevlenebilirlik ve süreklilik varsayımları altında optimal performans endeksi ile karşılanan kısmi bir diferansiyel denklem olan Hamilton-Jacobi denklemi türetilcektir. Dahası, Hamilton-Jacobi denkleminin göre bir çözümün belirli türevlenebilirlik özelliklerine sahip olması durumunda, bu çözümün istenen performans endeksi olduğu gösterilebilecektir. Ancak böyle bir çözümün var olmasının gerekmediği ve her optimal performans endeksi Hamilton-Jacobi denklemini karşılamadığı için, denklem optimal performans endeksi üzerinde gerekli bir koşulu değil, yalnızca yeterli bir koşulu temsil eder. Bu bölümde, Hamilton-Jacobi denklemini karşılıyorsa, optimal performans endeksinin bir optimal kontrolü nasıl belirlediği de gösterilecektir. Diğer yaklaşımlar, düzenleyici problemiyle ilişkili optimal kontrol ve optimal performans endeksinin türetilmesine, özellikle de Euler-Lagrange denklemleri ile birlikte Pontryagin'in Maksimum Prensibinin kullanılmasına yol açacaktır. Maksimum İlke ve Euler-Lagrange denklemlerinin türetilmesi uzundur, ancak bunların düzenleyici problemine uygulanması basittir. İzlenecek en basit yol, düzenleyici problemine müteakip uygulamayla Hamilton-Jacobi denkleminin geliştirilmesi gibi görünmektedir. Aslında Hamilton-Jacobi denklemi, özellikle uygun görüldüğü doğrusal düzenleyici problemler dışında şimdiye kadar nadiren yararlı olduğunu kanıtladı (Anderson & Moore, 1971).

Başlangıç durumu $x(t_0)$ verilen bir sistem

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

için bir optimal kontrol

$$u^*(t), \quad t \in [t_0, T]$$

tanımlandığında bu kontrol, performans endeksini

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \mathbf{m}(x(T))$$

minimize eder.

Şu an için açık bir şekilde düzgünlük derecesini tanımlamadan (yani, niceliklerin kaç kez farklılaştırılacağı) \mathbf{f} , \mathbf{l} ve \mathbf{m} argümanlarının düzgün işlevleri olarak sınırlandırılacaktır. Aksi takdirde, $\mathbf{f}(x, u, t)$ esasen rastgele seçilmiş olabilir, oysa $\mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau)$ ve $\mathbf{m}(x(T))$, en aza indirilmesi istenen bazı fiziksel nicelikleri yansıtmak için genellikle negatif olmayacaktır. Gösterimden de anlaşılacağı gibi, performans endeksinin başlangıç durumu $x(t_0)$ 'a ve zamanı t_0 'a ve tüm $t \in [t_0, T]$ için kontrolü $u(t)$ 'ye bağlıdır. Optimal kontrol $u^*(\cdot)$, bazı özel kümelerde (parçalı sürekli fonksiyonlar kümesi, birlikte sınırlandırılmış karesel-integrallenebilir (square-integrable) fonksiyonlar, vb.) yer almak için önceden gerekli olabilir.

Performans endeksinin notasyonunun tanımı biraz değiştirilerek, $[a, b]$ aralığı ile sınırlı $u(\cdot)$, fonksiyonunu belirtmek için $u_{[a,b]}$ notasyonunu uygulandığında,

$$V^*(x(t), t) = \min_{u_{[a,b]}} V(x(t), u(\cdot), t)$$

elde edilir. Yani, sistem t zamanında $x(t)$ durumunda başlarsa, önceden belirtilen performans endeksinin

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \mathbf{m}(x(T))$$

minimum değeri

$$V^*(x(t), t)$$

olur.

$V^*(x(t), t)$ 'nin $u(\cdot)$ 'dan bağımsız olduğuna dikkat edilmesi gerekir, çünkü ilk durum ve zaman bilgisi, kontrolün $V(x(t_0), u(\cdot), t_0)$ ifadesini en aza indirmesi gerekliliği ile belirli kontrolü soyut olarak belirler. Sadece kontrolü en aza indirgemeyi ve çeşitli $x(t_0)$ için $V^*(x(t_0), t_0)$ değerini aramaktan ziyade, tüm t ve $x(t)$ için $u_{[a,b]}$ uygulanarak yeni notasyonla tanımlanmış performans endeksinin değerlendirilecek ve buna bağlı olarak optimum kontrol belirlenecektir. V^* için $x(t)$ ve t cinsinden bir fonksiyonel ifadesi olduğu varsayılırsa, optimal kontrol ile birlikte performans endeksleri ile tanımlanan optimizasyon problemi $t = t_0$ ayarlanarak çözülür.

Şimdi, $[t_0, T]$ aralığında herhangi bir t için ve $[t, T]$ aralığındaki t_1 için,

$$\begin{aligned}
V^*(x(t), t) &= \min_{u[t, T]} \left[\int_t^T \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \mathbf{m}(x(T)) \right] \\
&= \min_{u[t, t_1]} \left\{ \min_{u[t_1, T]} \left[\int_t^{t_1} \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{t_1}^T \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \mathbf{m}(x(T)) \right] \right\} \\
&= \min_{u[t, t_1]} \left\{ \int_t^{t_1} \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \\
&\quad + \min_{u[t_1, T]} \left\{ \int_{t_1}^T \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \mathbf{m}(x(T)) \right\}
\end{aligned}$$

ya da

$$V^*(x(t), t) = \min_{u[t, t_1]} \left[\int_t^{t_1} \mathbf{l}(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + V^*(x(t_1), t_1) \right]$$

olarak ifade edilebilir. Bu denklemde, küçük olan bir Δt ile $t_1 = t + \Delta t$ ayarlanır. Denklemdeki sağ tarafı genişletmek için Taylor teoremi uygulanarak,

$$\begin{aligned}
V^*(x(t), t) &= \min_{u[t, t+\Delta t]} \left\{ \Delta t \mathbf{l}(x(t + \alpha \Delta t), u(t + \alpha \Delta t), t + \alpha \Delta t) + V^*(x(t), t) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) \right]' \frac{dx(t)}{dt} \Delta t + \frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) \Delta t + 0(\Delta t)^2 \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Denklemde yer alan α , 0 ile 1 arasında bir sabittir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) &= - \min_{u[t, t+\Delta t]} \left\{ \mathbf{l}(x(t + \alpha \Delta t), u(t + \alpha \Delta t), t + \alpha \Delta t) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) \right]' f(x(t), t) + 0(\Delta t) \right\}
\end{aligned}$$

olarak düzenlenir.

O halde, bunu sonuçlandırmak için Δt 'nin sifira yaklaşmasına izin verildiğinde,

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) = - \min_{u(t)} \left\{ \mathbf{l}(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial V^*}{\partial x}(x(t), t) \right]' f(x(t), u(t), t) \right\}$$

olarak bulunur.

Bu denklemde, f ve l argümanlarının bilinen fonksiyonlarıdır, oysa V^* bilinmemektedir. Bu noktayı vurgulamak amacıyla denklem

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} = -\min_{u(t)} \left[l(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V^*}{\partial x} f(x(t), u(t), t) \right]$$

olarak tekrar düzenlenmiş olur. Bu Hamilton-Jacobi denkleminin bir ifadesidir. Bu formatta verilen denklem, tam olarak kısmi bir diferansiyel denklem değil, fonksiyonel ve kısmi diferansiyel denklemin bir karışımıdır. Denklemin sağ tarafını minimize eden $u(t)$ değeri, $x(t)$, $\partial V^*/\partial x$ ve t tarafından alınan değerlere bağlı olacaktır. Başka bir deyişle, $u(t)$ 'yi en aza indirgeyen, üç değişken $x(t)$, $\partial V^*/\partial x$ ve t 'nin anlık bir fonksiyonudur denilebilir.

Düzenleyici problemini çözmek için Hamilton-Jacobi denklemini kullanarak Ricatti denklemini sağlayan bir simetrik $P(t)$ matrisi tanımlansın. Bu durumda Ricatti denklemini türetmek için öncelikle bu özel duruma göre Hamilton-Jacobi denklemindeki ifadeler karşılık gelen ifadelerle değiştirilecek ve düzenlenerek yeniden yazılacaktır.

Öncelikle,

$$l(x(t), u(t), t) \rightarrow u'(t)R(t)u(t) + x'(t)Q(t)x(t)$$

olarak karşılık gelir ve

$$V^*(x(t), t) = x'(t)P(t)x(t) \rightarrow 2x'(t)P(t)$$

elde edilir, bu ifadede yer alan P matrisi yukarıda da belirtildiği gibi simetrik genellik kaybı olmayan herhangi bir matristir.

Ayrıca

$$f(x(t), u(t), t) \rightarrow F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

dönüşümünü basit bir şekilde ifade eder.

Hamilton denkleminin sol tarafında yer alan ifade ise

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) \rightarrow x'(t)\dot{P}(t)x(t)$$

karşılık gelir.

Tüm karşılık gelen ifadeler toparlanacak olursa, Hamilton-Jacobi ifadesi, düzenleyici probleminin özel bir durumu olarak

$$x'\dot{P}x = -\min_{u(t)} [u'Ru + x'Qx + 2x'PGu]$$

olarak bu şekilde yeniden yazılabilir.

Denklemin sağ tarafındaki minimum ifadeyi bulmak için,

$$\begin{aligned} u'Ru + x'Qx + 2x'PFx + 2x'PGu &= (u + R^{-1}G'Px)'R(u + R^{-1}G'Px) \\ &+ x'(Q - PGR^{-1}G'P \\ &+ PF + F'P)x \end{aligned}$$

olarak tamamlanır ve $R(t)$ pozitif kesin tanımlı bir matrisi ifade eder. Eğer

$$x'\dot{P}x = -\min_{u(t)}[u'Ru + x'Qx + 2x'PGu]$$

ifadesi buna bağlı olarak minimize edilirse,

$$\bar{u} = -R^{-1}(t)G'(t)P(t)x(t)$$

olarak bulunur ve bu durumda

$$\begin{aligned} x'(t)\dot{P}(t)x(t) &= x'(t)[Q(t) - P(t)G(t)R^{-1}(t)G'(t)P(t) + P(t)F(t) \\ &+ F'(t)P(t)]x(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde, sonuç olarak, tüm $x(t)$ için bu denklem,

$$-\dot{P}(t) = P(t)F(t) + F'(t)P(t) - P(t)G(t)R^{-1}(t)G'(t)P(t) + Q(t)$$

her iki tarafı da simetrik olarak bulunur.

4.3 Düzenleyici Problemine Çözümler

Sistemin,

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u$$

olduğunu ve $x(t_0)$ 'ın verilir F ve G 'nin sürekli olduğu düşünülün. $Q(t)$ ve $R(t)$ matrisleri sürekli girişleri, simetrik, negatif olmayan, pozitif tanımlı olduğu varsayalım. A matrisi negatif tanımlı olmayan bir matris olduğu düşünüldüğünde, performans endeksi,

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T (u'R(t)u(t) + x'(t)Q(t)x(t))dt + x'(T)Ax(T)$$

olarak tanımlanır. Burada T sonludur. Performans endeksinin minimum değeri,

$$V^*(x(t_0), t_0) = x'(t_0)P(t_0, T)x(t_0)$$

denkleminin $P(t_0, T)$ 'deki Ricatti denklem çözümü,

$$-\dot{P} = PF + F'P - PGR^{-1}G'P + Q$$

$P(T, T) = A$ sınırlayıcı koşulu ile birlikte ifade edilir. $P(t, T)$ matrisi her $t \leq T$ için vardır. Sonuç olarak, doğrusal geri besleme kanununa göre ilişkili optimal kontrol

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)G'(t)P(t, T)x(t)$$

olarak bulunur.

4.3.1 Sonsuz zaman düzenleyici problemi ve çözümü

Tüm zamanlar için tamamıyla kontrol edilebilir ve $A = 0$ olan bir sistem düşünüldüğünde,

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} p(t, T)$$

vardır ve performans endeksinin T sonsuz ile değiştirilmiş minimum değeri $x'(t_0)\bar{P}(t_0)x(t_0)$ 'dir. \bar{P} matrisi Ricatti denklemini sağlar ve optimal kontrol yasası,

$$u^*(t) = -P^{-1}G'(t)\bar{P}(t)x(t)$$

şeklindedir.

4.3.2 Zamanla değişmeyen düzenleyici problemi ve çözümü

Sonsuz zaman düzenleyici probleminin F, G, Q ve R sabit matrisleri ile zamanla değişmeyen durumda özelleştiği varsayalım. Ayrıca $[F, G]$ 'nin kararlı kılınabilir olduğu varsayalım.

Sonra,

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T) = \lim_{t \rightarrow -\infty} P(t, T)$$

sabit olduğu ve cebirsel denklemi sağladığı görülür.

$$\bar{P}F + F'\bar{P} - \bar{P}GR^{-1}G'\bar{P} + Q = 0$$

Optimal kontrol yasası burada zamanla değişmeyen bir kanun olur

$$u^*(t) = -R^{-1}G'\bar{P}x(t).$$

4.3.3 Asimptotik kararlı zamanla değişmeyen düzenleyici problemi ve çözümü

Buna ek olarak $[F, D]$ 'nin herhangi bir $DD' = Q$ için saptanabilir olduğu varsayalım.

O halde F negatif olmayan kesin tanımlıdır. Optimal kapalı-döngü sistemi

$$\dot{x} = [F - GR^{-1}G'\bar{P}]x$$

asimptotik kararlıdır. Eğer $[F, D]$ çifti tamamen gözlemlenebilirse, burada D matrisi, $DD' = Q$ gibi herhangi bir matris ise, o zaman \bar{P} pozitif tanımlıdır. Ayrıca, $x'\bar{P}x$ bir Lyapunov fonksiyonudur.

Artık düzenleyici sorunun çözümü belirlendiğine göre, bu çözümün az önce özetlenen ifadelerde olduğu gibi her şeyin kurulduğu durumlar dışındaki durumlara uygulanmasının ilgisini çekip çekmediğini sorabiliriz.

Çoğunlukla, sistem durumları bir kontrolcü girişinde kullanılamaz. Sistem

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = H'x$$

formda belirtilmişse, kontrolcü girişleri için sadece u ve y çıkışının mevcut olduğu durumlarda, bir durum tahmincisi, x durumunun bir tahmini olan \hat{x} ve y girişleri ve \hat{x} çıkışı ile oluşturulabilir. Kontrol yasasının

$$u = -R^{-1}G'\bar{P}\hat{x}$$

şeklinde uygulanması,

$$u = -R^{-1}G'\bar{P}x$$

şekline göre daha iyi bir alternatiftir.

Şimdiye kadar anlatımda, performans endeksi matrisleri R ve Q 'nun uygun bir şekilde seçildiği varsayıldı. Bunları belirlemek genellikle tasarımcıya bağlı olduğundan, bu matrisler için bir dizi değer düşünülebilir ve "deneme yanılma" ile en uygun değerler seçilebilir. Bu yaklaşım genellikle verimsizdir. Ancak sadece kararlılıkla ilgileniliyorsa, açık döngü sistemi,

$$\dot{x} = Fx$$

kararsız ve kapalı döngü sistemi

$$\dot{x} = (F - GR^{-1}G'\bar{P})x$$

Q ve R seçimine bakılmaksızın belirlenen limitler dahilinde her zaman kararlı ise bu yaklaşımla sonuca varılabilir.

Sistemin özellikleri dikkate alınarak uygun düzenleyici problemini belirlemek ve matematiksel çözümünü aramak ve hesaplamak gereklidir.

4.3.4 Sonlu zaman düzenleyicisi ve çözümü

Sistemin

$$x(t + 1) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

olduğu, ayrıca $F(t)$ ve $G(t)$ 'nin sürekli olduğu ve $x(t_0)$ 'ın verildiği öne sürülsün. $Q(t)$ ve $R(t)$ matrislerinin tüm t zamanlar için sırasıyla simetrik, negatif olmayan ve pozitif tanımlı olarak tanımlansın. O zaman performans endeksi,

$$V(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^T (u'(t)R(t)u(t) + x'(t)Q(t)x(t))dt + x'(T)Ax(t)$$

olarak gösterilebilir. T 'nin sonsuz olduğu kabul edilir. Burada, V 'yi minimize edecek bir optimal kontrolünü $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$ bulan performans endeksinin minimum değeri,

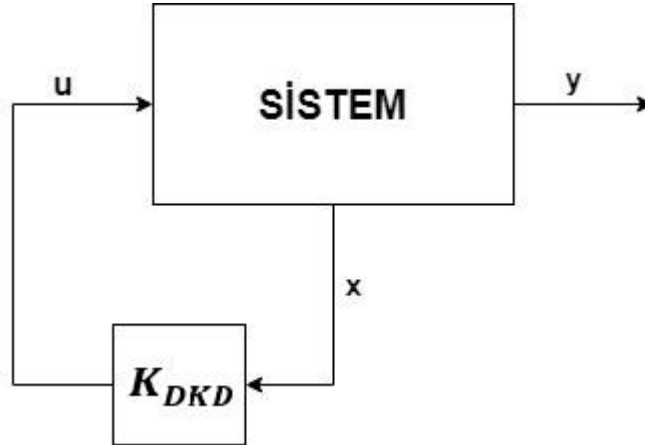
$$V^*(x(t_0), t_0)$$

şeklindedir ve Hamilton-Jacobi teorisine göre çözüldüğünde sonuç olarak optimal kontrol yasası,

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)G'(t)P(t)x(t)$$

olarak bulunur.

DKD problemi belirlenip çözüldükten sonra, DKD'nin sisteme entegrasyonu, basit bir şekilde Şekil 4.3'te yer alan blok şeması gibi olur.



Şekil 4.3 : DKD tasarım blok şeması

Burada, u girişleri, x sistem durumlarını, y çıkışları ve K_{DKD} düzenleyici problemini çözmek için hesaplanmış kazancı belirtmektedir.

$$u = -K_{DKD}x$$

ifadesinde geri besleme kanunu, sürekli zaman sistem için karesel maliyet fonksiyonunu en aza indirme çabasındadır.

Tez için gerekli DKD tasarım aşamaları ve sonuçları, bölüm 6. 'da yer almaktadır.



5. DOĞRUSAL KARESEL İNTEGRAL

Sabit bir referansın takip edilmesini sağlamak için, bir kontrol konfigürasyonuna integral eylem eklenmelidir (Graham C. Goodwin, 2001). Bu işleme kısaca doğrusal karesel integral (DKİ) denir. Bazı çalışmalarda ya da kitaplarda integral ile doğrusal karesel düzenleyici olarak da tanımlanmaktadır. İntegral ile doğrusal karesel düzenleyici, standart DKD'nin yalnızca orantılı kazançlar sağladığını bilerek kararlı durum hatalarını gidererek tasarlanan kontrolcünün gelişmesini sağlar. DKD'nin durumlarına ek olarak, sistemi kontrol etmek için integral durumunu artırır. İntegral teriminin artan durumu sistemin sürekli hal hatasını iyileştirir. Bu terim, sistemdeki eksik dinamik modellemenin etkisini, sürtünmeden kaynaklanan hatayı ve sistemin aşılmasını ortadan kaldırabilir (Chantarachit, 2019). Eklenen integral eylem kazancı, sistemin çıkışında sıfır sabit durum hatası sağlar (Astrom & and Hagglund, 2006). İstenilen bir referans için sabit durum hatasını azaltmak için durum geri besleme kontrolüne eklenen integral, Şekil 5.1'de gösterilmiştir.

DKİ'nin diğer avantajları ise basit bir uygulama olması, bir endeksin minimize edilmesine göre mümkün olan en iyi performans olması, değişkenlerin tepkisi ile sistemin kararlılığını garanti eden kontrol çabası arasında bir uzlaşma olmasıdır.

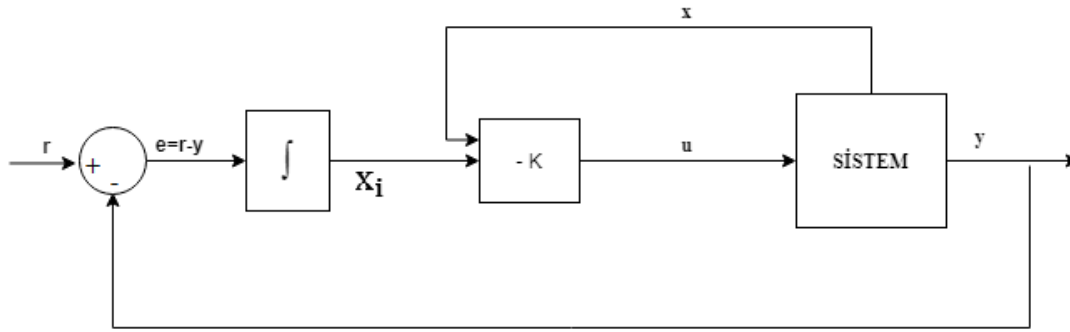
Literatürde bu yöntem farklı birçok alanda kullanılmıştır. Buna bir örnek, (Dong, 2011)'de, bir performans endeksini en aza indirerek sistem kararlılığının sağlandığı, belirsizlikleri olan doğrusal olmayan sistemler için optimal bir kayan mod kontrolü tasarlanmıştır. Diğer bir örnekte ise integral aksiyonlu optimal DKD kontrolcü, kayan kipli mod kontrolcüsüne kıyasla daha iyi performans vermiştir ve klasik PID kontrolcüsüne kıyasla daha az kontrol çabasıyla daha iyi performans sağlayan bir optimal DKD kontrolcüsü bulunmuştur (Phillips & and Sahin, 2014). Bir başka örnekte ise optimum şekilde ayarlanmış DKD kontrolörleri, TRAS sisteminin her bir düzlemini yerleştirme süresinde ve aşma yüzdesinde iyi bir azalma ile kontrol etmek ve stabilize etmek için iyi sonuçlar göstermiştir (Al-Mahturi & and Wahid, 2017).

Çalışmayı sadece sıfır stabilizasyonla değil, aynı zamanda takip etmeyi de sağlamak için bir integral eylem eklenir. Buradaki fikir, harici bir kontrol döngüsünü göz önünde

bulundurmak ve ölçüm ile takip edilmek istenen ayar noktası arasındaki hatanın integralini dengelemektir. Bununla birlikte, birbirini izleyen iki olay arasındaki aralık büyüdüğünde, bir olay tarafından tetiklenen integral önemli aşımara yol açabilir. Bu nedenle, örnekleme aralığının üstel bir unutma faktörü, bu tür sorunları önlemek için bir çözüm olarak önerilebilir.

İntegral bir eylem eklemek, belirli bir ayar noktasının (klasik sıfır stabilizasyonu yerine) ve daha iyi bir pertürbasyon sağlamlığının izlenmesine izin verir. Buradaki fikir, kontrol edilen sistemi ve ölçülen hatanın integralini (ölçüm ile takip edilmek istenen ayar noktası arasındaki hata) stabilize etmektir.

Durum geri beslemesini kullanan kontrol stratejisi, kapalı döngü sisteminin kutuplarını (sistem tamamen kontrol edilebilir bir durumsa), tasarım özelliklerini karşılayacak şekilde seçilen herhangi bir konumda tahsis (pole-placement) etmek için uygulanmıştır. Tahsis yöntemiyle karşılaştırıldığında DKD yönteminin bir avantajı, birincisinin durum geri besleme kontrol kazanç matrisi için sistematik bir hesaplama modu sağlamasıdır.



Şekil 5.1 : DKİ optimal durum geri besleme kontrol kanunu ile takibi içeren blok şeması

5.1 Kontrol Edilebilirlik ve Gözlemlenebilirlik

Kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik, modern kontrol sistemi teorisinin iki ana kavramını temsil eder. Bu kavramlar 1960 yılında R. Kalman tarafından tanıtılmıştır. Kontrol girişi altında verilen dinamik sistem ile hedeflenen tasarımın yapılabilmesi için sistemin kontrol edilebilir olması gerekir. Bir diğer kavram olan gözlemlenebilirlik ise gözlem altındaki sistemin içinde neler olup bittiğini görebilmek için gereklidir. Çözülebilir bir doğrusal cebirsel denklem sisteminin ancak ve ancak sistem matrisinin boyutu tam ise bir çözüme sahip olduğu bilinmektedir.

Tam durum kontrol edilebilirliği ya da basitçe kontrol edilebilirlik, bir sistemin dahili durumunu herhangi bir başlangıç durumundan sonlu bir zaman aralığında başka bir son duruma taşıma yeteneğini (kontrol değişkenlerinin vektörü) tanımlar.

Kontrol edilebilirlik, ulaşılan bir durumun sürdürülebileceği anlamına gelmez, sadece herhangi bir duruma erişilebileceği anlamına gelir.

Kısaca kontrol edilebilirliği sağlayan boyut koşulu, “sürekli-zaman, doğrusal, zamanla değişmez” bir sistem,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

için tanımlanırsa ve bu sistemde yer alan, ‘ x ’ $n \times 1$ boyutunda bir durum vektörü, ‘ y ’ $m \times 1$ boyunda çıkış vektörü, ‘ u ’ $r \times 1$ boyutunda bir giriş (kontrol) vektörü, ‘ A ’ $n \times n$ boyutunda bir durum matrisi, ‘ B ’ $n \times r$ boyutunda bir giriş matrisi, ‘ C ’ $m \times n$ boyutunda bir çıkış matrisi ve ‘ D ’ ise $m \times r$ boyutunda bir ileri besleme matrisi olarak tanımlanırsa $n \times nr$ boyutunda kontrol edilebilirlik matrisi,

$$K = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

şeklinde gösterilebilir. Kontrol edilebilirlik K matrisinin tam sıra boyutuna sahip olması

$$\text{boyut}(K) = n$$

durumunda sistem kontrol edilebilirdir.

Gözlemlenebilirlik ise bir sistemin iç durumlarının, dış çıkışlarının bilgisinden ne kadar iyi anlaşılabilirliğinin bir ölçüsüdür. Doğrusal bir sistemin gözlemlenebilirliği ve kontrol edilebilirliği matematiksel ikililerdir. Gözlemlenebilirlik kavramı, Macar-Amerikan mühendis Rudolf E. Kálmán tarafından doğrusal dinamik sistemler için tanıtılmıştır (E, 1961) (E., 1963).

Durum uzayı gösteriminde zamanla değişmeyen doğrusal sistemler için, bir sistemin gözlemlenebilir olup olmadığını kontrol etmek için testler yapılır. ‘ n ’ durum değişkenine sahip bir sistem düşünüldüğünde eğer gözlemlenebilirlik matrisinin

$$G = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

satır boyutu 'n' e eşitse bu sisteme gözlemlenebilir denir. Bu testin mantığı şudur: Eğer 'n' satır doğrusal olarak bağımsızsa, o zaman 'n' durum değişkenlerinin her biri, 'y' çıktı değişkenlerinin doğrusal kombinasyonları aracılığıyla görüntülenebilir.

5.2 DKİ ile Kontrolcü Tasarımı

Doğrusal zamanla değişmez bir sistem ele alındığında, sistem durum ve çıkışları,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

şeklindedir. Burada (A, B) çiftinin kontrol edilebilir ve (A, C) çiftinin de gözlemlenebilir olduğu kontrol edilmelidir.

Sabit bir referans "r" nin izleme hatası

$$\varepsilon = \int_0^t (r - y(\tau)) d\tau$$

olarak tanımlansın, buradan

$$\dot{\varepsilon} = r - Du - v - Cx$$

elde edilir.

Durum hatası $\varepsilon = x_i$ olarak tanımlandığında, arttırılmış sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_w w \\ r - v \end{bmatrix}$$

olur.

Yanlı değişkenler, sabit durum değerlerinin geçici değerlerinden çıkarılmasıyla elde edilir ve yaklaşık işareti ile gösterilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{x}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \tilde{u}$$

Karesel maliyet fonksiyonu,

$$V = \int_0^{\infty} [(\tilde{x}^T \tilde{x}_i^T) Q_{LQI} (\tilde{x}^T \tilde{x}_i^T)^T + \tilde{u}^T R_{DKI} \tilde{u}] dt$$

DKİ kontrol problemi ile en aza indirilir ve arttırılmış sistem için stabilize edici bir optimal durum geri besleme kontrolcü

$$u = K_{DKİ} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

sağlar.

Karesel maliyet fonksiyonu tanımındaki ağırlık matrisleri şu şekilde tanımlanır:

$$Q_{DKİ} = Q_{DKİ}^T \geq 0, \quad R_{DKİ} = R_{DKİ}^T > 0$$

Burada Q matrisi pozitif tanımlı ve R matrisi pozitif yarı tanımlı ağırlık matrisleridir.

Q matrisi seçilirken Q matrisinin boyutunun, sistem durum sayısından bir fazla olmasına dikkat edilmelidir. Seçilen boyutlardan sonuncusu integralcinin ne kadar hızlı olduğunu ifade edecektir.

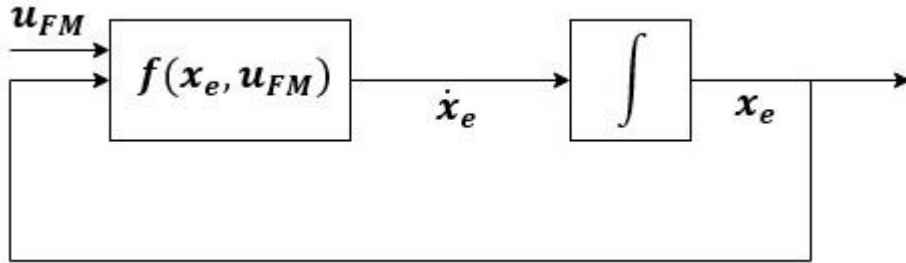
Tez çalışmasındaki uçak için tasarlanan DKİ kontrolcü adımları ve benzetim nihayetinde elde edilen sonuçlar bölüm 6'da yer almaktadır.

6. CESSNA 172 İÇİN KONTROLCÜ TASARIMI

Sabit kanatlı hava aracı olan Cessna 172 için kontrolcü tasarımı adımları bu bölümde yer almaktadır.

Airlib araç setinde yer alan Cessna 172 uçak modeli, Euler tabanında tasarlanmış bir modeldir. Kuaterniyon tabanına dönüştürmek için Airlib modeli üzerinde bazı değişiklikler yapılarak oluşturulan kuaterniyon tabanlı model, düzenleyici ve kontrolcü tasarımı için hazır hale getirilmiştir.

Özellikle kuaterniyon tabanlı çalışmalar yapılırken ele alınan uçağın hareket modeli Euler tabanında hazırlanmış şekilde mevcutsa, kuaterniyon tabanında yeni bir hareket modeli oluşturmaktansa hali hazırda var olan bu hareket modelinin değiştirilerek kullanılması tercih edilebilir. Euler tabanında hazırlanmış bir hareket modelinin cebirsel işlemleri $f(x_e, u_{FM})$ altında toplanırsa model Şekil 6.1 ile verildiği gibi özetlenebilir.



Şekil 6.1 : Euler tabanında hazırlanmış bir uçak modelinin özeti

Burada u_{FM} uçağa uygulanan toplam kuvveti (F_{toplam}) ve toplam momenti (M_{toplam}) temsil etmektedir ve denklem (2.1) ile hesaplanır. Bu hareket modelinin sistem durumlarını gösteren değişken

$$x_e = [V, \alpha, \beta, p, q, r, \psi, \phi, \theta, x, y, z]$$

vektörüdür.

Doğrusal karesel yaklaşımlar kullanılırken modelin durumlarının hangi değişkenler olduğu kontrolcünün hedef tasarımında temeldir çünkü maliyet fonksiyonunda $x_e Q x_e^T$ terimi ile temsil edilmektedir. Bu sebepten Şekil 6.1 ile verilen modelin

kuaterniyon tabanlı çalışmalarda kullanılması mümkün değildir. Bu nedenle, böyle bir modelin çıkışında kuaterniyon dönüşümü yapıp bununla doğrusal karesel yaklaşımlı kontrol çalışmaları yapmak mümkün değildir.

Kuaterniyon tabanlı doğrusal karesel kontrol çalışmalarında durum vektörü

$$x_q = [V, \alpha, \beta, p, q, r, x, y, z, q_0, q_1, q_2, q_3]$$

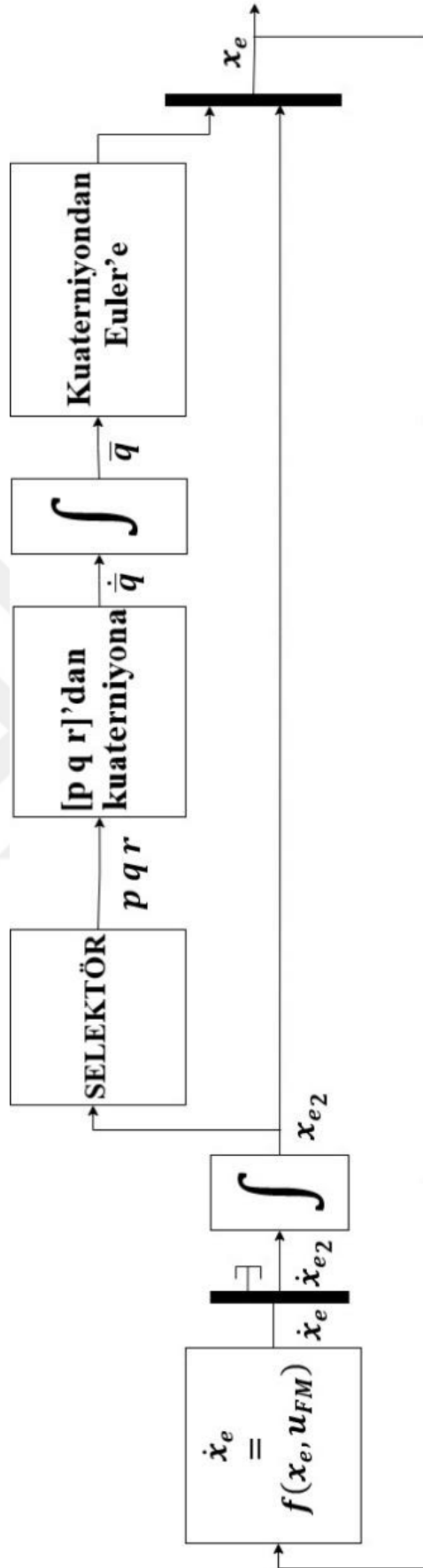
şeklinde veya aynı vektörün farklı bir sıralaması olarak ayarlanmalıdır. Bu çalışmada, durum vektöründen Euler açılarını çıkarıp kuaterniyonları ekleyip x_q vektörü elde etmek için hazır elde bulunan Euler tabanlı hareket modeline değişiklikler uygulanarak elde edilen kuaterniyon tabanlı hareket modeli Şekil 6.2 ile verilmiştir. Şekilde x_q vektörü sinyal olarak oluşturulmamış dolayısıyla gösterilmemiştir. Ancak integral bloklarına giren değişkenler arasında Euler açılarının bulunmadığı ve kuaterniyon açılarının bulunduğu gözlenerek durum vektörü x_q 'nin içsel olarak modelde var olduğu anlaşılabilir. Şekilde görülen, p, q, r açısal hızlarından kuaterniyon türevlerine geçiş Denklem (3.1)'deki gibidir.

Burada x_{e_2}, x_e sistem durumlarında Euler açılarının çıkarılmasıyla yeniden düzenlenmiş sistem durumlarını ifade eder ve

$$x_{e_2} = [V, \alpha, \beta, p, q, r, x, y, z]$$

olarak gösterilebilir. Ayrıca, $\bar{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ kuaterniyonları temsil etmektedir.

Bir hava aracı için kontrolcü tasarımı yapılırken öncelikle dikkat edilmesi gereken husus, uçak için tasarlanacak kontrolcünün doğrusal veya doğrusal olmayan bir kontrol tasarım yöntemi olup olmadığının belirlenmesidir. DKD ve DKİ tasarımı doğrusallık gerektirdiği için önce uçak modelinin doğrusallaştırılması gerekmektedir. Uçağın doğrusallaştırıldığı noktanın bir denge noktası seçilmesi durumunda otomatik sentezlenen kontrolcü de dengeli olacaktır. Bu sebeple doğrusallaştırma öncesinde istenen operasyon koşulları için uçağı dengede tutan uçak durumlarının bulunması gerekmektedir. Ayrıca işlemin gerçekleştirilmesi için bazı kısıtların belirlenmesi gerekmektedir. Doğrusallaştırma işlemi için MATLAB/Simulink ortamı kullanılmıştır.



Şekil 6.2 : Euler tabanlı hareket modelinden dönüştürülen kuaterniyon tabanlı hareket modeli

6.1 Doğrusallaştırma

Tüm gerçek sistemler doğası gereği doğrusal olmayan sistemlerdir. Bir uçak modeli de dolayısıyla doğrusal olmayan sistem olarak tanımlanır. Örneğin bir fiziksel sistem,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

olarak tanımlandığında doğrusal olmayan bir sistemi ifade etmektedir. Burada $\dot{x}(t)$ sistemin zamanla nasıl değiştiğini, $x(t)$ mevcut durumu, $u(t)$ ise girişleri (dış kuvvetler, torklar, vb.) belirtir.

Doğrusal olmayan dinamiklerle benzer sonuçlar üreten sistem durumları ve dış girdilerin uygun bir doğrusal, zamanla değişmeyen kombinasyonunu bulabilmek için doğrusallaştırma yöntemi kullanılır. Bu işlem kısaca,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \rightarrow \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

olarak gösterilebilir.

Doğrusal olmayan bir model kullanmak yerine doğrusal bir model elde etmenin üç önemli nedeni vardır. Birincisi, doğrusal sistemin, doğrusal olmayan bir sistemden daha kolay bir şekilde bölgesel kararlılık kontrol edilebilir olması ve doğrusal bir sistemin dinamiklerinin anlaşılır olmasıdır. İkincisi, doğrusal modeller için bir kontrolcü tasarlamak için kullanılacak tasarım araçlarının ve araçlarının mevcut olmasıdır. Üçüncü olarak ise, doğrusal olmayan model, doğrusal bir modelle değiştirildiğinde benzetim hızının artırılabilir olmasıdır. Bazı durumlarda, benzetimin çalıştırılmasıyla ilgili doğrusal olmayan matematik, gerçek zamanlı donanıma ayak uydurabilecek kadar hızlı çözemez, doğrusal bir eş değeriyle değiştirmek bu durumda daha iyi bir uygulama olur.

Dinamik sistemlerin herhangi bir anda belirli bir durumu (ör. hız, konum, yükseklik, vb.) vardır. Bir sistemin içinde bulunabileceği tüm olası konfigürasyonlar kümesine 'durum uzayı' denir. Durum uzayının tamamında iyi çalışan doğrusal bir model etmek ideal olurdu ancak genellikle böyle olamaz. Çünkü tek bir doğrusal model, bazı durumlarda dinamikleri iyi temsil edebilir, ancak sistemin doğrusal olmaması nedeniyle yetersiz, zayıf kalmış bir temsil olur. Bu nedenle, bu durumu aşmak için, en düşük hata 'istenilen çalışma noktaları' adı verilen belirli noktalarda doğrusallaştırılarak elde edilir. Önemli ve çok yaygın bir çalışma noktası türü, sistemin kararlı durumda veya dengede olduğu zamandır. Bu, sistem bu durumda

başlatıldığında, durumların zamanla değişmeyeceği anlamına gelir. Başka bir deyişle, \dot{x} tüm zamanlar için sıfıra eşittir. Bu, sistem durumlarının, dış girişler olmaksızın kendi başlarına dengede oldukları anlamına gelir.

Giriş sinyallerinin ayarlanarak bir denge noktasının bulunması işlemine ‘trimming’ (denge noktasını bulma işlemi) denir.

Örneğin, irtifa dümeninden herhangi bir kontrol girişi olmadan belirli bir hava hızında uçarken sabit bir irtifayı koruyacak şekilde hücum açısı ayarlanmış bir uçak düşünülün. Uçak yavaşlamaya başlarsa veya sürekli hal koşulundan daha düşük bir hızda uçarsa, kanatlar daha az kaldırma kuvveti oluşturacak ve irtifa azalmaya başlayacaktır. Pilot, irtifa dümenini yukarı saptırmak için uçuş dümenini geri çekerek, hücum açısını arttırılarak ve daha fazla kaldırma kuvveti oluşturarak sisteme bir giriş eklerse, irtifa bu yeni hızda hala sabit tutulabilir. Ancak, uçuş dümenini sürekli olarak geri çekmek zorunda kalmak yerine, pilot, irtifa dümenini denge noktasına getirebilir (trimming process), böylece nötr uçuş dümeni pozisyonu, irtifayı sabit tutan gerekli irtifa dümeni konumunu üretir. Denge noktasına getirmenin anlamı şudur: Seçilen çalışma noktalarında sürekli hal denge durumunu oluşturan sistem durumları ve girişlerinin kombinasyonunu bulmak.

Doğrusallaştırma için gerekli adımlar

Operasyon noktası seçimi

↓

Denge noktası hesabı

↓

Doğrusallaştırma

olarak verilebilir.

Doğrusallaştırma işlemi diferansiyel denklemler aracılığı ile elle çözülebilir basitlikte olabilir. Ancak bunu yapmak, her sistem için pratik değildir, çünkü analitik çözümlemenin uzun, zaman alıcı veya imkansız bir durum olduğu sistemler olabilir. Bu durumlarda, MATLAB ve Simulink içindeki modelleme ve doğrusallaştırma

araçları bu işlemler için kullanılabilir. Bu tez çalışmasında da denge noktası etrafında doğrusallaştırma işlemi MATLAB/Simulink ortamında yapılmıştır.

6.1.1 Denge noktasının bulunması

Cessna 172 uçağının doğrusallaştırıldığı denge noktası için belirlenen kısıtlar ve hesaplanmak üzere serbest bırakılan değişkenler Çizelge 6.1’de, denge noktasında benzetim sonucu hesaplanan serbest bırakılmış değişken değerleri de Çizelge 6.2’de verilmiştir.

Çizelge 6.1’de yer alan giriş değişkenlerinin ve yunuslama açısının serbest bırakılmasının nedeni denge halini korumaktır. Ek olarak, hücum açısının serbest bırakılmasının nedeni de hücum açısını ve yunuslama açısını aynı tutarak yükseklik değişiminin olmamasını sağlamaktır.

Çizelge 6.1 : Cessna 172 uçak modeli için denge noktası hesaplama işlemleri için değişken kısıtlamaları

Değişken	Kısıtlama	Değişken	Kısıtlama
V	65 m/s	dV/dt	0
α	Serbest	$d\alpha/dt$	0
β	0	$d\beta/dt$	0
P	0	dP/dt	0
Q	0	dQ/dt	0
R	0	dR/dt	0
ψ	0	$d\psi/dt$	0
θ	Serbest	$d\theta/dt$	0
ϕ	0	$d\phi/dt$	0
x	0	dx/dt	65 m/s
y	0	dy/dt	0
z	1000 m	dz/dt	0
δ_p	Serbest	δ_a	Serbest
δ_e	Serbest	δ_r	Serbest

Çizelge 6.2 : Cessna 172 uçağı için denge noktası test benzetimi sonuçları

Değişken	Değer
α	-0.00729 rad
θ	-0.00729 rad
δ_p	1126 N
δ_e	-0.0066 rad
δ_a	0
δ_r	0

Çizelge 6.2’de yer alan değişken değerleri, Çizelge 6.1’de yer alan serbest bırakılmış değişkenlerin MATLAB’ın Simulink araç setindeki ‘trim’ fonksiyonu ile hesaplanmış değerleridir. Bu fonksiyonun çalışma prensibi şu şekildedir: Bir başlangıç noktasından başlar ve en yakın denge noktasını bulana kadar sıralı ikinci dereceden programlama algoritması kullanarak arama yapar. Başlangıç noktası açık bir şekilde fonksiyonda belirtilmelidir. Ayrıca, ‘trim’, belirli girdi, çıktı veya durum koşullarını karşılayan denge noktalarını bulabilir ve bir sistemin belirli bir şekilde değiştiği noktaları, yani sistemin durum türevlerinin belirli sıfır olmayan değerlere eşit olduğu noktaları bulabilir. Verilen operasyon noktası için ‘trim’ bir denge noktası bulamazsa, aramasında karşılaşılan noktayı döndürür; burada durum türevleri min-maks anlamında sıfıra en yakın konumdadır; yani türevlerin sıfırdan maksimum sapmasını en aza indiren noktayı döndürür. Yine de ‘trim’ fonksiyonu verilen operasyon noktası için istenilen kriterleri sağlayabilen bir denge noktası bulamayıp, başka bir nokta döndürdüğünde, tasarıma dönüp nerede hata yapıldığı kontrol edilmeli, kriterlerin imkansız olma ihtimaline bakılmalı, gerekirse ‘trim’ fonksiyonu var olduğu düşünülen denge noktasına daha yakın bir başlangıç noktasından başlatılmalıdır.

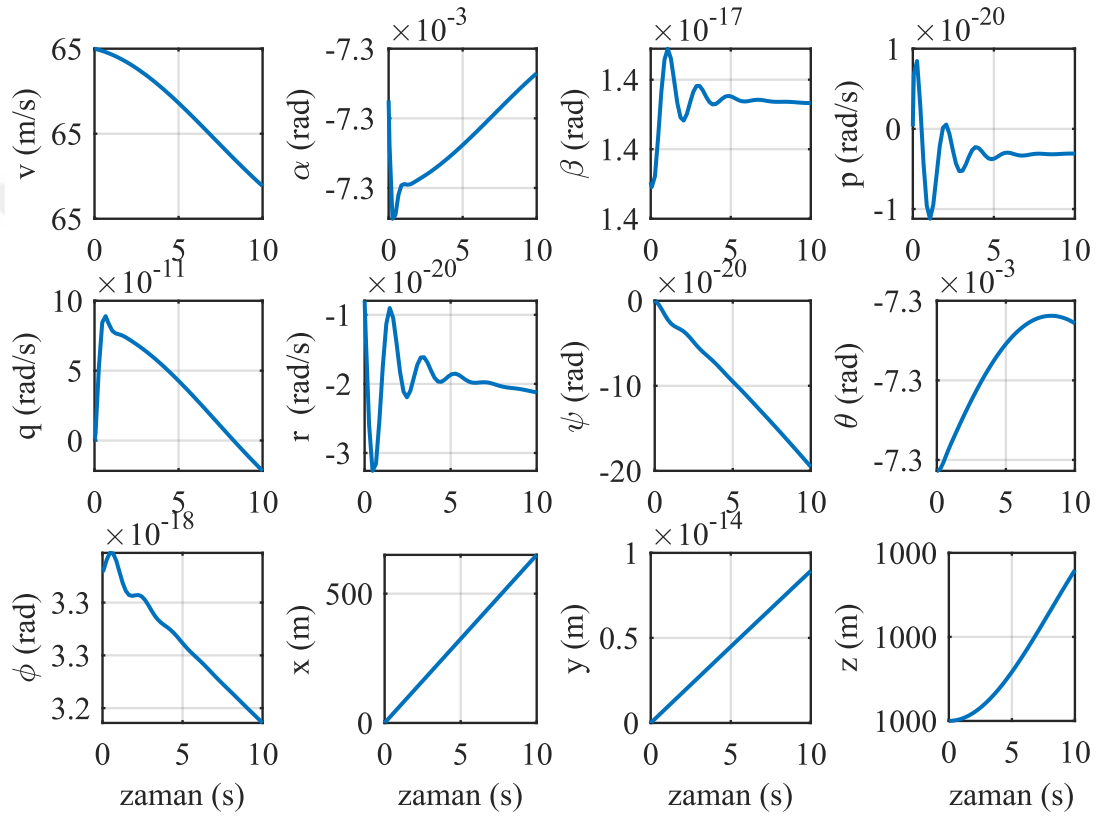
Denge noktasını bulmak için denklem

$$[x, u, y, dx] = \text{trim}('sys', x_0, u_0, y_0, ix, iu, iy, dx_0, idx)$$

şeklinde dir. Burada x_0, u_0, y_0, dx_0 , aramanın başlangıç noktasındaki sırasıyla durum, giriş, çıkış ve durum türev değerlerini belirtir ve ix, iu, iy, idx , aramanın tam olarak karşılaması gereken sırasıyla x_0, u_0, y_0, dx_0 'daki değerleri seçer. Denklemd e yer alan 'sys' modelinin denge noktasını sistemin başlangıç durumuna (x_0 'a) en yakın olacak şekilde bulur. Trim fonksiyonu, sistemin başlangıç durumuna yakın bir denge noktası bulamazsa, sistemin dengeye en yakın olduğu noktayı döndürür.

Denge noktası hesabı yaparken, hem kriterlerin belirlenmesinde, hem de sonuçların bulunmasında Euler açıları kullanılmaktadır. Bunun sebebi operasyon noktasının seçilmesinin ve kriterlerin belirlenmesinin bir insan tarafından yapılıyor olmasıdır. Örneğin uçağın yatma açısına ve sapma açısına 0 derece kriterleri verilirken, uçağın yunuslama açısı serbest bırakılmıştır. Kuaterniyonlar insanlar tarafından içselleştirilmiş bir gösterim şekli olmadığından bu kriterlerin kuaterniyonlar cinsinden tanımlanması zor olacaktır. Ayrıca denge noktası bulma işlemi sonrasında kuaterniyon değerleri Euler değerlerinden problemsizce elde edilebilir. Bu denge noktası hesabına göre, dönüştürülerek elde edilen kuaterniyon değerleri Çizelge 6.3’te verilmiştir.

Cessna 172 uçak modelinin doğrusallaştırılması için denge noktaları seçilmiştir. Uçağın başlangıç irtifası ve başlangıç hızı, başlangıç değerlerin olan, sırasıyla 1000 m ve 65 m/s olarak ayarlanmıştır. Diğer durumlar ve eyleyici konumları ise uçağın denge halini koruyacak şekilde ayarlanmıştır. Amaç, denge durumunda başlatılan uçağın mevcut dengesini korumasıdır. Denge noktasının doğrulanması amacıyla, doğrusallaştırma işlemi öncesinde kısa bir benzetim testi yapılmış, sonucu Şekil 6.3'te, Şekil 6.4'te ve Şekil 6.5'te gösterilmiştir.



Şekil 6.3 : Cessna172 uçağı için denge noktasında başlatılan 10 saniye süreli test benzetimi ile sistem cevabı

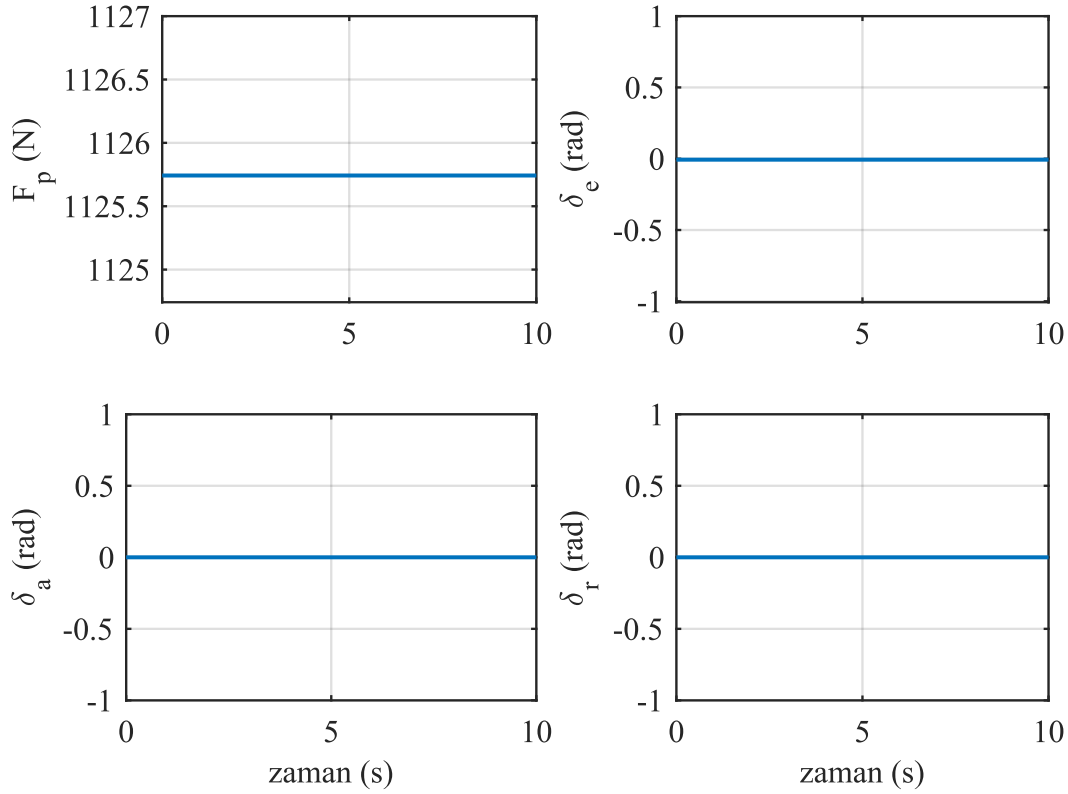
Bu şekillerde sistem durumları ve giriş değerlerine karşılık gelen sistem cevapları yer almaktadır. Görülen odur ki denge noktasında başlatılan 10 saniyelik benzetimde verilen kısıtlar dahilinde sistem dengede kalmıştır. Şekil 6.3'te x değeri dışında diğer

Çizelge 6.3 : Cessna 172 uçağı için kuaterniyon denge noktaları

Değişken	Değer
q_0	0.9999934
q_1	0
q_2	-3.64574×10^{-3}
q_3	0

değişkenler değişim göstermemiştir. Burada x değerinin değişim göstermesinin sebebi, uçağın uçuş halinde olması, diğer bir deyişle yol katediyor olmasıdır.

Sonuçlar incelendiğinde yunuslama açısı ile hücum açısının aynı değere sahip olduğu, yükseklik ve hız değişkenlerinin kısıtlar dahilinde olduğu görülmüştür.

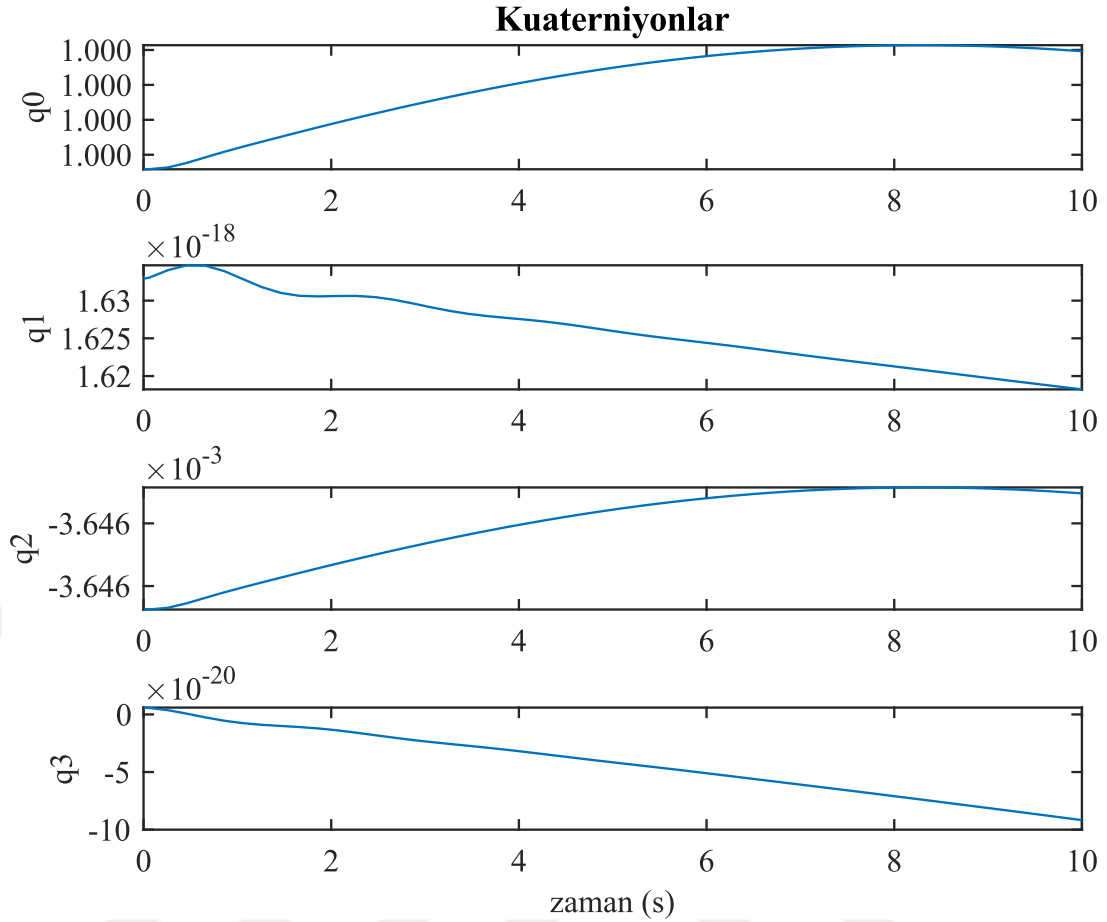


Şekil 6.4 : Cessna 172 uçağı için denge noktası test benzetimi eyleyici sinyalleri

Şekil 6.4'te denge testi sırasında girişlerin bulunan denge noktası değerlerinde hiç değişmeden durabildiği görülmektedir ve denge noktası giriş değerleri doğrulanmaktadır.

Son olarak, kuaterniyonların denge değerlerini korudukları Şekil 6.5 ile görülmektedir. Bunun neticesinde, artık denge noktasında gerekli çalışma noktaları elde edilebilmiştir.

Doğrusallaştırma işlemi çalışma ve denge noktalarında gerçekleşmiştir ve artık sistem eşdeğer bir doğrusal sistem durum uzayı ile tanımlanmaktadır.

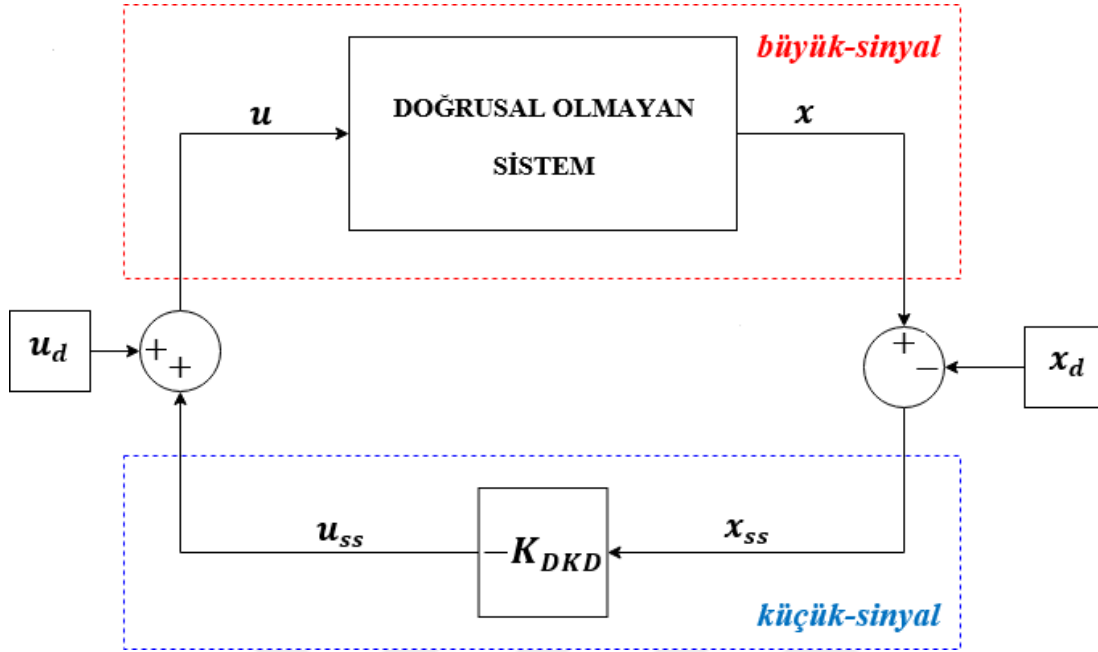


Şekil 6.5 : Cessna 172 uçağı için denge noktası test benzetimi kuaterniyon değerleri

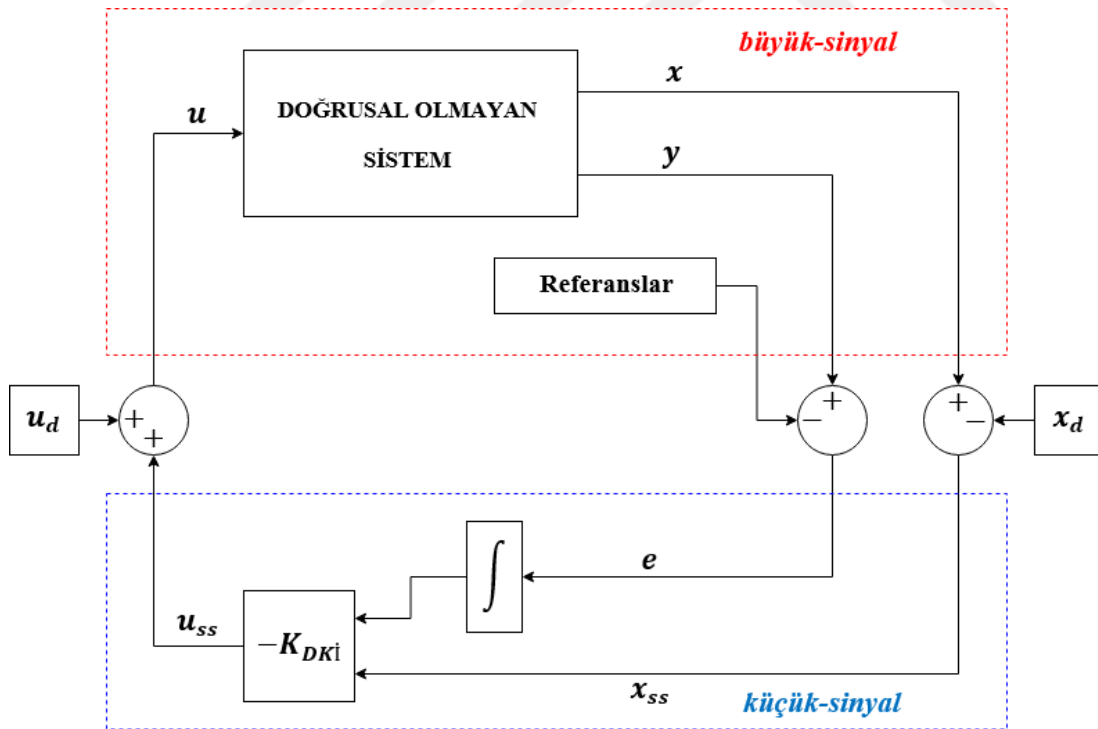
6.1.2 Denge noktasına göre küçük-sinyal / büyük-sinyal değişimleri

Doğrusal olmayan sistemlerin bir operasyon noktasında doğrusallaştırılmış modellerini göre tasarlanan kontrolcülerin, doğrusal olmayan sistemler için kullanımında, doğrusal olmayan sistemden çıkan sinyalleri kontrolcüye beslemeden önce düzenlemek gereklidir. Tasarlanan doğrusal kontrolcü denge noktasındaki sinyalleri sıfır değerinde görmelidir ki sistem dengede olduğunda sıfır değerinde eyleyici sinyali üreterek sistemi dengede tutabilsin. Bunun için doğrusal olmayan sistemden alınan gerçek sinyallerden denge noktası değerlerini çıkarmak gereklidir. Aynı şekilde kontrolcünün ürettiği eyleyici sinyalleri girişlerin denge noktası değerine göre kıyaslı değerlerdir. Yine bunları gerçek değerlere dönüştürmek için bunlara denge noktası değerleri eklenir. Doğrusal olmayan sistemlerdeki gerçek değer ile doğrusal çalışmalar için dönüştürülen referanslı değer ikilisi birçok alanda kullanılmaktadır. Gerçek değerlere büyük-sinyal denirken, referanslı değerlere ise küçük-sinyal denir. Bu çalışmadaki modelde büyük-sinyal kullanan kısımlar, küçük-sinyal kullanan

kısımlar ve bunlar arasındaki geçiş DKD için Şekil 6.6 ve DKİ için Şekil 6.7 ile verilmiştir.



Şekil 6.6 : Düzenleyici problemini çözmek için tasarlanan küçük-sinyal, büyük-sinyal açıklamalı blok şeması



Şekil 6.7 : Takip problemini çözmek için tasarlanan küçük-sinyal, büyük-sinyal açıklamalı blok şeması

Burada yer alan x sistem durumlarını, y sistem çıkışını, e hatayı, $u = [F_p, \delta_a, \delta_e, \delta_r]$ girişlerini, x_{ss} küçük-sinyal durumlarını, u_{ss} küçük-sinyal girişlerini, x_d sistem durumlarının denge değerlerini, u_d girişlerin denge değerlerini ifade etmektedir.

6.2 Cessna 172 Uçağı için Kuaterniyon Tabanlı DKD Tasarımı

Doğrusallaştırma işleminin ardından, elde edilen doğrusal model ile öncelikle DKD tasarımı yapılmıştır. Burada amaç verilen başlangıç durumlarının istenilen değere gelmesini sağlayarak regüle etmektir. Sistemin düzenleyici probleminin çözülmesi için tasarlanan blok şeması Şekil 6.6 ile verilmiştir.

Kullanılan sistem durumları

$$[V, p, q, r, q_1, q_2, q_3]$$

olarak verilmiştir.

Doğrusal sistem, kullanılan durumlara göre tekrardan tanımlanmıştır. Burada q_1, q_2, q_3 kuaterniyonları ifade etmektedir.

DKD tasarımı için öncelikle amaç belirlenmelidir. Burada amaç, “regülasyonun mu hızlı olması daha önemli yoksa kontrolcü girişinin az olması mı?” sorusuna cevap belirlenmesidir. Bu kriterleri belirleyen Q ve R parametreleri ile optimizasyon problemi çözülerek K_{LQR} bulunmuştur. Q ve R matrisleri, sırasıyla

$$Q_{DKD} = I_7, \quad Q_{DKD}(2:4,2:4) = 0.00001 * I_3$$

$$R_{DKD} = 1000 * I_7;$$

$$R_{DKD}(1,1) = 10000 * R_{DKD}(1,1)$$

$$R_{DKD}(2,2) = 0.0001 * R_{DKD}(2,2)$$

$$R_{DKD}(3,3) = 0.001 * R_{DKD}(3,3)$$

$$R_{DKD}(4,4) = 0.1 * R_{DKD}(4,4)$$

işlemleri ile ayarlanmıştır.

Q ve R matrisleri incelendiğinde R matrisinin değerlerinin daha büyük olduğu görülmüştür. Burada amaç daha az kontrol girişi kullanarak enerji tüketimini minimum seviyede tutabilmektir.

Seçilen Q ve R matrisleri nihayetinde hesaplanan K_{LQR} ,

$$K_{DKD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.135 & 0 & -0.7 & 0 & 0 & -16.1112 & 0 \\ 0 & -0.025 & 0 & -0.1382 & -0.8054 & 0 & -0.5928 \\ 0 & 0.003 & 0 & -0.0224 & 0.0593 & 0 & -0.0805 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir.

Kazanç matrisi K_{DKD} de bulunduktan sonra, benzetim yapılmadan önce başlangıç koşulları belirlenmiştir. Uçağın DKD tasarımındaki başlangıç noktalarından belirlenen sapma değerleri Çizelge 6.4'te verilmiştir. Benzetim süresi 50 saniye olarak ayarlanmıştır.

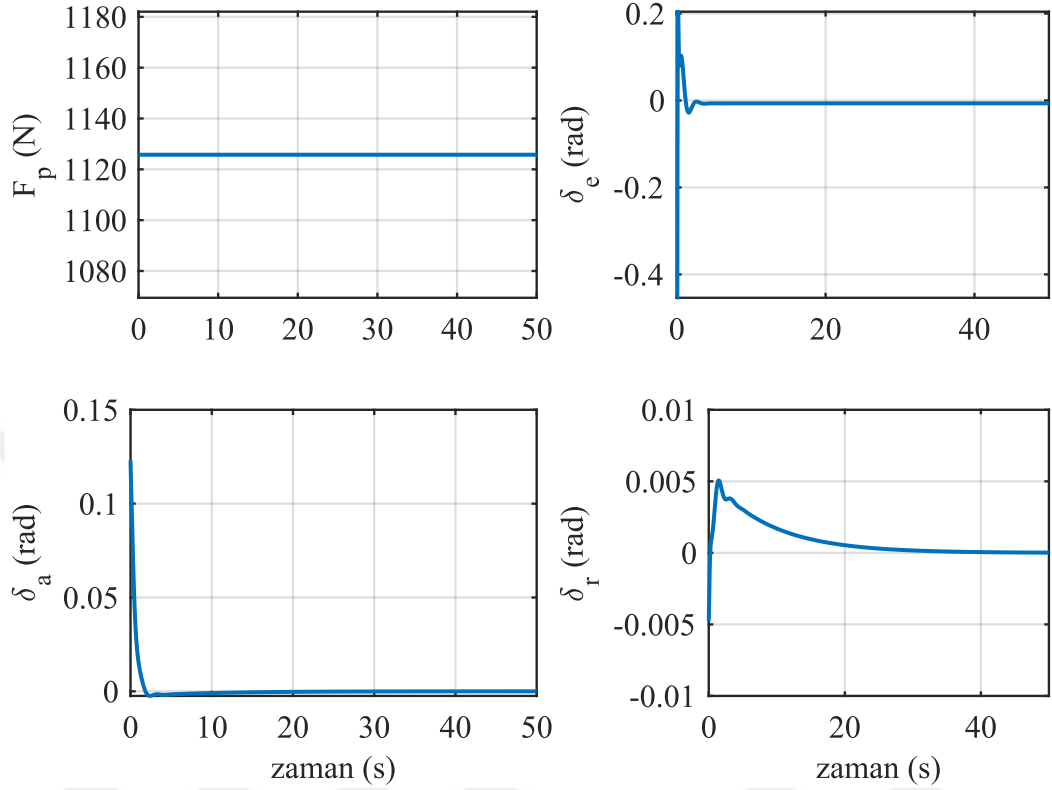
Çizelge 6.4 : Benzetim için ayarlanan başlangıç değerlerinden sapma değerleri

Parametre	Başlangıç Değerinden Sapma	Radyan Cinsinden
Hız	1 m/s	-
α	4°	0.0698 rad
β	4°	0.0698 rad
p	1.5°	0.0262 rad
q	8°	0.1396 rad
r	10°	0.1745 rad
ψ	0°	0 rad
θ	10°	0.1745 rad
ϕ	15°	0.2618 rad

Benzetim süresi boyunca, DKD tarafından üretilen uçağın girişleri Şekil 6.8'de yer almaktadır. Sonuçlar incelendiğinde ileri yönde uygulanan itiş kuvveti olan F_p benzetim süresi boyunca sabit kalmış ve değeri 1126 N olarak bulunmuştur. Daha önce verilen kısıtlar dahilinde kalmıştır. Kanatçıklardaki simetrik sapma açısını ifade eden δ_a , yükseliş dümeninde sapma açısı olan δ_e , yön dümeninde sapma açısı olan δ_r , denge noktasına yakınsamaktadır.

Şekil 6.9'da yer alan sonuçlar, DKD tasarımına göre benzetim süresince sistem durumlarını göstermektedir. Hız, 1 m/s sapma ile 66 m/s'den 65 m/s 'ye gelmiştir. Diğer tutulan değişkenler, $\alpha, \beta, p, q, r, \theta$ ve ϕ çok kısa bir süre içinde regüle olarak sifira yakınsamıştır. Sonuçlar incelendiğinde tasarlanan DKD'nin uçak için amaçlanan regülasyon kriterini sağladığı açıkça görülmektedir. Sonuçlar incelenirken dikkat edilmesi gereken bir nokta, β, θ ve ϕ değişkenlerinin kontrolcü tarafından dolaylı olarak regüle edildiğidir. Bu değişkenlerin denge noktalarından kuaterniyon denge noktaları hesaplanmakta, düzenleyici ise kuaterniyon değişkenlerinin düzenleyici

kriterini sağlamaktadır. Dolaylı yoldan etkilenen β, θ ve ϕ değişkenleri için istenilen sonuçların elde edildiği görülmektedir.

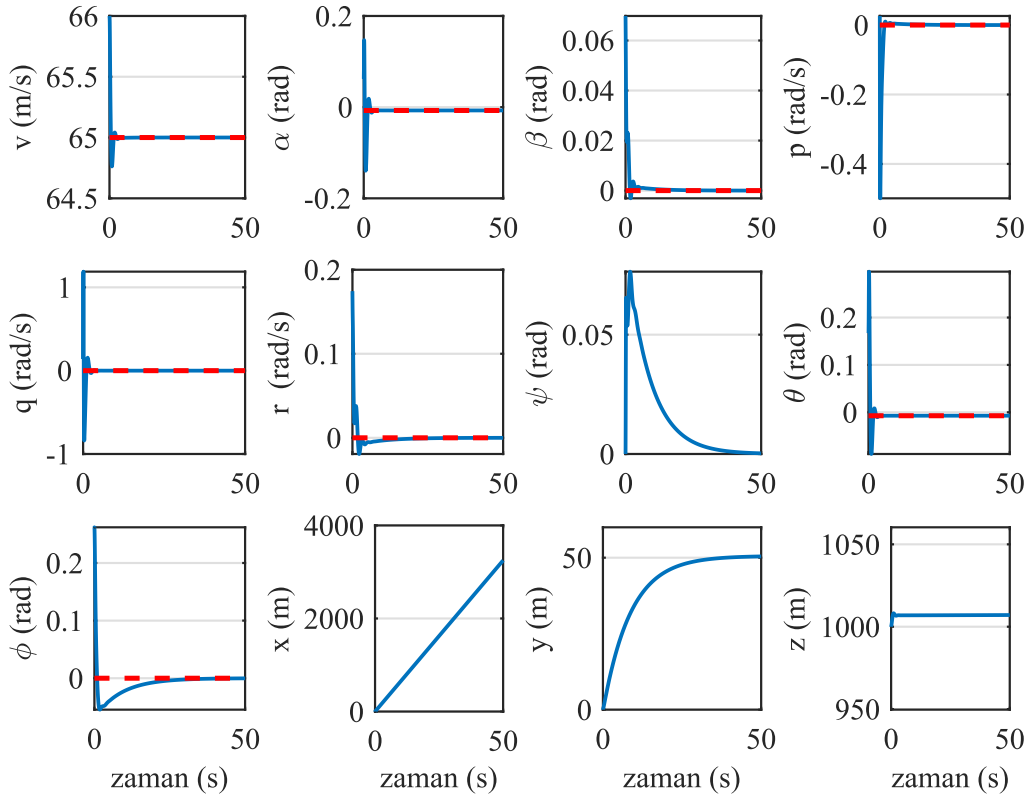


Şekil 6.8 : Cessna 172 uçağın DKD tasarımındaki benzetimi boyunca girişleri

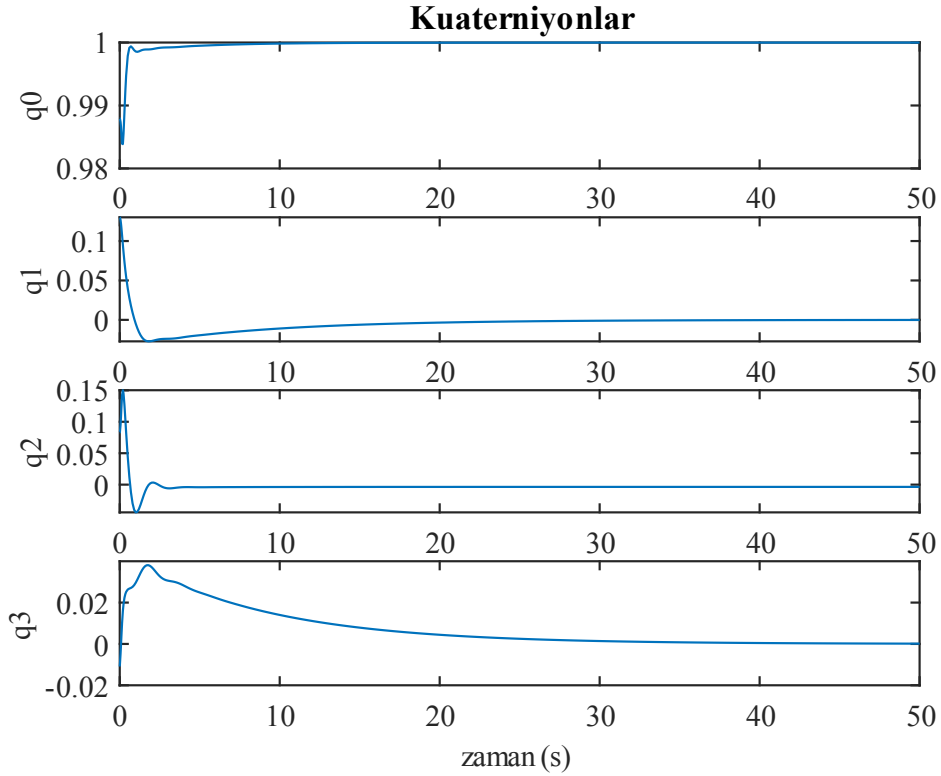
Sonuçlar incelendiğinde ileri yönde uygulanan itiş kuvveti olan F_p benzetim süresi boyunca sabit kalmış ve değeri 1126 N olarak bulunmuştur. Daha önce verilen kısıtlar dahilinde kalmıştır. Kanatçıklardaki simetrik sapma açısını ifade eden δ_a , yükseliş dümeninde sapma açısı olan δ_e , yön dümeninde sapma açısı olan δ_r , denge noktasına yakınsamaktadır.

Tasarlanan DKD'nin sonucunda kuaterniyonların değerleri Şekil 6.10'da yer almaktadır. 50 saniye boyunca yapılan benzetimin, kullanılan q_1, q_2, q_3 kuaterniyon değerlerini kısa bir süre sonra DKD tasarımı sayesinde regüle edip denge noktasına yakınsattığı görülmektedir.

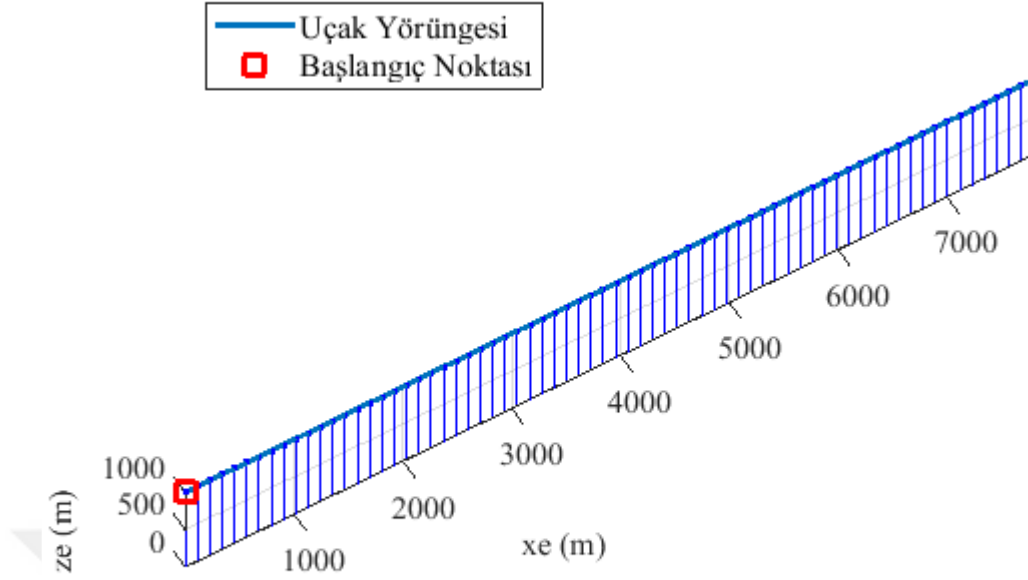
Şekil 6.11'de benzetim süresince uçağın 3-boyutlu yörüngesi yer almaktadır. Başlangıçta sapma ile başlatılan durumlar çok kısa bir sürede denge noktalarına getirildiği için uçak başlangıç hızından neredeyse hiç uzaklaşmamıştır.



Şekil 6.9 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKD'ye göre benzetim boyunca sistem durumları



Şekil 6.10 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKD'nin sonucunda kuaterniyonların değerleri



Şekil 6.11 : Uçağın benzetim boyunca 3D yörüngesi

6.3 Cessna 172 Uçağı için Kuaterniyon Tabanlı DKİ Tasarımı

Bu kısımda uçağın kontrolcü tasarımı ve benzetim sonuçları yer almaktadır. DKD tasarımından farklı olarak burada DKD'ye integral eklenmiştir ve verilen referans değerlerinin takip edilmesi istenmiştir. Sistemin takip probleminin çözülmesi için tasarlanan blok şeması Şekil 6.7 ile verilmiştir.

Kuaterniyon tabanlı DKİ kontrolcüsü tasarlanırken ilk olarak sistem durumlarından $x_{DKİ} = [v, p, q, r, q_1, q_2, q_3]$ seçilerek yeni bir sistem durum uzayı oluşturulmuştur. Oluşturulan yeni sistem ile gerekli $Q_{DKİ}$ ve $R_{DKİ}$ seçilerek, $K_{DKİ}$ kazancı bulunmuştur. Seçilen $Q_{DKİ}$ ve $R_{DKİ}$, sıralı olarak,

$$\begin{aligned}
 Q_{DKİ} &= I_{11} \\
 Q_{DKİ}(2:4,2:4) &= 0.00001 * I_3 \\
 Q_{DKİ}(9:11,9:11) &= 100000 * I_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{DKİ} &= 1000 * I_4 \\
 R_{DKİ}(1,1) &= 10000 * R_{DKİ}(1,1) \\
 R_{DKİ}(2,2) &= 0.0001 * R_{DKİ}(2,2) \\
 R_{DKİ}(3,3) &= 0.001 * R_{DKİ}(3,3) \\
 R_{DKİ}(4,4) &= 0.1 * R_{DKİ}(4,4)
 \end{aligned}$$

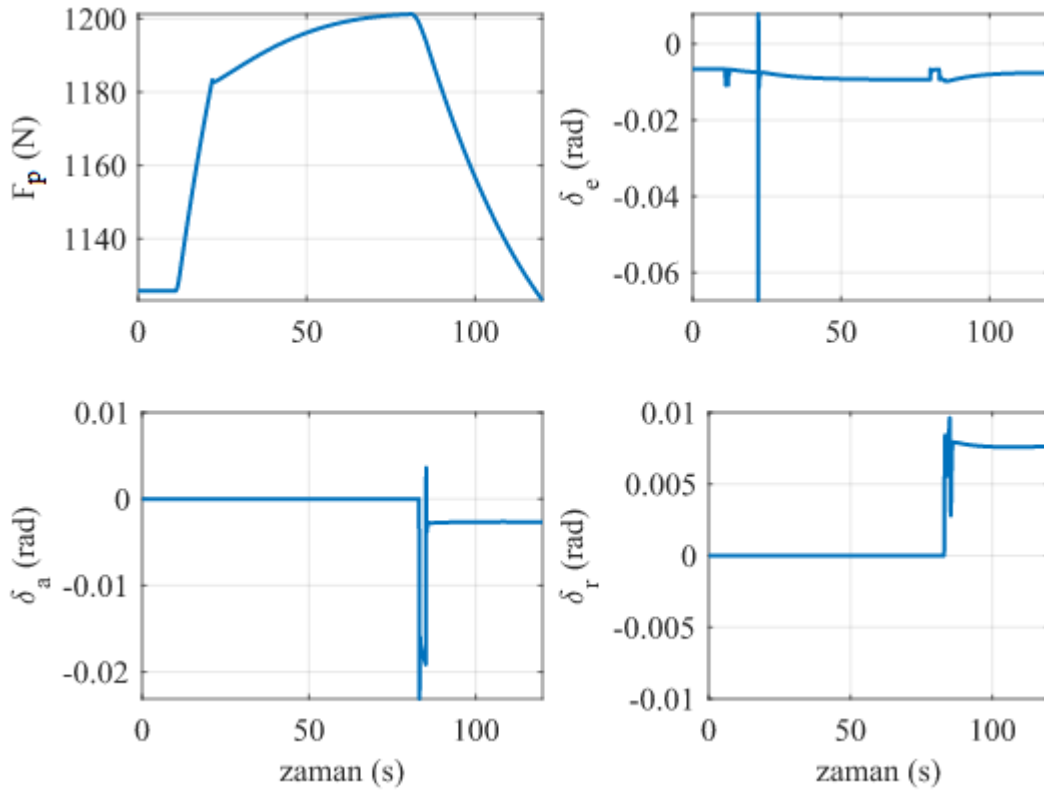
işlemleri ile elde edilmektedir.

Elde edilen $K_{DKİ}$,

$$\begin{bmatrix} 0.0038 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & -0.0019 & 0 & -0.0002 & 0 \\ 17.34 & 0 & -2.23 & 0 & 0 & -83.69 & 0 & -2.361 & 0 \\ 0 & -0.4457 & 0 & -0.8186 & -27.2 & 0 & -20.1 & 0 & 292.6 \\ 0 & 0.1217 & 0 & -0.8553 & 3.548 & 0 & -10.85 & 0 & -11.99 \end{bmatrix}$$

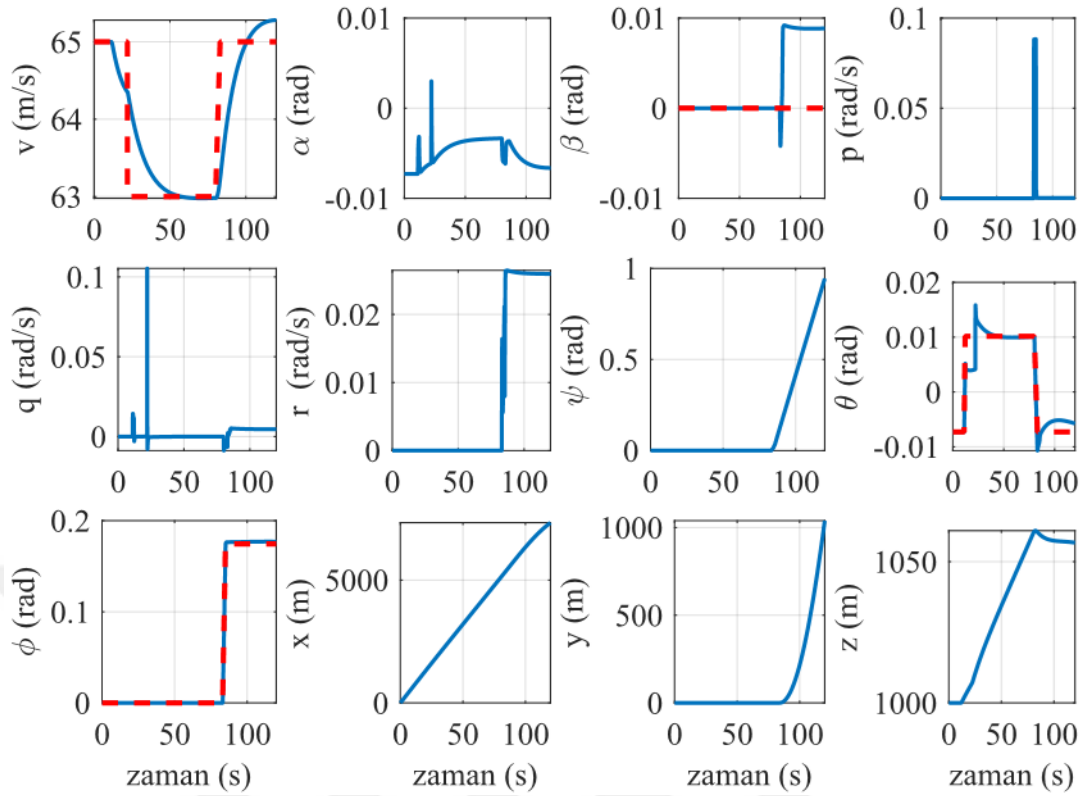
olarak bulunmuştur.

Tasarım için gerekli kazanç $K_{DKİ}$ bulunduktan sonra uçak modelinde kullanılmıştır. Şekil 6.12’de yer alan grafikler Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKİ kontrolcüsünün benzetim boyunca girişlerini göstermektedir. Burada girişler incelenmiş ve ileri yönde uygulanan itiş kuvveti olan F_p , kanatçıklardaki simetrik sapma açısını ifade eden δ_a , yükseliş dümeninde sapma açısı olan δ_e , yön dümeninde sapma açısı olan δ_r , denge noktasına yakınsamaktadır ve kısıtlar dahilinde kalmaktadırlar.



Şekil 6.12 : Cessna 172 uçağıın DKİ kontrolcüsü tasarımındaki benzetimi boyunca girişleri

DKİ tasarımına göre benzetim boyunca sistem durumları Şekil 6.13’te yer almaktadır.



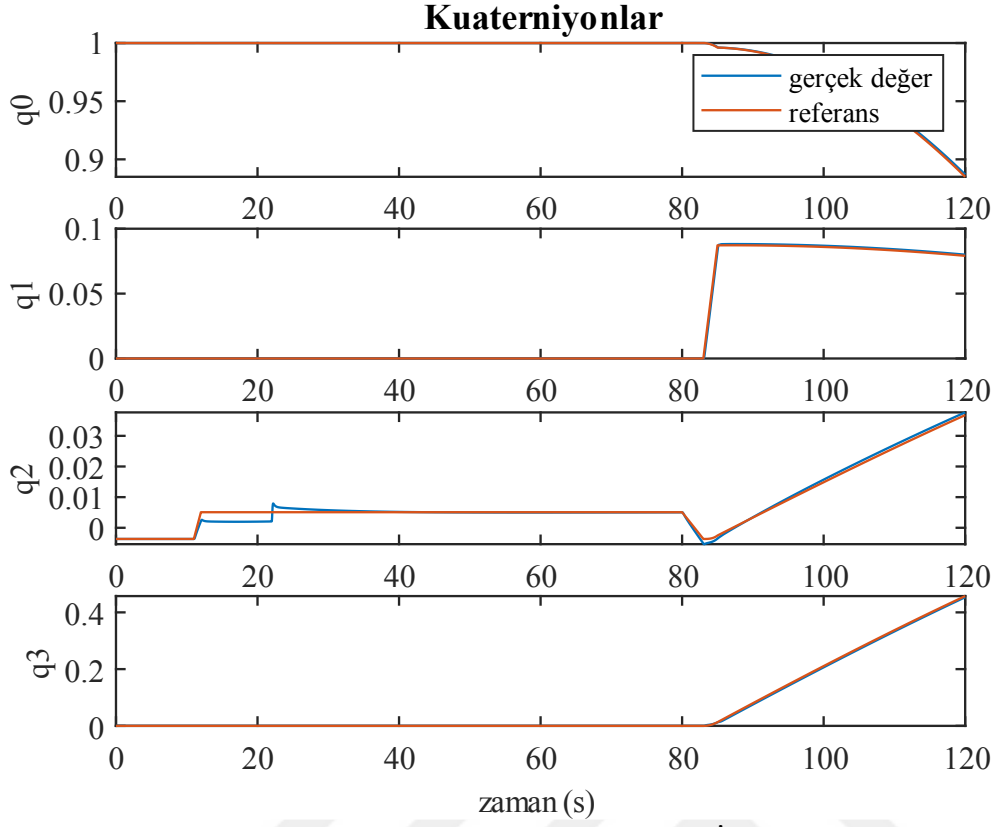
Şekil 6.13 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKİ'ye göre benzetim boyunca sistem durumları

Sonuçlar incelendiğinde, referans takibinin gerçekleştiği görülmektedir. Kontrolcü düzgün çalışmaktadır. Bu tasarım, durum geri besleme kontrolüne integral eklenmesiyle, sistemin artan durumu ile sürekli hal hatasını iyileştirmiştir. Yine burada da, DKD düzenleyicisinde olduğu gibi, Euler açıları ve yana kayma açısı takibi dolaylı olarak yapılmaktadır. Yani kontrolcü kuaterniyonları takip etmeye çalışmakta, dolaylı olarak da bu açıları takip etmektedir.

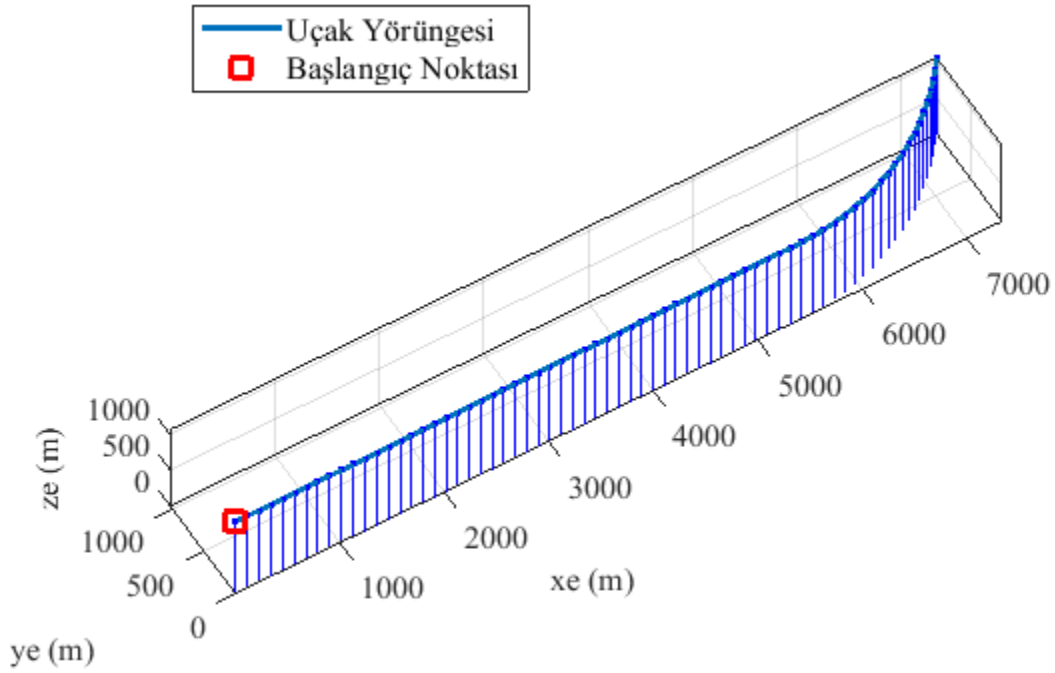
Şekil 6.14'te DKİ kontrolcüsü sonucunda kuaterniyonların değerlerini göstermektedir.

Kuaterniyonlar verilen referans değerlerini takip etmektedir. Mavi çizgiler gerçek değerleri, turuncu çizgiler ise referans değerleri belirtmektedir. 120 saniyelik benzetim süresince gerçek değerlerin referans değerlerini takip ettiği görülmektedir. Kontrolcüye verilen bu kuaterniyon referans değerleri, operatör tarafından ayarlanan, Euler açıları referans değerlerinden dönüşümle elde edilmektedir. Bunun bu şekilde yapılmasındaki sebep, direk kuaterniyon referansının, kullanıcı kişi tarafından verilmesinin zor olacağıdır.

Şekil 6.15'te uçağın benzetim boyunca 3-boyutlu yörüngesi yer almaktadır.



Şekil 6.14 : Cessna 172 uçağı için tasarlanan DKİ kontrolcüsü sonucunda kuaterniyonların değerleri



Şekil 6.15 : Uçağın benzetim boyunca 3D yörüngesi

7. SONUÇLAR VE GELECEK ÇALIŞMALAR

Tezde, söz konusu uçak için yapılan tasarımların bulguları bölüm 6'da adım adım verilmiştir. Bu bölümde, bölüm 6'da yer alan sonuçların tezin amaç ve hedeflerini karşılayıp karşılamadığı ele alınacaktır. Ayrıca, halihazırdaki çalışmaya olası katkılar kazandırabilecek gelecek çalışmalar için öneriler ve yorumlar yapılacaktır.

Bu çalışmada, düzenleyici probleminin, optimizasyona dayalı uygun ağırlık matrisleri seçimi ile kuaterniyon tabanlı DKD tekniği kullanılarak çözümü önerilmiştir. İlk olarak, uçak modeli Airlib, "Flight Dynamics and Control toolbox" (FDC 1.2) tarafından elde edilmiş, Euler tabanından kuaterniyon tabanına dönüştürülmüş ve bu sayede matematiksel tekilliklerden arındırılarak benzetim için algoritma hesaplama verimliliği arttırılmıştır. Daha sonra sistem denge noktasında doğrusallaştırılarak doğrusal olmayan sistemden doğrusal bir model elde edilmiştir. Ardından, optimal kuaterniyon tabanlı DKD geri besleme kazancı, performans endeksini yani maliyet fonksiyonunu minimuma indirecek uygun ağırlık matrisleri seçimi ile Ricatti denkleminde göre çözülerek bulunmuş ve sisteme uygulanmıştır. Sonuç olarak, kuaterniyon tabanlı DKD tasarımı çok kısa bir sürede düzenleyici problemini çözmüş ve istenilen sistem durumlarını sifıra götürerek iyi performans sağlamıştır. Sürekli hal hatasını sistemden kaldırmak için, kuaterniyon tabanlı DKİ kontrolcüsü tasarlanmıştır. Bölüm 6'da yer alan sonuçlara göre, kuaterniyon tabanlı DKİ kontrolcüsü takip işleminin başarılı olduğunu ve sürekli hal hatasının giderildiğini göstermektedir.

Gelecekte, acil durum halinde burnunu aşağı indirmiş bir uçağın kuaterniyon tabanlı kontrolcüsünün Euler tabanlı kontrolcülere nazaran olumlu davranışı araştırılabilir. Bu tarz acil durumlar için özel olarak kuaterniyon tabanlı kontrolcü tasarımı yapılabilir.

Ayrıca bu çalışmaya ek olarak, sistem durumlarını tahmin etmek ve tahmin hatasının varyansını en aza indirmeyi sağlayacak bir gözlemci tasarımı yapılarak sistemin iç dinamiklerinden veya ölçüm hatalarından kaynaklı gürültüler bastırılabilir.

Benzetim ortamı genişletilerek, bilinen en güçlü uçuş benzetim programlarından biri olan X-plane kullanılabilir. Böylece, gerçek bir uçuşa çok yakın bir uçuş sağlayıp tasarımın performansı ve güvenilirliği iki kez test edilebilir.

Çalışmalara ek olarak tasarımlara gürbüz kontrol ve anti-windup çalışmaları eklenerek kuaterniyon tabanlı sabit kanatlı hava araçlarına uygulanması düşünülebilir (Kürkçü, 2018) (Coşkun, 2019).

Son olarak tasarımlar, başka hava araçlarına uyarlanarak entegre edilebilir. Farklı hava aracı tipi olarak özellikle akrobatik ve askeri özellikteki hava araçları incelenebilir. Bunların ekstrem manevralarında kuaterniyon tabanlı kontrolcülerin Euler tabanlı kontrolcülere nazaran manevra kabiliyeti ve tekillik olmama durumu araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- Al-Mahturi, A., & and Wahid, H.** (2017). Optimal tuning of linear quadratic regulator controller using a particle swarm optimization for two-rotor aerodynamical system. *International Journal of Electronics and*, 196-202.
- Ananda, M. S.** (2016). Quaternion based pointing algorithm for two-axis gimbal of micro aerial vehicles. *2016 IEEE International Conference on Recent Trends in Electronics, Information & Communication Technology (RTEICT)* (s. 1335-1339). Bangalore: IEEE.
- Anderson, B. D., & Moore, J. B.** (1971). *Linear Optimal Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: PRENTICE-HALL, INC.
- Arpingstone.** (2006, 01 25). *Dosya:Air Jamaica A321 landing spoilers opened.jpg*. Wikipedia:
https://tr.wikipedia.org/wiki/Dosya:Air_Jamaica_A321_landing_spoilers_opened.jpg adresinden alındı
- Astrom, K., & and Hagglund, T.** (2006). Advanced PID control. *The Instrumentation, Systems, and Automation (ISA) Society*.
- Aviation, T.** (15, 10 2020). *Skyhawk*. Thebest-sellingandmost-flownaircraft: <https://web.archive.org/web/20150215231221/http://cessna.txtav.com/single-engine/skyhawk> adresinden alındı
- Bayhaluk.** (2014, 11 6). *File:Bayraktar TB2Runway.jpg*. Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Bayraktar_TB2_Runway.jpg adresinden alındı
- Becerra, V. M.** (2020, 11 08). *Optimal Control-Scholarpedia*. Scholarpedia/Peer-reviewd open-access encyclopedia:
http://www.scholarpedia.org/article/Optimal_control adresinden alındı
- Bingöl, İ. B.** (2020, 10 13). *Genel Uçak Bilgisi.pdf*. IVAO:
<https://tr.ivao.aero/downloads/documents/Genel%20Ucak%20Bilgisi.pdf> adresinden alındı
- Carr, E. B.** (2016). Unmanned Aerial Vehicles: Examining the Safety, Security, Privacy and Regulatory Issues of Integration into U.S. Airspace. *16th AIAA Aviation Technology Integration Operational Conference*, (s. 1-13).
- Chantarachit, S.** (2019). Development and Control of Rotary Inverse Pendulum by LQR with Integral Action. *International Conference on Engineering, Applied Sciences and Technology*.
- Coşkun, K. Ç.** (2019). *Doyum Noktalarında Çalışan 4-Boyutlu Uçak Otopilotu İçin Engelden Kaçma Performans Ölçüleri*. Ankara: TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi.
- Cuthbertson, A.** (2020, 9 1). *Amazon gets FAA approvals for drone deliveries*. Independent: <https://www.independent.co.uk/life-style/gadgets-and-tech/news/amazon-drone-delivery-prime-air-faa-a9699351.html> adresinden alındı
- Dong, R. G.-W.-X.** (2011). Optimal sliding mode control for nonlinear systems with uncertainties. *In Control and Decision Conference (CCDC)* (s. 2098–2103). Chinese: IEEE.

- E. N. Demirhan, K. Ç. Coşkun and C. Kasnakoğlu**, "LQI Control Design with LQG Regulator via UKF for a Fixed-Wing Aircraft," *2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, Sinaia, Romania, 2020, pp. 25-30, doi: 10.1109/ICSTCC50638.2020.9259728.
- E, K. R.** (1961). On the General Theory of Control Systems. *Proc. 1st Int. Cong. of IFAC* (s. 1481). Butterworth, London: IFAC.
- E., K. R.** (1963). Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. *J.S.I.A.M. CONTROL*, 152.
- Enbeauce.** (2020, 5 24). *Le fonctionnement d'un moteur a*. EnBeauce.com: <https://www.enbeauce.com/actualites/blogues/394162/le-fonctionnement-dun-moteur-a-reaction-1re-partie> adresinden alındı
- Fossen, A. M.** (2013). A quaternion-based LOS guidance scheme for path following of AUVs. *IFAC*, 245–250.
- Graham C. Goodwin, S. F.** (2001). *Control System Design*. Prentice Hall.
- J. Hall, R. B.** (2012). Quaternion control for autonomous path following maneuvers. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*.
- Kamien, M. I.** (2013). *Dynamic Optimization : the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. eBook: Dover Publications.
- Kurnaz, R. A.** (2009). İnsansız Kara Araçları ve Muharebe. 1-10.
- Kürkçü, B., & Kasnakoğlu, C.** (2018). *Robust Temperature Control of a Thermoelectric Cooler via μ -Synthesis*. *Journal of Electronic Materials*, 47(8), 4421-4429.
- Kürkçü, B., & Kasnakoğlu, C.** (2018). *Robust autopilot design based on a disturbance/uncertainty/coupling estimator*. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 27(6), 2622-2629
- Lopez, D. R.** (2020, 10 12). *Ailerons*. NASA Web sitesi: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/alr.html> adresinden alındı
- Luenberger, D. G.** (1979). *Optimal Control*. New York: John Wiley & Sons.
- Mendoza, A. M.** (2013). *Vertical and lateral flight optimization algorithm and missed approach cost calculation*. Montreal: Tipik bir tırmanış sırasında kuvvet diyagramları.
- Michael Basler, M. S.** (2020, 10 15). *The FlightGear Manual*. FlightGear Aviation Resources: <http://flightgear.sourceforge.net/getstart-en/getstart-en.html> adresinden alındı
- Michael S. Selig, R. D.** (15, 10 2020). *Aircraft Dynamics Models for Use with FlightGear*. Aircraft-uiuc: <https://m-selig.ae.illinois.edu/apasim/Aircraft-uiuc.html> adresinden alındı
- Murmann, F.** (2020, 10 15). *File:Dreiseitenansicht_Cessna_172.svg*. Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dreiseitenansicht_Cessna_172.svg adresinden alındı
- Narodowej, M. O.** (2012, 9 18). *File:Anakonda 2012 03.jpg*. Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Anakonda_2012_03.jpg adresinden alındı
- Nimbus227.** (2009, 9 16). *LycomingIO360 - Lycoming O-360*. Wikipedia: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7829647> adresinden alındı

- Phillips, A., & Sahin, F.** (2014). Optimal control of a twin rotor MIMO system using LQR with integral action. *Proceedings of the World Automation Congress (WAC)*, 114-119.
- R. Kumar, M. B.** (2020). Quaternion Feedback Based Autonomous Control of a Quadcopter UAV with Thrust Vectoring Rotors. *American Control Conference (ACC)* (s. 3828-3833). Denver, CO, USA: IEEE.
- Roksenhorn.** (2018, 3 21). *File:Zipline Drone Launch.jpg*. Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Zipline_Drone_Launch.jpg adresinden alındı
- Ross, I.** (2015). *A primer on Pontryagin's principle in optimal control*. San Francisco: Collegiate Publishers.
- Ross, I. M.** (2009). *A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control*. Collegiate Publishers.
- Ross, I. M., & Karpenko, M.** (2012). A Review of Pseudospectral Optimal Control: From Theory to Flight. *Annual Reviews in Control*, 182-197.
- Smithsonian, N. A.** (2011, 9 19). *Roll, Pitch, and Yaw*. How Things Fly: <https://howthingsfly.si.edu/flight-dynamics/roll-pitch-and-yaw> adresinden alındı
- Wikipedia.** (2020, 10 15). *Cessna 172 - Wikipedia*. Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Cessna_172 adresinden alındı
- Wikipedia, D. a.** (2006, 10 23). *File:GLFC9.jpg*. Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:GLFC9.jpg> adresinden alındı

ÖZGEÇMİŞ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2018, İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2021, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2019-	TOBB ETÜ	Tam Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce, Almanca

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **B. Kucukates, E. N. Demirhan and C. Kasnakoğlu** “Comparison of Kalman Filter and Luenberger Observer Performances for State Estimation of an UAV System”, 2020 *6th International Conference on Computer and Technology Applications (ICCTA 2020, former ICCIT)*, 978-1-4503-7749-2
- **E. N. Demirhan, K. Ç. Coşkun and C. Kasnakoğlu**, "LQI Control Design with LQG Regulator via UKF for a Fixed-Wing Aircraft," 2020 *24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, Sinaia, Romania, 2020, pp. 25-30, doi: 10.1109/ICSTCC50638.2020.9259728.