GENELLEŞTİRİLMİŞ HUKUHARA YÖNTEMİ İLE BAZI BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

ÖMER ORUÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2011

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

____

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

____

Prof. Dr. Ömer AKIN
Anabilim Dalı Başkanı

Ömer ORUÇ tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ HUKUHARA YÖNTEMİ İLE BAZI BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

____

Prof. Dr. Ömer AKIN
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Burhan TÜRKŞEN ________________________________

Üye : Prof. Dr. Afet GOLAYOĞLU ________________________________

Üye : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN ________________________________

Üye : Prof. Dr. Tahir KHANİYEV ________________________________

Üye : Yrd. Doç. Dr. Şahin EMRAH ________________________________

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ömer ORUÇ

Üniversitesi : **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri Enstitüsü**
Anabilim Dalı : **Matematik Bölümü**
Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ömer AKIN**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans – Temmuz 2011**

Ömer ORUÇ

GENELLEŞTİRİLMİŞ HUKUHARA YÖNTEMİ İLE BAZI BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

ÖZET

Bu tezde bulanık kümeler ve bulanık kümelerin temel özellikleri verilmiştir. Bulanık teoride çok önemli bir rol oynayan Lütfi Aliasker Zadeh'nin genişleme prensibi ve bu prensibin nasıl uygulanacağı açıklayıcı örneklerle gösterilmiştir. Ayrıca bulanık sayı kavramı ve bulanık sayılar arasındaki aritmetik işlemler hakkında bilgi verilmiştir. Bulanık diferensiyel denklemler ile ilgili temel teoremler verilmiş olup, birinci ve ikinci mertebeden bulanık başlangıç değer problemlerinin çözümleri araştırılmıştır. Ayrıca SIR epidemik modelinin çözümleri başlangıç şartları birer bulanık sayı iken grafikler üzerinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Lütfi Aliasker Zadeh'nin genişleme prensibi, Hukuhara türevi ve güçlü genelleştirilmiş türev, Bulanık diferensiyel denklemler, Bulanık başlangıç değer problemi.

University	**:**	**TOBB Economics and Technology University**
Institute	**:**	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	**:**	**Department of Mathematics**
Supervisor	**:**	**Professor Dr. Ömer AKIN**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. – July 2011**

Ömer ORUÇ

THE INVESTIGATION OF THE SOLUTIONS OF SOME FUZZY INITIAL VALUE PROBLEMS WITH THE GENERALIZED HUKUHARA METHOD

ABSTRACT

In this thesis fuzzy sets and basic properties of fuzzy sets are given. Lotfi A. Zadeh's extension principle which plays very significant role in fuzzy theory and how to apply this principle are demonstrated with illustrative examples. Also fuzzy number concept and arithmetic operations between fuzzy numbers are explained. Fundamental theorems about fuzzy differential equations are given and solutions of first order and second order fuzzy initial value problems are investigated. Additionally solutions of SIR epidemic model with fuzzy initial values are studied graphically.

Keywords: Fuzzy set, Lotfi A. Zadeh's extension principle, Hukuhara derivative and strongly generalized derivative, Fuzzy differential equations, Fuzzy initial value problem

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Ömer AKIN'a yine çalışmalarıma katkılarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Burhan TÜRKŞEN ve Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e ve tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine, ayrıca beni her zaman destekleyen aileme ve arkadaşım Arş. Gör. Yılmaz ZENGİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

KISALTMALAR

Kısaltmalar	**Açıklama**
Çek	Çekirdek
Dest	Destek
H-farkı	Hukuhara farkı
Yüks	Yükseklik

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mu_A(x)$	A kümesinin üyelik fonksiyonu
$[A]^\alpha$	A kümesinin α-kesit kümesi
$\mu_R(x,y)$	x ile y'yi bağlayan fonksiyonun (bağıntının) üyelik derecesidir.
$\oplus$	Fuzzy toplama operatörü
$(-)$	Fuzzy çıkarma operatörü
$\odot$	Fuzzy çarpma operatörü
$\oslash$	Fuzzy bölme operatörü
$\ominus$	Hukuhara farkı
$\vee$	Maksimum operatörü
$\wedge$	Minimum operatörü
$\mathcal{P}_K(R^n)$	R^n in boş olmayan kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{F}$	Fuzzy sayılar uzayı
$D_1^{(1)}F(t)$	F bulanık fonksiyonunun (1) durumlu türevi
$D_2^{(1)}F(t)$	F bulanık fonksiyonunun (2) durumlu türevi
$D_{n,m}^{(2)}F(t_0)$	F bulanık fonksiyonunun ikinci türevi, $n,m=1,2$
α	Yunan harfleri
γ	

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Bulanık teori veya bulanık küme kavramı ilk kez 1965 yılında Azerbaycanlı Türk bilim adamı Lütfi Aliasker Zadeh (Lotfi A.Zadeh) tarafından ortaya atılmıştır [11]. Bulanık mantığın temeli bulanık kümelere dayanır. Klasik kümelerde bir eleman ya bir kümeye aittir ya da o kümeye ait değildir. Ancak klasik kümelerin aksine bulanık kümelerde ise her bir elemanın kümeye ait olma derecesi vardır ve bu aitlik derecesi sıfır ile bir arasında değişmektedir. Örneğin yaşları 20 ile 60 arasında değişen insanların bulunduğu bir ortamda "genç insanlar" kümesi dediğimizde bu kümeye hangi yaştaki insanların ait olacağı net değildir. 30 yaşındaki bir kimse 40 yaşındaki bir kimseye göre daha gençken 20 yaşındaki bir kimseye göre ise daha yaşlıdır. Dolayısıyla 30 yaşındaki bir kimsenin kümenin elemanı olup olmadığı belirsizdir. Ancak "genç insanlar" kümesini bulanık bir küme olarak düşünürsek 20 yaşındaki bir kimsenin kümeye ait olma derecesi 30 yaşındaki bir kimsenin kümeye ait olma derecesinden daha büyüktür. Aynı şekilde 30 yaşındaki bir kimsenin kümeye aitlik derecesi 40 yaşındakine göre daha fazladır. Dolayısıyla kümeyi bulanık bir küme olarak ifade etmek gerçeğe daha yakındır. Nitekim gerçek hayatta bu tarz belirsizlik içeren durumlarla çok sık karşılaşırız. Dolayısıyla bu belirsizlikleri matematiksel modellerde bulanık kümelerle ifade etmek gerçek olayı daha iyi yansıtmamızı sağlar.

Bulanıklık başta mühendislik ve kontrol teori olmak üzere çok geniş alanlarda kullanılmaktadır. Genel olarak; biyomedikal, ekoloji, tarım, coğrafya, uzaktan uydu kontrolü, roket bilimi, robotik, yapay zeka alanlarında bulanık teori kullanılırken, özel olarak ise Japonya'da tüketici elektroniğinde, Almanya'da otomobil endüstrisinde ve ev aletlerinde kullanılmaktadır. Özellikle dinamik sistemlerde veriler hakkındaki bilgilerin yeterli olmaması ile ortaya çıkan belirsizlik altında gerçek olayı modellemek için bulanık diferensiyel denklemlerin kullanılması kaçınılmazdır [14]. Örneğin bir topluluk (popülasyon) modelinde başlangıç anındaki nüfus hakkında net bir veriye sahip olamayabiliriz. İşte bu net olmayan veriyi popülasyon modelinde bulanık bir küme ile ifade etmek problemi modellerken bu

belirsizliği göz önünde bulundurmak demektir. Bu yaklaşım da gerçek olayı daha iyi yansıtmamızı sağlar.
Bulanık türev kavramı ilk olarak Chang ve Zadeh [16] tarafından ortaya konulmuştur. Onları takiben Dubois ve Prade [17], Puri ve Ralescu [1] bu konuda çalışmışlardır. Puri ve Ralescu küme değerli fonksiyonlardaki Hukuhara türevini genelleştirip bulanık fonksiyonlara genişletmişlerdir. Sonuç olarak Puri ve Ralescu'nun genelleştirdiği Hukuhara türevini, ilk defa Kaleva [2, 3], kullanarak bulanık diferensiyel denklemler konusunu çalışmıştır. Ancak daha sonra Hukuhara türevinin bir zayıf tarafı görülmüştür. Bu türev tanımı kullanılarak bulunan diferensiyel denklemin çözümü zaman geçtikçe bulanıklaşmakta ve sonunda bulanık çözüm ile diferensiyel denklemin klasik çözümünün tamamen farklı davranmasına yol açmıştır. Hukuhara türevinin bu zayıf yönüne karşı Hüllermeier [18] farklı bir alternatif sunmuştur. Hüllermeier, bulanık diferensiyel denklemi bir diferensiyel içermeler ailesi olarak yorumlamıştır. Ancak bu yaklaşımın da bir eksikliği bulunmuş, bu eksiklik de bulanık türevden bahsedilmemiş olmasıdır. Sonunda Bede ve Gal [5], Bulanık değerli fonksiyonlar için güçlü genelleştirilmiş türev tanımını geliştirmiştir. Bu türev tanımı ile yukarıda bahsedilen eksiklikler ortadan kaldırılabilmekte ve bu türev tanımı göz önüne alınarak diferensiyel denkleme bulunan çözüm klasik çözümle tutarlı (benzer) bir davranış sergileyebilmektedir.

Bu tezin birinci bölümünde bulanık kümeler ve temel özellikleri, bulanık teorideki en önemli konulardan biri olan Zadeh'nin Genişleme Prensibi ve genişleme prensibinin nasıl uygulanacağı ile ilgili açıklayıcı örnekler, bulanık sayı kavramı ve bulanık sayılar arasındaki aritmetik işlemler verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde bulanık başlangıç değer problemi ele alınıp, birinci mertebeden bulanık başlangıç değer probleminin çözümü genişleme prensibi uygulanarak elde edilmiştir. Ardından Hukuhara türevi ve güçlü genelleştirilmiş türev tanımları, özellikleri ve bulanık diferensiyel denklemlerle ilgili temel teoremler verilmiştir. Bu bilgiler ışığında bulanık başlangıç değer probleminin çözümleri araştırılmıştır.

Orjinallik kapsayan üçüncü bölümde ise SIR epidemik modelinin çözümleri başlangıç şartları birer bulanık sayı iken grafikler üzerinde incelenmiştir.

1.1. BULANIK KÜMELER

Klasik kümelerde, bir kümenin üyelik fonksiyonunu (karakteristik fonksiyonunu) aşağıdaki gibi tanımlarız.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1\,; x \in A \\ 0\,; x \notin A \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Bu tanıma göre μ_A fonksiyonu X evrensel kümesindeki her elemanı $\{0, 1\}$ kümesine götürür.

$$\mu_A(x): X \to \{0, 1\} \tag{1.1.2}$$

Yani klasik (crisp) kümelerde bir eleman ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Ancak bulanık kümelerde bu böyle değildir. Bulanık kümelerde elemanın kümeye ait olma derecesi vardır ve bu aitlik derecesi 0 ile 1 arasındaki bir reel sayıdır. Şimdi bulanık küme tanımını verelim.

Tanım 1.1.1. (Bulanık küme veya üyelik fonksiyonu) Bulanık bir küme aslında elemanlarını $[0, 1]$ aralığına götüren bir fonksiyondur [11]. Bu fonksiyona aynı zamanda bulanık kümenin üyelik fonksiyonu da denir. Üyelik fonksiyonu veya bulanık küme aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_A(x): X \to [0,1] \tag{1.1.3}$$

Üyelik fonksiyonu için aynı zamanda $A(x): X \to [0,1]$ gösterimi de kullanılabilir.

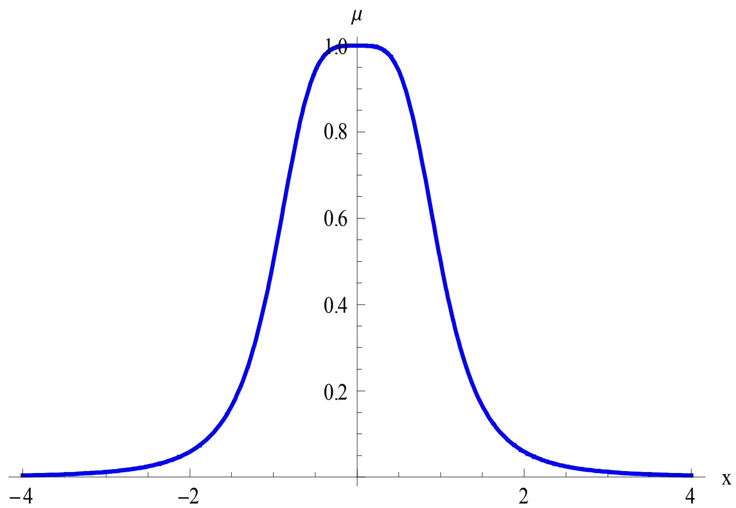
Örnek 1.1.1. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ evrensel kümesini göz önüne alalım. Bu küme üzerindeki bir A bulanık kümesi $\mu_A(1) = 0,\ \mu_A(2) = 0.4,\ \mu_A(3) = 0.7,\ \mu_A(4) = 1,$ $\mu_A(5) = 0,$ şeklinde olsun. Bu bulanık kümeyi “2 elemanının A kümesine ait olma derecesi 0.4’tür. Yani üyelik derecesi 0.4’tür. 3 elemanının A kümesine ait olma derecesi 0.7’dir. 4 elemanının A kümesine ait olma derecesi 1’dir. 1 ve 5, A kümesinin elemanı değildir.” Şeklinde yorumlayabiliriz.

Bulanık kümeler $A = \{(x, \mu_A(x))\}$ ya da $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$ şeklinde gösterilir.

Eğer elemanlar sürekliyseler $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$ gösterimi yerine $A = \int \mu_A(x)/\,x$ gösterimi kullanılır.

Örnek 1.1.1. deki bulanık kümeyi $A = \{(1,\ 0),\ (2,\ 0.4),\ (3,\ 0.7),\ (4,\ 1),\ (5, 0)\}$ ya da $A = \frac{0}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0}{5}$ (ifadedeki '+' işareti toplama anlamına değil birleşim anlamına geliyor.) şeklinde gösterebiliriz.

Örnek 1.1.2.



A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_A(x) = \frac{1}{(1+x^4)}$ ve üyelik fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre $\mu_A(0) = 1$, $\mu_A(2) \cong 0.11$ vs.

Şekil 1.1. Üyelik fonksiyonunun grafiği

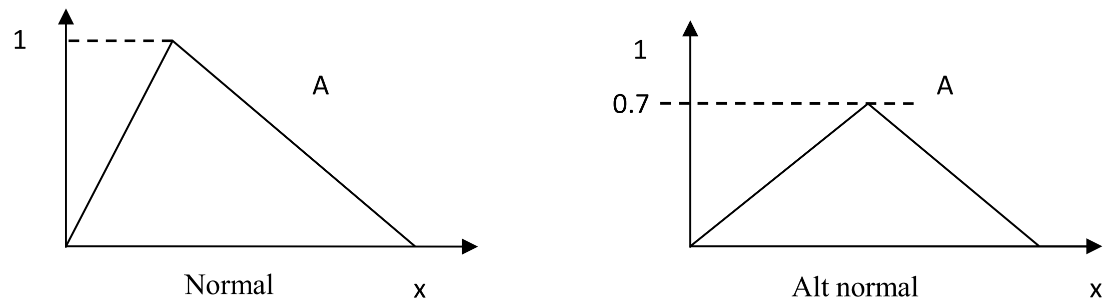
1.2. BULANIK KÜMELERLE İLGİLİ BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.2.1. Normallik

X evrensel kümesi üzerinde tanımlı bir A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\exists\ x \in X$ için 1 oluyorsa yani

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1 \tag{1.2.1.1}$$

ise A bulanık kümesine normaldir denir [7]. Bir A bulanık kümesinin yüksekliği $yüks(A(x))$=$yüks(\mu_A(x)) = sup\ \mu_A(x)$ olarak tanımlanır. Eğer $yüks(A(x)) < 1$ ise A bulanık kümesine alt normaldir denir [7].



Şekil 1.2. Normal ve Alt normal bulanık kümeler

1.2.2. Destek

Bir A bulanık kümesinin desteği $dest(A)$ ile gösterilir ve

$$dest(A) = \{x \in X |\, \mu_A(x) > 0\} \qquad (1.2.2.1)$$

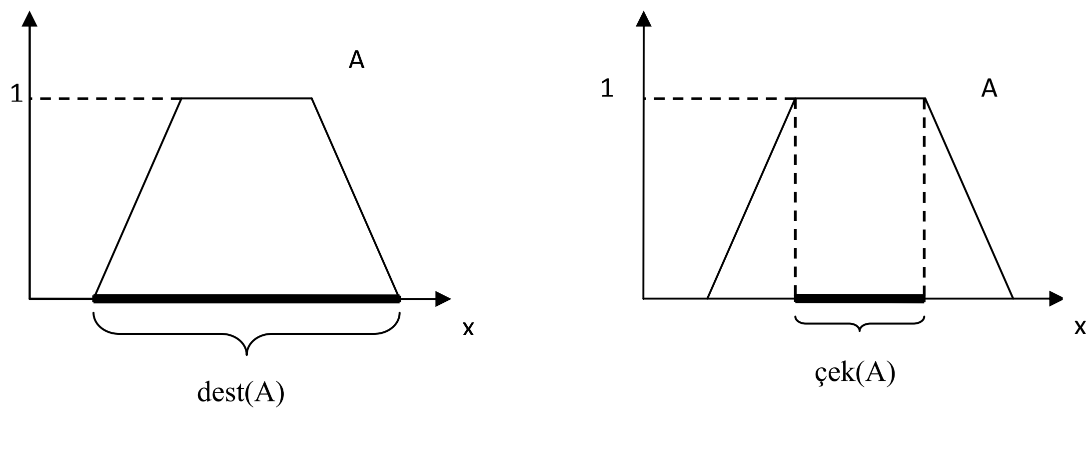
şeklinde tanımlanır [7]. Tanımdan anlaşılacağı üzere bulanık bir kümenin desteği klasik bir kümedir.

1.2.3. Çekirdek

Bir A bulanık kümesinin çekirdeği $çek(A)$ ile gösterilir ve

$$çek(A) = \{x \in X |\, \mu_A(x) = 1\} \qquad (1.2.3.1)$$

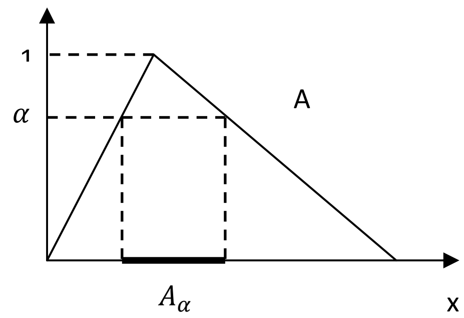
şeklinde tanımlanır [7]. Tanımdan anlaşılacağı üzere bulanık bir kümenin çekirdeği, desteğinde olduğu gibi klasik bir kümedir.



Şekil 1.3. Bir bulanık kümenin desteği ve çekirdeği

1.2.4. α-Kesit Kümesi

Bir bulanık kümenin α-kesit kümesi A_α, bulanık kümedeki elemanlardan üyelik derecesi α'dan küçük olmayan elemanların kümesidir. Yani $A_\alpha = \{\, x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \;\alpha \in (0,1]$ dır [7]. Güçlü α-kesit kümesi de $A_\alpha^+ = \{\, x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \;\alpha \in [0,1]$ şeklinde tanımlanır [8]. α-kesit kümesi genelde A_α veya $[A]^\alpha$ ile gösterilir. Dikkat edersek $\alpha = 1$ için α-kesit kümesinden bulanık kümenin çekirdeğini ve $\alpha = 0$ için A_α^+ kümesinden bulanık kümenin desteğini bulabiliriz.

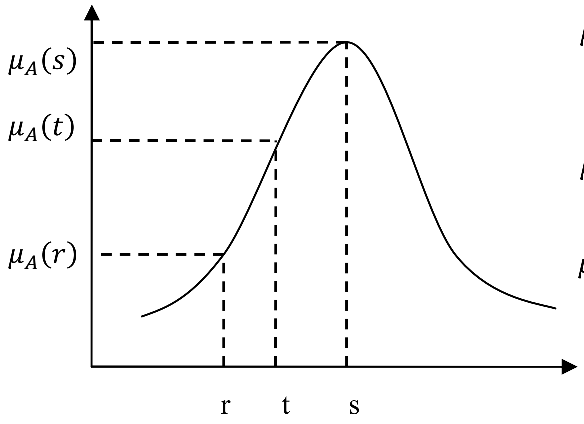


Şekil 1.4. α-kesit kümesi

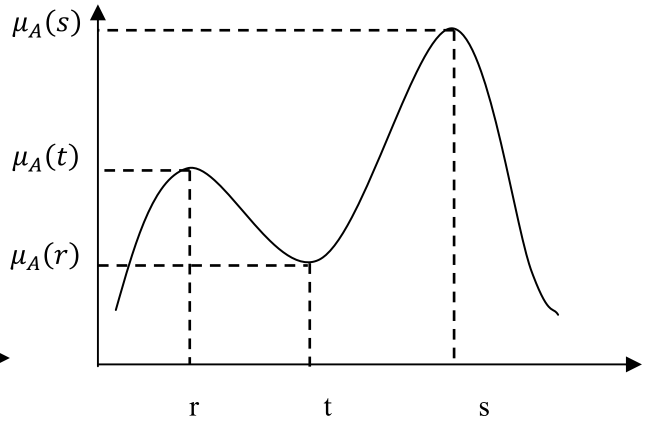
$\alpha \leq \alpha'$ ise $A_\alpha \supseteq A_{\alpha'}$ olacağı açıktır.

1.2.5. Dışbükey Bulanık Küme

$r, s \in X \; ve \; t = \lambda r + (1-\lambda)s \,, \lambda \in [0,1]$ olmak üzere, eğer bir bulanık kümenin üyelik fonksiyonu $\mu_A(t) \geq min[\mu_A(r), \mu_A(s)]$ şartını sağlıyorsa bu bulanık kümeye dışbükey bulanık küme denir [11].



Şekil 1.5.(a)
Konveks küme $\mu_A(t) \geq \mu_A(r)$



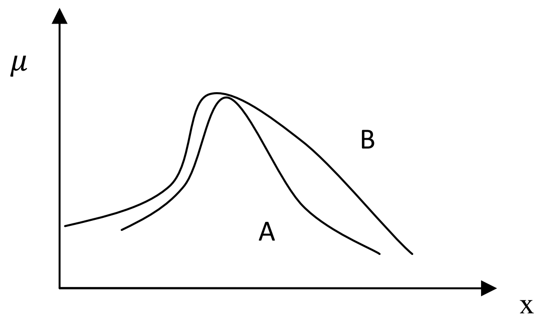
Şekil 1.5.(b)
Konveks Olmayan küme $\mu_A(t) \ngeq \mu_A(r)$

1.2.6. Bulanık Sayı

Eğer bir bulanık küme dışbükey ve normal ise aynı zamanda üyelik fonksiyonu parçalı sürekli ise bu kümeye bulanık sayı adı verilir [7].

1.2.7. İki Bulanık Kümenin Eşitliği ve Bulanık Kümenin Alt Kümesi

$A\ ve\ B$ iki bulanık küme olmak üzere, $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall x \in X$ [11], $\forall x \in X\ için\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ oluyorsa $A \subseteq B$ dir [11].



Şekil 1.6. $A \subseteq B$

1.3. BULANIK KÜMELERDE STANDART İŞLEMLER

1.3.1. Tümleme

Bulanık A kümesinin tümleyeni $\bar{A}$ olsun. $\bar{A}$ kümesinin üyelik derecesi

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X \tag{1.3.1.1}$$

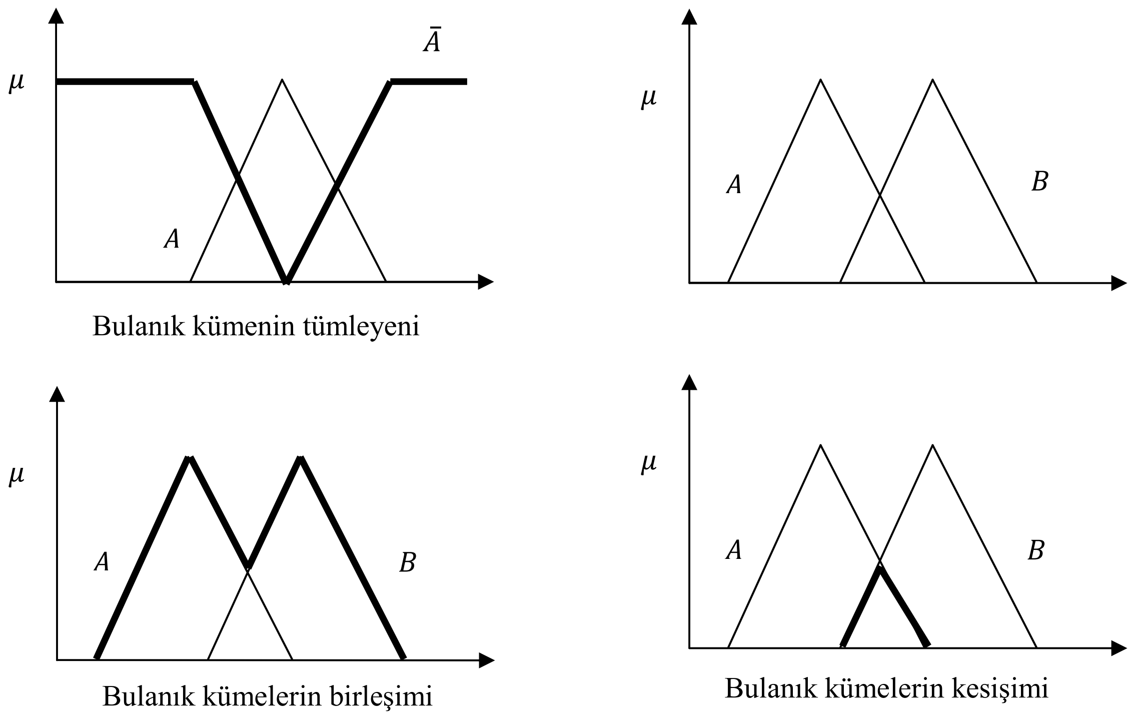
şeklinde tanımlanır [11]. Örneğin $A = \{(4,\ 0.2),\ (5,\ 0.6),\ (6,\ 1),\ (7,\ 0)\}$ ise $\bar{A} = \{(4,\ 0.8),\ (5,\ 0.4),\ (6,\ 0),\ (7,\ 1)\}$ olur.

1.3.2. Birleşim

A ve B gibi iki bulanık kümenin birleşiminin üyelik değeri, A ve B den üyelik derecesi büyük olana eşittir. [11] Yani $\forall x \in X$ için $\mu_{A\cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$.

1.3.3. Kesişim

A ve B gibi iki bulanık kümenin kesişiminin üyelik değeri A ve B den üyelik derecesi küçük olana eşittir. [11] Yani $\forall x \in X$ için $\mu_{A\cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$.



Şekil 1.7. Bulanık kümelerde standart işlemler

Çizelge 1.1. Bulanık kümelerde standart işlemler

Değişme özelliği	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Birleşme özelliği	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Dağılma özelliği	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cup X = X$ $A \cap X = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \emptyset = A$
De Morgan kuralı	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
	$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ $A \cup \bar{A} \neq X$

1.3.4. Bulanık Kümelerin Kartezyen Çarpımı

$\forall x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$ ve $\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)$ sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_n$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n$ bulanık kümelerinin kartezyen çarpımı

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = min\left[\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\right]$$

şeklinde tanımlanır [7].

1.4. ZADEH'NİN GENİŞLEME PRENSİBİ

x değişkeninin f altındaki görüntüsü olan $y = f(x)$ dönüşümünü (fonksiyonunu) göz önüne alalım. Bu dönüşümdeki x değişkeni bulanık bir sayı veya bulanık bir küme olursa veya hem x hem de f dönüşümünün kendisi aynı anda bulanık olursa o zaman y deki bulanıklığı nasıl elde ederiz? Bu sorunun üstesinden bulanık mantık teorisini ortaya atan (Lotfi A. Zadeh) Lütfi Aliasker Zadeh'nin genişleme prensibiyle gelebiliriz.

$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sırasıyla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ üzerinde tanımlı bulanık kümeler ve $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, … , $x_n \in A_n$ olsun.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : X \to Y$ ise o zaman Y de B bulanık kümesi, f ve $A_1, A_2, \ldots, A_n$den genişleme prensibine göre aşağıdaki gibi elde edilir [7, 22].

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)} [\, min(\mu_{A_1}(x_1),\ldots,\mu_{A_n}(x_n)) \,] & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

Burada max operatörü fonksiyon sürekli değerli olursa sup operatörü ile yer değiştirir.

Eğer fonksiyon tek değişkenli ve bire-bir bir fonksiyon ise o zaman genişleme prensibi

$$\mu_B(y) = \mu_A(x) = \mu_A\left(f^{-1}(y)\right) \; ; f^{-1}(y) \neq \emptyset \qquad (1.4.2)$$

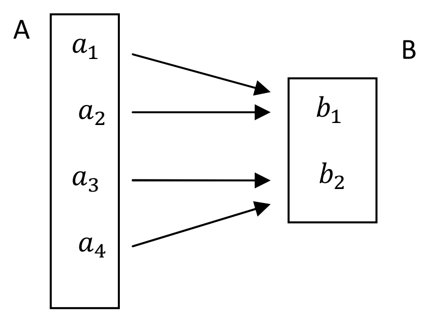
şeklinde yazılabilir [7, 22]. Eğer fonksiyonun kendisi de bulanık ise o zaman genişleme prensibi

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{x \in f^{-1}(y)} [min(\mu_A(x), \; \mu_R(x,y))] \end{cases} \qquad (1.4.3)$$

Şeklinde yazılır [7, 22]. Burada $\mu_R(x, y)$, x ile y' yi bağlayan fonksiyonun(bağıntının) üyelik derecesidir.

Genişleme prensibini her fonksiyona uygulamak her zaman kolay bir iş değildir. Ancak fonksiyon lineer olursa genişleme prensibini uygulamak çok kolaydır.

Örnek 1.4.1. $A = \{(a_1,\ 0.4),\ (a_2,\ 0.5),\ (a_3,\ 0.9),\ (a_4,\ 0.6)\}$ olsun. Aşağıdaki şekle göre B kümesindeki elemanların üyelik derecelerini bulalım.



Şekil 1.8. A kümesi ile B kümesi arasındaki bağıntı

Çözüm: $f^{-1}(b_1) = a_1$ veya $f^{-1}(b_1) = a_2$,

$\mu(a_1) = 0.4$ ve $\mu(a_2) = 0.5$ dolayısıyla $\mu(b_1) = max(\mu(a_1),\ \mu(a_2)) = max(0.4,\ 0.5) = 0.5$ aynı şekilde $f^{-1}(b_2) = a_3$veya $f^{-1}(b_2) = a_4$, $\mu(a_3) = 0.9$ ve $\mu(a_4) = 0.6$ dolayısıyla $\mu(b_2) = max(\mu(a_3),\ \mu(a_4)) = max(0.9,\ 0.6) = 0.9$ sonuç olarak $B = \{(b_1, 0.5), (b_2, 0.9)\}$.

Örnek 1.4.2. Bu örneğimizde örnek 1.4.1. deki verilere ek olarak bağıntılar da bulanık olsun. Yani,

$\mu_R(a_1, b_1) = 0.7,\ \mu_R(a_2,\ b_1) = 0.2,\ \mu_R(a_3,\ b_2) = 0.8$ ve $\mu_R(a_4, b_2) = 0.3$ olsun.

Buna göre B bulanık kümesini bulalım.

Çözüm: Genişleme prensibini hatırlayalım.

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max & [min(\ \mu_A(x), \mu_R(x,y)\ )] \\ y = f(x) & \end{cases}$$

$min(\mu_A(a_1),\ \mu_R(a_1,\ b_1)\ ) = min(0.4, 0.7) = 0.4$

$min(\mu_A(a_2),\ \mu_R(a_2,\ b_1)\ ) = min(0.5, 0.2) = 0.2$

$max[0.4, 0.2] = 0.4$

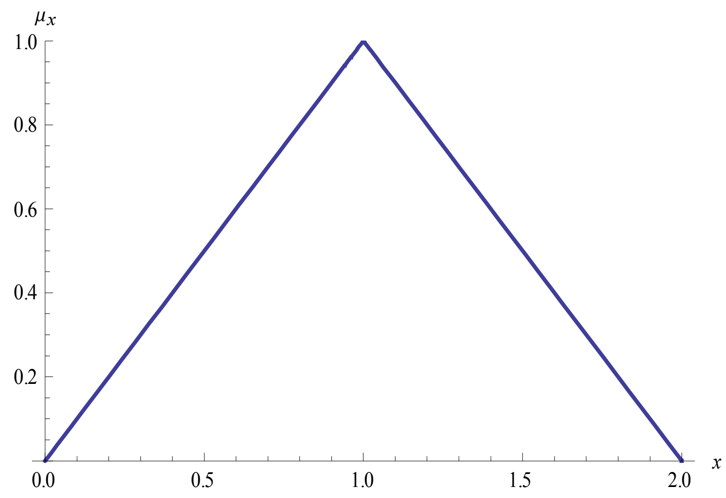
$min(\mu_A(a_3),\ \mu_R(a_3,\ b_2)\ ) = min(0.9, 0.8) = 0.8$

$min(\mu_A(a_4),\ \mu_R(a_4,\ b_2)\ ) = min(0.6, 0.3) = 0.3$

$max[0.8, 0.3] = 0.8$

$B = \{(b_1, 0.5),\ (b_2, 0.8)\}$ olur.

Örnek 1.4.3. x bulanık kümesinin grafiği ve üyelik fonksiyonu $\mu_x(x)$ verilmiştir.



$$\mu_x(x) = \begin{cases} x & ;\ 0 \le x < 1 \\ 2 - x & ;\ 1 \le x \le 2 \\ 0\ ; & x < 0\ ve\ x > 2 \end{cases}$$

Şekil 1.9. x bulanık kümesi

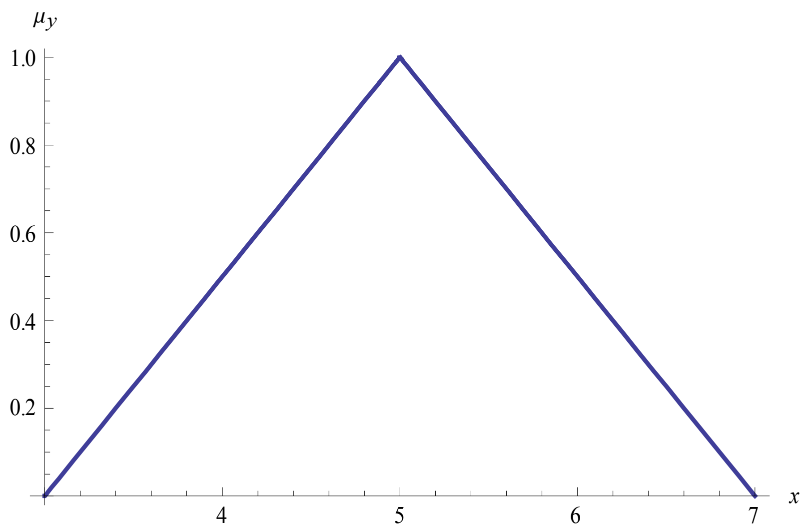
Buna göre $y = f(x) = 2x + 3$ ise $\mu_{f(x)}$ üyelik fonksiyonunu ve üyelik fonksiyonunun grafiğini bulalım.

Çözüm:

$y = f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$, ve $0 \leq x < 1$ için $3 \leq y < 5$ olur, $1 \leq x \leq 2$ için ise $5 \leq y \leq 7$ olur.

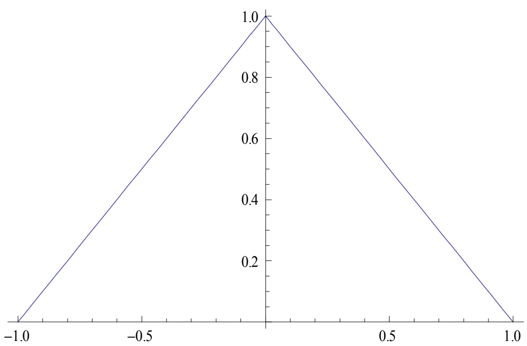
Genişleme prensibine göre:

$$\mu_y(y) = \mu_{f(x)}(y) = \mu_x\big(f^{-1}(y)\big) = \begin{cases} \frac{y-3}{2} & ; \quad 0 \leq y < 5 \\ 2 - \frac{y-3}{2} & ; \quad 5 \leq y \leq 7 \\ 0 & ; \ y < 0 \ ve \ y > 7 \end{cases}$$ elde edilir.

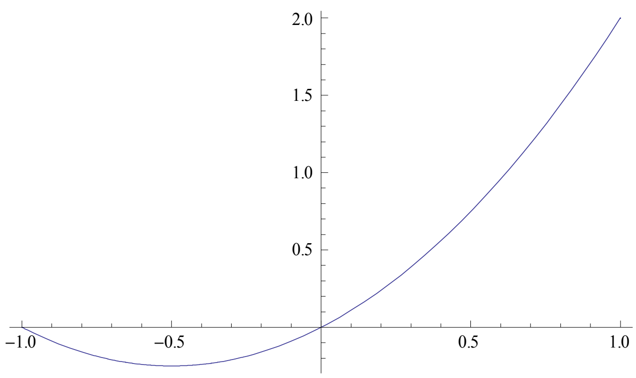


Şekil 1.10. Genişleme prensibi uygulandıktan sonra bulunan y bulanık kümesi

Örnek 1.4.4.



Şekil 1.11.(a) x bulanık kümesi



Şekil 1.11.(b) y dönüşümü

$$\mu_x(x) = \begin{cases} x+1 & ; -1 \le x < 0 \\ 1-x & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 \;\; ; \;\; x < -1 \; ve \; x > 1 \end{cases} \qquad\qquad y = f(x) = x^2 + x\,, x \in [-1,\ 1]$$

x bulanık kümesi ve f fonksiyonu (dönüşümü) verilmiştir. Buna göre $\mu_y(y)$=?

Yani f dönüşümünün üyelik fonksiyonunu ve üyelik fonksiyonunun grafiğini bulalım.

Çözüm: Öncelikle $\mu_x(x) = \begin{cases} x+1 & ; -1 \le x < 0 \\ 1-x & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 \;\; ; \;\; x < -1 \; ve \; x > 1 \end{cases}$ ifadesinin $max(0, 1-|x|)$ ifadesine eşit olduğu görülebilir. Böylece x'in üyelik fonksiyonu yerine işlem kolaylığı açısından $max(0, 1-|x|)$ fonksiyonunu kullanabiliriz.

Dönüşümün üyelik fonksiyonunu Zadeh'nin genişleme prensibi ile bulacağız.

Genişleme prensibi $\mu_y(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\epsilon X, f(x)=y} \mu_x(x) & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$ idi.

$\forall y \in [\frac{-1}{4},\ 2]$ için $\mu_y(y)$'yi bulacağız. $y \in \left[\frac{-1}{4},\ 0\right] \cup (0,\ 2]$ yazılabilir. Önce $y \in (0,\ 2]$ için $\mu_y(y)$'yi bulalım.

Fonksiyon $y \in (0,\ 2]$ aralığında birebirdir, o zaman tersini bulursak,

$f^{-1}(y) = x = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ olur , $y \in (0,\ 2]$ için $x \in (0,\ 1]$ dolayısıyla $f^{-1}(y) = x = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ alırız. Şimdi x' i, $max(0,\ 1-|x|)$ denkleminde yerine yazalım.

O zaman $y \in (0,\ 2]$ için $\mu_y(y) = 1 - \left|\sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right|$ olur.

$y \in \left[\frac{-1}{4},\ 0\right]$ için yani $x \in [-1{,}0]$ aralığında $\mu_y(y)$ bulalım. Fonksiyon bu aralıkta birebir değil onun için tersini bulduktan sonra "sup" operatörünü kullanmamız gerekir.

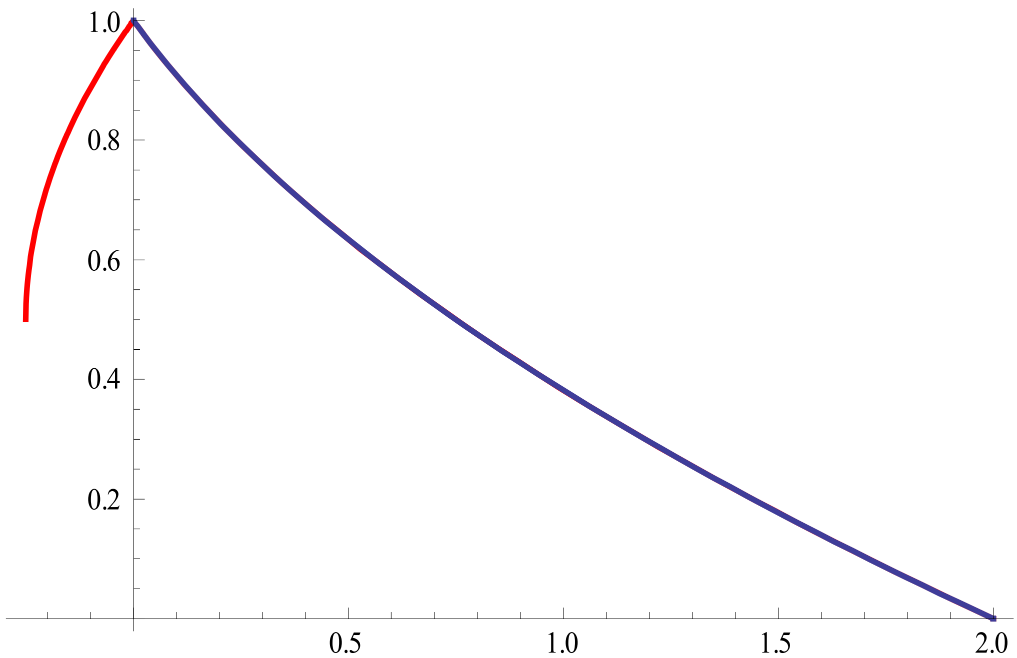
$f^{-1}(y) = x_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ yani $x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ ve $x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ olur.

$\mu(x_1) = 1 - \left|-\frac{1}{2} - \sqrt{y + \frac{1}{4}}\right|$, $\mu(x_2) = 1 - \left|-\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}\right|$ buradan $\mu(x_1) < \mu(x_2)$ olduğu görülür.

$$\max[\mu(x_1),\mu(x_2)] = \mu(x_2) = 1 - \left|-\frac{1}{2} + \sqrt{y+\frac{1}{4}}\right|$$

Böylece $\mu_y(y) = \begin{cases} 1 - \left|-\frac{1}{2} + \sqrt{y+\frac{1}{4}}\right|, \ y \in (0,\ 2] \\ 1 - \left|-\frac{1}{2} + \sqrt{y+\frac{1}{4}}\right|, \ y \in \left[\frac{-1}{4},\ 0\right] \end{cases}$ olur.

$\mu_y(y)$ grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.12. . y dönüşümüne genişleme prensibinin uygulanması

1.5. BULANIK SAYI KAVRAMI VE BULANIK SAYILARLA ARİTMETİK İŞLEMLER

$A(x): X \to [0\,,1]$ bir bulanık küme olmak üzere, eğer $A(x)$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bulanık sayı adını alır [5, 6, 10].

i. A konvekstir yani $A(\lambda r + (1-\lambda)s) \geq min[A(r),\ A(s)],\ \lambda \in [0,1]$ ve $r, s \in X$;

ii. A normaldir yani $\exists\ x_0 \in X\ için\ A(x_0) = 1$;

iii. A üstten parçalı süreklidir yani $\forall x_0 \in X$ için $A(x_0) \geq \lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} A(x)$

iv. $[A]^0 = \overline{dest(A)} = \{\overline{x \in R \mid A(x) \geq 0}\}$ kompakt bir kümedir ;

Yukarıdaki koşulları sağlayan tüm bulanık kümeler uzayı $\mathcal{F}$ ile gösterilsin.

$\forall\, u, v \in \mathcal{F}$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere $u \oplus v$ toplamı $[u \oplus v]^{\alpha} = [u]^{\alpha} + [v]^{\alpha}$ şeklinde ve $\lambda \odot u$ çarpımı da $[\lambda \odot u]^{\alpha} = \lambda [u]^{\alpha}$ şeklinde tanımlanır ek olarak $u \oplus v = v \oplus u$, $\lambda \odot u = u \odot \lambda$ eşitlikleri sağlanır [5]. Ayrıca $u \in \mathcal{F}$ ise u'nun α-kesit kümesi $\forall \alpha \in [0,\ 1]$ için $[u]^{\alpha} = [\underline{u}^{\alpha},\ \overline{u}^{\alpha}]$ şeklinde gösterilebilir [10].

Şimdi $[u]^{\alpha} = [\underline{u}^{\alpha},\ \overline{u}^{\alpha}]$ ve $[v]^{\alpha} = [\underline{v}^{\alpha},\ \overline{v}^{\alpha}]$ olsun.

$$D: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to R_{+} \cup \{0\}$$

olmak üzere, iki bulanık sayı arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$D(u, v) = sup_{\alpha \in [0\,,1]} \max\{|\underline{u}^{\alpha} - \underline{v}^{\alpha},\ \overline{u}^{\alpha} - \overline{v}^{\alpha}|\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

D, aşağıdaki özellikleri sağlayıp $(\mathcal{F}, D)$ tam metrik uzaydır [20, 21].

$$D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u, v), \forall\, u, v, w \in \mathcal{F}$$

$$D(k \odot u, k \odot v) = |k| D(u, v), \forall\, k \in R, u, v \in \mathcal{F}$$

$$D(u \oplus v, w \oplus e) \leq D(u, w) + D(v, e), \forall\, u, v, w, e \in \mathcal{F}$$

Teorem 1.5.1. (Bkz. [12])

i. Eğer $\tilde{0} = \chi_{\{0\}}$ şeklinde gösterirsek $\tilde{0}$, $\oplus$ işlemine göre etkisiz elemandır.
   Yani $\forall\, u \in \mathcal{F}\ için\ u \oplus \tilde{0} = \tilde{0} \oplus u = u$

ii. $\tilde{0}$'a göre hiçbir $u \in \mathcal{F} \backslash R$ nin tersi yoktur ($\oplus$ işlemine göre).

iii. $a, b \in R,\ a,\ b \geq 0$ veya $a,\ b \leq 0$ ve $\forall u \in \mathcal{F}$ için $(a + b) \odot u = a \odot u \oplus b \odot u$ dur.

iv. $\forall u, v \in \mathcal{F}$ ve $\forall \lambda \in R$ için $\lambda \odot (u \oplus v) = \lambda \odot u \oplus\ \lambda \odot v$

v. $\forall u \in \mathcal{F}$ ve $\forall \lambda,\ \mu \in R$ için $\lambda \odot (\mu \odot v) = (\lambda . \mu) \odot u$

İspat:

i. $\tilde{0}$ ve $\oplus$ işleminin tanımından dolayı ispat görülüyor.

ii. $u \in \mathcal{F}$ ve $u \oplus v = \tilde{0}$ olacak şekilde bir $v \in \mathcal{F}$ olduğunu varsayalım. O zaman $[u]^{\alpha} + [v]^{\alpha} = [0]^{\alpha},\ \forall \alpha \in [0,\ 1]$ olur. Buradan $[\underline{u}^{\alpha},\ \overline{u}^{\alpha}] + [\underline{v}^{\alpha},\ \overline{v}^{\alpha}] = [0,\ 0] = \{0\}$ ve $\underline{u}^{\alpha} + \underline{v}^{\alpha} = 0,\ \overline{u}^{\alpha} + \overline{v}^{\alpha} = 0,\ \forall \alpha \in [0,\ 1]$. $\underline{u}^{\alpha} \leq \overline{u}^{\alpha}$ olduğundan bir önceki eşitliklerden $\overline{v}^{\alpha} \leq \underline{v}^{\alpha}$ çıkar. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $u \oplus v = \tilde{0}$ olacak şekilde bir $v \in \mathcal{F}$ sayısı yoktur.

iii. $[u]^\alpha = [\underline{u}^\alpha,\ \overline{u}^\alpha]$ ve $a,\ b \geq 0$ olsun.

$$(a+b).[\underline{u}^\alpha, \overline{u}^\alpha] = [(a+b)\underline{u}^\alpha, (a+b)\overline{u}^\alpha]$$
$$= [a.\underline{u}^\alpha + b.\underline{u}^\alpha, a.\overline{u}^\alpha + b.\overline{u}^\alpha]$$
$$= [a.\underline{u}^\alpha + a.\overline{u}^\alpha, b.\underline{u}^\alpha + b.\overline{u}^\alpha] = a.[\underline{u}^\alpha, \overline{u}^\alpha] + b.[\underline{u}^\alpha, \overline{u}^\alpha],$$
$$\forall\alpha \in [0\,,1]$$

benzer şekilde $a,\ b \leq 0$ için ispat yapılır.

iv. $\odot$ ve $\oplus$ işlemlerinin tanımından, $\forall\alpha \in [0,\ 1]$ için

$$[\lambda\odot(u \oplus v)]^\alpha = \lambda.[u \oplus v]^\alpha = \lambda([u]^\alpha + [v]^\alpha) = \lambda([\underline{u}^\alpha,\ \overline{u}^\alpha] + [\underline{v}^\alpha,\ \overline{v}^\alpha])$$
$$= \lambda([\underline{u}^\alpha + \underline{v}^\alpha,\ \overline{u}^\alpha + \overline{v}^\alpha])$$

$\lambda \geq 0\ olursa$

$$[\lambda\odot(u \oplus v)]^\alpha = [\lambda\underline{u}^\alpha + \lambda\underline{v}^\alpha, \lambda\overline{u}^\alpha + \lambda\overline{v}^\alpha] = [\lambda\underline{u}^\alpha, \lambda\overline{u}^\alpha] + [\lambda\underline{v}^\alpha, \lambda\overline{v}^\alpha]$$
$$= \lambda[u]^\alpha + \lambda[v]^\alpha$$

$\lambda \leq 0\ olursa$

$$[\lambda\odot(u \oplus v)]^\alpha = [\lambda\overline{u}^\alpha + \lambda\overline{v}^\alpha, \lambda\underline{u}^\alpha + \lambda\underline{v}^\alpha] = [\lambda\overline{u}^\alpha, \lambda\underline{u}^\alpha] + [\lambda\overline{v}^\alpha, \lambda\underline{v}^\alpha]$$
$$= \lambda[u]^\alpha + \lambda[v]^\alpha$$

v. $\odot$ işleminin tanımından, $\forall\alpha \in [0\,,1]$ için

$[\lambda\odot(\mu\odot v)]^\alpha = \lambda[\mu\odot v]^\alpha = \lambda.\mu[v]^\alpha$ elde edilir.

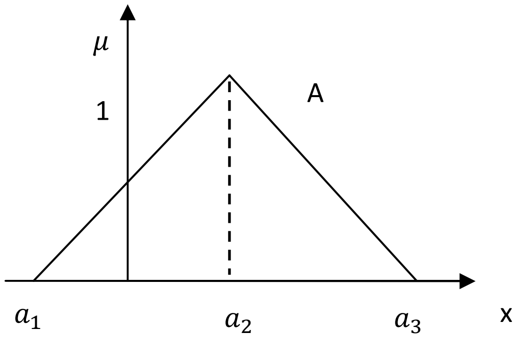
Tanım 1.5.1 (Negatif Bulanık Sayı) μ bulanık sayısının α-kesit kümesi $\alpha = 0$ için $[\mu]^0 = [\mu^-, \mu^+]$ olsun. Eğer $\mu^+ < 0$ ise μ bulanık sayısı negatiftir [23].

Tanım 1.5.2 (Pozitif Bulanık Sayı) μ bulanık sayısının α-kesit kümesi $\alpha = 0$ için $[\mu]^0 = [\mu^-, \mu^+]$ olsun. Eğer $\mu^- > 0$ ise μ bulanık sayısı pozitiftir [23].

Şimdi en çok bilinen bulanık sayıları ve özelliklerini tanıtalım.

1.5.1. Üçgensel Bulanık Sayı

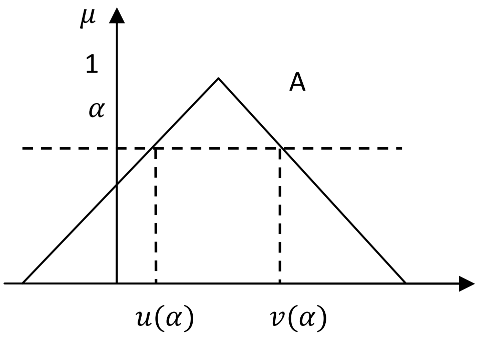
Üç noktayla ifade edilebilen bir bulanık sayıdır. $A = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ veya $A = (a_1/a_2/a_3)$. Böyle bir bulanık sayının üyelik fonksiyonu ve grafiği aşağıdaki gibidir [7].



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & ; a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & ; a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & ; x > a_3 \end{cases}$$

Şekil 1.13.(a) Üçgensel $A = (a_1/a_2/a_3)$ bulanık sayısı

Üyelik fonksiyonu yardımıyla α-kesit kümesini aşağıdaki gibi bulabiliriz. ($\alpha \in [0,\ 1]$)



$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha \Rightarrow x = \alpha.(a_2 - a_1) + a_1$$

$$\frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} = \alpha \Rightarrow x = a_3 - \alpha.(a_3 - a_2)$$

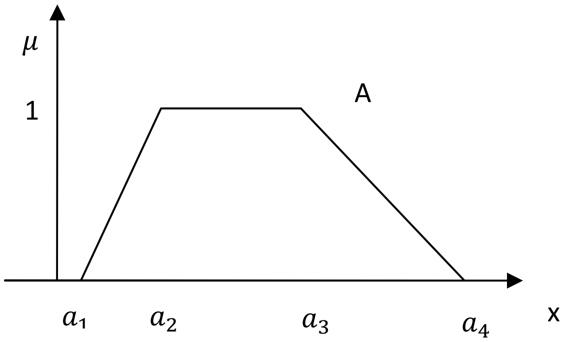
$$[A]^\alpha = [u(\alpha), v(\alpha)]$$

$$[A]^\alpha = [\alpha.(a_2 - a_1) + a_1,\ \ a_3 - \alpha.(a_3 - a_2)]$$

Şekil 1.13.(b) Üçgensel A bulanık sayısının α-kesit kümesi

1.5.2. Yamuk Bulanık Sayı

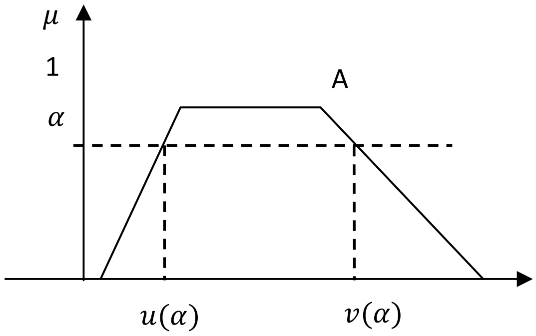
Yamuk bulanık A sayısını $A = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ şeklinde ifade edebiliriz [7].



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & ; a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & ; a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & ; a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & ; x > a_4 \end{cases}$$

Şekil 1.14.(a) Yamuk $A = (a_1/a_2/a_3/a_4)$ bulanık sayısı

Üyelik fonksiyonu yardımıyla α-kesit kümesini aşağıdaki gibi bulabiliriz. ($\alpha \in [0,\ 1]$)



$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha \Rightarrow x = \ \alpha.(a_2 - a_1) + a_1$$

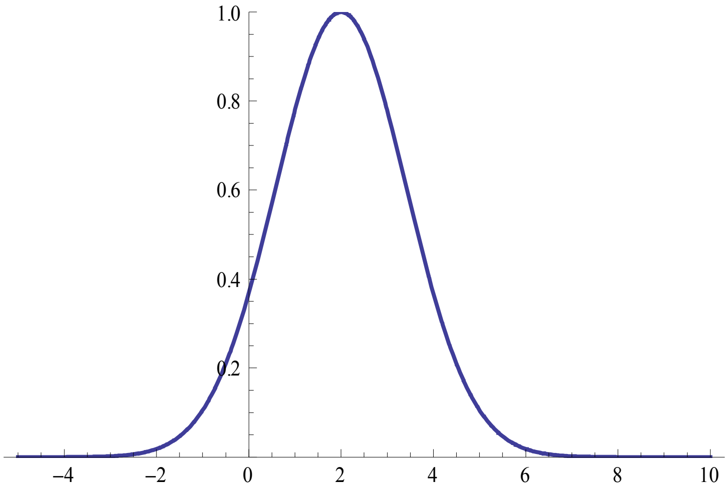
$$\frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} = \alpha \Rightarrow x = a_4 - \alpha.(a_4 - a_3)$$

$$[A]^\alpha = [\,u(\alpha), v(\alpha)]$$

$$[A]^\alpha = [\alpha.(a_2 - a_1) + a_1,\ a_4 - \alpha.(a_4 - a_3)]$$

Şekil 1.14.(b) Yamuk A bulanık sayısının α-kesit kümesi

1.5.3. Gauss Bulanık Sayısı



Gauss sayısının üyelik fonksiyonu

$$\mu(x) = exp\left(-\frac{(x - m)^2}{\sigma^2}\right)$$

[8]. Burada m ortalama, σ standart sapmadır. Şekildeki grafikte $m = \sigma = 2$ dir.

Şekil 1.15. Gauss tipinde bulanık sayı

1.5.4. Aralık Aritmetiği Yardımıyla Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemler

Bir bulanık sayının α-kesit kümesini almak demek aslında o sayıyı bir aralık olarak düşünmektir. Dolayısıyla aralıklar üzerinde yapılan aritmetik işlemleri bulanık sayının α-kesit kümesi üzerinde de uygulayabiliriz.

Şimdi aralıklar üzerinde yapılan temel aritmetik işlemleri hatırlatalım, daha sonra bir örnekle bu işlemleri iki bulanık sayı üzerinde gösterelim.

a) $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$

b) $[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$

c) $[a,b]\times[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]$

d) $[a,b]\div[c,d]=[\min(a\div c,\ a\div d,\ b\div c,\ b\div d),\max(a\div c,a\div d,\ b\div c,\ b\div d)]$

e) $[a,b]^{-1}=[\min(1\div a,\ 1\div b),\ \max(1\div a,\ 1\div b)]$

Örnek 1.5.4.1.

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{4} & ;-1\leq x<3\\ \dfrac{5-x}{2} & ;\quad 3\leq x\leq 5\\ 0\ ;\ x<-1\ ve\ x>5\end{cases}\qquad \mu_B(x)=\begin{cases}x+3 & ;-3\leq x<-2\\ \dfrac{3-x}{5} & ;\quad -2\leq x\leq 3\\ 0\ ;\ x<-3\ ve\ x>3\end{cases}$$

Üyelik fonksiyonları yardımıyla α-kesit kümelerini bulalım.

$[A]^{\alpha}=[4\alpha-1,\ 5-2\alpha]$ ve $[B]^{\alpha}=[\alpha-3,\ 3-5\alpha],\ \alpha\in[0,\ 1]$

$\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}=[A\oplus B]^{\alpha}=[A]^{\alpha}+[B]^{\alpha}=[4\alpha-1,\ \ 5-2\alpha]+[\alpha-3,\ \ 3-5\alpha]$

$=[5\alpha-4,\ \ 8-7\alpha]$

$\alpha=0$ için $[5\alpha-4,\ 8-7\alpha]=[-4,\ 8]$ ve $\alpha=1$ için $[5\alpha-4,\ 8-7\alpha]=[1,\ 1]$

Dolayısıyla $dest(A\oplus B)=(-4,\ 8)$ ve $çek(A\oplus B)=1$

$\boldsymbol{A}(-)\boldsymbol{B}=[A(-)B]^{\alpha}=[A]^{\alpha}-[B]^{\alpha}=[4\alpha-1,\ \ 5-2\alpha]-[\alpha-3,\ \ 3-5\alpha]$

$=[9\alpha-4,\ \ 8-3\alpha]$

$\alpha=0$ için $[9\alpha-4,\ 8-3\alpha]=[-4,\ 8]$ ve $\alpha=1$ için $[9\alpha-4,\ 8-3\alpha]=[5,\ 5]$

Dolayısıyla $dest(A(-)B)=(-4,\ 8)$ ve $çek(A(-)B)=5$

$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=[A]^{\alpha}.[B]^{\alpha}=[4\alpha-1,\ \ 5-2\alpha].[\alpha-3,\ \ 3-5\alpha]$

$\alpha\in[0,\ 0.6]$ için $[A]^{\alpha}.[B]^{\alpha}$ $minimum$ ve $maksimumu$

$$[-2\alpha^2+11\alpha-15,\ \ 10\alpha^2-31\alpha+15]$$

$\alpha\in[0.6,\ \ 1]$ için $[A]^{\alpha}.[B]^{\alpha}$ $minimum$ ve $maksimumu$

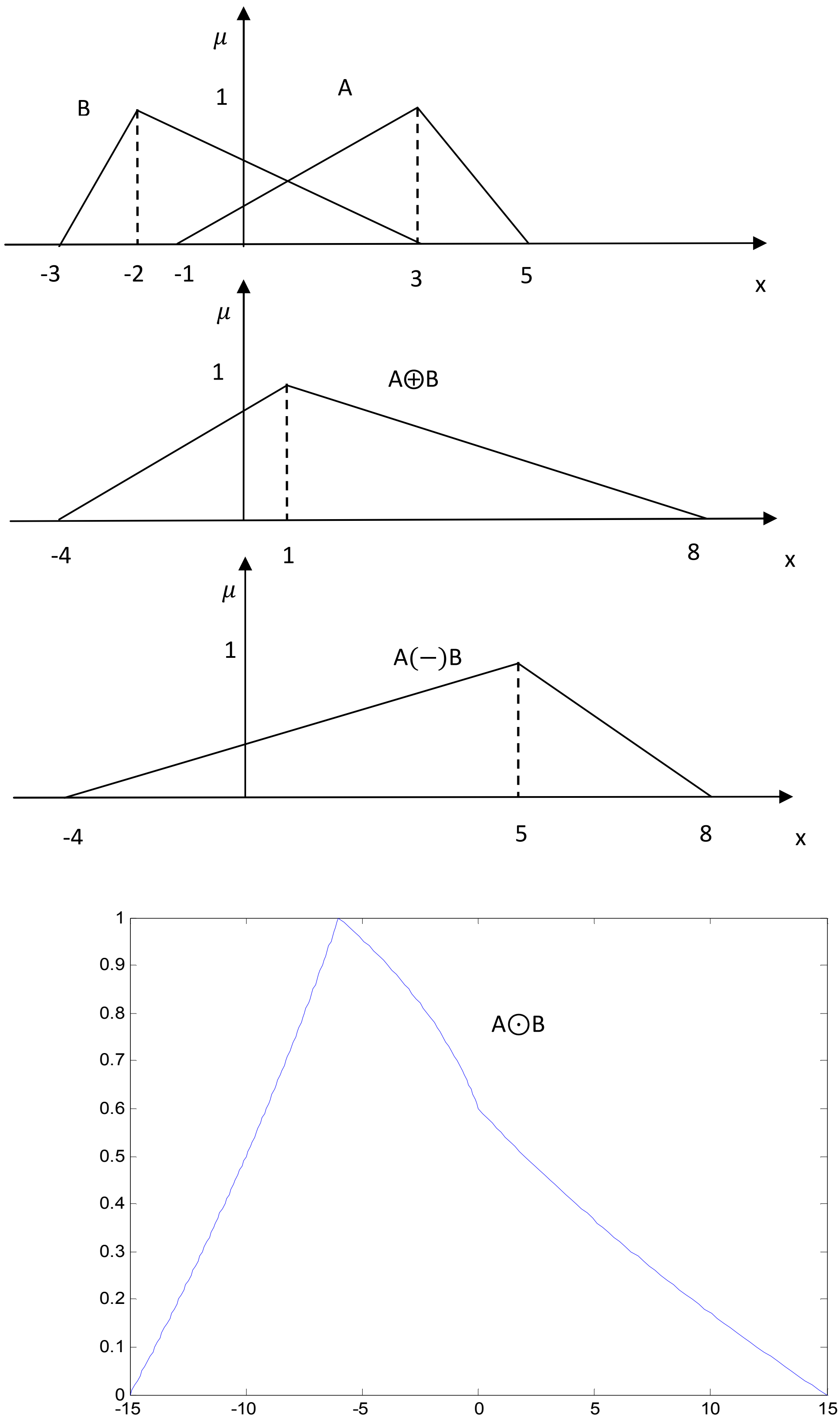
$$[-2\alpha^2+11\alpha-15\ ,-20\alpha^2+17\alpha-3]$$

$\alpha=0$ için $[-2\alpha^2+11\alpha-15,\ \ 10\alpha^2-31\alpha+15]=[-15,\ \ 15]$ ve

$\alpha=1$ için $[-2\alpha^2+11\alpha-15,\ -20\alpha^2+17\alpha-3]=[-6,\ -6]=-6$

Dolayısıyla $dest(A\odot B)=[-15,\ 15]$ ve $çek(A\odot B)=-6$

Şimdi bu işlemleri grafikler üzerinde görelim.



Şekil 1.16. Bulanık sayılarla aritmetik işlemler

Üçgensel bulanık sayıların toplamı ya da farkı yine bir üçgensel bulanık sayıdır. Ancak çarpımları veya bölümleri üçgensel olmayabilir. Örnek 1.5.4.1. de bunu görebiliriz. Üçgensel sayıların toplamını ya da farkını $A = (a_1/a_2/a_3)$ ve $B = (b_1/b_2/b_3)$ olmak üzere;

$A \oplus B = (a_1 + b_1/a_2 + b_2/a_3 + b_3)$, $A(-)B = (a_1 - b_3/a_2 - b_2/a_3 - b_1)$

şeklinde de bulabiliriz [7].

Tekrar örnek 1.5.4.1.'e bakarsak

$A = (-1/3/5)$ ve $B = (-3/-2/3)$ ise $A \oplus B = (-4\ /\ 1\ /\ 8)$ dir. Bu, α-kesit yardımıyla bulduğumuz sonuçla aynıdır.

1.5.5. Genişleme Prensibi Yardımıyla Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemler

$\vee := sup$(veya max) ve $\wedge := min$ olmak üzere,

Toplama

$$\mu_{A \oplus B}(z) = \underset{z=x+y}{\vee}(\ \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\ )$$

Çıkarma

$$\mu_{A(-)B}(z) = \underset{z=x-y}{\vee}(\ \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\ )$$

Çarpma

$$\mu_{A \odot B}(z) = \underset{z=x.y}{\vee}(\ \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\ )$$

Bölme

$$\mu_{A \oslash B}(z) = \underset{z=x/y}{\vee}(\ \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\ )$$

Sonuç olarak $*$ işlemi, $\{+,\ -,\ /,\ \times\}$ işlemlerinden biri olmak üzere, A ve B sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bulanık sayı ise bu iki sayı arasındaki herhangi bir aritmetik işlem $\mu_{A*B}(z) = \underset{z=x*y}{\vee}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$ şeklinde tanımlanır [7, 19, 22].

Örnek 1.5.5.1. ([19])

$U_1 = U_2 = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10\}$ olmak üzere, $A = 2 = \left\{\frac{0.6}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}\right\}$ ve $B = 6 = \left\{\frac{0.8}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.7}{7}\right\}$ sırasıyla U_1 ve U_2 kümeleri üzerinde tanımlı bulanık sayılar olsun. Buna göre $A \odot B$'yi yani *"yaklaşık olarak 2"* $\times$ "*yaklaşık olarak* 6" yı bulalım.

Çözüm:

$$2 \times 6 = \left\{\frac{0.6}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}\right\} \times \left\{\frac{0.8}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.7}{7}\right\}$$

$$= \left\{ \frac{\min(0.6\,,\ 0.8)}{1 \times 5} + \frac{\min(0.6\,,1)}{1 \times 6} + \frac{\min(0.6\,,0.7)}{1 \times 7} + \frac{\min(1\,,0.8)}{2 \times 5} + \frac{\min(1\,,1)}{2 \times 6} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{\min(0.8\,,0.7)}{3 \times 7} \right\}$$
$$= \left\{ \frac{0.6}{5} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.6}{7} + \frac{0.8}{10} + \frac{1}{12} + \frac{0.7}{14} + \frac{0.8}{15} + \frac{0.8}{18} + \frac{0.7}{21} \right\}$$

Bu örnekte max operatörünü kullanmaya gerek kalmadı çünkü çarpılan sayıların sonucu hep farklıydı. Mesela $1 \times 5 = 5,\ 2 \times 6 = 12$ gibi...

Örnek 1.5.5.2. ([19])

$A = \left\{ \frac{0.2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.7}{4} \right\}$ ve $B = \left\{ \frac{0.5}{1} + \frac{1}{2} \right\}$ olsun. Buna göre $A \odot B'$ yi bulalım.

Çözüm:

Genişleme prensibini kullanırsak;

$$A \odot B = \left\{ \frac{\min(0.2,\ 0.5)}{1 \times 1} + \max\left[\frac{\min(0.2,\ 1)}{1 \times 2} + \frac{\min(1,\ 0.5)}{2 \times 1} \right] \right.$$
$$\left. + \max\left[\frac{\min(1,\ 1)}{2 \times 2} + \frac{\min(0.7,\ 0.5)}{4 \times 1} \right] + \frac{\min(0.7,\ 1)}{4 \times 2} \right\}$$
$$= \left\{ \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{8} \right\}$$

Bu örnekte çarpımları 2'yi veren $2 \times 1,\ 1 \times 2$ aynı şekilde çarpımları 4'ü veren $2 \times 2,\ 4 \times 1$ olduğundan max operatörünü kullandık.

BÖLÜM 2

2. BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Literatürde bulanık diferensiyel denklemlerin çözümü için en sık kullanılan üç yöntem vardır. Bu yöntemler Hukuhara türevi ve genelleştirilmiş türev, genişleme prensibi ve diferensiyel içermeler yöntemleridir. Biz genişleme prensibi, Hukuhara türevi ve genelleştirilmiş türev yöntemleri üzerinde duracağız.

2.1. GENİŞLEME PRENSİBİ

$$X'(t) = f\big(t, X(t)\big), \qquad X(0) = X_0 \qquad T = (a, b) \tag{2.1.1}$$

Bulanık başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

X_0 başlangıç değeri bir bulanık sayı ve $f: [0,\ T] \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ fonksiyonu $g: [0,\ T] \times U \to R^n,\ U \subset R^n$ gibi sürekli bir fonksiyondan Zadeh'nin genişleme prensibi ile elde edilmiş olsun.

Genişleme prensibi yöntemiyle diferensiyel denklemi çözerken (2.1.1) problemini klasik bir başlangıç değer problemi olarak düşünüp çözüyoruz. Daha sonra bulduğumuz çözüme Zadeh'nin genişleme prensibini uygulayarak bulanık çözümü buluyoruz [28, 29].

Şimdi (2.1.1) problemini bilinen klasik başlangıç değer problemi gibi düşünürsek

$$x'(t) = g\big(t, x(t)\big), \qquad x(0) = c \tag{2.1.2}$$

elde ederiz.

Varsayalım ki (2.1.2) probleminin çözümü $x(t, c)$ olsun. O zaman $x(t, c)$ çözümüne c parametresine göre Zadeh'nin genişleme prensibini uygularsak her t değeri için $x(t) = \tilde{x}(t, c)$ bulanık çözümünü bulabiliriz.

Örnek 2.1.1 ([28])

$\lambda > 0$ ve C, destek noktaları $[-a,\ a]$ olan simetrik üçgensel bir bulanık sayı olmak üzere,

Bulanık Malthus problemini göz önüne alalım.

$$X' = -\lambda \odot X(t), \qquad X(0) = C \tag{2.1.3}$$

Çözüm:

Önce C nin α-kesit kümesini bulalım.

$[C]^{\alpha} = [-a(1-\alpha),\ a(1-\alpha)] = (1-\alpha)[-a,\ a]$ olur.

Şimdi (2.1.3) problemini bir klasik başlangıç değer problemi olarak düşünüp çözelim. Daha sonra bulduğumuz çözüme Zadeh'nin genişleme prensibini uygulayarak bulanık çözümü bulalım.

$$x' = -\lambda x, \qquad x(0) = c \tag{2.1.4}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\lambda dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -\lambda dt \Rightarrow lnx = -\lambda t + lnc_1 \Rightarrow x(t) = c_1\, e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow x(0) = c_1 e^{-\lambda.0} = c$$

yani $x(t,c) = ce^{-\lambda t}$ olur. Şimdi çözüme c parametresine göre Zadeh'nin genişleme prensibini uygularsak, çözümün üyelik fonksiyonunu

$$\mu_{x(t)}(x) = \begin{cases} \frac{x.e^{\lambda t}}{a} + 1\,;\ -a.e^{-\lambda t} \le x < 0 \\ 1 - \frac{x.e^{\lambda t}}{a}\ ;0 \le x \le a.e^{-\lambda t} \end{cases}$$ şeklinde buluruz.

Çözümün α-kesit kümesi de aşağıdaki gibi olur.

$$[x(t)]^{\alpha} = \left[-a(1-\alpha)e^{-\lambda t}, a(1-\alpha)e^{-\lambda t}\right]$$

2.2. HUKUHARA TÜREVİ VE GÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV

Bulanık değerli fonksiyonların türevi konusu ilk olarak Puri ve Ralescu tarafından çalışılmıştır [1]. Onlar küme değerli fonksiyonlardaki Hukuhara türevini genelleştirip bulanık fonksiyonlara genişlettiler. Nitekim Kaleva Hukuhara türevini kullanarak bulanık diferensiyel denklemler teorisini geliştirmeye başlamıştır [2].

Türev tanımını vermeden önce kısaca bulanık fonksiyonların ölçülebilirliği ve integrallenebilirliği ile ilgili birkaç özellik verelim.

$\mathcal{P}_K(R^n)$, R^n in boş olmayan kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi olsun.

$T = [a,\ b] \subset R$ kompakt bir aralık olsun. Eğer $\forall \alpha \in [0,\ 1]$ için $F_{\alpha}(t) = [F(t)]^{\alpha}: T \to \mathcal{P}_K(R^n)$ Lebesgue ölçülebilirse $F: T \to \mathcal{F}$ fonksiyonuna güçlü ölçülebilirdir denir [2].

Eğer $\forall x \in F_0(t)$ için $\|x\| \le h(t)$ olacak şekilde integrallenebilir bir h fonksiyonu varsa $F: T \to \mathcal{F}$ fonksiyonuna sınırlı integrallenebilirdir denir [2].

Tanım 2.2.1. ([2]) $F: T \to \mathcal{F}$ olsun. T üzerinde F fonksiyonunun integrali $\int_T F(t)\,dt$ şeklinde gösterilir ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\left[\int_T F(t)dt\right]^{\alpha} = \int_T F_\alpha(t)\,dt$$

$$= \left\{\int_T f(t)\,dt \mid f: T \to R^n\,, F_\alpha \; için\; ölçülebilir\; bir\; seçimdir.\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Güçlü ölçülebilir ve sınırlı integrallenebilir bir $F: T \to \mathcal{F}$ fonksiyonuna, eğer $\int_T F(t)\,dt \in \mathcal{F}$ ise T üzerinde integrallenebilirdir denir.

$F: T \to \mathcal{F}$ fonksiyonu integrallenebilirse $\int F$ fonksiyonu $\alpha - kesit$lerin integrallenmesiyle elde edilir. Yani $[F(t)]^\alpha = [\gamma^\alpha,\ \mu^\alpha]$ ise $\forall \alpha \in [0\,,1]$ için

$$[\textstyle\int F]^\alpha = [\int \gamma^\alpha\,, \int \mu^\alpha] \tag{2.2.1}$$

dir.

Tanım 2.2.2. (H-Farkı, [1]**)** $\mathcal{F}$, konveks, normal ve kompakt bulanık kümelerin ailesi olmak üzere $\upsilon, v \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $u = v \oplus w$ olacak şekilde bir $w \in \mathcal{F}$ sayısı varsa bu sayıya $u\ ve\ v$ nin H-farkı denir ve $u \ominus v$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.3. (Hukuhara Türevi, [1]**)** $F: (a, b) \to \mathcal{F}\ ve\ t_0 \epsilon\ (a, b)$ olsun. Eğer $\forall\, h\ > 0$ için $F(t_0 + h) \ominus F(t_0),\ F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ var ve $\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h)\ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0)\ominus F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$ ise $F,\ t_0$'da türevlidir. Ancak bu türev tanımı çok kısıtlayıcıdır. Örneğin *Bede B, Gal S.* [5, 6] c bir bulanık sayı ve $g: [a, b] \to R^+$ olmak üzere $g'(t) < 0$ iken $F(t) = c \odot g(t)$ fonksiyonunun Hukuhara türevli olmadığını göstermişlerdir. Buna ek olarak bu türev tanımı dikkate alınarak çözülen bir başlangıç değer probleminin çözümünün üyelik fonksiyonunun desteği, t arttıkça her zaman sınırlanamayacağı görülmüştür. Bu nedenle bulanık fonksiyonlar için genelleştirilmiş türev tanımı geliştirildi.

Tanım 2.2.4. (Güçlü Genelleştirilmiş Türev, [5, 6]**)**
$F: (a, b) \to \mathcal{F}$ ve $t_0 \epsilon\ (a, b)$ olsun. Eğer

i. $\forall h > 0$ için $F(t_0+h) \ominus F(t_0),\ F(t_0) \ominus F(t_0-h)$ var ve

$\lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0+h)\ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0)\ominus F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$ ise $F,\ t_0$'da türevlidir. Ya da

ii. $\forall h > 0$ için $F(t_0) \ominus F(t_0+h),\ F(t_0-h) \ominus F(t_0)$ var ve

$\lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0)\ominus F(t_0+h)}{(-h)} = \lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0-h)\ominus F(t_0)}{(-h)} = F'(t_0)$ ise $F,\ t_0$'da türevlidir. Ya da

iii. $\forall h > 0$ için $F(t_0+h) \ominus F(t_0),\ F(t_0-h) \ominus F(t_0)$ var ve

$\lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0+h)\ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0-h)\ominus F(t_0)}{(-h)} = F'(t_0)$ ise $F,\ t_0$'da türevlidir. Ya da

iv. $\forall h > 0$ için $F(t_0) \ominus F(t_0+h),\ F(t_0) \ominus F(t_0-h)$ var ve

$\lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0)\ominus F(t_0+h)}{(-h)} = \lim_{h\searrow 0} \frac{F(t_0)\ominus F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$ ise $F,\ t_0$'da türevlidir.

Dikkat edersek tanım 2.2.4 (i) deki türev tanımı Hukuhara türevinin tanımı ile çakışıyor. Yani aslında genelleştirilmiş türev tanımı Hukuhara türevinin genelleştirilmişidir.

Teorem 2.2.1. ([5]) $F:(a,b) \to \mathcal{F}$ fonksiyonu tanım 2.2.4 (iii) ya da tanım 2.2.4 (iv) anlamında türevlenebilir olsun. O zaman $\forall t_0 \in (a,b)\ için\ F'(t_0) \in R$ dir.

İspat: F, tanım 2.2.4 (iii) anlamında türevlenebilir olsun. O zaman $\forall h > 0$ için $F(t_0+h) \ominus F(t_0)$ ve $F(t_0-h) \ominus F(t_0)$ H-farkları vardır. Dolayısıyla

$$F(t_0+h) = F(t_0) \oplus u(t_0,h) \tag{2.2.2}$$

$$F(t_0-h) = F(t_0) \oplus v(t_0,h) \tag{2.2.3}$$

Şimdi (2.2.3)'de $t_0 = t_0 + h$ alırsak

$$F(t_0) = F(t_0+h) \oplus v(t_0+h,h) \tag{2.2.4}$$

Son bulduğumuz ifadede $F(t_0+h)$ yerine (2.2.2) denklemini yazarsak $F(t_0) = F(t_0) \oplus u(t_0,h) \oplus v(t_0+h,h)$ buluruz. Buradan $u(t_0,h) \oplus v(t_0+h,h) = \tilde{0}$ olur. Teorem 1.5.1.(ii)'den $h > 0$ için $u(t_0,h),\ v(t_0+h,h) \in R$ olur. Dolayısıyla $F'(t_0) = \lim\limits_{h\searrow 0} \frac{u(t_0,h)}{h} \in R$ dir.

Benzer ispat F, tanım 2.2.4 (iv) anlamında türevlenebilir iken de yapılabilir.

Tanım 2.2.5.

[4]'te tanım 2.2.4'e denk aşağıdaki tanım verilmiştir. Biz de bu çalışmada bu tanımı kullanacağız.

$F:(a,b) \to \mathcal{F}\ ve\ t_0 \epsilon\ (a,b)$ olsun. Eğer

(1) $\forall\, h > 0$ için $F(t_0+h) \ominus F(t_0),\ F(t_0) \ominus F(t_0-h)$ var ve

$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h)\ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0)\ominus F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$ ise $F,\ t_0$'da türevlidir. Ya da

(2) $\forall\, h < 0$ $için$ $F(t_0+h) \ominus F(t_0),\ F(t_0) \ominus F(t_0-h)$ var ve

$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(t_0+h)\ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(t_0)\ominus F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$ ise $F,\ t_0$'da türevlidir.

Hukuhara türevi ve güçlü genelleştirilmiş türev ile ilgili tanımları verdikten sonra bu türevlerin diferensiyel denklemlerin çözümünde nasıl kullanıldığına bakalım.

Teorem 2.2.2. ([4]) $F: T \to \mathcal{F}$ bir fonksiyon, $t \in T = (a, b)$ ve $\forall \alpha \in [0,\ 1]$ için $[F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t),\ g_\alpha(t)]$ olsun.

1. Eğer F, tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli ise $f_\alpha(t)$ ve $g_\alpha(t)$ fonksiyonları türevlidir ve
   $[F'(t)]^\alpha = [f'_\alpha(t),\ g'_\alpha(t)]$'dir.
2. Eğer F, tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli ise $f_\alpha(t)$ ve $g_\alpha(t)$ fonksiyonları türevlidir ve
   $[F'(t)]^\alpha = [g'_\alpha(t),\ f'_\alpha(t)]$'dir.

Bu teorem, bulanık diferensiyel denklemin çözümü için kullanılan temel yöntemdir.

İspat:

1.

$$[F(t+h) \ominus F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t+h) - f_\alpha(t),\ g_\alpha(t+h) - g_\alpha(t)]$$

her tarafı $1/h$ ile çarparsak,

$$\frac{[F(t+h) \ominus F(t)]^\alpha}{h} = \left[\frac{f_\alpha(t+h) - f_\alpha(t)}{h}, \frac{g_\alpha(t+h) - g_\alpha(t)}{h}\right]$$

elde ederiz. Aynı şekilde

$$\frac{[F(t) \ominus F(t-h)]^\alpha}{h} = \left[\frac{f_\alpha(t) - f_\alpha(t-h)}{h}, \frac{g_\alpha(t) - g_\alpha(t-h)}{h}\right]$$

elde edilir. Şimdi limit alırsak $[F'(t)]^\alpha = \left[f'_\alpha(t),\ g'_\alpha(t)\right]$ olur.

2.

$$[F(t+h) \ominus F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t+h) - f_\alpha(t),\ g_\alpha(t+h) - g_\alpha(t)]$$

her tarafı $1/h$ ile çarparsak,

$$\frac{[F(t+h) \ominus F(t)]^{\alpha}}{h} = \frac{1}{h}[f_{\alpha}(t+h) - f_{\alpha}(t),\ g_{\alpha}(t+h) - g_{\alpha}(t)]$$
$$= \left[\frac{g_{\alpha}(t+h) - g_{\alpha}(t)}{h}, \frac{f_{\alpha}(t+h) - f_{\alpha}(t)}{h}\right]$$

Elde edilir. Aynı şekilde

$$\frac{[F(t) \ominus F(t-h)]^{\alpha}}{h} = \frac{1}{h}[f_{\alpha}(t) - f_{\alpha}(t-h),\ g_{\alpha}(t) - g_{\alpha}(t-h)]$$
$$= \left[\frac{g_{\alpha}(t) - g_{\alpha}(t-h)}{h}, \frac{f_{\alpha}(t) - f_{\alpha}(t-h)}{h}\right]$$

Şimdi limit alırsak $[F'(t)]^{\alpha} = \left[g_{\alpha}^{'}(t),\ f_{\alpha}^{'}(t)\right]$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Birinci merteben bulanık başlangıç değer probleminin çözümü:

$$x'(t) = F\big(t, x(t)\big), \qquad x(0) = x_0 \tag{2.2.5}$$

Bulanık başlangıç değer problemi verilsin. $F: [0, a] \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ve x_0 bulanık bir sayı olmak üzere,

$[x(t)]^{\alpha} = [u_{\alpha}(t),\ v_{\alpha}(t)]$, $[x_0]^{\alpha} = [u_{\alpha}^0,\ v_{\alpha}^0]$ ve

$[F(t, x(t))]^{\alpha} = \left[f_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big), g_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big)\right]$ olsun. O zaman (2.2.5) denkleminin çözümü için iki alternatifimiz olur.

1- $x(t)$, tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli ise $[x'(t)]^{\alpha} = [u_{\alpha}'(t),\ v_{\alpha}'(t)]$ olur. Buradan aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{cases} u_{\alpha}'(t) = f_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big), & u_{\alpha}(0) = u_{\alpha}^0 \\ v_{\alpha}'(t) = g_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big), & v_{\alpha}(0) = v_{\alpha}^0 \end{cases}$$

Bu sistemi de u_{α} ve v_{α}'ya göre çözersek $\forall \alpha \in [0,\ 1]$ için bulanık bir çözüm olan $[x(t)]^{\alpha} = [u_{\alpha}(t),\ v_{\alpha}(t)]$'yi bulmuş oluruz. Burada elde edilen $u_{\alpha}(t)$ ile $v_{\alpha}(t)$ nin $u_{\alpha}(t) \leq v_{\alpha}(t)$ eşitsizliğini ve $u_{\alpha}'(t)$ ile $v_{\alpha}'(t)$'nin de $u_{\alpha}'(t) \leq v_{\alpha}'(t)$ eşitsizliğini sağladığına dikkat etmemiz gerekir.

2- $x(t)$, tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli ise $[x'(t)]^{\alpha} = [v_{\alpha}'(t), u_{\alpha}'(t)]$ olur. Buradan aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{cases} u_{\alpha}'(t) = g_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big), & u_{\alpha}(0) = u_{\alpha}^0 \\ v_{\alpha}'(t) = f_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big), & v_{\alpha}(0) = v_{\alpha}^0 \end{cases}$$

Yine bu sistemi de u_{α} ve v_{α}'ya göre çözersek $\forall \alpha \in [0,\ 1]$ için bulanık bir çözüm olan $[x(t)]^{\alpha} = [u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)]$'yi bulmuş oluruz. Yine $u_{\alpha}(t) \leq v_{\alpha}(t)$ ve $v_{\alpha}'(t) \leq u_{\alpha}'(t)$ olmasına dikkat etmemiz gerekir.

Örnek 2.2.1. ([4])

$\lambda > 0$ ve C, destek noktaları $[-a, a]$ olan simetrik üçgensel bir bulanık sayı olmak üzere, bulanık Malthus problemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} X'(t) = -\lambda \odot X(t) \\ X(0) = C \end{cases}$$

Çözüm:

C nin α-kesit kümesini bulalım.

$[C]^\alpha = [-a(1-\alpha),\ a(1-\alpha)] = (1-\alpha)[-a,\ a]$ olur.

Eğer $X(t)$'yi tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli düşünürsek aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$u'_\alpha(t) = -\lambda v_\alpha(t)\,, \qquad u_\alpha(0) = -a(1-\alpha)$$

$$v'_\alpha(t) = -\lambda u_\alpha(t)\,, \qquad v_\alpha(0) = a(1-\alpha)$$

Bu sistemi çözdüğümüzde $u_\alpha(t) = -a(1-\alpha)\, e^{\lambda t}$ ve $v_\alpha(t) = a(1-\alpha)\, e^{\lambda t}$ buluruz. $\forall\, t \geq 0$ için $u_\alpha(t) \leq v_\alpha(t)$ olduğu görülür. Dolaysıyla $X(t)$ çözümünün sol ve sağ sınırları geçerli olur. O zaman

$$[X(t)]^\alpha = \left[-a(1-\alpha)e^{\lambda t}, a(1-\alpha)\, e^{\lambda t}\right]$$

bulunur.

Şimdi eğer $X(t)$'yi tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli düşünürsek aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$u'_\alpha(t) = -\lambda u_\alpha(t)\,, \qquad u_\alpha(0) = -a(1-\alpha)$$

$$v'_\alpha(t) = -\lambda v_\alpha(t)\,, \qquad v_\alpha(0) = a(1-\alpha)$$

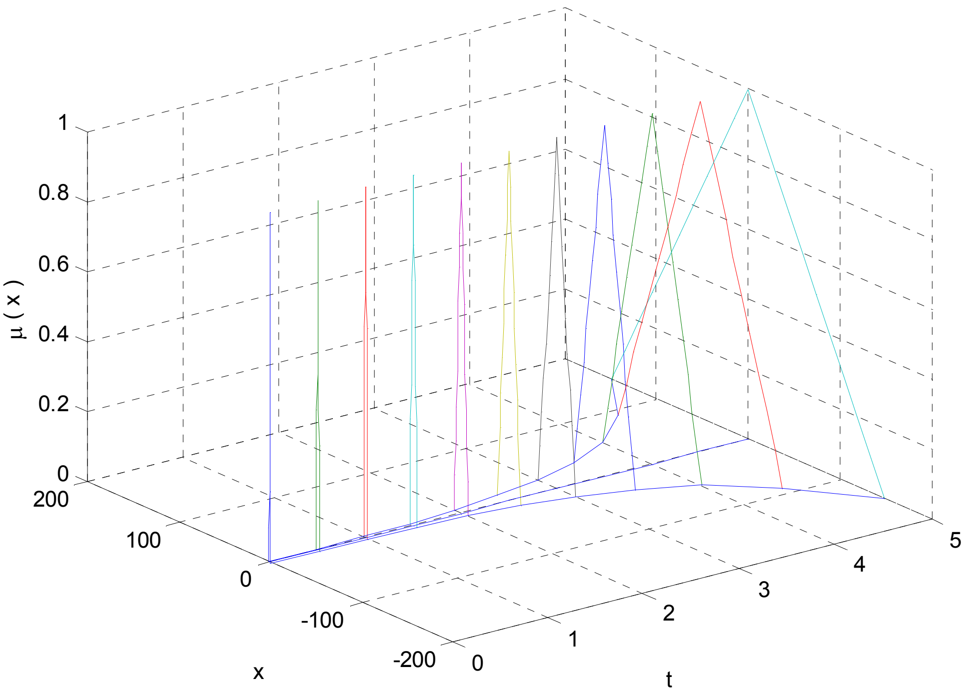
Bu sistemi çözdüğümüzde $u_\alpha(t) = -a(1-\alpha)\, e^{-\lambda t}$ ve $v_\alpha(t) = a(1-\alpha)\, e^{-\lambda t}$ buluruz.

Yine $\forall\, t \geq 0\ için\ u_\alpha(t) \leq v_\alpha(t)$ olduğu görülür. Dolaysıyla $X(t)$ çözümünün sol ve sağ sınırları geçerlidir. O zaman

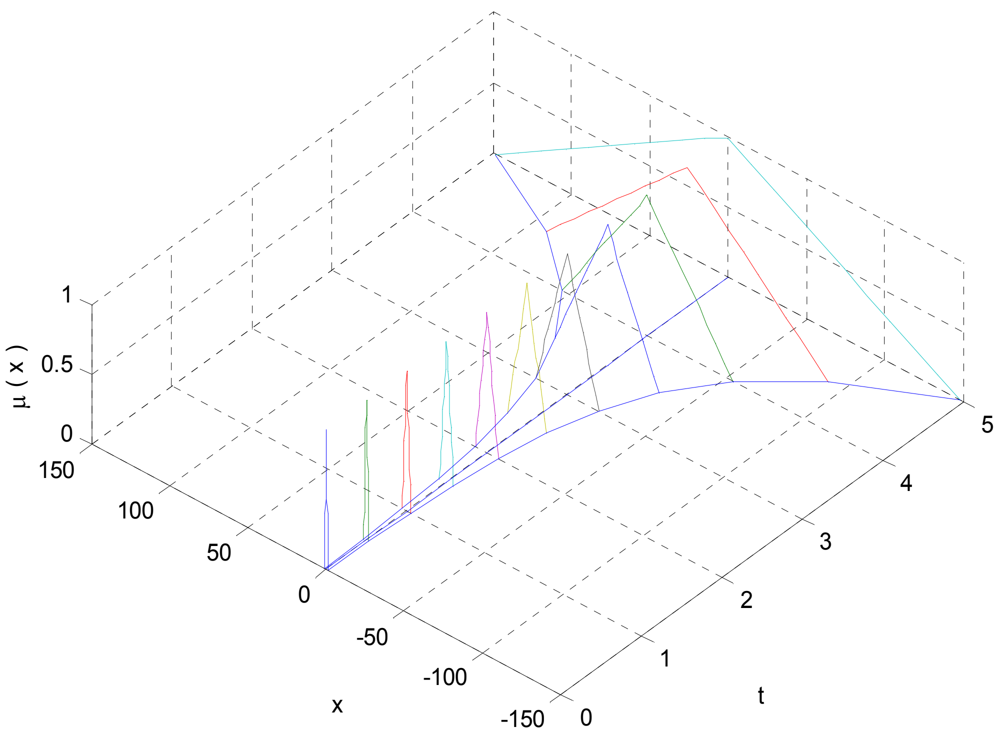
$$[X(t)]^\alpha = \left[-a(1-\alpha)e^{-\lambda t}, a(1-\alpha)\, e^{-\lambda t}\right]$$

bulunur.

1. durumda çıkan çözümde $t \to \infty$ iken çözümün aralığı yani Çap$\left(dest\, X(t)\right) = 2ae^{\lambda t}$ de genişleyip sınırsız olur. $a = \lambda = 1$ ve $t \in [0,5]$ için çözümün desteğinin nasıl genişlediğini aşağıdaki grafiklerden görebiliriz.

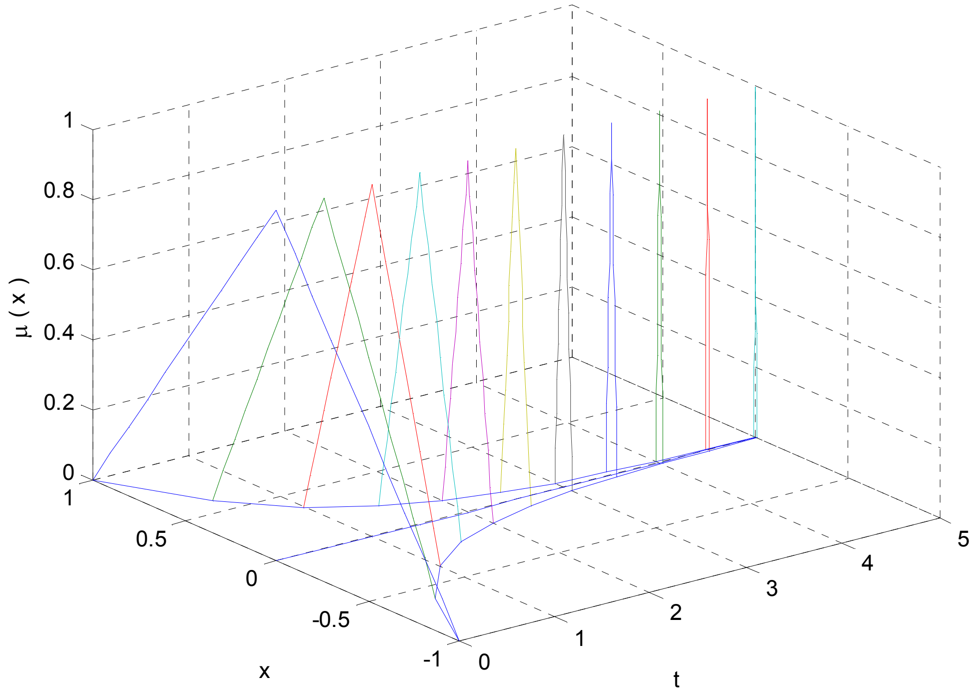


Şekil 2.1.(a) $X(t)$, (1) türevli iken çözümün grafiği

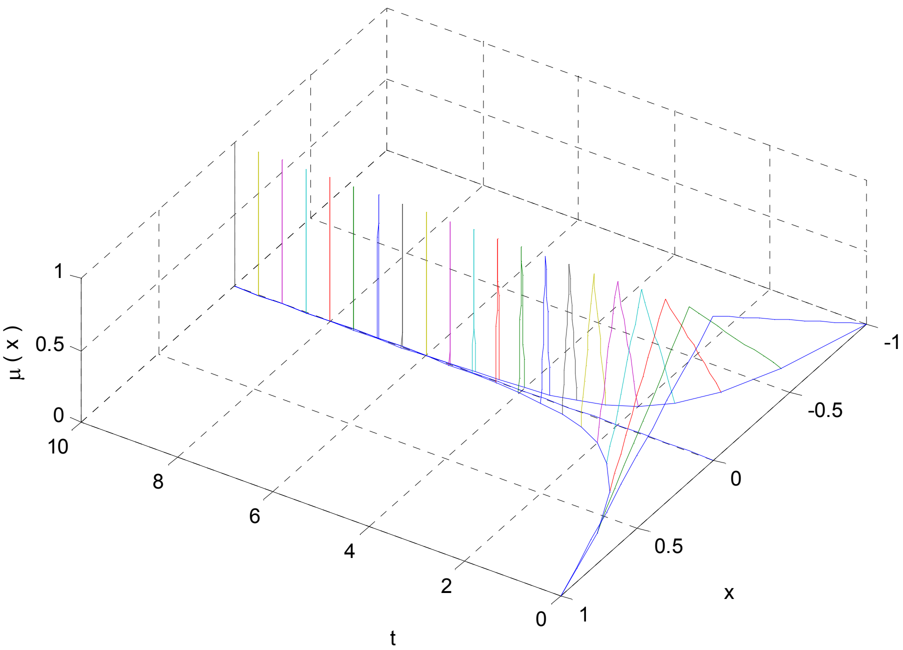


Şekil 2.1.(b) $X(t)$, (1) türevli iken çözümün başka bir açıdan grafiği

Ama 2. durumda $t \to \infty$ iken Çap$\big(dest\, X(t)\big) = 0$ olduğu görülür. Yine $a = \lambda = 1$ ve $t \in [0,5]$ için grafiklerden çözümün davranışını görebiliriz.



Şekil 2.2.(a) $X(t)$, (2) türevli iken çözümün grafiği



Şekil 2.2.(b) $X(t)$, (2) türevli iken çözümün başka bir açıdan grafiği

Teorem 2.2.3. ([13]) $F: T \to \mathcal{F}$ bulanık bir fonksiyon olmak üzere,

i. F, tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli olsun. F' integrallenebilirse $\forall t \in T$ için

$$F(t) = F(a) \oplus \int_a^t F'(s)ds$$

ii. F, tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli olsun. F' integrallenebilirse $\forall t \in T$ için

$$F(t) = F(a) \ominus (-1)\odot \int_a^t F'(s)ds$$

İspat: İspatı ikinci durum için gösterelim.

$$\left[\int_a^t F'(s)ds\right]^\alpha = \left[\int_a^t g'_\alpha(s)ds\,, \int_a^t f'_\alpha(s)ds\right] = [g_\alpha(t) - g_\alpha(a),\, f_\alpha(t) - f_\alpha(a)]$$

Buradan

$$\begin{aligned}&[F(t)]^\alpha + (-1)\left[\int_a^t F'(s)ds\right]^\alpha \\ &= [f_\alpha(t), g_\alpha(t)] + [f_\alpha(a) - f_\alpha(t), g_\alpha(a) - g_\alpha(t)] \\ &= [f_\alpha(a), g_\alpha(a)] = [F(a)]^\alpha\end{aligned}$$

Şimdi, $F: [a, b] \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ve x_0 bulanık bir sayı olmak üzere,

$$x'(t) = F\big(t, x(t)\big), \qquad x(a) = x_0 \tag{2.2.6}$$

Bulanık başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

Teorem 2.2.4. ([13])

i. x, (1) türevli olsun. O zaman $x: T \to \mathcal{F}$, (2.2.6) denkleminin bir çözümüdür ancak ve ancak

$$x(t) = x_0 \oplus \int_a^t F(s, x(s))ds\,, t \in T \;\; ise \tag{2.2.7}$$

ii. x, (2) türevli olsun. O zaman $x: T \to \mathcal{F}$, (2.2.6) denkleminin bir çözümüdür ancak ve ancak

$$x(t) = x_0 \ominus (-1)\odot \int_a^t F\big(s, x(s)\big)ds \;\;, t \in T \;\; ise \tag{2.2.8}$$

İspat:

ii. Eğer x, (2.2.6) denkleminin bir çözümü ise $\forall t \in T$ için

$$x(t) \oplus (-1)\odot \int_a^t x'(s)ds = x(t) \oplus (-1)\odot \int_a^t F(s, x(s))ds$$

Olur.

Teorem 2.2.3 (ii)'den

$$x(a) = x(t) \oplus (-1)\odot \int_a^t F(s, x(s))ds$$

olur. Böylece (2.2.8) denklemini elde ederiz.

Tersine (2.2.8) denklemi sağlanmış olsun. $\forall\alpha \in [0\,,1]\ için\ [x(t)]^{\alpha} = [u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)]$ olmak üzere,

$$[u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)] + (-1)\left[\int_{a}^{t} f_{\alpha}\big(s, u_{\alpha}(s), v_{\alpha}(s)\big)ds\,, \int_{a}^{t} g_{\alpha}\big(s, u_{\alpha}(s), v_{\alpha}(s)\big)ds\right]$$
$$= [u_{\alpha}(a), v_{\alpha}(a)]$$

olur. Buradan

$$u_{\alpha}(t) - \int_{a}^{t} g_{\alpha}\big(s, u_{\alpha}(s), v_{\alpha}(s)\big)ds = u_{\alpha}(a)$$
$$v_{\alpha}(t) - \int_{a}^{t} f_{\alpha}\big(s, u_{\alpha}(s), v_{\alpha}(s)\big)ds = v_{\alpha}(a)$$

böylece

$$u'_{\alpha}(t) = g_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big)$$

ve

$$v'_{\alpha}(t) = f_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big)$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}[x'(t)]^{\alpha} &= [u'_{\alpha}(t), v'_{\alpha}(t)] \\ &= \big[f_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big), g_{\alpha}\big(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)\big)\big] \\ &= \big[F\big(t, x(t)\big)\big]^{\alpha}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak x, (2.2.6) denkleminin çözümü olur.

Tanım 2.2.6. (s. mertebeden genelleştirilmiş türev, [9]**)**

F'nin s. mertebeden türevini aşağıdaki gibi tanımlarız. $F\colon (a, b) \to \mathcal{F}\ ve\ t_0 \epsilon\ (a, b)$ olsun. Eğer $F^{(s)}$, $\forall\ s = 1, 2, \ldots, n$ için var, öyle ki $\forall\ s = 1, 2, \ldots, n$ için

i. $\forall\, h > 0$ için $F^{(s-1)}(t_0 + h) \ominus F^{(s-1)}(t_0)$, $F^{(s-1)}(t_0) \ominus F^{(s-1)}(t_0 - h)$ var ve

$\lim_{h \searrow 0} \frac{F^{(s-1)}(t_0+h) \ominus F^{(s-1)}(t_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{F^{(s-1)}(t_0) \ominus F^{(s-1)}(t_0-h)}{h} = F^{(s)}(t_0)$ ise

F, t_0'da s. mertebeden türevlidir. Ya da

ii. $\forall\, h > 0$ için $F^{(s-1)}(t_0) \ominus F^{(s-1)}(t_0 + h)$, $F^{(s-1)}(t_0 - h) \ominus F^{(s-1)}(t_0)$ var ve

$\lim_{h \searrow 0} \frac{F^{(s-1)}(t_0) \ominus F^{(s-1)}(t_0+h)}{(-h)} = \lim_{h \searrow 0} \frac{F^{(s-1)}(t_0) \ominus F^{(s-1)}(t_0+h)}{(-h)} = F^{(s)}(t_0)$ ise

F, t_0'da s. mertebeden türevlidir. Ya da

iii. $\forall\, h > 0$ için $F^{(s-1)}(t_0+h) \ominus F^{(s-1)}(t_0),\ F^{(s-1)}(t_0-h) \ominus F^{(s-1)}(t_0)$ var ve

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{F^{(s-1)}(t_0+h)\ominus F^{(s-1)}(t_0)}{h} = \lim_{h\searrow 0}\frac{F^{(s-1)}(t_0+h)\ominus F^{(s-1)}(t_0)}{(-h)} = F^{(s)}(t_0) \text{ ise}$$

$F,\ t_0$'da s. mertebeden türevlidir. Ya da

iv. $\forall\, h > 0$ için $F^{(s-1)}(t_0) \ominus F^{(s-1)}(t_0+h),\ F^{(s-1)}(t_0) \ominus F^{(s-1)}(t_0-h)$ var ve

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{F^{(s-1)}(t_0)\ominus F^{(s-1)}(t_0+h)}{(-h)} = \lim_{h\searrow 0}\frac{F^{(s-1)}(t_0)\ominus F^{(s-1)}(t_0-h)}{h} = F^{(s)}(t_0) \text{ ise}$$

$F,\ t_0$'da s. mertebeden türevlidir.

Tanım 2.2.5'e göre, verilen bir F bulanık fonksiyonunun türevini iki şekilde elde edebiliriz. Bunları aşağıdaki gösterelim.

i. F, (1). durumdaki gibi türevli ise türevi $D_1^{(1)}F(t)$ şeklinde gösterilsin.

ii. F, (2). durumdaki gibi türevli ise türevi $D_2^{(1)}F(t)$ şeklinde gösterilsin.

Yani F, t_0'da türevli ise F nin birinci türevini $D_n^{(1)}F(t_0),\ n = 1,2$ şeklinde gösterelim. O zaman verilen bir F bulanık fonksiyonunun ikinci türevi için dört olasılık ortaya çıkar. Bunlar $D_1^{(1)}\left(D_1^{(1)}F(t)\right),\ D_2^{(1)}\left(D_1^{(1)}F(t)\right)$ ve $D_1^{(1)}\left(D_2^{(1)}F(t)\right),\ D_2^{(1)}\left(D_2^{(1)}F(t)\right)$ olur.

Tanım 2.2.7. ([10])

$F\colon(a,b) \to \mathcal{F},\ t_0 \epsilon\ (a,b)\ ve\ n,m = 1,2$. Eğer t_0 ın bir komşuluğunda $D_n^{(1)}F$ mevcut ve bulanık bir fonksiyon ise aynı zamanda $D_n^{(1)}F,\ t_0$'da (m) türevli ise F bulanık fonksiyonu t_0'da $(n\,,m)$ türevlidir denir. F bulanık fonksiyonunun ikinci türevi $D_{n,m}^{(2)}F(t_0)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.5. ([10]) $D_1^{(1)}F\colon T \to \mathcal{F}$ ve $D_2^{(1)}F\colon T \to \mathcal{F}$ bir fonksiyon, $t \in T = (a,\ b)$ ve $\forall\alpha \in [0,1]$ için $[F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ olsun.

i. Eğer $D_1^{(1)}F(t)$, (1) türevli ise $f_\alpha{}'(t)$ ve $g_\alpha{}'(t)$ türevlidir ve $[D_{1,1}^{(2)}F(t)]^\alpha = [f_\alpha{}''(t),\ g_\alpha{}''(t)]$ dir.

ii. Eğer $D_1^{(1)}F(t)$, (2) türevli ise $f_\alpha{}'(t)$ ve $g_\alpha{}'(t)$ türevlidir ve $[D_{1,2}^{(2)}F(t)]^\alpha = [g_\alpha{}''(t),\ f_\alpha{}''(t)]$ dir.

iii. Eğer $D_2^{(1)}F(t)$, (1) türevli ise $f_\alpha'(t)$ ve $g_\alpha'(t)$ türevlidir ve $[D_{2,1}^{(2)}F(t)]^\alpha = [g_\alpha''(t),\ f_\alpha''(t)]$ dir.

iv. Eğer $D_2^{(1)}F(t)$, (2) türevli ise $f_\alpha'(t)$ ve $g_\alpha'(t)$ türevlidir ve $[D_{2,2}^{(2)}F(t)]^\alpha = [f_\alpha''(t),\ g_\alpha''(t)]$ dir.

İspat: Sadece (i) durumu için ispatı göstereceğiz diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

$h > 0$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$[D_1^{(1)}F(t+h) \ominus D_1^{(1)}F(t)]^\alpha = [f_\alpha'(t+h) - f_\alpha'(t), g_\alpha'(t+h) - g_\alpha'(t)]$$

her tarafı $1/h$ ile çarparsak,

$$\frac{[D_1^{(1)}F(t+h) \ominus D_1^{(1)}F(t)]^\alpha}{h} = \left[\frac{f_\alpha'(t+h) - f_\alpha'(t)}{h}, \frac{g_\alpha'(t+h) - g_\alpha'(t)}{h}\right]$$

elde ederiz. Aynı şekilde

$$\frac{\left[D_1^{(1)}F(t) \ominus D_1^{(1)}F(t-h)\right]^\alpha}{h} = \left[\frac{f_\alpha'(t) - f_\alpha'(t-h)}{h}, \frac{g_\alpha'(t) - g_\alpha'(t-h)}{h}\right]$$

elde edilir. Şimdi limit alırsak $[D_{1,1}^{(2)}F(t)]^\alpha = [f_\alpha''(t), g_\alpha''(t)]$ olur.

Böylece ispat tamamlanır.

2.3. İKİNCİ MERTEBEDEN BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER VE SINIR DEĞER PROBLEMİ

İkinci mertebeden lineer bulanık başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} y''(t) \oplus a\odot y'(t) \oplus b\odot y(t) = \sigma(t), \\ y(0) = \gamma_0, \\ y'(0) = \gamma_1 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

$a, b > 0$, $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{F}$ ve $\sigma(t)$ herhangi bir I aralığı üzerinde sürekli bir bulanık fonksiyon olmak üzere, (2.3.1) probleminin çözümü seçilen türev tipine göre değişecektir. Problemin nasıl çözüleceğine geçmeden önce başka bir tanım verelim.

Tanım 2.3.1. [10] $y: I \to \mathcal{F}$ ve $n, m \in \{1,2\}$ olsun. Eğer I aralığı üzerinde $D_n^{(1)}y$, $D_{n,m}^{(2)}y$ mevcut ve $D_{n,m}^{(2)}y(t) \oplus a\odot D_n^{(1)}y(t) \oplus b\odot y(t) = \sigma(t)$, $y(0) = \gamma_0$, $D_n^{(1)}y(0) = \gamma_1$ ise y bulanık fonksiyonuna (2.3.1) probleminin (n, m)çözümüdür denir.

Teorem 2.2.2 ve teorem 2.2.5'dan, seçilen türev tipine göre (2.3.1) problemini ikinci mertebeden adi lineer diferensiyel denklemler sistemine çevirebiliriz. Bu şekilde (2.3.1) problemine $y: I \to \mathcal{F}$ çözümünü buluruz.

$[y(t)]^\alpha = [\underline{y}(t,\alpha), \overline{y}(t,\alpha)]$ olmak üzere, (2.3.1) problemi için dört olası ikinci mertebeden adi diferensiyel denklem sistemi aşağıdaki gibi olur.

(1, 1)-sistemi, yani y ve y nin türevi teorem 2.2.2'ye göre (1) türevli ise;

$$\begin{cases} \underline{y}''(t,\alpha) + a.\underline{y}'(t,\alpha) + b.\underline{y}(t,\alpha) = \underline{\sigma}(t,\alpha), \\ \overline{y}''(t,\alpha) + a.\overline{y}'(t,\alpha) + b.\overline{y}(t,\alpha) = \overline{\sigma}(t,\alpha), \\ \underline{y}(0,\alpha) = \underline{\gamma}_0, \quad \overline{y}(0,\alpha) = \overline{\gamma}_0 \\ \underline{y}'(0,\alpha) = \underline{\gamma}_1, \quad \overline{y}'(0,\alpha) = \overline{\gamma}_1 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

(1, 2)-sistemi

$$\begin{cases} \overline{y}''(t,\alpha) + a.\underline{y}'(t,\alpha) + b.\underline{y}(t,\alpha) = \underline{\sigma}(t,\alpha), \\ \underline{y}''(t,\alpha) + a.\overline{y}'(t,\alpha) + b.\overline{y}(t,\alpha) = \overline{\sigma}(t,\alpha), \\ \underline{y}(0,\alpha) = \underline{\gamma}_0, \quad \overline{y}(0,\alpha) = \overline{\gamma}_0 \\ \underline{y}'(0,\alpha) = \underline{\gamma}_1, \quad \overline{y}'(0,\alpha) = \overline{\gamma}_1 \end{cases} \tag{2.3.3}$$

(2, 1)-sistemi, yani y teorem 2.2.2'ye göre (2) türevli ve y nin türevi (1) türevli ise;

$$\begin{cases} \overline{y}''(t,\alpha) + a.\overline{y}'(t,\alpha) + b.\underline{y}(t,\alpha) = \underline{\sigma}(t,\alpha), \\ \underline{y}''(t,\alpha) + a.\underline{y}'(t,\alpha) + b.\overline{y}(t,\alpha) = \overline{\sigma}(t,\alpha), \\ \underline{y}(0,\alpha) = \underline{\gamma}_0, \quad \overline{y}(0,\alpha) = \overline{\gamma}_0 \\ \overline{y}'(0,\alpha) = \underline{\gamma}_1, \quad \underline{y}'(0,\alpha) = \overline{\gamma}_1 \end{cases} \tag{2.3.4}$$

(2, 2)-sistemi

$$\begin{cases} \underline{y}''(t,\alpha) + a.\overline{y}'(t,\alpha) + b.\underline{y}(t,\alpha) = \underline{\sigma}(t,\alpha), \\ \overline{y}''(t,\alpha) + a.\underline{y}'(t,\alpha) + b.\overline{y}(t,\alpha) = \overline{\sigma}(t,\alpha), \\ \underline{y}(0,\alpha) = \underline{\gamma}_0, \quad \overline{y}(0,\alpha) = \overline{\gamma}_0 \\ \overline{y}'(0,\alpha) = \underline{\gamma}_1, \quad \underline{y}'(0,\alpha) = \overline{\gamma}_1 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Daha sonra her bir sistem için bulunan $[y(t)]^\alpha = [\underline{y}(t,\alpha)\,,\overline{y}(t,\alpha)]$ çözümlerinin ve çözümün türevlerinin geçerli uçlara sahip olup olmadığı kontrol edilir.

Şimdi bir örnek üzerinde prosedürün nasıl işlediğini gösterelim.

Örnek 2.3.1. ([10])

Aşağıdaki ikinci mertebeden başlangıç değer problemine bakalım.

$$\begin{cases} y''(t) = \sigma_0, \\ y(0) = \gamma_0, \\ y'(0) = \gamma_1 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$[\sigma_0]^\alpha = [\gamma_0]^\alpha = [\gamma_1]^\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$

olsun.

Eğer $[y(t)]^\alpha = [\underline{y}(t,\alpha),\ \overline{y}(t,\alpha)]$, problem için $(1,1)$ çözümü ise o zaman $[y'(t)]^\alpha = [\underline{y}'(t,\alpha),\ \overline{y}'(t,\alpha)]$ ve $[y''(t)]^\alpha = [\underline{y}''(t,\alpha),\ \overline{y}''(t,\alpha)]$, probleme karşılık gelen $(1,1)$ ikinci mertebeden adi diferensiyel denklem sistemini sağlar. Adi diferensiyel denklem teorisinden $(1,1)$ sisteminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\underline{y}(t,\alpha) = (\alpha - 1)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right), \overline{y}(t,\alpha) = (1 - \alpha)\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$$

$\forall t \geq 0$ için $\underline{y}(t,\alpha) \leq \overline{y}(t,\alpha)$ olduğu görülür. Yani $[y(t)]^\alpha = [\underline{y}(t,\alpha),\ \overline{y}(t,\alpha)]$ uçlarının $\forall t \geq 0$ için geçerli olduğu görülür. Dolayısıyla $\forall t \geq 0$ için $[y(t)]^\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$, $(1,1)$ çözümü olur.

$(1,2)$ çözümü için, $(1,2)$ sisteminden aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\underline{y}(t,\alpha) = (\alpha - 1)\left(-\frac{t^2}{2} + t + 1\right),\ \overline{y}(t,\alpha) = (1 - \alpha)\left(-\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$$

Dolayısıyla $t \in (0,1)$ için $[y(t)]^{\alpha} = [\alpha-1, 1-\alpha]\left(-\frac{t^2}{2}+t+1\right)$, $(1,2)$ çözümü olur. $(2,1)$ çözümü için, $(2,1)$ sisteminden aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\underline{y}(t,\alpha) = (\alpha-1)\left(-\frac{t^2}{2}-t+1\right),\ \overline{y}(t,\alpha) = (1-\alpha)\left(-\frac{t^2}{2}-t+1\right)$$

Dolayısıyla $t \in \left(0, \sqrt{3}-1\right)$ için $[y(t)]^{\alpha} = [\alpha-1, 1-\alpha]\left(-\frac{t^2}{2}-t+1\right)$, $(2,1)$ çözümü olur.

$(2,2)$ çözümü için, $(2,2)$ sisteminden aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\underline{y}(t,\alpha) = (\alpha-1)\left(\frac{t^2}{2}-t+1\right),\ \overline{y}(t,\alpha) = (1-\alpha)\left(\frac{t^2}{2}-t+1\right)$$

Dolayısıyla $t \in (0,1)$ için $[y(t)]^{\alpha} = [\alpha-1, 1-\alpha]\left(\frac{t^2}{2}-t+1\right)$, (2,2) çözümü olur.

Sonuç olarak ikinci mertebeden bulanık başlangıç değer probleminin dört farklı çözümü olur.

Örnek 2.3.2. ([14])

$$\begin{cases} y''(t) = 2 \odot \gamma, \\ y(0) = \frac{1}{8} \odot \gamma, \\ y(1) = \frac{3}{8} \odot \gamma \end{cases} \tag{2.3.7}$$

$[\gamma]^{\alpha} = [\alpha-1, 1-\alpha]$

sınır değer problemini göz önüne alalım.

Çözüm:

Eğer $[y(t)]^{\alpha} = [\underline{y}(t,\alpha),\ \overline{y}(t,\alpha)]$, problem için $(1,1)$ çözümü ise o zaman $[y'(t)]^{\alpha} = [\underline{y}'(t,\alpha), \overline{y}'(t,\alpha)]$ ve $[y''(t)]^{\alpha} = [\underline{y}''(t,\alpha), \overline{y}''(t,\alpha)]$, probleme karşılık gelen $(1,1)$ sistemini sağlamalıdır. $(1,1)$ sistemini çözdüğümüzde elde edeceğimiz çözümler aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{cases} \underline{y}(t,\alpha) = \frac{1}{8}(\alpha-1)(8t^2-6t+1) \\ \overline{y}(t,\alpha) = \frac{1}{8}(1-\alpha)(8t^2-6t+1) \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Dolayısıyla (2.3.8), $t \geq \frac{1}{2}$ ve $t \leq \frac{1}{4}$ için gerçek bir fuzzy sayı belirtir. (2.3.8)'in tanım (2.2.5)'e göre (1) türevi

$$\begin{cases} \underline{y}'(t,\alpha) = \frac{1}{8}(\alpha-1)(16t-6) \\ \overline{y}'(t,\alpha) = \frac{1}{8}(1-\alpha)(16t-6) \end{cases} \tag{2.3.9}$$

şeklinde olur. Buradan $t \geq \frac{1}{2}$ için (2.3.9) fuzzy sayı belirtir. (2.3.9)'un tanım (2.2.5)' e göre (1) türevi,

$$\begin{cases} \underline{y}''(t,\alpha) = 2(\alpha-1) \\ \overline{y}''(t,\alpha) = 2(1-\alpha) \end{cases} \tag{2.3.10}$$

olur. Sonuç olarak aynı anda (2.3.8), (2.3.9) ve (2.3.10) $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığında geçerli uçlara sahip olurlar dolayısıyla (2.3.8) denklemi ile verilmiş olan $y(t)$, sınır değer problemi için $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ aralığında $(1,1)$ çözümü olur.

$(2,2)$ çözümü için $(2,2)$ sistemini çözersek yine (2.3.8)'deki çözümü elde ederiz. O zaman $y(t)$'nin birinci türevi tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli olduğundan

$$\left[D_2^{(1)} y(t)\right]^\alpha = [\,\overline{y}'(t,\alpha), \underline{y}'(t,\alpha)] = [\tfrac{1}{8}(1-\alpha)(16t-6),\ \tfrac{1}{8}(\alpha-1)(16t-6)]$$

şeklinde olur ve bu da $t \leq \frac{1}{4}$ için bir fuzzy sayı belirtir. Benzer şekilde $y(t)$'nin ikinci türevi tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli olduğundan

$$\left[D_{2,2}^{(2)} y(t)\right]^\alpha = [\underline{y}''(t,\alpha), \overline{y}''(t,\alpha)] = [2(\alpha-1),\ 2(1-\alpha)]$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.3.8) denklemi ile verilmiş olan $y(t)$, sınır değer problemi için $t \in \left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ aralığında bir $(2,2)$ çözümü verir.

$(1,2)$ sistemini çözdüğümüzde

$$\begin{cases} \underline{y}(t,\alpha) = -\frac{1}{8}(\alpha-1)(8t^2-10t-1) \\ \overline{y}(t,\alpha) = -\frac{1}{8}(1-\alpha)(8t^2-10t-1) \end{cases} \tag{2.3.11}$$

çözümünü buluruz. Bu çözüm $t \in (0,\ 1)$ için bir fuzzy sayı belirtir. (2.3.11)'in birinci türevi tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli olduğundan

$$\begin{cases} \underline{y}'(t,\alpha) = -\frac{1}{8}(\alpha-1)(16t-10) \\ \overline{y}'(t,\alpha) = -\frac{1}{8}(1-\alpha)(16t-10) \end{cases} \tag{2.3.12}$$

elde ederiz. (2.3.12), $t \leq \frac{5}{8}$ için bir fuzzy sayı belirtir. Devam edersek (2.3.11)'in ikinci türevi, tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli olduğundan

$$[\underline{y}''(t,\alpha), \overline{y}''(t,\alpha)] = [2(\alpha-1),\ 2(1-\alpha)]$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak (2.3.11), $t \in \left(0,\ \frac{5}{8}\right)$ için bir $(1,2)$ çözümü verir.

(2, 1) çözümü için (2, 1) sistemini çözersek yine (2.3.11)'deki çözümü elde ederiz. Benzer işlemler yapıldığında (2.3.11)'in $t \in \left(\frac{5}{8}, 1\right)$ için bir $(2,1)$ çözümü verdiğini görebiliriz.

Örnek 2.3.3.

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t) \oplus 2 \odot \gamma_0, \\ y(0) = \gamma_1, \\ y'(0) = \gamma_1 \end{cases} \tag{2.3.13}$$

$[\gamma_1]^\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$, $[\gamma_0]^\alpha = [\alpha, 2 - \alpha]$ olmak üzere,

bulanık başlangıç değer probleminin çözümünü $(0,1)$ aralığı üzerinde araştıralım.

Çözüm:

Eğer $[y(t)]^\alpha = [\underline{y}(t,\alpha),\ \overline{y}(t,\alpha)]$, (2.3.13) problemi için $(1,1)$ çözümü ise o zaman $[y'(t)]^\alpha = [\underline{y}'(t,\alpha), \overline{y}'(t,\alpha)]$ ve $[y''(t)]^\alpha = [\underline{y}''(t,\alpha), \overline{y}''(t,\alpha)]$, probleme karşılık gelen $(1,1)$ sistemini sağlamalıdır. Bu verileri (2.3.13) probleminde yerine yazarsak

$$\begin{cases} [\underline{y}''(t,\alpha), \overline{y}''(t,\alpha)] = [\underline{y}'(t,\alpha), \overline{y}'(t,\alpha)] + 2[\alpha, 2-\alpha], \\ [\underline{y}(0,\alpha), \overline{y}(0,\alpha)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha], \\ [\underline{y}'(0,\alpha), \overline{y}'(0,\alpha)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{cases} \tag{2.3.14}$$

denklemini elde ederiz. (2.3.14) denkleminden de $(1,1)$ sistemini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{cases} \underline{y}''(t,\alpha) = \underline{y}'(t,\alpha) + 2\alpha, \\ \overline{y}''(t,\alpha) = \overline{y}'(t,\alpha) + 4 - 2\alpha \\ \underline{y}(0,\alpha) = \alpha - 1, \\ \overline{y}(0,\alpha) = 1 - \alpha, \\ \underline{y}'(0,\alpha) = \alpha - 1, \\ \overline{y}'(0,\alpha) = 1 - \alpha \end{cases}$$

$(1,1)$ sistemini çözdüğümüzde elde edeceğimiz çözümler aşağıdaki gibi olur.

$$[y(t)]^\alpha = [-2\alpha(t+1) + (3\alpha - 1)e^t,\ (2\alpha - 4)(t+1) + (5 - 3\alpha)e^t].$$

$y(t)$ ve $y'(t)$ tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli olduğundan

$$[y'(t)]^\alpha = [-2\alpha + (3\alpha - 1)e^t,\ 2\alpha - 4 + (5 - 3\alpha)e^t]$$

ve

$$[y''(t)]^\alpha = [(3\alpha - 1)e^t,\ (5 - 3\alpha)e^t]$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla $[y(t)]^{\alpha}$, $[y'(t)]^{\alpha}$ ve $[y''(t)]^{\alpha}$, $t \geq 0$ için fuzzy sayı belirtir. Bundan dolayı (2.3.13) problemi için

$$[y(t)]^{\alpha} = [-2\alpha(t+1) + (3\alpha-1)e^{t},\ (2\alpha-4)(t+1) + (5-3\alpha)e^{t}]$$

$(0,1)$ aralığı üzerinde $(1,1)$ çözümü belirtir.

$(1,2)$ sistemini çözdüğümüzde elde edeceğimiz çözümler aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{cases} \underline{y}(t,\alpha) = 2e^{t} - e^{-t}(3\alpha-3) + \alpha(4-2t) - 6 \\ \overline{y}(t,\alpha) = 2e^{t} + e^{-t}(3\alpha-3) + \ \alpha(2t-4) - 4t + 2 \end{cases}$$

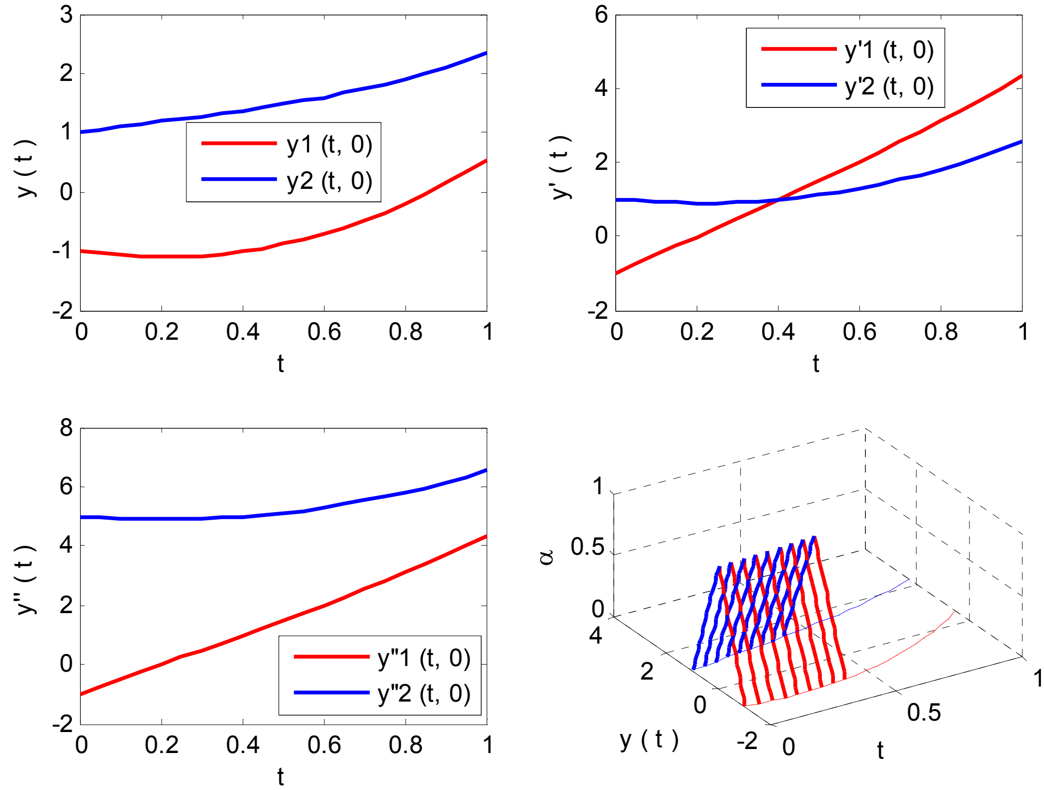
$y(t)$, tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli ve $y'(t)$ tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli olduğundan

$$[y'(t)]^{\alpha} = [2e^{t} + e^{-t}(3\alpha-3) - 2\alpha,\ 2e^{t} - e^{-t}(3\alpha-3) - 4 + 2\alpha]$$

ve

$$[y''(t)]^{\alpha} = [2e^{t} + e^{-t}(3\alpha-3),\ 2e^{t} - e^{-t}(3\alpha-3)]$$

olarak bulunur. $(0,1)$ aralığı üzerinde $y(t)$ ve $y''(t)$ bir fuzzy sayı belirtir. $y'(t)$ ise $\left(0,\ ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ aralığında bir fuzzy sayı belirtir. Dolayısıyla $[y(t)]^{\alpha}$, $[y'(t)]^{\alpha}$ ve $[y''(t)]^{\alpha}$, aynı anda $t \in \left(0,\ ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ için bir $(1,2)$ çözümü verir. Bu çözümü aşağıdaki grafikten görebiliriz. Grafikte $y1(t,0) \coloneqq \underline{y}(t,0)$, $y2(t,0) \coloneqq \overline{y}(t,0)$, $ve\ benzeri\ldots$



Şekil 2.3. $(0,1)$ aralığı üzerinde $(1,2)$ çözümünün grafiği

(2,1) sistemini çözersek elde edeceğimiz çözümler

$$\begin{cases} \underline{y}(t,\alpha) = (2\alpha-4)t + 4\alpha - 6 + (5-3\alpha)e^t \\ \overline{y}(t,\alpha) = -2\alpha t - 4\alpha + 2 + (3\alpha-1)e^t \end{cases}$$

şeklinde olur. $y(t)$ tanım (2.2.5)'e göre (2) türevli ve $y'(t)$ tanım (2.2.5)'e göre (1) türevli olduğundan

$$[y'(t)]^\alpha = [e^t(3\alpha-1) - 2\alpha,\ e^t(5-3\alpha) + 2\alpha - 4]$$

ve

$$[y''(t)]^\alpha = [e^t(3\alpha-1),\ e^t(5-3\alpha)]$$

olarak bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında $y(t)$'nin $t \in (0, 0.518)$ için bir $(2,1)$ çözümü verdiği görülür.

$(2,2)$ çözümü için, $(2,2)$ sisteminden aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\begin{cases} \underline{y}(t,\alpha) = 2e^t + (3\alpha-3)e^{-t} - 2\alpha(1-t) - 4t \\ \overline{y}(t,\alpha) = 2e^t - (3\alpha-3)e^{-t} - 2\alpha(t-1) - 4 \end{cases}$$

buradan $t \in \left(0,\ ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ için $y(t)$, (2,2) çözümü olur.

Teorem 2.3.1. ([9])

$t_0 \in [a,b]$ ve $f:[a,b] \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ sürekli olsun. $x:[a,b] \to \mathcal{F}$ fonksiyonu ancak ve ancak x ve x' aşağıdaki şartlardan birini sağlıyorsa $x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big)$, $x(t_0) = k_1$, $x'(t_0) = k_2$ fuzzy başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

a) $x(t) = k_2 \odot (t - t_0) \oplus \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds \oplus k_1$

x' ve x'' tanım (2.2.5)'e göre (1) türevidir. Ya da

b) $x(t) = \ominus (-1) \odot \left(k_2 \odot (t - t_0) \ominus (-1) \odot \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds\right)$
$\oplus\, k_1$

x' ve x'' tanım (2.2.5)'e göre (2) türevidir. Ya da

c) $x(t) = \ominus (-1) \odot \left(k_2 \odot (t - t_0) \oplus \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds\right) \oplus k_1$

x' tanım (2.2.5)'e göre (1) türevidir ve x'' (2) türevidir. Ya da

d) $x(t) = k_2 \odot (t - t_0) \ominus (-1) \odot \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds \oplus k_1$

x' tanım (2.2.5)'e göre (2) türevidir ve x'' (1) türevidir.

İspat:

a) x ve x', (1) türevli olsun.

$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) \Rightarrow x'(t) = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds \oplus k_2$

buradan $x(t) = \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds \oplus k_2\right) ds \oplus k_1$ olur.

ve böylece $x(t) = k_2 \odot (t - t_0) \oplus \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds \oplus k_1$

elde edilir.

b) x ve x', (2) türevli olsun.

$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) \Rightarrow x'(t) = \ominus (-1) \odot \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds \oplus k_2$

buradan

$x(t) = \ominus (-1) \odot \left(k_2 \odot (t - t_0) \ominus (-1) \odot \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds\right)$
$\oplus\, k_1$

elde edilir.

c) x, (2) türevli ve x', (1) türevli olsun.

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) \Rightarrow x'(t) = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds \oplus k_2$$

$$x(t) = \ominus (-1) \odot \left(k_2 \odot (t - t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds\right) \oplus k_1$$

d) x, (1) türevli ve x', (2) türevli olsun.

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) \Rightarrow x'(t) = \ominus (-1) \odot \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds \oplus k_2$$

olur. Böylece

$$x(t) = k_2 \odot (t - t_0) \ominus (-1) \odot \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s), x'(s)\big)ds\right) ds \oplus k_1$$

elde edilir.

İspat böylece tamamlanır.

Teorem 2.3.2. ([9]) $f: [t_0, T] \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ sürekli ve $M_1, M_2 > 0$ olsun. $\forall t \in [t_0, T]\ ve\ x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathcal{F}$ için

$$D\big(f(t, x_1, x_2), f(t, y_1, y_2)\big) \le M_1 D(x_1, y_1) + M_2 D(x_2, y_2)$$

şartı sağlanıyorsa $x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big)$, $x(t_0) = k_1$, $x'(t_0) = k_2$ fuzzy başlangıç değer probleminin $[t_0, T]$ aralığı üzerinde her bir durum için tek çözümü vardır.

İspat (Bkz. [9]**)**

BÖLÜM 3

3.1 BULANIK (FUZZY) BAŞLANGIÇ DEĞERLİ SIR EPİDEMİK MODELİ

SIR modeli 1927'de W. O. Kermack ve A. G. McKendrick tarafından geliştirilmiştir. SIR modeli bir popülasyonda ortaya çıkan bir salgının yayılma şeklini modelleyen diferensiyel denklemlerden oluşur [24, 25]. Modelde üç farklı durumda bulunan bireyler vardır. Bunlar;

S = Sağlıklı, Hasta olmayan ancak hastalığa yakalanma potansiyeli olup hastalıklı duruma geçebilecek bireylerdir.

I = Hasta, enfeksiyonlu olup enfeksiyonu diğerlerine bulaştırma potansiyeli olan bireylerdir. Bu grup hastalıktan kurtulduktan sonra tekrar sağlıklı duruma geçmez.

R = Hastalığa yakalanmış olup daha sonra iyileşen ve hastalığa karşı ömür boyu bağışıklık kazanmış bireylerdir.

Model şematik olarak S → I → R şeklinde ifade edilir.

Böyle bir SIR modeline karşılık gelen diferensiyel denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dS}{dt} = -\gamma SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma SI - \beta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

$$S(0) = S_0 > 0, \qquad I(0) = I_0 > 0, \qquad R(0) = 0$$

Denklem non-lineer ve otonom bir denklemdir. Bu sistemin analitik çözümü yoktur. Ancak grafiklerden çözümlerin davranışı incelenebilir. Denklem sistemindeki parametreler $\gamma > 0,\ \beta > 0$ olmak üzere;

$\gamma \rightarrow şüpheli\ biri\ ile\ hasta\ birinin\ karşılaşmasındaki\ hastalanma\ oranı$

$\beta \rightarrow iyileşme\ oranı$

Burada göz önüne aldığımız SIR modelinde ölümlerin ve doğumların olmadığını varsayıyoruz. Yukarıdaki denklemlerden aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz.

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) = N$$

Şimdi, başlangıç anında sağlıklı sayısı ve hasta sayısı net olarak belli olmayan yani başlangıç koşulları fuzzy olan [26], aşağıdaki SIR modelinin çözümlerinin davranışlarını nümerik olarak inceleyelim.

Örnek 3.1.1.

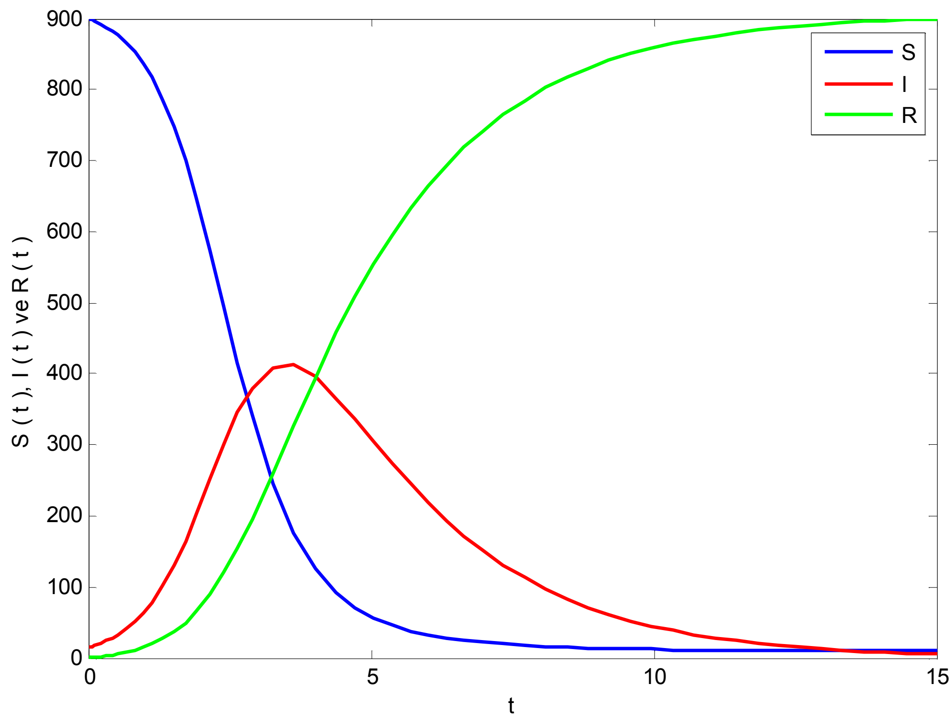
$\gamma = 0.0022,\ \beta = 0.44$ olsun.

$$S' = -0.0022SI$$
$$I' = 0.0022SI - 0.44I$$
$$R' = 0.44I$$

Başlangıç koşulların α-kesit kümeleri aşağıdaki gibi olsun.

$$[S(t)]^{\alpha} = [s_1(t,\alpha), s_2(t,\alpha)] = [100\alpha + 800, 1000 - 100\alpha]$$
$$[I(t)]^{\alpha} = [i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)] = [5\alpha + 10, 20 - 5\alpha]$$
$$[R(t)]^{\alpha} = [r_1(t,\alpha), r_2(t,\alpha)] = [0, 0]$$

Bulanık problemi çözmeden önce klasik yani bulanık olmayan problemin çözümlerinin grafiklerine bakalım. Bildiğimiz üzere $\alpha = 1$ için bulanık problem klasik probleme dönüşür. Daha sonra bulanık çözümlerle bu çözümleri grafik üzerinde karşılaştıracağız.



Şekil 3.1. Klasik problemin çözümlerinin grafiği

Tanım 2.2.5'e göre $S(t)$, (1) türevli veya (2) türevli olabilir aynı şekilde $I(t)$ ve $R(t)$ da (1) türevli veya (2) türevli olabilir. Dolayısıyla elimizde sekiz tane farklı denklem sistemi olur. Biz $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ üçlüsünün aynı anda (1) ve aynı anda (2) türevli olduğu durumları inceleyeceğiz çünkü diğer durumlarda ($S(t)$, $I(t)$ (2) türevli ve $R(t)$ (1) türevli iken hariç) diferensiyel denklem sisteminin çözümleri $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ üçlüsünün aynı anda (1) türevli olduğu duruma benziyor.

$S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$, (1) türevli olsun.

$$[s_1'(t,\alpha), s_2'(t,\alpha)] = -0.0022[s_1(t,\alpha), s_2(t,\alpha)].[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)]$$
$$[i_1'(t,\alpha), i_2'(t,\alpha)] = 0.0022[s_1(t,\alpha), s_2(t,\alpha)].[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)] \\ -0.44[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)]$$
$$[r_1'(t,\alpha), r_2'(t,\alpha)] = 0.44[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)]$$

Buradan

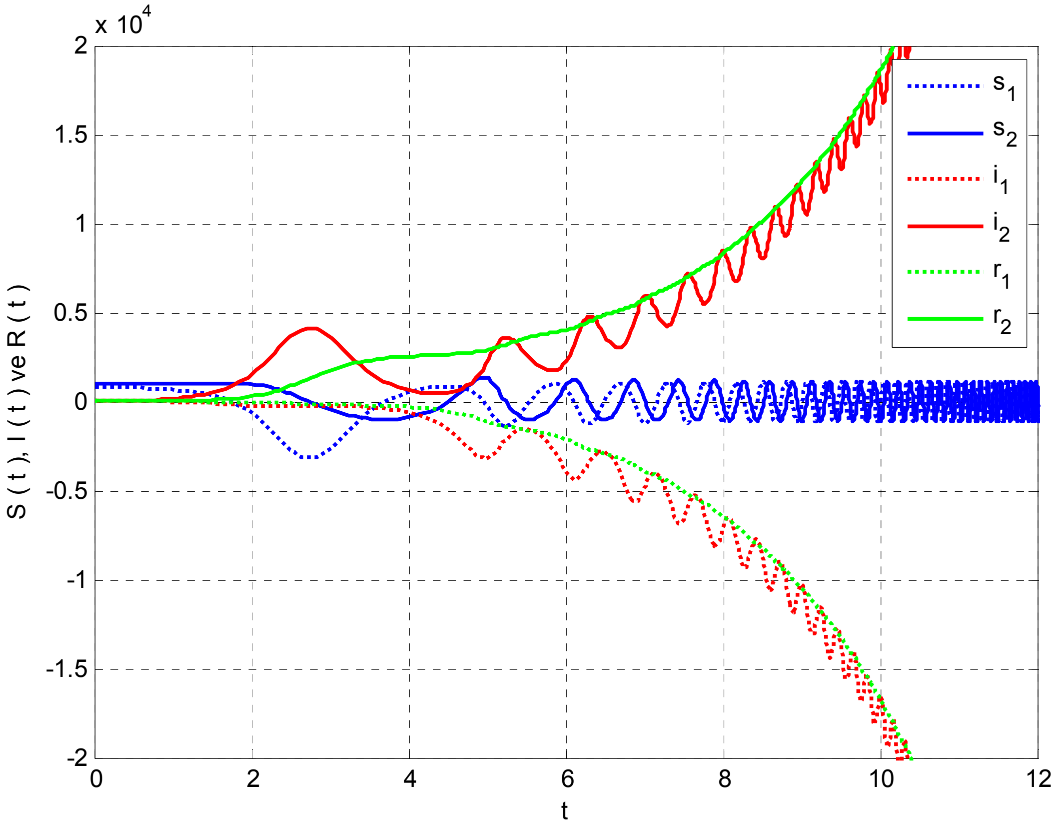
$$s_1'(t,\alpha) = -0.0022 s_2(t,\alpha) i_2(t,\alpha)$$
$$s_2'(t,\alpha) = -0.0022 s_1(t,\alpha) i_1(t,\alpha)$$
$$i_1'(t,\alpha) = 0.0022 s_1(t,\alpha) i_1(t,\alpha) - 0.44 i_2(t,\alpha)$$
$$i_2'(t,\alpha) = 0.0022 s_2(t,\alpha) i_2(t,\alpha) - 0.44 i_1(t,\alpha)$$
$$r_1'(t,\alpha) = 0.44 i_1(t,\alpha)$$
$$r_2'(t,\alpha) = 0.44 i_2(t,\alpha)$$

$\alpha = 0$ için

$s_1(t,0) = 800,\ s_2(t,0) = 1000,\quad i_1(t,0) = 10,\ i_2(t,0) = 20,$

$r_1(t,0) = 0, r_2(t,0) = 0$

olur. $\alpha = 0$ için problemi bilgisayar yardımıyla çözersek aşağıdaki grafiği elde ederiz.



Şekil 3.2. $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$, (1) türevli iken problemin çözümlerinin grafiği

Bu kez $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$, (2) türevli olsun. O zaman;

$$[s_2'(t,\alpha), s_1'(t,\alpha)] = -0.0022[s_1(t,\alpha), s_2(t,\alpha)].[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)]$$

$$[i_2'(t,\alpha), i_1'(t,\alpha)] = 0.0022[s_1(t,\alpha), s_2(t,\alpha)].[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)]$$
$$-0.44[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)]$$

$$[r_2'(t,\alpha), r_1'(t,\alpha)] = 0.44[i_1(t,\alpha), i_2(t,\alpha)]$$

Buradan

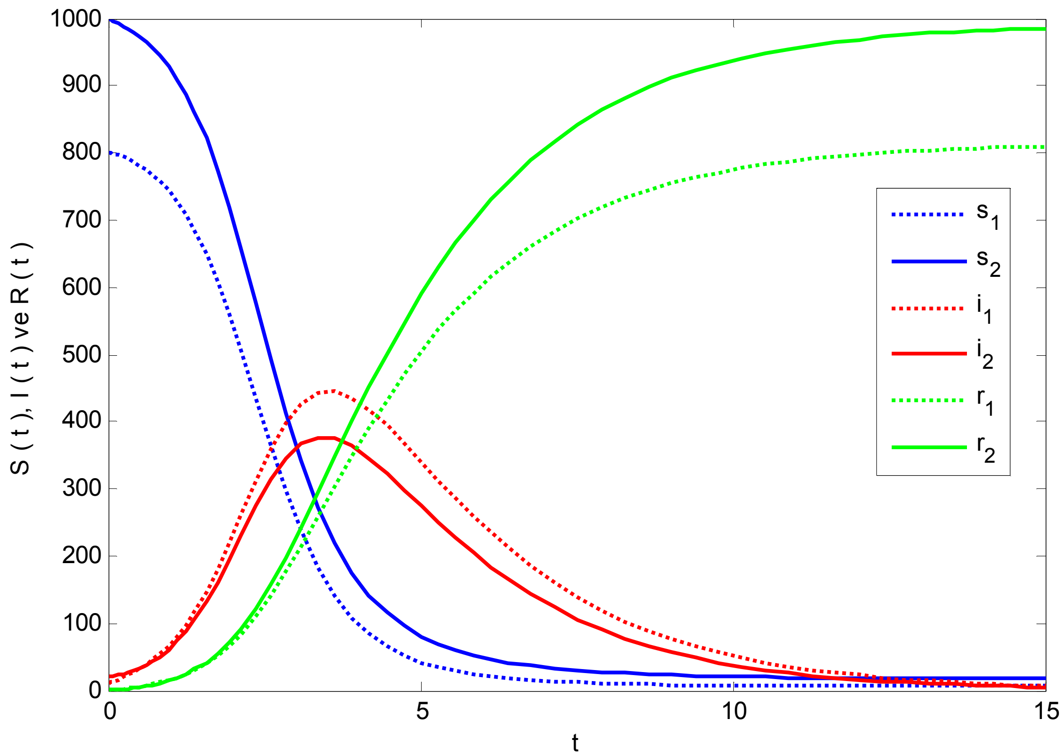
$$s_2'(t,\alpha) = -0.0022 s_2(t,\alpha) i_2(t,\alpha)$$
$$s_1'(t,\alpha) = -0.0022 s_1(t,\alpha) i_1(t,\alpha)$$
$$i_2'(t,\alpha) = 0.0022 s_1(t,\alpha) i_1(t,\alpha) - 0.44 i_2(t,\alpha)$$
$$i_1'(t,\alpha) = 0.0022 s_2(t,\alpha) i_2(t,\alpha) - 0.44 i_1(t,\alpha)$$
$$r_2'(t,\alpha) = 0.44 i_1(t,\alpha)$$
$$r_1'(t,\alpha) = 0.44 i_2(t,\alpha)$$

$\alpha = 0$ için

$s_1(t,0) = 800,\ s_2(t,0) = 1000, \qquad i_1(t,0) = 10,\ i_2(t,0) = 20,$

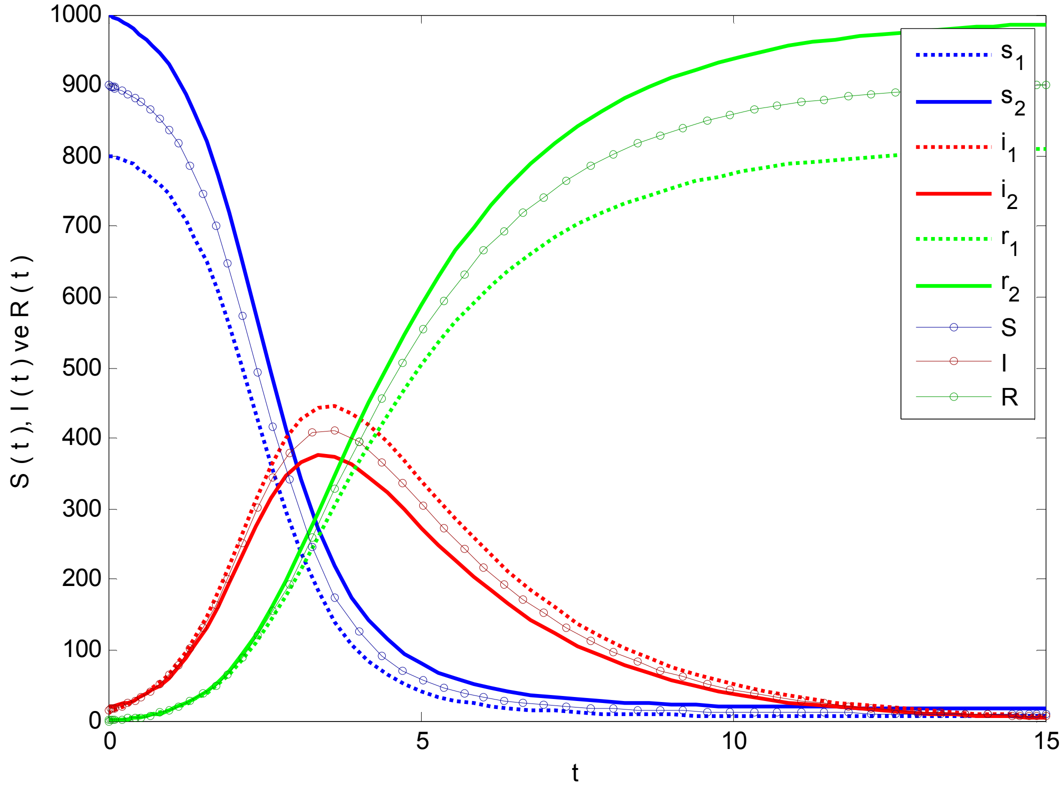
$r_1(t,0) = 0, r_2(t,0) = 0$

olur. $\alpha = 0$ için problemi bilgisayar yardımıyla çözersek aşağıdaki grafiği elde ederiz.



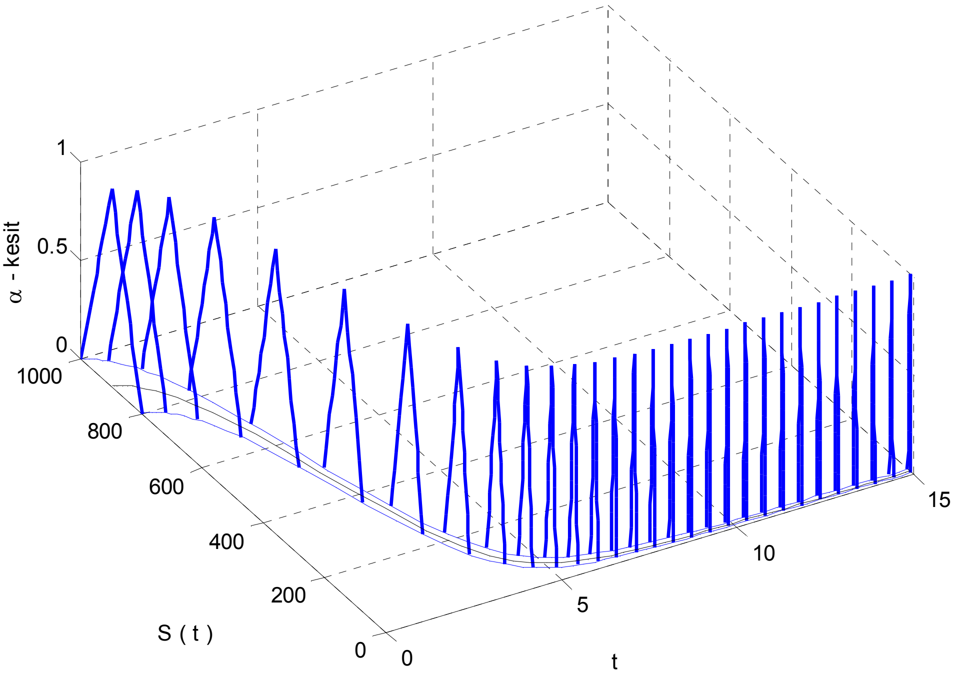
Şekil 3.3. $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$, (2) türevli iken problemin çözümlerinin grafiği

Şimdi klasik çözüm eğrilerine ve $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$, (2) türevli iken kullanarak elde ettiğimiz eğrilere aynı grafik üzerinde bakalım.

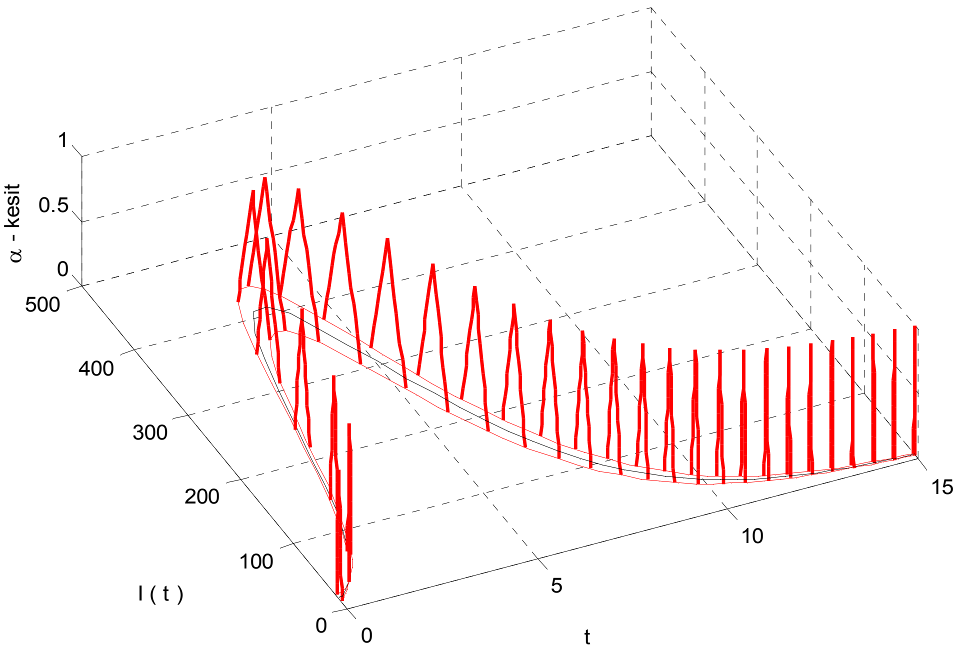


Şekil 3.4. $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$, (2) türevli iken bulanık problem ile klasik problemin, çözümlerinin grafiği

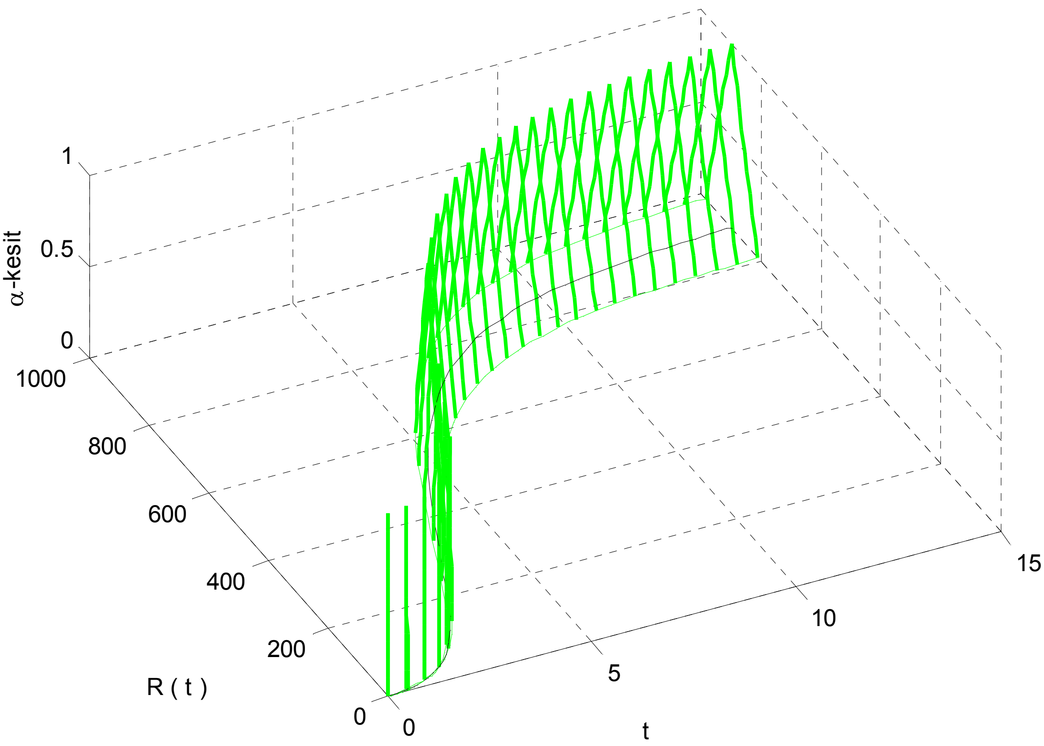
Görüldüğü gibi $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$, (2) türevli iken çözüm eğrileri crisp çözümlerle daha tutarlı davranış sergiliyorlar. Şimdi $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ için çözümlerin grafiklerine 3-boyutlu uzayda bakalım.



Şekil 3.5. $S(t)$

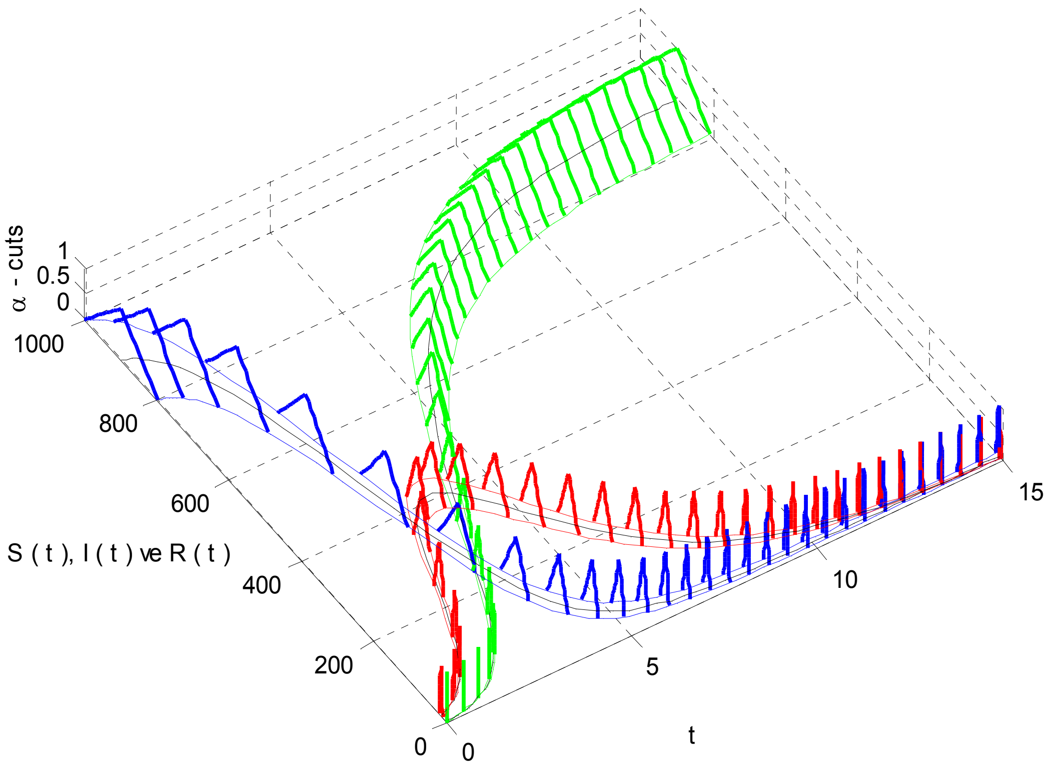


Şekil 3.6. $I(t)$



Şekil 3.7. $R(t)$

Şimdi de üç değişkeni aynı grafik üzerinde görelim.



Şekil 3.8. $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$

Bulanık teoriden bildiğimiz gibi herhangi bir bulanık sayının α-kesit kümesini aldığımızda bu sayının α-kesit kümesinin sol ucu her zaman sağ ucundan küçük veya eşit olmalıdır. Bizim incelediğimiz problemde grafiklerden de gördüğümüz gibi bu kural bazı aralıklarda bozuluyor. Biz böyle yerlerde iki öneri sunuyoruz (1): kuralın bozulduğu aralıkta bulanık çözüm yerine klasik çözümü almayı, (2): çalıştığımız aralıkta α-kesit kümesinin sol ucu için α-kesit kümesinin minimumunu sağ ucu için de α-kesit kümesinin maksimumunu almayı öneriyoruz. Bu durumda klasik çözümün bulanık çözümlerin arasında kalmasını sağlayabiliriz.

SONUÇ

Bu tezde incelediğimiz problemlerde de görüldüğü gibi başlangıç değer problemlerini bulanık başlangıç değer problemi olarak yorumlamak çözümün tekliğini bozuyor. Yani aynı anda bulanık başlangıç değer problemi için birden fazla çözüm bulunabiliyor. Bu bir dezavantaj gibi görünebilir ancak bu durum aslında bize, bulunan çözümlerden üzerinde çalıştığımız gerçek problemin yapısına en uygun olan çözümü seçebilme imkanını vermektedir [6, 27]. Bu da bulanık teorinin zenginliğidir.

KAYNAKLAR

[1] Puri, M., Ralescu, D., Differential and fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983) 552–558.

[2] Kaleva, O., Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 301–317.

[3] Kaleva, O., A note on fuzzy differential equations, Nonlinear Anal. 64 (2006) 895–900.

[4] Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., On the new solution of fuzzy differential equations, Chaos Solitons Fractals 38 (2006) 112–119.

[5] Bede, B., Gal, S.G., Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 581–599.

[6] Bede, B., Rudas, I.J., Bencsik, A.L., First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability, Inform. Sci. 177 (2007) 1648–1662.

[7] Lee, K.H., *First course on fuzzy theory and applications,* Springer, Heidelberg, (2005).

[8] Pedrycz, W. & Gomide, F., *Toward Human Centric Computing,* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, (2007).

[9] Allahviranloo, T., Kiani, N.A., Barkhordari, M., Toward the existence and uniqueness of solutions of second-order fuzzy differential equations,Information Sciences 179 (2009) 1207_1215.

[10] Khastan, A., Bahrami, F. and Ivaz, K., New Results on Multiple Solutions for *N*th-Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability, Boundary Value Problems Volume 2009, Article ID 395714, 13 pages

[11] Zadeh, L.A., 1965, “Fuzzy sets,” Information and Control, 8, pp. 338–353.

[12] Anastassiou, G.A., Gal, S.G., On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weierstrass-type, J. Fuzzy Math. 9 (3) (2001) 701–708.

[13] Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., Rojas, M.A., Medar,Fuzzy differential equations with generalized derivative IEEE (2008) 978–1-4244-2352.

[14] Khastan, A., Nieto, Juan J., A boundary value problem for second order fuzzy differential equations, Nonlinear Anal. 72 (2010), 3583-3593

[15] Zadeh, L.A., Toward a generalized theory of uncertainty (GTU) – an outline, Information Sciences 172 (2005) 1–40.

[16] Chang, S.L., Zadeh, L.A., On fuzzy mapping and control, IEEE Transaction on Systems Man Cybernetics 2 (1972) 30–34.

[17] Dubois, D., Prade, H., Towards fuzzy differential calculus: Part 3, Differentiation, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982) 225–233.

[18] Hüllermeier, E., "An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems," *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 5, no. 2, pp. 117–137, 1997.

[19] Ross, T.J., Fuzzy Logic With Engineering Applications, John Wiley & Sons, Ltd., The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, England, (2004).

[20] Gal, S.G., Approximation theory in fuzzy setting, in: G.A. Anastassiou (Ed.), Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC Press, 2000, pp. 617–666.

[21] Wu, C., Gong, Z., On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions I, Fuzzy Sets and Systems 120 (2001) 523–532.

[22] Zadeh, L.A., The concept of a linguistic variable and its applications in approximate reasoning, Information Sciences 8 (1975) 199–251.

[23] Bansal, A., Some Non Linear Arithmetic Operations on Triangular Fuzzy Numbers, Advances in Fuzzy Mathematics, ISSN 0973-533X Volume 5, Number 2 (2010), pp. 147–156

[24] Linda J.S. Allen, An Introduction to Mathematical Biology, Pearson, 2007.

[25] J.D. Murray Mathematical Biology I. An Introduction 3rd Edition, Springer, 2001

[26] Akın, Ö., Oruç, Ö., Sir Epidemic Model With Fuzzy Initial Values, The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society, Book of abstracts p 415, Baku, Azerbaijan, July 2011.

[27] Khastan, Alireza (2010, April 26). Fuzzy Differential Equations. *SciTopics*. Retrieved July 5, 2011, from http://www.scitopics.com/Fuzzy_Differential_Equations.html

[28] Misukoshi, M., Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., Bassanezi, R.C., Fuzzy differential equations and the extension principle, Inform. Sci. 177 (2007) 3627–3635.

[29] Oberguggenberger, M., Pittschmann, S., Differential equations with fuzzy parameters, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems 5 (1999) 181–202.

EK A: Terimler Sözlüğü

Türkçe Terim	İngilizce Terim
Alt normal	Subnormal
Bulanık	Fuzzy
Bulanık küme	Fuzzy set
Çekirdek	Core
Destek	Support
Klasik küme	Crisp set
Normallik	Normality
α-Kesit	α-Cut

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ORUÇ, Ömer
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 21.04.1986 Diyarbakır
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 292 43 28
Faks	: 0 (312) 292 40 76
e-mail	: ooruc@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Dicle Üniversitesi/Matematik Öğretmenliği	2009

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-2010	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Akın, Ö., Oruç, Ö., Sir Epidemic Model With Fuzzy Initial Values, The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society, Book of abstracts p 415, Baku, Azerbaijan, July 2011.