

**GENEL GECİKMELİ BİR DİFERENSİYEL DENKLEMİN
HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ**

HANDE AKKOCAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2011

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKIN
Anabilim Dalı Başkanı

Hande AKKOCAOĞLU tarafından hazırlanan GENEL GECİKMELİ BİR DİFERENSİYEL DENKLEMİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

1. Tez Danışmanı

Doç. Dr. Canan Ç. KARAASLANLI

2. Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ömer AKIN

Üye : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN

Üye : Doç. Dr. Canan Ç.KARAASLANLI

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

.....

Hande AKKOCAOĞLU

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik
1. Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN
2. Tez Danışmanı : Doç. Dr. Canan Ç. KARAASLANLI
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Ağustos 2011

Hande AKKOCAOĞLU

**GENEL GECİKMELİ BİR DİFERENSİYEL DENKLEMİN
HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ**

ÖZET

Bu tez çalışmasında dinamik sistemler için büyük öneme sahip olan bir genel gecikmeli diferensiyel denklem için τ gecikme parametresi, çatallanma parametresi olarak seçilerek Hopf çatallanma analizinin yapılması amaçlanmıştır. Bu analizi yapmak için E. Hopf'un teorisine bir alternatif sunan [26] numaralı referansta bahsedilen teori uygulanmıştır. Bu analize ek olarak, Poincaré Normal Form ve Center Manifold Teoremi kullanılarak τ_0 çatallanma değerinde periyodik çözümün yönü, kararlılığı ve periyodu hesaplanmıştır. Bu incelemeden elde edilen sonuçlar yapılan nümerik çalışmalar ile desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hopf çatallanma, çatallanma, gecikmeli diferensiyel denklem.

University : TOBB Economics and Technology University
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Mathematics
Supervisor : Associate Professor Hüseyin MERDAN
Co-Supervisor : Associate Professor Canan Ç. KARAASLANLI
Degree Awarded and Date : M.Sc. – August 2011

Hande AKKOCAOĞLU

**HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF A DEAYED
DIFFERENTIAL EQUATION**

ABSTRACT

In this thesis study, taking delay parameter τ as a bifurcation parameter, Hopf bifurcation analysis of a general delayed differential equation that has a crucial role for dynamical systems is aimed. To do this, theory in [26], which gives an alternative method to E. Hopf, is applied. In addition to this analysis, the direction, stability and period of a periodic solution of a system is evaluated at bifurcation value τ_0 by using Poincaré Normal Form and Center Manifold Theorem. The results, which are obtained from this analysis, are supported by numerical studies.

Keywords: bifurcations, Hopf bifurcation, delayed differential equation.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocalarım Doç. Dr. Hüseyin MERDAN ve Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI'ya yine kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve asistan arkadaşlarıma, ayrıca beni her zaman destekleyen sevgili aileme özellikle de biricik kardeşim Hale AKKOCAOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ	viii
NOTASYONLAR	ix
BÖLÜM 1	1
1. GİRİŞ	1
1.1. Tez Çalışmasının Amacı	1
1.2. Gecikmeli Diferensiyel Denklemlere Genel Bir Bakış	7
BÖLÜM 2	13
2. LİTERATÜR TARAMASI	13
2.1. Çatallanma Teorisi	13
2.1.1. Kesikli Sistemler İçin Çatallanma Teorisi	14
2.1.1.1. Fark Denklemleri İçin Çatallanma Çeşitleri	14
2.1.2. Sürekli Sistemlerde Çatallanma Teorisi	18
2.1.2.1. Birinci Mertebeden Denklemler İçin Çatallanma Teorisi	18
2.1.2.2. Hopf Çatallanma	20
2.2. Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma	24
2.2.1. Adi Diferensiyel Denklem için μ_2 , β_2 ve γ_2 Katsayılarının Hesaplanması	31
2.3. Gecikmeli Diferensiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma Analizi	37
BÖLÜM 3	47
3. $dN(t)/dt = aNtfn - \tau$ DENKLEMİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ	47

3.1. Kararlılık ve Hopf Çatallanma Analizi	47
3.2. Hopf Çatallanmanın Yönü ve Kararlılık Analizi	55
3.3. Nümerik Çalışmalar	85
BÖLÜM 4	90
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	90
KAYNAKLAR	92
EKLER	95
A. CENTER MANİFOLD TEOREMİ	95
B. MATLAB KODLARI	99
ÖZGEÇMİŞ	100

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Modelleme Süreci	2
Şekil 1.2. Bükülmüş Çubuk	5
Şekil 1.3. Yitimsiz İletim	8
Şekil 1.4. Elektromanyetik Sistem	9
Şekil 2.1. Fold Çatallanma	15
Şekil 2.2. Süperkritik Tırmık Çatallanma	16
Şekil 2.3. Transkritik Çatallanma	17
Şekil 2.4. Flip Çatallanma	17
Şekil 2.5. Fold Çatallanma	19
Şekil 2.6. Hopf Çatallanma	21
Şekil 2.7. Süperkritik Hopf Çatallanma	22
Şekil 2.8. Subkritik Hopf Çatallanma	23
Şekil 3.1. $\tau = \pi/4$ için Popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği	87
Şekil 3.2. $\tau = \pi/2$ için Popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği	88
Şekil 3.3. $\tau = 3\pi/4$ için Popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği	89
Şekil a.1. Hopf çatallanmada iki boyutlu center manifold	96

NOTASYONLAR

Bu çalışmada kullanılan notasyonlar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Notasyonlar	Açıklama
x	Durum değişkeni
$N(t)$	t anındaki popülasyon yoğunluğu
τ	Gecikme ve çatallanma parametresi
\mathbb{R}^n	n -boyutlu reel Öklid uzayı
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	$[a, b]$ kapalı aralığından \mathbb{R}^n uzayına sürekli dönüşümlerin Banach uzayı
L	Sürekli lineer fonksiyonel
I	Birim matris
v	Çatallanma parametresi
$\alpha(v_c)$	Çatallanma değerindeki öz değerın reel kısmı
$\omega(v_c)$	Çatallanma değerindeki öz değerın sanal kısmı
$A(v)$	Sistemin çatallanma parametresine bağlı olan Jakobian matrisi
D	$n - 2$ tane öz değeri veren $(n - 2 \times n - 2)$ tipinde matris
$c_1(0)$	Lyapunov katsayısı
μ_2	Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen parametre
β_2	Çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen parametre
τ_2	Çatallanan periyodik çözümün periyodunu belirleyen parametre
$\lambda(\mu)$	Çatallanma değerindeki öz değeri
$C^k[-r, 0]$	$[-r, 0]$ aralığında tanımlı, bileşenleri k -kez sürekli türevlere sahip n -boyutlu, reel, vektör değerli fonksiyonlar
$\sigma(\mu)$	Sistemin öz değerlerinin ailesi
$A(0)$	$\mu = 0$ değerine karşılık gelen operatör

Notasyonlar	Açıklama
q	λ öz değerine karşılık gelen öz vektör
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
C_0	Center manifold
N_2	Sistemin ilgilenilen denge noktası
$y. m. t.$	Mertebesi ikiden büyük olan terimleri göstermektedir.
M	a, N_2 ve $f'(N_2)$ terimlerinin çarpımından oluşan sabit
τ_0	Çatallanma değeri
m_0	f fonksiyonunun $\mu = 0$ iken $x = 0$ noktası civarında Taylor açılımındaki kuadratik terimleri içeren fonksiyon

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

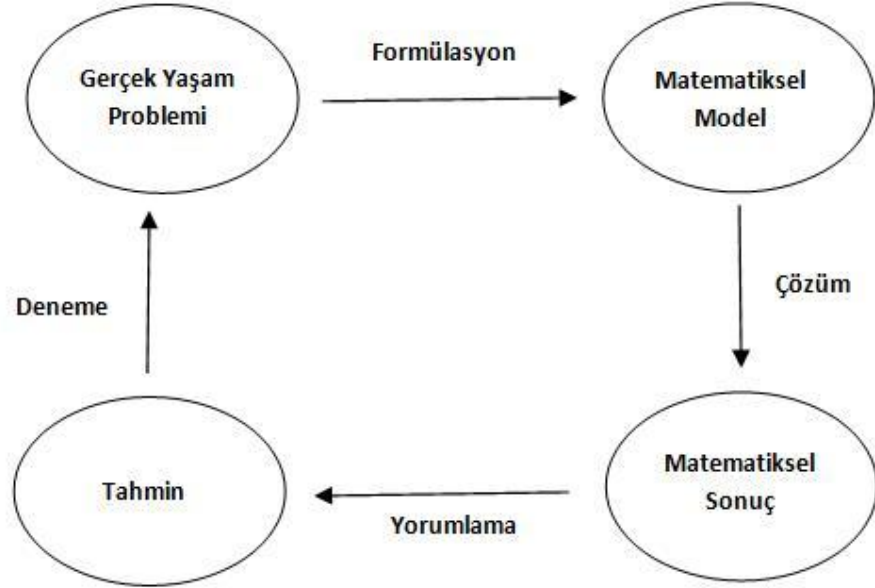
1.1. Tez Çalışmasının Amacı

İnsanların doğayı anlama çabaları ilkel çağlardan beri süregelen ve insanoğlu doğa olaylarını açıklamak için kendilerince fikir yürütmüşler kimi zaman doğüstü bir güce inanmışlar kimi zaman ise bilime dayanarak açıklamaya çalışmışlardır. Bu ise matematik, fizik, kimya, biyoloji gibi temel bilimlerin ortaya çıkmasında öncü olmuş ve zamanla bu bilimler bir noktada birleşerek birbiri ile etkileşim içinde olan biofizik, matematiksel biyoloji gibi alanların doğmasına sebep olmuştur. Genel olarak uygulamalı matematik altında toplanan bu alanlar, matematiksel modelleme tekniklerini kullanarak doğa olaylarını anlamaya ve onları açıklamaya çalışmışlardır.

Bir matematiksel model, nüfus artışı, bir ürüne olan talep, düşen bir nesnenin hızı, kimyasal tepkimedeki bir kimyasalın konsantrasyonu, bir bebeğin yaşam süresi beklentisi gibi olayların fonksiyonlar veya eşitlikler ile matematiksel ifadesidir. Modelin amacı olayları anlamak ve belki de gelecekteki gelişmeleri hakkında bir öngöründe bulunmaktır. Bir matematiksel model oluşturma sürecini aşağıdaki gibi verebiliriz [1,2]:

1. Göz önüne alınan gerçek yaşam problemini doğru şekilde yansıtabilecek matematiksel ifadenin oluşturulması: Gerçek bir problem verildiğinde ilk yapılması gereken buradaki bağımlı ve bağımsız değişkenleri belirleyip isimlendirmek, matematiksel olarak ifade edilecek kadar olayı basitleştirerek matematiksel modeli oluşturmaktır. Fiziksel olay hakkındaki bilgi ve matematiksel beceri ile değişkenleri ilişkilendiren eşitlikler elde edilir.

2. Modelin davranışını anlayabilmek için matematiksel tekniklerin uyarlanması: Analiz, diferensiyel denklemler teorisi gibi matematik bilgileri modele uyarlanır ve matematiksel sonuçlar elde edilir.
3. Modelin analizinden elde edilen sonuçların yorumlanması: Gerçek yaşam problemi için mantıklı sonuçların elde edilip edilmediğinin anlaşılması için modelin yorumlanması yani, açıklamalar ve tahminler sunulması gerekmektedir.
4. Modelin problem ile karşılaştırılması: Yukarıdaki yöntemler ile bulunan matematiksel sonuçlar ve yapılan tahminler, toplanan gerçek veriler ile karşılaştırılmalıdır. Eğer modelden elde edilen bulgular, gerçek veriler ile uyum içerisinde değil ise model tekrar ele alınarak iyileştirilmeli, bu da yeterli gelmez ise sürece yeniden başlayarak yeni bir model önerilmelidir.



Şekil 1.1. Modelleme Süreci

Matematiksel bir model hiçbir zaman fiziksel bir olayın gerçek betimlenişi değildir, yalnızca idealleştirilmesidir. İyi bir model gerçeğin, geçerli tahminler yapılabilmesine ve matematiksel hesapların kullanılmasına olanak tanıyacak kadar

basitleştirilmiş, ancak değerli sonuçlar elde edilecek kadar da kesin olan modeldir. Modelin sınırlarının bilinmesi önemlidir. Son sözü doğa yasaları söyleyecektir.

Gerçek yaşamdaki ilişkilerin modellenmesinde çok farklı fonksiyonlar kullanılabilir. Dinamik sistemlerin matematiksel modelleri, zaman ve konum gibi etkenlere bağlı olarak değiştiğinden ötürü fark denklemleri, adi diferensiyel denklemler veya kısmi diferensiyel denklemler kullanılarak oluşturulabilir. Bu tip sistemler incelenilen zamanın model üzerindeki etkisine göre kesikli ve sürekli sistemler olmak üzere iki ana çatı altında ele alınmıştır. Örneğin, kesikli sistemler denince ilk akla gelen doğa olaylarının fark denklemleri yardımı ile modellenmesidir. Sürekli sistemlerde ise diferensiyel denklemler kullanılarak modelleme yapılmaktadır [1, 3-14].

Bilim camiası dinamik sistemlerin modellenmesi üzerinde yoğunlaşmaya başlayınca mevcut olan modellerde eksiklikler olduğu fark edilmiş ve onları iyileştirme yolları aranmıştır. Örneğin, bir popülasyonun büyümesi, $N(t)$ popülasyonun t anındaki nüfusunun yoğunluğu olmak üzere

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t))$$

tipinde bir diferensiyel denklemi ile verilirken, sadece o anda bulunanların değil, daha önceki kuşakların da popülasyon büyümesine etkisinin olabileceği ya da şu anda popülasyonun genişlemesine katkısı olmayan bir kuşağın birkaç yıl sonra popülasyona katkısının olabileceği gözlemlenmiş ve bu tip doğa olaylarını modellemek için ise gecikmeli diferensiyel denklem olarak adlandırılan denklemler kullanılmıştır.

Fark denklemleri, adi ve kısmi diferensiyel denklemler popülasyon dinamiği çalışmalarında önemli bir role sahiptir ve gelecekteki araştırmalar için de önemini koruyacaktır. Fakat iyileştirilmiş modeller, popülasyon dinamiğinin geçmiş durumlarını, yaşadıkları çevrenin popülasyon üzerindeki etkisini de içermelidir. Gecikmeli diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin birçok önemli özelliğinin anlaşılması, modellemede bu denklemlerin kullanımını aktifleştirmiştir.

Diferensiyel denklemler içeren uygulamalarda diferensiyel denklemin parametre içermesi ve genellikle bu parametrelerin değerlerinin yaklaşık olarak bilinmesi sık karşılaşılan bir durumdur. Bu nedenden ötürü çözümlerin davranışı üzerinde çalışmak ve bunların parametreye bağlılığının incelenmesi çok önemlidir [15]. λ Allee etkisi, N_t , t anındaki popülasyon yoğunluğu olmak üzere

$$N_{t+1} = \lambda N_t f(N_t)$$

ile verilen bir fark denkleminde,

$$N_{t+1} = \lambda N_t f(N_{t-\tau})$$

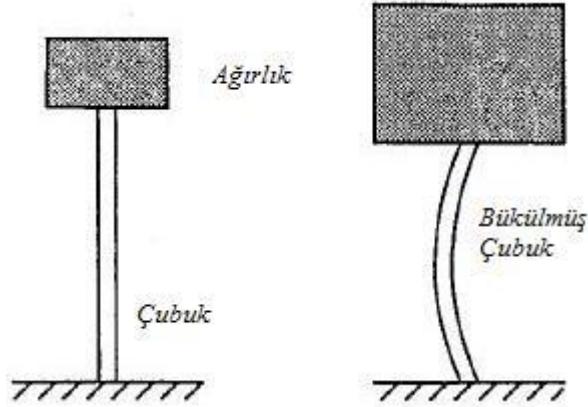
ile verilen gecikmeli fark denkleminde ve

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - \tau))$$

ile verilen gecikmeli diferensiyel denkleminde Allee etkisinin, popülasyon sistemlerinin denge noktalarının kararlılık yapısına olan etkisi incelenmiş ve bazı koşullar sağlandığında Allee etkisinin sistemin kararlılığını artırdığı gözlenmiştir [16-19].

Yapılan çalışmalar, “Sistemin parametresi değişirken, dinamik sistemin davranışı nasıl değişir?” sorusunu akıllara getirmiştir. Çatallanma teorisi, bu soruya cevap vermeye çalışır. Modelin parametreleri, bir açıdan sistemi kontrol eden düğmeler gibi düşünülebilir. Çatallanma teorisi ise bu düğme döndürüldüğünde sistemin nasıl değiştiğini söyler. Birçok insan yapımı sistem, onu kontrol eden düğme döndürüldüğünde tahmin edilebilen davranışlar sergileyecek şekilde tasarlanmıştır. Bir radyonun ses düğmesi buna örnek olarak verilebilir. Parametre değiştikçe

sistemin niteliksel yapısı da değişir yani, yeni denge noktaları ortaya çıkabildiği gibi var olan denge noktaları kaybolabilir veya denge noktalarının kararlılık yapıları değişebilir. Bu niteliksel değişimlere çatallanma ve bu değişimin meydana geldiği parametre değerine çatallanma değeri denir. Kontrol parametreleri değiştikçe modelde kararsız bir yapı görülebilir. Örneğin Şekil 1.2.'deki sistemi düşünelim. Çubuğun tepesinde küçük bir ağırlık var iken, çubuk sahip olduğu pozisyonu korur ve dikey halde kalır. Fakat çubuğun yükü artırıldığında, çubuğun sahip olduğu pozisyon kararsızlaşır, yani çubuk bükülür. Bu modelde ağırlık kontrol parametresi- çatallanma parametresi- ve çubuğun pozisyonu-bükülmesi- dinamik değişken rolünü oynamaktadır [20].



Şekil 1.2. Bükülmüş Çubuk

Modeller daha gerçekçi hale geldikçe aynı zamanda anlaşılması zor hale gelmektedir. Bazı denklemler analitik olarak çözülebilirken bazıları çözülememektedir. Böyle bir durum söz konusu olduğunda ise çalışılan sistemin çözümünün varlığı araştırılıp sistemin kararlılık yapısı incelenerek modelin yapısı anlaşılmaya çalışılır [21-23].

Dinamik sistemlerde kendini tekrar eden süreçler söz konusudur. Böyle bir durumda sistem periyodik çözümlere sahiptir. Periyodik çözümlerin varlığını inceleyen teoriler arasında en önemlilerinden biri E. Hopf tarafından geliştirilmiştir. Hopf, parametreye bağlı bir genel diferensiyel denlemin hangi koşullar altında periyodik

çözümler verdiğini incelemiş ve Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen teoremi öne sürmüştür. Bu konu üzerinde gecikmeli av-avcı sistemlerinin kararlılık yapısından [24], kimyasal tepkimelere [25] kadar birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya devam edilmektedir.

Bu tez çalışmasında ise $\tau, a > 0$ ve f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)f(x(t - \tau)) \quad (1.1)$$

tipinde bir genel gecikmeli diferensiyel denklemi için τ , çatallanma parametresi olarak alındığında sistemin yapısında meydana gelen değişimler incelenerek; Hopf'un orijinal teoremine bir alternatif sunan Hassard'ın vermiş olduğu Hopf çatallanma teorisi kullanılarak (1.1) denkleminin çatallanma analizini yapmak amaçlanmıştır [26].

Bu tezin akışı aşağıdaki gibidir.

İlk bölümde, ele alınan problem hakkında genel bilgiler verilmesi planlanmıştır. Bu kapsamda yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmiş ve kısaca gecikmeli diferensiyel denklemlere değinilmiştir.

İkinci bölümde yapılan tezin temel noktası olan Hopf çatallanma teorisi detaylıca incelenmiştir. İlk olarak, çatallanmanın genel tanımı verilmiş, daha sonra fark denklemleri ve adi diferensiyel denklemler için çatallanma tiplerinden, özel olarak da Hopf çatallanmadan bahsedilmiştir. Son olarak da, Hopf çatallanma teorisinin gecikmeli diferensiyel denklemlere uyarlanmasından söz edilmiştir.

Üçüncü bölümde üzerinde çalışılan problem tanıtılmış, Center Manifold Teoremi (bakınız: Ek A) ve Poincaré Normal Formu kullanılarak bu tip bir modelde Hopf çatallanmanın görülmesi için gerekli koşullar verilmiştir. Ayrıca yapılan nümerik çalışmalar ile elde edilen sonuçların tutarlılığı gösterilmiştir.

Son kısımda ise teoriden ve nümerik çalışmalardan elde edilen bulgular değerlendirilmiştir.

1.2. Gecikmeli Diferensiyel Denklemlere Genel Bir Bakış

Gecikmeli diferensiyel denklem sistemleri, bilimin özellikle de biyolojik alanlarında önemli bir konuma sahiptir. Belirli bir girdi veya uyarıya biyolojik sistemin cevabı genellikle hemen olmaz, biraz gecikmeli olur. Örneğin, farmakokinetik modelde, ilacın dolaşım sistemine girmesinden önce bir gecikme olabilir. Uyarımı takiben, reaksiyon oluşumuna kadar sabit bir zaman varsa gecikme, sabit zaman ya da ayırık gecikme olarak modellenebilir. Eğer uyarıya verilen tepki sabit zaman periyodundan sonra değil de zamanın sürekli bir aralığı boyunca gerçekleşiyorsa sürekli gecikme olarak adlandırılır.

Biyoloji, tıp, kimya, fizik, mühendislik ve ekonomi gibi hem doğal hem de insan eli ile oluşturulmuş birçok süreç, zaman gecikmesi içerdiğinden gecikmeli diferensiyel denklem teorisi gündeme gelmiştir. İstenilsin ya da istenilmesin, zaman gecikmesi neredeyse her durumda karşımıza çıkmaktadır. Onu göz ardı etmek demek gerçeği göz ardı etmek demektir.

Zaman gecikmesine doğadan verilebilecek en güzel örnek ormanlık alanların ağaçlandırılmasıdır. Bir ağaç kesildikten sonra yerine dikilenin her anlamda olgunluğa erişmesi yirmi yıl gibi bir sürede gerçekleşmektedir. Hatta sekoya gibi bazı ağaç türlerinde bu süre daha fazla olabilmektedir. Bu süreci inceleyen herhangi bir matematiksel model, zaman gecikmesini içermek zorundadır [23].

Birçok uygulamada, ele alınan sistemin gelecekteki durumu, geçmişinden bağımsız sadece şimdiki zamanı göz önünde bulundurularak, yani nedensellik ilkesi ile elde edilir. Bu probleme yapılan ilk yaklaşımdır. Daha gerçekçi modeller elde edilmek isteniyorsa sistemin geçmişi de göz önünde bulundurulmalıdır.

İncelenilen problemde modele, sistemin geçmişi katılmıyor ise fark, adi ya da kısmi diferensiyel denklemler kullanılırken; sistemin geçmiş durumu ilave edildiğinde ise gecikmeli fark, adi veya kısmi diferensiyel denklemler ve ya gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklemler kullanılır.

Dinamik sistemin geçmişine bağlı en basit diferensiyel denklem

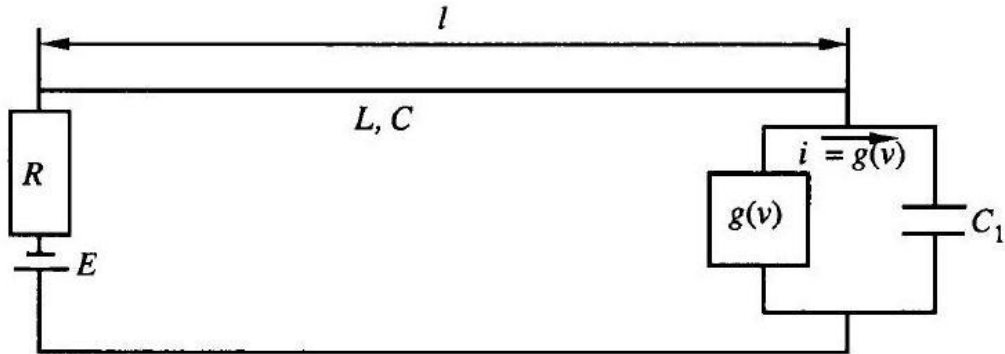
$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (1.2)$$

ile gösterilen gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklemdir. Wright denklemi ya da Gecikmeli Lojistik Denklem olarak da adlandırılan

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{x(t - \tau)}{K} \right] \quad (1.3)$$

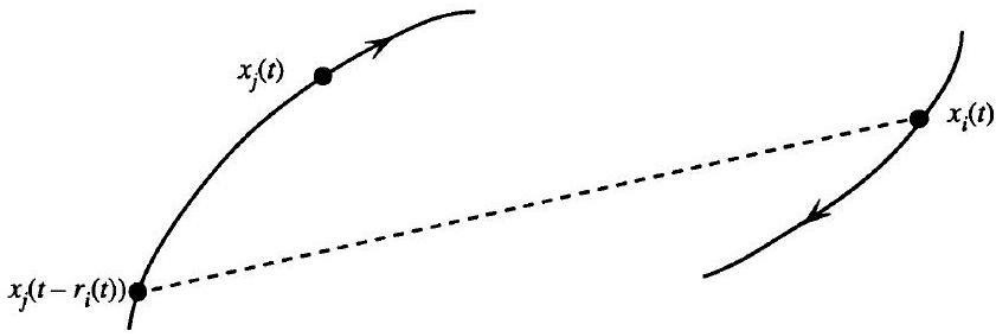
Hutchinson denklemi, (1.2) denkleminin en bilinen örneklerindedir. Lord Cherwell, (1.3) denklemi ile asal sayıların dağılımı için olasılık metotlarının kullanımında karşılaşmıştır. Aynı zamanda bu denklem, tek türden oluşan bir topluluğun büyümesinin zaman gecikmesi içeren modeli olarak da değerlendirilebilir.

l uzunluklu elektrik kablosunun bir ucu R dirençli E güç kaynağına, diğer ucu ise C_1 kondansatörü (yoğunlaştırıcı) tarafından oluşturulan salınımlı devreye bağlı olan bir yitimsiz sistemde gecikme kablonun uzunluğuna bağlı olarak akımın bir uçtan diğer uca ulaşması esnasında geçen zamanı göstermektedir [28, 29].



Şekil 1.3. Yitimsiz İletim

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin bir başka uygulaması ise elektrodinamik problemlerde karşımıza çıkmaktadır. Sadece bir diğ erinin oluşturdu ğ u alanın etkisi ile hareket eden iki yüklü parçacık içeren bir sistemde gecikme, elektromanyetik etkinin bir parçacıktan diğ erine ulaşması sırasında geçen zamanı temsil etmektedir [30].



Şekil 1.4. Elektromanyetik Sistem

Bu örneklere benzer olarak gecikmeli diferensiyel denklemlerin dinamik sistemlere uygulanmasına birçok örnek verilebilir [6, 31-35].

Adi diferensiyel denklemler teorisinde bahsedilen tanımların ve teoremlerin benzerleri, gecikmeli diferensiyel denklemler için de verilebilir. Bunlardan bazılarını kısaca değ inilecektir.

\mathbb{R}^n , n -boyutlu reel Öklid uzayı; $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, $[a, b]$ kapalı aralığ ından \mathbb{R}^n uzayına sürekli dönüşümlerin Banach uzayını göstermektedir. Bu uzayda tanımlı norm ise $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ için, $\|\phi\| = \sup_{a \leq \theta \leq b} |\phi(\theta)|$ ile verilir. $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$, $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ ve $t \in [\sigma, \sigma + A]$ için $x_t \in C$, $\theta \in [-r, 0]$ olmak üzere $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ olarak tanımlanır. Bu takdirde $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere fonksiyonel diferensiyel denklem

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (1.4)$$

eşitliği ile verilir.

Tanım 1.1: $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in \Omega$ ve $t \in [\sigma, \sigma + A]$ olmak üzere x_t , (1.4) denklemini sağlıyor ise x fonksiyonuna (1.4) denkleminin çözümü denir.

Tanım 1.2: $L(t, x_t)$, x_t değişkenine göre lineer olmak üzere

$$f(t, x_t) = L(t, x_t) + h(t)$$

şeklinde yazılabiliyor ise (1.4) denklemine **lineer**; $h(t) = 0$ ise **homojen**; $h(t) \neq 0$ ise **homojen olmayan denklem** denir. Ayrıca $f(t, x_t)$, t değişkenine bağlı olmayan bir fonksiyon ise **otonom gecikmeli diferensiyel denklem** aksi halde ise **otonom olmayan gecikmeli diferensiyel denklem** denir.

Bahsedilen bu özelliklere ek olarak L operatörü Riesz Temsil Teoremi kullanılarak yeniden tanımlanabilir. X ve Y Banach uzayları için $\mathcal{L}(X, Y)$, X uzayından Y uzayına tanımlı sınırlı lineer dönüşümlerin Banach uzayını göstermek üzere $\lambda \in \Lambda$ ve $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ için Riesz Temsil Teoremi'nden

$$L\phi = \int_{-r}^0 \phi(\theta) d_\theta \eta(\lambda, \theta)$$

olacak şekilde sınırlı değişimlerin $[-r, 0]$ üzerinde $n \times n$ tipinde η matris fonksiyonu vardır. Burada d_θ ifadesi integral değişkeninin θ değişkeni olduğunu göstermektedir.

Diferensiyel denklemlerde olduğu gibi gecikmeli diferensiyel denklemlerinde lineer olmayan çeşitleri bulunmaktadır ve onların çözümlerini de elde etmek her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda yukarıda bahsettiğimiz teorem kullanılarak sistem

lineer hale getirilip incelenebilir. Dolayısı ile gecikmeli diferensiyel denklemler ile ifade edilen sistemlerde kararlılık analizi gündeme gelmektedir.

Tanım 1.3: $L: C \rightarrow \mathbb{R}^n$, sürekli lineer bir fonksiyonel olmak üzere

$$\det(\lambda I - L(e^\lambda I)) = 0 \quad (1.5)$$

denklemine

$$\dot{x}(t) = Lx_t \quad (1.6)$$

denkleminin **karakteristik denklemi** ve (1.5) denkleminin köklerine ise (1.6) denkleminin **öz değerleri (karakteristik kökleri)** denir.

Karakteristik üstelden ötürü, adi diferensiyel denklemlerin aksine gecikmeli diferensiyel denklemler spektral analizi dahil eden sonsuz çoklukta öz değere sahiptir. Örneğin sonsuz sayıda öz değer olmasına rağmen kompleks düzlemde dikey eksenin sağ tarafında sonlu sayıda öz değer vardır.

Teorem 1.1: (1.4) denkleminin sağ tarafındaki f fonksiyonu her $t \in \mathbb{R}$ için $f(t, 0) = 0$ koşulunu sağlasın. Bu takdirde

- (i) $\sigma \in \mathbb{R}$, $t \geq \sigma$, $\varepsilon > 0$ ve $\phi \in N(0, \delta)$ için $x_t(\sigma, \phi) \in N(0, \varepsilon)$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, \sigma)$ varsa $x = 0$ denge çözümü kararlıdır.
- (ii) Eğer (1.4) denklemi hem kararlı hem de $\phi \in N(0, b_0)$ için $t \rightarrow \infty$ iken $x_t(\sigma, \phi) \rightarrow 0$ olacak şekilde $b_0 = b(\sigma) > 0$ değeri mevcut ise, $x = 0$ denge çözümü asimptotik kararlıdır.

Bu verilen açıklamalardan diferensiyel denklemler teorisinde yer alan kararlılık analizi, çözümlerin varlığı gibi konuların da gecikmeli diferensiyel denklemlere uygulanabileceği görülmektedir. Bu tip denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar

1920'li yıllara dayanmaktadır. Örneğin, Wright, yazmış olduğu makale grubunda [36-39], lineer ve lineer olmayan fark diferensiyel denklemler için genel bir teori ve yapmış olduğu çalışmalara örnek vermeye çalışmıştır [27]. Jones, Wright'ın vermiş olduğu örneğin periyodik çözümlerinin varlığını tartışmıştır [40]. Chafee, otonom fonksiyonel diferensiyel denklemlerin denge noktası civarında çözümlerinin davranışını incelemiştir ve özel olarak belirli hipotezler altında, denklemin parametresi değişirken verilen denge noktasında periyodik çözümlerin çatallandığını göstermiştir [41].

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin teorisi anlaşılmaya başlandıkça yeni sorular ortaya atılmıştır. Bunlardan bir tanesi de gecikme parametresi değişirken sistemin dinamiğinde ne tür değişimlerin gözlenebileceği olmuştur. Özellikle de son zamanlarda av-avcı sistemleri, kimyasal tepkimeler gibi etkileşim içinde bulunan sistemlerde gecikme parametresi çatallanma parametresi alınarak sistemin yapısında meydana gelen değişimler gözlenmiştir [24, 42-45]. Dinamik sistemler için bu kadar önem arz eden çatallanma teorisi bir sonraki kısımda ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

BÖLÜM 2

2. LİTERATÜR TARAMASI

2.1. Çatallanma Teorisi

Çatallanma teorisi, diferensiyel denklemlerin çözümler ailesinin niteliksel ya da topolojik yapısında meydana gelen değişimlerin incelenmesidir. Dinamik sistemler incelendiğinde, çatallanmanın parametre değerindeki değişim sonucu ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Aynı zamanda parametre değerindeki bu değişimler sistemin davranışında ani niteliksel veya topolojik değişmelere neden olmaktadır. Sistemin durum değişkeni $x \in \mathbb{R}^n$ ve parametresi $v \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere çatallanmalara hem

$$x \rightarrow f(x, v)$$

tipinde kesikli (dönüşümler yardımı ile tanımlanan sistemler) hem de

$$\dot{x} = f(x, v)$$

tipinde sürekli sistemlerde (adi, gecikmeli, kısmi diferensiyel denklemler ile tanımlanan sistemler) karşılaşılmaktadır. Verilen dinamik sistemlerin r parametresi değiştikçe topolojik yapısında meydana gelen değişimler, parametre değişirken faz portresini değiştirir. Bu takdirde iki durum söz konusudur: Ya sistem topolojik olarak ilk sisteme denktir ya da sistemin topolojisi değişir.

Tanım 2.1: Parametre değişimi altında topolojik olarak denk olmayan faz portrelerinin ortaya çıkmasına **çatallanma** denir.

Bu tanıma göre çatallanma, sistemin parametresi çatallanma değerini (ve ya kritik değeri) geçerken sistemin topolojik yapısındaki değişimdir. Bu bölümde bazı çatallanma tipleri ve onların sınıflandırması anlatılacaktır.

2.1.1. Kesikli Sistemler İçin Çatallanma Teorisi

Bu başlık altında herhangi bir kesikli modelin çatallanma değerinde, modelin davranışında meydana gelen değişimlerden bahsedeceğiz. $x_{t+1} = f(x_t)$ birinci mertebeden fark denkleminin v parametresine olan bağımlılığını

$$x_{t+1} = f(x_t, v) \quad (2.1)$$

ile göstereceğiz ve bu fark denkleminin dinamiği göz önüne alınacaktır. Denge noktalarının v parametresine bağımlılığını ise $\bar{x}(v)$ ile ifade edeceğiz. En çok bilinenlerinden biri kesikli lojistik denklem olan birçok örnekte de karşımıza çıktığı gibi fark denkleminin davranışı v değıştikçe değışmektedir. Davranışın değıştığı bu v değerlerine **çatallanma değeri** ve $(v, \bar{x}(v))$ noktaları ise **çatallanma noktaları** olarak adlandırılır. Çözümün davranışındaki değışim, parametre, denge noktasının ya da m -devirin kararlılığını değıştirdiğinde meydana gelir. Yani, f fonksiyonunun türevi ya da f^m devri bire ya da negatif bire eşit ise meydana gelir ve ± 1 olması durumuna göre çatallanma çeşitleri mevcuttur.

2.1.1.1. Fark Denklemleri İçin Çatallanma Çeşitleri

(2.1) ile verilen fark denklemini için oluşabilecek çatallanma tipleri $f'(\bar{x}(v)) = \pm 1$ ile belirlenmektedir. Bu denklem için dört farklı tipte çatallanma söz konusudur. Bunlar:

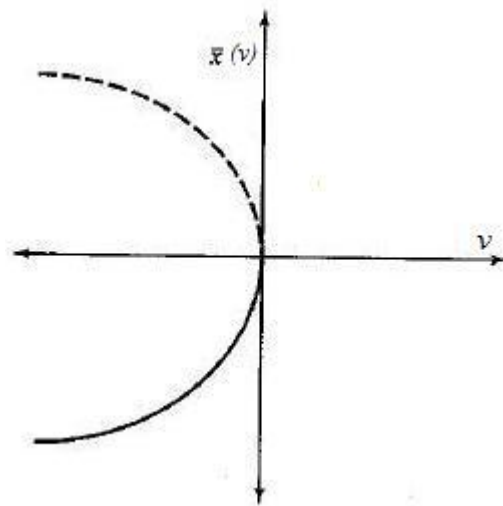
- 1) Fold (saddle node, tangant) çatallanma,
- 2) Tırmık (pitchfork) çatallanma,
- 3) Transkritik (transcritical) çatallanma,
- 4) Periyod-doubling (flip) çatallanma.

İlk üç tip çatallanmada $f'(\bar{x}(\bar{v})) = 1$ ve son çatallanma tipinde ise $f'(\bar{x}(\bar{v})) = -1$ dir. Çatallanma tipini tanımlayan f fonksiyonu ve onun türevi üzerine ilave koşullar eklenebilir [46,47].

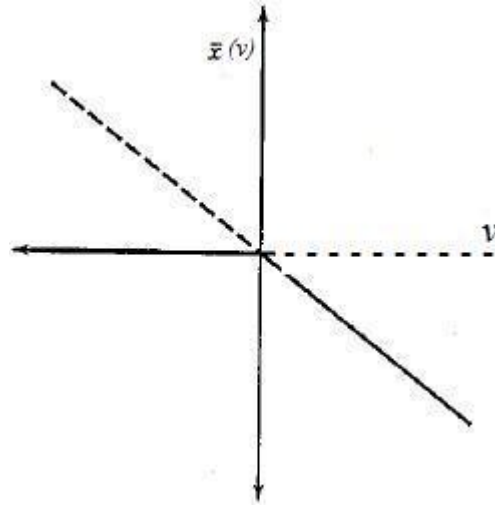
Bu dört çatallanma tipi, çatallanma diyagramları ile gösterilebilir. Çatallanma diyagramı, v parametresinin bir fonksiyonu olarak, kararlı veya kararsız denge noktalarının ya da devirlerinin bir grafiğidir. Yatay eksen v çatallanma parametresini ve dikey eksen ise denge noktalarını ya da sistemin devirlerini gösterir. Kararsız denge noktası kesikli eğriler ile ve kararlı olanlar ise kesiksiz eğriler ile gösterilir.

Bu dört tip çatallanma aşağıda ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır.

Fold Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki denge noktası kaybolur (Şekil 2.1.).

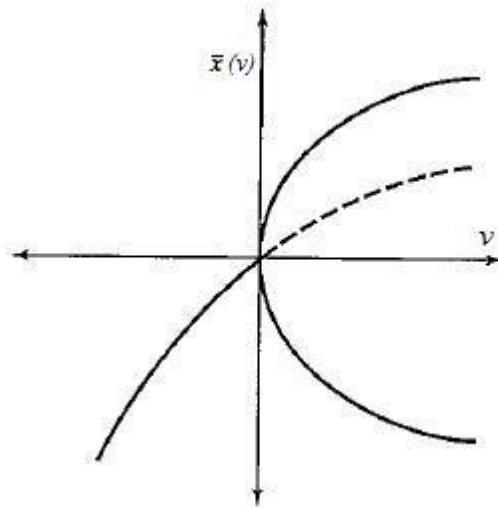


Şekil 2.1. Fold Çatallanma



Şekil 2.3. Transkritik Çatallanma

Flip Çatallanma: Kritik çatallanma değeri geçilirken, kararlı denge noktası kararsız olur ve kararlı 2-devir ortaya çıkar. Bu tipine süperkritik flip çatallanma denir. Tersine ise yani, ortaya çıkan 2-devir kararsız ise de subkritik flip çatallanma adını alır.



Şekil 2.4. Flip Çatallanma

2.1.2. Sürekli Sistemlerde Çatallanma Teorisi

Kesikli sistemlerde olduğu gibi, sistemin parametresi değişirse, sistemin dinamiği değişebilir. Kararlı denge noktası kararsızlaşabilir ve periyodik çözümler ortaya çıkabilir ya da önceki denge noktasını kararsız yapan yeni denge noktaları ortaya çıkabilir. Bu tür değişikliklerin meydana geldiği parametre değeri çatallanma değeri ve bu değişen parametre ise çatallanma parametresi olarak adlandırılır. v çatallanma parametresinin sergilediği değişime bağlı olarak

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v) \quad (2.2)$$

tipindeki adi diferensiyel denklemin yapısında değişiklikler meydana gelmektedir. (2.1) denkleminde olduğu gibi (2.2) denklemi için de fold, transkritik, tırmık tipi çatallanmalar söz konusudur. Ayrıca, kesikli sistemlerden farklı olarak (2.2) diferensiyel denklemi için Hopf çatallanma tipi görülmektedir. İlk üç tip çatallanma hem skalar denklemlerde hem de denklem sistemlerinde görülürken dördüncü tip olan Hopf çatallanma, periyodik çözümlerin değişimini içerdiğinden ve skalar otonom diferensiyel denklemler periyodik çözümlere sahip olmadığından, skalar diferensiyel denklemlerde meydana gelmez.

Sürekli sistemlerde çatallanma analizi iki başlık altında incelenecektir. İlk olarak fold, tırmık ve transkritik çatallanma tipleri daha sonra ise Hopf çatallanma tipi ayrı olarak ele alınıp incelenecektir.

2.1.2.1. Birinci Mertebeden Denklemler İçin Çatallanma Teorisi

İlk olarak skalar diferensiyel denklemlerdeki çatallanmalardan bahsedeceğiz. v çatallanma parametresi ve $\bar{x}(v)$, v parametresine bağlı denge noktası olmak üzere

(2.2) ile verilen skalar diferensiyel denklemi incelenecektir. Bu denklem için ilk olarak

- 1) Fold (saddle node, tangant) çatallanma,
- 2) Tırmık (pitchfork) çatallanma,
- 3) Transkritik (transcritical) çatallanma

tiplerinden bahsedilecektir.

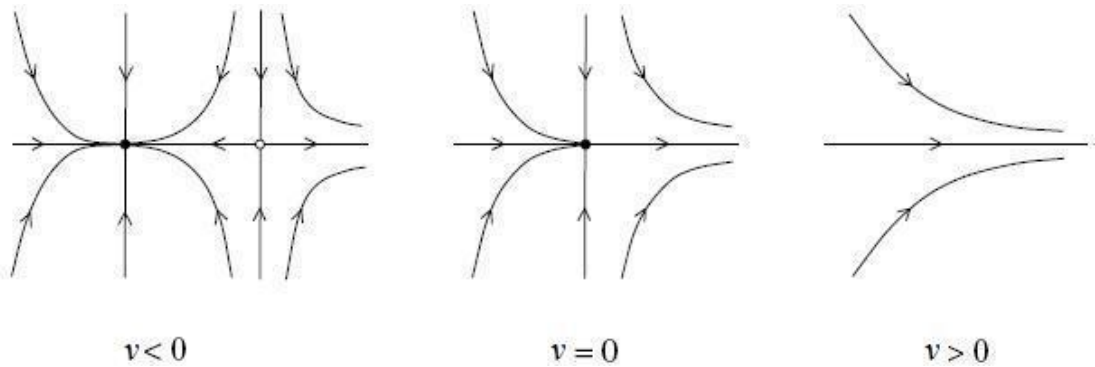
\bar{v} çatallanma değerinde denge noktasının kararlılık yapısının değişimi söz konusudur.

Özel olarak $v = \bar{v}$ ve $x = \bar{x}(\bar{v})$ için,

$$\left. \frac{df(x, v)}{dx} \right|_{(x, v) = (\bar{x}(\bar{v}), \bar{v})} = 0$$

koşulunu sağlar. Aşağıda skalar diferensiyel denklemler için bu üç tip çatallanmanın dinamiğinden kısaca bahsedilmektedir.

Fold Çatallanma: Çatallanma parametresi çatallanma değerini geçerken iki denge noktası kaybolur. Kaybolmadan önce bu iki denge noktasından biri kararlı diğeri ise kararsızdır.



Şekil 2.5. Fold Çatallanma

$v = 0$ çatallanma değeridir.

Tırmık Çatallanma: Bir kararsız denge noktası tarafından ayrılan iki kararlı denge noktası vardır. Çatallanma parametresi geçildiğinde sadece bir kararlı denge noktası varsa çatallanmanın tipi süperkritik tırmık çatallanma, aksi halde ise subkritik tırmık çatallanmadır. Subkritik tırmık çatallanmada çatallanma noktası geçilene kadar bir kararlı denge noktası tarafından ayrılan iki kararsız denge noktası vardır. Çatallanma değeri geçildikten sonra bir tane kararsız denge noktası meydana gelir.

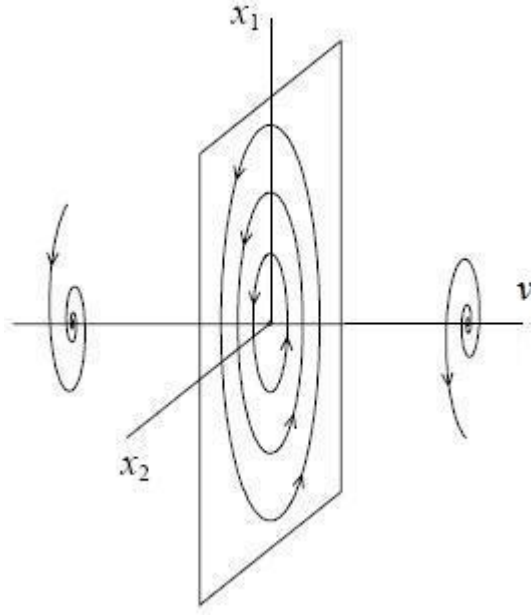
Transkritik Çatallanma: Biri kararlı biri kararsız iki denge noktası vardır ve bu iki denge noktası çatallanma noktası geçilirken kararlılık yapılarını değiştirir; kararlı olan kararsız, kararsız olan ise kararlı olur.

2.1.2.2. Hopf Çatallanma

Hopf çatallanma türü iki veya daha fazla birinci mertebeden diferensiyel denklem içeren sistemlerde meydana gelir. Aynı zamanda, Fransız matematikçi Jules Henri Poincaré (1854-1912), Rus matematikçi Alexander A. Andronov (1901-1952) ve Alman matematikçi Heinz Hopf (1894-1971)'un bu teoriyi geliştirmek için yaptıkları katkılardan ötürü **Poincaré-Andronov-Hopf çatallanma** olarak da anılır.

Burada bahsedilecek olan Hopf çatallanma teoremi iki boyutlu birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemi için verilecektir. Yüksek mertebeden denklemler için de Hopf Çatallanma Teoremi verilmiştir [48]. Bir sonraki bölümde n -boyutlu denklem sistemleri için Hopf çatallanmanın en genel halinden söz edilecektir.

Genel olarak Hopf Çatallanma Teoremi periyodik çözümlerin varlığı için yeterli olan koşulları vermektedir. Sistemde seçilen Hopf çatallanma parametresinin değeri değişirken, sistemin dinamiği kararlı spiralden merkeze, merkezden de kararsız spirale dönüşebilir.



Şekil 2.6. Hopf Çatallanma

Lineerleştirilmiş sistemin öz değerleri negatif reel kısımdan sıfıra, sıfırdan ise pozitif reel kısma dönüşür ve belirli koşullar altında periyodik çözümler mevcuttur.

f ve g , v çatallanma parametresine bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, v)$$

(2.3)

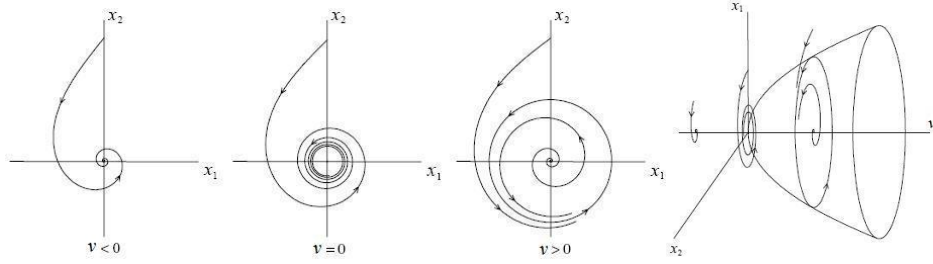
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, v)$$

otonom diferensiyel denklem sistemini düşünelim. Kabul edelim ki $(\bar{x}(v), \bar{y}(v))$, (2.3) sisteminin denge noktası; $\alpha(v) \pm i\beta(v)$, bu denge noktasında hesaplanan Jakobian matrisin öz değerleri olsun. Buna ek olarak $\alpha(v^*) = 0$ olmak üzere, kararlılık yapısı değişimi $v = v^*$ değerinde meydana gelsin. v^* değerine yakın fakat $v < v^*$ olan v değerleri için $\alpha(v) < 0$, ve v^* yakın v fakat $v^* > v$ değerleri için

$\alpha(v) > 0$ ise v, v^* değerini geçerken denge noktası kararlı spiralden kararsız spirale dönüşür. Hopf çatallanma teoremi denge noktasının \mathbb{R}^2 uzayındaki herhangi bir komşuluğu için periyodik çözümlerin var olduğunu söyler. v parametresi, çatallanma parametresi ve v^* parametresi ise çatallanma değeridir. Bu teorem çatallanma parametresinin çatallanma değerine yakın değerleri için geçerlidir.

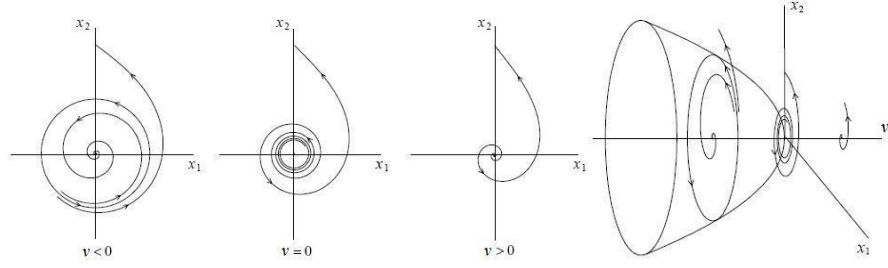
Genel olarak Hopf çatallanmada v, v^* çatallanma değerini geçerken ortaya çıkabilecek üç olası durum söz konusudur:

- (i) v^* çatallanma parametresinde denge noktasını çevreleyen sonsuz çoklukta doğal kararlı eşmerkezli kapalı yörünge vardır.
- (ii) v^* değerine yakın parametre değerleri için kararlı spiral kararlı limit döngüsüne dönüşür (Şekil 2.7).



Şekil 2.7. Süperkritik Hopf Çatallanma

- (iii) v^* değerini yakın parametre değeri için kararlı spiral ve kararsız limit döngüsü, kararsız spirale dönüşür (Şekil 2.8).



Şekil 2.8. Subkritik Hopf Çatallanma

E. Hopf bir genel diferensiyel denklem sistemi için periyodik çözümlerin varlığı üzerine çalışmış ve belirli koşullar altında diferensiyel denklem sisteminin periyodik çözümlere sahip olduğunu göstermiştir. (2.3) diferensiyel denkleminin bu koşulları sağlayabilmesi için ilk önce sırf sanal öz değere sahip olacak şekilde denge noktası orijin ve v parametresi $v^* = 0$ olacak şekilde değişken değiştirmeleri yapılarak

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(v)x + a_{12}(v)y + f_1(x, y, v) \quad (2.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(v)x + a_{22}(v)y + g_1(x, y, v)$$

sistemine dönüştürülür. Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen bu teorem, (2.3) diferensiyel denklem sistemi için aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 2.1 (Hopf Çatallanma Teoremi): (2.4) sisteminde verilen f_1 ve g_1 fonksiyonları x ve y değişkenlerine göre üçüncü mertebeden sürekli türevlere sahip olmak üzere yeteri kadar küçük $|v|$ değerleri için $(0,0)$ noktasının, (2.4) denkleminin bir denge noktası ve

$$J(v) = \begin{pmatrix} a_{11}(v) & a_{12}(v) \\ a_{21}(v) & a_{22}(v) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

matrisinin sistemin Jakobian matrisi olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\alpha(0) = 0$, $\omega(v) \neq 0$ ve $\frac{d\alpha}{dv}\big|_{v=0} \neq 0$ olmak üzere $\alpha(v) \pm i\omega(v)$, $J(v)$ Jakobian matrisinin öz değerleri olsun. Bu takdirde \mathbb{R}^2 uzayında orijini kapsayan herhangi bir açık U kümesinde, $v_0 > 0$ için (2.4) diferensiyel denklemi $v = \bar{v}$ için U da periyodik çözümleri olacak şekilde $|\bar{v}| < v_0$ değeri vardır (yaklaşık $T = \frac{2\pi}{\beta(0)}$ periyodu ile).

2.2. Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma

Periyodik yapıya veya salınımlara, korunumlu olmayan sistemlerde rastlanmaktadır. Bu bölümün amacı böyle bir sistem için Hopf çatallanma teoremini vermek ve ona alternatif olarak verilebilecek teoremlerden bahsetmektir.

$x \in \mathbb{R}^n$ ve v , sistemin reel değerli parametresi olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v) \quad (2.6)$$

sistemi incelenecektir. $x = x_*(v)$, (2.6) sisteminin ayrık denge noktası ve

$$A(v) = D_x f(x_*(v), v) = \left(\frac{df}{dx_j}(x_*(v), v); i, j = 1, \dots, n \right)$$

Jakobian matrisi $v = v_c$ için

$$\omega(v_c) = \omega_0 > 0, \quad \alpha(v_c) = 0 \text{ ve } \alpha'(v_c) \neq 0 \quad (2.7)$$

koşullarını sağlayan $\lambda_1(v) = \bar{\lambda}_2(v) = \alpha(v) + i\omega(v)$ kompleks eşlenik öz değerlere sahip olsun. v_c değerine, v değerinin kritik değeri denir. (2.7) koşulu sistemin parametresi değişirken denge noktasında kararlılık yapısının değiştiğini söylemektedir. Ayrıca bazı ek koşullar altında yeterince küçük ε_0 ve $\max_t \|p_\varepsilon(t) - x_*(v_c)\|$ genliğini veren $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ için, (2.6) sistemi $x = p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümlerin ailesine sahiptir.

Bir önceki kısımda iki boyutlu birinci mertebeden diferensiyel denklemden oluşan bir sistem için Hopf Çatallanma Teoremi verilmiş ve hatırlanacağı gibi (2.3) denkleminin denge noktası orijine ve çatallanma parametresi ise sıfıra kaydırılmıştı. Orada yapılan işlemler $(n+1)$ -boyutlu (2.6) denklemi için de yapılacaktır.

$$X = x - x_* \quad \text{ve} \quad \mu = v - v_c$$

değişken değiştirmesi altında (2.6) denklem sistemi

$$F(X, \mu) = f(X + x_*(v_c + \mu), v_c + \mu)$$

olmak üzere

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu) \tag{2.8}$$

ile verilen diferensiyel denklem sistemine dönüşür.

Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ için periyodik çözümlerin yörüngeleri, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $o(1)$ genliğine sahip ise (2.8) sistemi $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ile indekslenen periyodik çözümlerin ailesine sahiptir.

Bu teoremin üç değişik şekli bulunmaktadır. İlk tipi analitik, ikinci tipi analitik olmayan, üçüncü tipi ise ikinci tipi birincinin teklik ve analitiklik ile ilgili sonuçlarını güçlendirmek için kullanır ve periyodik çözümleri doğrudan μ parametresi cinsinden tanımlar.

Teorem 2.2 (E. Hopf): Eğer

(i) 0 noktasını içeren açık bir aralıkta μ ve $F(0, \mu) = 0$ için $X = 0 \in \mathbb{R}^n$ noktası F fonksiyonunun izole denge noktası,

(ii) $F, (0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ noktasının bir komşuluğunda X ve μ ye göre analitik,

(iii) $\omega(0) = \omega_0 > 0, \alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0$ ve $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ (2.9)

olmak üzere $A(\mu) = D_x F(0, \mu)$ matrisi λ ve $\bar{\lambda}$ kompleks eşlenik öz değerlere sahip,

(iv) $A(0)$ matrisinin geriye kalan $n - 2$ tane öz değeri negatif reel kısma sahip ise

(2.8) sistemi, periyodik çözümler ailesine sahiptir. Her bir $\varepsilon \in (0, \varepsilon_H)$ için $\mu = \mu^H(\varepsilon)$ için oluşan $p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümleri mevcut olacak şekilde $\varepsilon_H > 0$ ve

$$\mu^H(\varepsilon) = \sum_{i=2}^{\infty} \mu_i^H \varepsilon^i \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_H) \quad (2.10)$$

analitik fonksiyonu vardır. Eğer $\mu^H(\varepsilon)$ özdeş olarak sıfır değil ise sıfırdan farklı ilk μ_i^H katsayısı çift indislidir ve $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ için $\mu^H(\varepsilon)$ ya pozitif ya da negatif olacak şekilde $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_H]$ değeri mevcuttur. Her $L > 2\pi/\omega_0$ için $X = 0$ noktasının bir η -komşuluğu ve sıfır noktasını kapsayan ℓ açık aralığı vardır öyle ki herhangi $\mu \in \ell$ için η de yatan periyodu L den az olan (2.8) denkleminin sabit olmayan periyodik çözümleri $\mu^H(\varepsilon) = \mu, \varepsilon \in (0, \varepsilon_H)$ sağlayan ε değerleri için $p_\varepsilon(t)$ ailesinin üyeleridir. $p_\varepsilon(t)$ nin periyodu

$$T^H(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i^H \varepsilon^i \right] \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_H) \quad (2.11)$$

bir analitik fonksiyondur. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümünün Floquet üstelinin ikisi 0 noktasına yaklaşır. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_H)$ için biri sıfır ve diğeri ise

$$\beta^H(\varepsilon) = \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i^H \varepsilon^i \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_H) \quad (2.12)$$

analitik fonksiyondur. $\beta^H(\varepsilon) < 0 \Rightarrow p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümü asimptotik kararlı fakat $\beta^H(\varepsilon) > 0$ ise kararsızdır.

Teorem 2.3 (C^L Hopf Çatallanma): Eğer

- (i) 0 noktasını içeren açık bir aralıkta μ ve $F(0, \mu) = 0$ için $X = 0 \in \mathbb{R}^n$ noktası F fonksiyonunun izole denge noktası,
- (ii) Mertebesi $L + 2$ ($l > 2$) den küçük veya küçük eşit olan F vektörünün F^l bileşenlerinin $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ noktasının bir komşuluğunda X ve μ ye göre bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekli,
- (iii) $\omega(0) = \omega_0 > 0, \alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0$ ve $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ (2.9)
olmak üzere $A(\mu) = D_x F(0, \mu)$ matrisi λ ve $\bar{\lambda}$ kompleks eşlenik özdeğerlere sahip,

(iv) $A(0)$ matrisinin geriye kalan $n - 2$ tane öz değeri negatif reel kısma sahip ise her bir $\varepsilon \in (0, \varepsilon_P)$ için $\mu = \mu^P(\varepsilon)$ için oluşan $p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümleri mevcut olacak şekilde $\varepsilon_P > 0$ ve

$$\mu^P(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\frac{L}{2}} \mu_{2i}^P \varepsilon^{2i} + o(\varepsilon^{L+1}) \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_P) \quad (2.13a)$$

C^{L+1} fonksiyonları vardır. $X = 0$ noktasının η -komşuluğu ve sıfırı kapsayan ℓ açık aralığı vardır öyle ki herhangi $\mu \in \ell$ için η -komşuluğunda yatan (2.8) denkleminin sabit olmayan periyodik çözümleri, ε nun değeri için $\mu = \mu^P(\varepsilon)$ sağlayan $\varepsilon \in (0, \varepsilon_P)$, $p_\varepsilon(t)$ ailesinin üyeleridir. $p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümlerinin

$$T^P(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 + \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}} \gamma_{2j}^P \varepsilon^{2j} \right] + o(\varepsilon^{L+1}) \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_P) \quad (2.13b)$$

periyodu C^{L+1} fonksiyonudur. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümünün Floquet üstelinin ikisi 0 noktasına yaklaşır. Bunlardan biri $\varepsilon \in (0, \varepsilon_P)$ için sıfır ve diğeri ise

$$\beta^P(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\frac{L}{2}} \beta_{2i}^P \varepsilon^{2i} + o(\varepsilon^{L+1}) \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_P) \quad (2.13c)$$

C^{L+1} fonksiyonudur. $\beta^H(\varepsilon) < 0$ ise $p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümü asimptotik kararlı fakat $\beta^H(\varepsilon) > 0$ ise kararsızdır. Eğer μ_{2k} ($1 \leq k \leq L/2$) sıfırdan farklı ilk katsayı mevcut ise $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_P]$ vardır öyle ki

$$\ell_1 = \left\{ \mu: 0 < \frac{\mu}{\mu_k^P} < \frac{\mu^P(\varepsilon_1)}{\mu_k^P} \right\} \quad (2.14)$$

açık aralığı aşağıdaki özelliklere sahiptir. ℓ_1 deki herhangi bir μ için bir tek $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1)$ vardır ($\mu = \mu^P(\varepsilon)$ ye karşılık). $(p_\varepsilon(t) (0 < \varepsilon < \varepsilon_1)$ periyodik çözümlerinin ailesi $p(t; \mu)$ ($\mu \in \ell_1$) olarak parametrize edilebildiğinden). $\mu \in \ell_1$ için, $T(\mu)$ periyodu ve $\beta(\mu)$ Floquet üsteli $|\mu^{1/k}|$ nin C^L -fonksiyonlarıdır. Sıfırdan farklı ilk β_{2k}^P katsayısı

$$\beta_{2k}^P = -2\alpha'(0)\mu_{2k}^P \quad (2.15a)$$

ile verilir ve

$$\text{sgn}(\beta(\mu)) = \text{sgn}\beta_{2k}^P \quad (\mu \in \ell_1) \quad (2.15b)$$

şeklindedir. Dolayısıyla periyodik çözümler ailesinin $p(t; \mu)$ üyesi, $\beta_{2k}^P < 0$ ise asimptotik kararlıdır aksi halde kararsızdır.

Teorem 2.4: Teorem 2.2'deki hipotezlerin ve (2.13.a) ifadesinde verilen μ_{2k}^P katsayısının mevcut olduğunu kabul edelim. O zaman $X = 0$ noktasının $\tilde{\eta}$ -komşuluğu ve $\varepsilon_1 > 0$ sayısı vardır öyle ki her bir $\mu \in \ell_1$ için $\tilde{\eta}$ -komşuluğunda yatan (2.8) denkleminin sabit olmayan $p(t; \mu)$ periyodik çözümü vardır. $T(\mu)$ periyodu $|\mu^{1/k}|$ nin analitik fonksiyonudur. $\mu \rightarrow 0$ ve $\mu \in \ell_1$ iken $p(t; \mu)$ periyodik çözümlerinin Floquet üstellerinden ikisi sıfıra yaklaşır. Biri $\mu \in \ell_1$ için sıfır diğeri ise reel değerli $|\mu^{1/k}|$ da analitik $\beta(\mu)$ fonksiyonudur. ℓ_1 deki her bir μ için

$$\text{sgn}(\beta(\mu)) = \text{sgn}\beta_{2k}^P$$

şeklindedir. $p(t; \mu)$ periyodik çözümleri $\beta_{2k}^P < 0$ ise asimptotik kararlı aksi halde kararsızdır.

Uyarı 2.1: Eğer $\varepsilon > 0$ için Teorem 2.2, 2.3 ve 2.4'te bahsedilen $p_\varepsilon(t)$ periyodik çözümleri, $\mu > 0$ ($\mu = 0, \mu < 0$) için mevcut ise çatallanmanın yönü $+1(0, -1)$ dir. Eğer μ_{2k}^P (ya da μ_{2j}^H) katsayısı mevcut ise bunun işareti çatallanmanın yönünü verir. $\alpha' > 0$ ve $\mu > 0$ için mevcut olan periyodik çözümler süperkritik, $\mu < 0$ için ise mevcut olan periyodik çözümler subkritiktir. $\alpha' < 0$ olduğu durumda ise kesin bir şey söylemek zordur.

Uyarı 2.2: Verilen ilk teorem orijinal teoremdir. Burada $\mu^H(\varepsilon), \beta^H(\varepsilon)$ ve $T^H(\varepsilon)$ açılımlarındaki ε nun kuvvetlerinin tek olabileceği unsuru göz ardı edilmiştir. Eğer $\mu^H(\varepsilon)$ nun Hopf açılımı μ_{2j}^H ilk terimine sahip ise Teorem 2.2 sadece $T(\mu)$ ve $\beta(\mu)$ değerlerinin $|\mu^{1/2j}|$ de olduğunu söylemektedir. Teorem 2.4, $\mu^H(\varepsilon)$ nun sıfır olup olmamasına bağlı olmaksızın $T(\mu)$ ve $\beta(\mu)$ nün $|\mu^{1/j}|$ de analitik olduğunu söylemektedir. Özel olarak $\mu \neq 0$ ise $T(\mu)$ ve $\beta(\mu)$, μ de analitiktir.

Teorem 2.2'deki ε nun kuvvetlerinin tek olmasının bir diğer sonucu ise karşımıza aşağıdaki gibi çıkmaktadır:

$$\mu(\varepsilon) = \mu_2\varepsilon^2 + \mu_3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^4) \quad (2.16)$$

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \tau_2\varepsilon^2 + \tau_3\varepsilon^3) + o(\varepsilon^4) \quad (2.17)$$

$$\beta(\varepsilon) = \beta_2\varepsilon^2 + \beta_3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^4). \quad (2.18)$$

Burada μ_3, τ_3, β_3 katsayılarından bazıları sıfırdan farklıdır. Yukarıdaki gibi bir durumla karşılaşınca $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \gamma\tilde{\varepsilon}^2$ dönüşümü altında

$$\mu(\varepsilon) = \mu_2\tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\mu}_3\tilde{\varepsilon}^3 + o(\tilde{\varepsilon}^4)$$

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \tilde{\tau}_2\tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\tau}_3\tilde{\varepsilon}^3) + o(\tilde{\varepsilon}^4)$$

$$\beta(\varepsilon) = \beta_2\tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\beta}_3\tilde{\varepsilon}^3 + o(\tilde{\varepsilon}^4).$$

γ seçimine bağlı olarak $\tilde{\mu}_3, \tilde{\tau}_3, \tilde{\beta}_3$ kaybolur. Bu ise μ_3, τ_3, β_3 katsayılarının varlıklarının şansa bırakılmış olduğunu gösterir.

Uyarı 2.3: Bu teoremler periyodik çözümlerin varlığından bahseder. Onların nasıl bulunduğu ya da kararlılık yapılarının nasıl incelendiği hakkında bilgi vermez. Burada amacımız periyodik çözümlerin var olup olmamasından ziyade sistemin kararlılık yapısının incelenmesidir. Bir sonraki bölümde bir adi diferensiyel denklem için yukarıda vermiş olduğumuz Teorem 2.4'te geçen μ_2, β_2, τ_2 katsayılarının elde edilişi açıklanmaya çalışılacaktır.

2.2.1. Adi Diferensiyel Denklem için μ_2, β_2 ve τ_2 Katsayılarının Hesaplanması

Bu başlıkta Hopf çatallanma teoreminin otonom adi diferensiyel denklem sistemlerine nasıl uygulandığından kısaca bahsedilecektir. v çatallanma parametresi ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\dot{x} = f(x; v) \quad (2.19)$$

otonom adi diferensiyel denklem sistemi incelenecektir. Aşağıda bu sistem için Hopf çatallanmanın hangi koşullar altında ortaya çıktığını, çatallanmanın yönünü, periyodik çözümlerinin periyodunu ve bu çözümlerin kararlılık yapısını incelemek için izlenmesi gereken adımlara kısaca değinilecektir.

- 1) $x_*(v)$, (2.19) sisteminin ilgi alanımıza giren denge noktası olsun. Bu sistemin $x_*(v)$ denge noktasında Jakobian matrisi

$$A(v) = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_*(v), v) \ ; \ i, j = 1, \dots, n \right\}$$

ile ifade edilsin. Bu matrise karşılık gelen öz değerleri hesaplayalım. Burada dikkat edilmelidir ki çalışılan sistem n -boyutlu olduğundan bu sistemin en fazla n tane ayrık öz değere sahip olması beklenmektedir. Bu öz değerler

$$Re \lambda_1 \geq Re \lambda_2 \geq \dots \geq Re \lambda_n$$

olacak şekilde sıralansın.

- 2) $Re \lambda_1(v_c) = 0$ olacak şekilde v_c değeri bulunmalıdır ve sistem
- (a) λ_1 ve λ_2 kompleks eşlenik çift (v_c değerini içeren bir açık aralıktaki v değeri için),
 - (b) $Re \lambda_1'(v_c) \neq 0$,
 - (c) $Im \lambda_1(v_c) \neq 0$, ve
 - (d) $Re \lambda_j(v_c) < 0 \quad (j = 3, \dots, n)$

şartlarını sağlamalıdır.

Bu takdirde (1) ve (2) koşulları altında $x_*(v)$ denge noktasında Hopf çatallanması görülür.

Yukarıdaki ilk iki madde Hopf çatallanmasının görüldüğü bir sistemin taşıdığı özellikleri vermektedir. Bundan sonraki adımlar μ_2 , β_2 ve τ_2 değerlerinin hesaplanmasında izlenilmesi gereken yolu vermektedir.

- 3) $\omega_0 = Im \lambda_1(v_c) > 0$ olmak üzere sistemin Jakobian matrisi

$$A(v_c) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

şeklinde ise sistemin değişken değiştirme yapılmasına ihtiyacı yoktur. Dolayısı ile bu aşama atlanıp doğrudan Center Manifold Teoremi'nin uygulanmasına geçilebilir. Aksi takdirde ϑ_1 , $\lambda_1(v_c) = i\omega_0$ öz değerine karşılık gelen öz vektör

ve $\{r_3, \dots, r_n\}$ ise $v = v_c$ de $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ öz değerleri için öz vektör uzayını geren reel $n - 2$ vektörün herhangi bir kümesi olmak üzere

$$P = (Re \vartheta_1, -Im \vartheta_1, r_3, \dots, r_n) \quad (2.20)$$

alalım ve ϑ_1 vektörünü sıfırdan farklı ilk bileşeni bir olacak şekilde normalleştirelim.

- 4) Sistemin denge noktasında hesaplanan Jacobian matrisi istenilen yapıda değil ise (2.20) ile verilen P matrisi yardımı ile $x = x_*(v_c) + Py$ değişken değiştirmesi yapılır ve sistem y değişkeni cinsinden $\dot{y} = F(y)$ şeklinde yeniden yazılır. Elde ettiğimiz bu yeni sistemin Jacobian matrisi olan

$$\frac{\partial F(0)}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

reel kanonik yapıdadır.

- 5) Center Manifold Teoremi kullanılarak n -boyutlu sistem iki boyutlu sisteme indirgenir. Bu indirgeme işlemi sırasında verilen sistemin Poincaré Normal Formunun

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}) \quad (2.21)$$

olduğu görülür. Hopf Çatallanma Teoremi'ni uygulayabilmek için $v = v_c, y = 0$ olmak üzere g_{ij} katsayıları hesaplanmalıdır. Bunun için ise

$$g_{11} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} \right) \right], \quad (2.22)$$

$$g_{02} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right], \quad (2.23)$$

$$g_{20} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right], \quad (2.24)$$

$$G_{21} = \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_2^3} \right. \\ \left. + i \left(\frac{\partial^3 F^2}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_1 \partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{\partial^3 F^1}{\partial y_2^3} \right) \right] \quad (2.25)$$

formüllerinden yararlanılır. $n = 2$ olması halinde $g_{21} = G_{21}$ alınır ve $c_1(0)$, μ_2 , β_2 , γ_2 değerlerinin bir sonraki adımda verilecek olan formüller yardımı ile hesaplanmasına geçilir. $n > 2$ ise yukarıdakilerin yanı sıra aşağıdaki katsayıların da hesaplanması gerekmektedir:

$$h_{11}^{k-2} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^k}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^k}{\partial y_2^2} \right], \quad (k = 3, \dots, n)$$

$$h_{20}^{k-2} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F^k}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F^k}{\partial y_2^2} - 2i \frac{\partial^2 F^k}{\partial y_1 \partial y_2} \right] \quad (k = 3, \dots, n)$$

olsun. D , $(n-2) \times (n-2)$ tipinde $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ öz değerlerini veren matris olmak üzere $(n-2)$ -boyutlu w_{11}, w_{20} vektörleri için

$$Dw_{11} = -h_{11}$$

$$(D - 2i\omega_0 I)w_{20} = -h_{20}$$

lineer sistemleri çözülür. Bu çözümlerden elde edilen

$$G_{110}^{k-2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_k} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2 \partial y_k} + i \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_k} - \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2 \partial y_k} \right) \right],$$

$$G_{101}^{k-2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_k} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2 \partial y_k} + i \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2 \partial y_k} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_k} \right) \right]$$

değerleri yardımı ile g_{21} katsayısı

$$g_{21} = G_{21} + \sum_{k=1}^{n-2} (G_{110}^k w_{11}^k + G_{101}^k w_{20}^k)$$

şeklinde elde edilir.

- 6) $\alpha'(0) = Re \lambda_1'(v_c)$ ve $\omega'(0) = Im \lambda_1'(v_c)$ olmak üzere sırası ile Lyapunov katsayısı, periyodik çözümlerin yönü, periyodu ve kararlılığı

$$c_1(0) = \frac{i}{\omega_0} \left[g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{20}|^2 \right] + \frac{g_{21}}{2}, \quad (2.26)$$

$$\mu_2 = \frac{-Re c_1(0)}{\alpha'(0)}, \quad (2.27)$$

$$\tau_2 = \frac{-(Im c_1(0) + \mu_2 \omega'(0))}{\omega_0}, \quad (2.28)$$

$$\beta_2 = 2Re c_1(0) \quad (2.29)$$

denklemleri yardımı ile bulunur.

- 7) $\varepsilon^2 = \frac{v-v_c}{\mu_2} + (v-v_c)^2$ olmak üzere çözümlerin periyodu ($\mu_2 \neq 0$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} (1 + \tau_2 \varepsilon^2 + \tau_3 \varepsilon^3) + o(\varepsilon^4),$$

ve karakteristik üsteli

$$\beta = \beta_2 \varepsilon^2 + \beta_3 \varepsilon^3 + o(\varepsilon^4)$$

ifadeleri ile verilir. $y_1 = \operatorname{Re} z$, $y_2 = \operatorname{Im} z$,

$$(y_1, \dots, y_n)^T = w_{11}|z|^2 + \operatorname{Re}(w_{20}z^2) + o(|z|^3) \text{ ve}$$

$$z = \varepsilon e^{\frac{2\pi it}{T}} + \frac{i\varepsilon^2}{6\omega_0} \left[g_{02} e^{-\frac{4\pi it}{T}} - 3g_{20} e^{\frac{4\pi it}{T}} + 6g_{11} \right] + O(\varepsilon^2)$$

olmak üzere $x = x_*(v) + Py$ periyodik çözümlerdir.

- 8) Son olarak da yapılan bu işlemler nümerik olarak incelenerek doğrulukları test edilir. Böylece teoride elde edilen sonuçlar ile sayısal metotların sonuçları karşılaştırılır ve doğrulanır.

Uyarı 2.4: Bu formüller ile ilgili daha detaylı bilgiye Hassard'ın kitabından ulaşılabilir. μ_2, τ_2, β_2 katsayılarından herhangi biri sıfır ise μ_4, τ_4, β_4 hesaplanabilir. Eğer onlardan herhangi biri de sıfır ise çift indisli bir sonraki katsayılar benzer işlemler yapılarak bulunabilir ve böylece istenilen sonuçlar elde edilene kadar bu işlemlere devam edilebilir. Fakat hesaplamamanın doğurduğu güçlük nedeni ile bu tavsiye edilmemektedir. Örneğin Van der Pol denklemi gibi basit sistemler için μ_4, τ_4, β_4 değerleri kolaylıkla hesaplanabilir.

Uyarı 2.5: Yukarıdaki adımlar v_c değerine yakın v değerleri için hesaplanmalıdır. İlk adımlarda yapılan koordinat değişimi yapılmayabilir ancak ilerleyen adımlarda bu değişime ihtiyaç duyulacağı için sadece ertelenmiş olur. Bu erteleme ise daha sonraki adımları daha karmaşık bir hale getirecektir.

Uyarı 2.6: Yukarıda bahsedilen bu teknik, adi diferensiyel denklem sistemi elle hesaplamaya izin verecek kadar basit ise etkili bir tekniktir. Bu durum en iyi teknik nedir sorusunu akla getirmektedir. Ama bu sorunun cevabı tek değildir. Farklı problem sınıfları için farklı teknikler söz konusudur.

Center Manifold-Poincaré Normal Form, Lyapunov-Schmidt, Lyapunov fonksiyonları- Integral Averaging, Harmonic Balancing, Describing functions, vb. gibi birçok teori söz konusudur. Bunların hepsi de aynı formülleri vermektedir.

Bu bölümde ise yapılan inceleme, Center Manifold-Poincaré Normal Form teorisi temel alınarak yapılmıştır.

2.3. Gecikmeli Diferensiyel Denklemler İçin Hopf Çatallanma Analizi

Biyolojik olayların birçok modeli etkileşimler arasında gecikme içerir. Hutchinson [49] tarafından ortaya atılan bir türün büyümesini modelleyen ($x \in \mathbb{R}^2$)

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t-1)[1+x(t)] \quad (2.30)$$

Hutchinson-Wright denklemi buna bir örnek olarak verilebilir. Sabit zaman gecikmesi, yeniden üreme ya da tepkiye verilen cevap duraklamasına benzetilebilir. Örneğin, bir balık türü için bu, dünyaya geldiği andan itibaren yumurtlama ve üreme olgunluğuna erişme dönemine kadar geçen süredir [50]. Bu bölümde daha önce bahsedilen teori gecikmeli diferensiyel denklemlere taşınacaktır. Bunun için ele alınan modeli center manifold üzerinde kompleks değişkenli tek bir diferensiyel denkleme dönüştürmek için Center Manifold Teoremi kullanılacaktır. Ele alınan sistem sonsuz boyutlu fonksiyonel diferensiyel denklem olduğundan bu sistemi iki boyutlu duruma indirgemek biraz daha zordur. Dolayısıyla ilk önce problem iki boyuta taşınacak ve böylece daha önceki bölümde denge noktasından çatallanan

periyodik çözümlerin periyodu, kararlılığı ve çatallanmanın yönü için verilen formüller uygulanabilir hale getirilecektir.

$C^k[-r, 0]$, $[-r, 0]$ aralığında tanımlı, bileşenleri k -kez sürekli türevlere sahip n -boyutlu, reel, vektör değerli fonksiyonları gösterebilir. $t, r > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\theta \in [-r, 0]$ için $x: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = L_\mu x_t + f(x_t(\cdot), \mu) \quad (2.31)$$

otonom sistemi incelenecektir. Burada $L_\mu: C[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli (sınırlı) lineer operatörlerin bir parametrelili ailesi ve $f(\cdot, \mu): C[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ kuadratik terimden başlamak üzere lineer olmayan terimleri içeren ve $f(0, \mu) = 0$, $D_x f(0, \mu) = 0$ koşullarını sağlayan bir operatördür. Bu takdirde (2.30) lineer olmayan diferensiyel denklemi lineerleştirilerek (2.31) tipine dönüştürülebilir.

Kolaylık olması açısından küçük $|\mu|$ değerleri için $f(\cdot, \mu)$ ve L_μ operatörlerinin μ çatallanma parametresine bağlı olarak analitik olduğu kabul edilecektir. (2.31) denkleminin $C: C[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ailesinin elemanları olan x çözümlerine karşılık gelen bir yörünge, $t, (0, \infty)$ üzerinde değişirken $x_t(\cdot)$ fonksiyonlarının ailesi tarafından çizilen kapalı bir eğridir.

(2.31) denklemi için başlangıç değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği ile ilgili teoriye Hale [51] ve Halanay'ın [52] yazmış oldukları kitaplardan ve Chafee'nin [41] makalesinden ulaşılabilir. Burada değinilecek olan teori (2.31) gecikmeli sistemi için center manifoldun varlığına dayanmaktadır, yani $\dot{\mu} = 0$ ilave denklemi ile (2.30) denklemini içeren sistemdir. Chafee [41], Claeys [42] gibi kabul edilen bu koşullar altında C center manifoldunun mevcut olduğunu göstermiştir.

Çatallanmanın varlığından söz edebilmek için gerçekleştirilmesi gereken ilk hedef (2.31) sistemini matematiksel açıdan uygun olacak şekilde tek bir değişkene bağlı olan

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + Rx_t \quad (2.32)$$

denkleminde dönüştürmektir. (2.31) sisteminin $\dot{x}_t = L_\mu x_t$ lineer kısmı Riesz Temsil Teoremi'ni kullanarak yeniden ifade edilir. Bu teorem gereğince $(i, j = 1, 2, \dots, n$ için) $\eta_{ij}: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ bileşenleri $[-r, 0]$ üzerinde sınırlı değişimleri olan ve her $\phi \in C[-r, 0]$ için

$$L_\mu \phi = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta)$$

özelliğine sahip $\eta: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ fonksiyonu vardır. Örneğin, $\delta(\theta)$ Dirac delta fonksiyonunu göstermek üzere

$$\eta(\theta, \mu) = -\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) \delta(\theta + 1)$$

ise

$$L_\mu x_t = -\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) x(t - 1) \quad (2.33)$$

şeklinde elde edilir. $\eta(\theta, \mu)$ fonksiyonunun seçimi, üzerinde çalışılan diferensiyel denkleme dayanmaktadır. L_μ operatörünün

$$\sigma(\mu) = \{\lambda: \det(\lambda I - L_\mu e^{\lambda\theta} I) = 0\}$$

spektrumunda geleneksel Hopf çatallanma varsayımları aşağıdaki gibidir:

- (i) $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ ve $\alpha(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$ ile $\alpha'(0) \neq 0$ olmak üzere lineer sistemin $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ şeklinde tanımlanan $\lambda(\mu)$ ve $\bar{\lambda}(\mu)$ basit kompleks eşlenik öz değerleri vardır.
- (ii) $\sigma(0)$ kümesinin (i) koşulunda tanımlanan öz değerleri hariç diğer bütün elemanları negatif reel kısma sahiptir.

(2.33) diferensiyel denkleminin yukarıda verilen hipotezleri sağlayıp sağlamadığı kısaca incelenecektir. Bu denklemin $x(t) = e^{\lambda t}$ biçiminde çözümünün olduğu varsayımı altında

$$\lambda + \left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) e^{-\lambda} = 0 \quad (2.34)$$

(2.33) denklemin karakteristik denklemidir. Eğer $\mu = 0$ ve $\pm i\pi/2$ öz değerler ise (2.34) denkleminin diğer öz değerleri negatif reel kısma sahiptir [18]. $\lambda(0) = \frac{i\pi}{2}$ olarak seçilirse $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ve $\nu = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}$ olmak üzere $Re \lambda'(0) = \frac{\nu\pi}{2} > 0$ olduğundan (2.33) ile verilen skalar gecikmeli diferensiyel denklem için (i) ile verdiğimiz hipotezler sağlanır. Dolayısıyla bu sistemde Hopf çatallanma görülmektedir. Bu model Hassard'ın [26] numaralı referansta belirtilen kitabında detaylıca incelenmiştir.

Yukarıda bahsettiğimiz teori bir sistemde Hopf çatallanmasının hangi koşullar altında gerçekleşmesinin beklendiğini söylemektedir. Fakat çatallanmanın yönü, periyodik çözümlerin periyodu ve kararlılığı hakkında bilgi vermemektedir. Bu sayılan konular hakkında bilgi edinebilmek için ilave tanımlara ihtiyaç vardır. $\phi \in C^1[-r, 0]$ için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}, & -r \leq \theta < 0 \\ \int_{-r}^0 d\eta(s, \mu)\phi(s) \equiv L_\mu\phi, & \theta = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

ve

$$R\phi = \begin{cases} 0, & -r \leq \theta < 0 \\ f(\phi, \mu), & \theta = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

olarak tanımlanırsa (2.31) denklemi istenilen (2.32) denkleme dönüşür. Daha önce de bahsedildiği üzere $\mu = 0$ iken μ_2, β_2, τ_2 değerleri, gecikmeli diferensiyel denklem için de hesaplanmalıdır. Bunun için ilk önce $\mu = 0$ atayarak $A(0)$ operatörünün $\lambda(0)$ öz değerine karşılık gelen $q(\theta)$ öz vektörü bulunmalı, yani ve benzer şekilde $\bar{\lambda}(0)$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü hesaplanmalıdır. η^T, η nın transpozu olmak üzere $A(0)$ operatörünün adjoint (ek) operatörü

$$A^*(0)\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds} & 0 < s \leq r \\ \int_{-r}^0 d\eta^T(t, 0)\alpha(-t) & s = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

ile tanımlanır. Kolaylık olması için $A(0)$ yerine A , $A^*(0)$ yerine A^* ve $\eta(s, 0)$ için ise $\eta(s)$ gösterimi kullanılacaktır.

$$A(0)q(\theta) = i\omega_0 q(\theta)$$

olduğundan A^* adjoint operatörünün $\bar{\lambda}(0)$ öz değerine karşılık gelen q^* öz vektörü

$$A^*q^* = -i\omega_0 q^*$$

ile hesaplanır.

Bilindiği gibi n -boyutlu sistemleri incelemek daha zordur. Bu tür sistemleri inceleyebilmek için boyut indirgeme yöntemleri kullanılır. Burada daha önce de bahsedildiği gibi Center Manifold Teoremi kullanılacaktır.

Sıfır denge noktası civarında C_0 center manifoldunu tanımlamak için ilk önce manifoldun koordinatlarının belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bunun için ise özel bir iç çarpıma gereksinim duyulmaktadır. $\psi \in C[0, r]$ ve $\phi \in C[-r, 0]$ için bu iç çarpım

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0) \cdot \phi(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta) \phi(\xi) d\xi \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlansın. Doğal olarak A ve A^* adjoint operatörler olduğundan $(\psi, \phi) \in D(A) \times D(A^*)$ için $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^*\psi, \phi \rangle$ sağlanır. Yukarıda elde edilen q ve q^* öz vektörleri bu iç çarpım altında normalleştirilir, yani bu öz vektörler $\langle q^*, q \rangle = 1$ ve $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ koşullarını sağlamalıdır. Her bir $x \in D(A)$ için center manifoldun koordinatlarını veren (z, w) ikilisinin oluşturulması gerekmektedir. Burada

$$z = \langle q^*, x \rangle \quad (2.39)$$

ve

$$w = x - zq - \bar{z}\bar{q} = x(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \quad (2.40)$$

eşitlikleri ile verilir. $\mu = 0$ değerinde (2.32) denkleminin x_t çözümleri için (2.39)

$$z = \langle q^*, x_t \rangle$$

ve (2.40)

$$w = x_t - zq - \bar{z}\bar{q} = x_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}$$

olarak tanımlanır. C_0 manifoldu üzerinde

$$w(z, \bar{z}, \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{20}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.41)$$

olmak üzere $w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ dır. z ve \bar{z} sırasıyla q ve \bar{q}^* vektörleri yönündeki C_0 manifoldunun yerel koordinatlarıdır. Buradan $\langle q^*, w \rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. (2.32) denkleminin $x_t \in C_0$ çözümleri için

$$\dot{z} = \langle q^*, \dot{x}_t \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle$$

ya da $\mu = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= i\omega_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f(w(z, \bar{z}, \theta)) + 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \\ &= i\omega_0 z + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

elde edilir. Bu, kısaca

$$\dot{z} = i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}) \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir. (2.42) ve (2.43) denklemlerinde dikkat edilmelidir ki f , bileşeni θ değişkeninin bir fonksiyonu olarak alınan bir operatör iken g fonksiyonunun θ değişkenine olan bağılılığı kaldırılmıştır.

Bir sonraki hedef g fonksiyonunu z ve \bar{z} değişkenlerinin kuvvetleri cinsinden açmak ve 2.1.1. bölümünde kullanılan algoritma ile μ_2, τ_2 ve β_2 değerlerini, bu açılımdan faydalanarak hesaplamak olacaktır. Bu değerleri hesaplamak için g fonksiyonunun g_{ij} katsayılarının bulunmasına ihtiyaç vardır. (2.42) eşitliğinden

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \quad (2.44)$$

olduğu ve ayrıca g_{ij} katsayılarının w_{ij} katsayılarına bağlı olduğu bilinmektedir. Öyleyse $w_{ij}(\theta)$ katsayılarının hesaplanması gerekmektedir. İlk olarak $w_{ij}(\theta)$ katsayılarını verecek denklem oluşturulur. (2.40) denkleminde θ değişkenine göre türev alırsak:

$$\dot{w} = x_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q}$$

ve bu denklemde (2.43) ile (2.32) ifadelerini kullanırsak

$$\dot{w} = \begin{cases} Aw - 2Re\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0 q(\theta)\}, & -r \leq \theta < 0 \\ Aw - 2Re\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0 q(0)\} + f_0, & \theta = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

elde edilir. Bu ifade ise

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{20}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.46)$$

olmak üzere

$$\dot{w} = Aw + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (2.47)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Diğer yandan orijin civarında C_0 manifoldu üzerinde

$$\dot{w} = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$$

elde edilir. (2.41) ve (2.43) ifadelerinden faydalanarak w_z ve \dot{z} ifadeleri yerine yazılırsa \dot{w} için yeni bir eşitlik elde edilmiş olur. Bu elde edilen ifade ile (2.18) denkleminin sağ tarafı eşitlenirse

$$\begin{aligned} (2i\omega_0 - A)w_{20}(\theta) &= H_{20}(\theta) \\ -w_{11}(\theta) &= H_{11}(\theta) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.48)$$

eşitlikleri bulunur. (2.48) eşitliklerinin ilk üçü, w_{20} , w_{11} ve $w_{02} = \bar{w}_{20}$ katsayılarını elde etmek için çözülür. İhtiyaç halinde kullanılan eşitlikler çoğaltılabilir. μ_2 , γ_2 ve β_2 değerlerini bulmak için gerekli olan w_{ij} katsayılarının hesaplanması yeterlidir. Eğer $k > 1$ için μ_{2k} , γ_{2k} ve β_{2k} değerlerinin hesaplanması gerekiyorsa o zaman $\mu = 0$ olarak alınmamalıdır.

w_{ij} katsayıları hesaplandıktan sonra (2.17) diferensiyel denklemi

$$\dot{z} = i\omega_0 z + g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$

şeklinde yazılabilir. Burada $i + j \leq 3$ için g_{ij} katsayıları

$$\bar{q}^*(0)f\left(zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) + w_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta)z\bar{z} + w_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots\right)$$

ifadesinin açılımından gelmektedir. Poincaré Normal Form'unda geçen ve çatallanmanın yönünü belirlemede yardımcı olan $c_1(0)$ katsayısı g_{ij} katsayılarından oluşan (2.26) formülü ile verilir. 2.2.1 bölümündeki (2.27)-(2.29) formülleri ile μ_2 , τ_2 ve β_2 katsayıları elde edilir.

Daha önce verilen örnekte S_i ($i = 1, \dots, 4$) katsayıları C de, E ile F ise C^n de ve $q(\theta) = q(0)e^{iw_0\theta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} w_{20}(\theta) &= S_1q(\theta) + S_2\overline{q(\theta)} + Ee^{2iw_0\theta} \\ w_{11}(\theta) &= S_3q(\theta) + S_4\overline{q(\theta)} + F \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece çatallanan periyodik çözümler

$$0 \leq t \leq T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{w_0} [1 + \tau_2\varepsilon^2 + \dots] \text{ için}$$

$$x(t, \mu(\varepsilon)) = 2\varepsilon \operatorname{Re}[q(0)e^{iw_0t}] + \varepsilon^2 \operatorname{Re}[Ee^{2iw_0t} + F] + O(\varepsilon^3)$$

ile verilir. Bu çözümler center manifold üzerinde asimptotik kararlıdır. Bu model için daha detaylı bilgi [37] numaralı referanstan elde edilebilir.

BÖLÜM 3

3. $dN(t)/dt = aN(t)f(N(t - \tau))$ DENKLEMİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

3.1. Kararlılık ve Hopf Çatallanma Analizi

Yaptığımız bu çalışmanın amacı $a, \tau > 0$ sabitler olmak üzere

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t)f(N(t - \tau)) \quad (3.1)$$

biçimindeki birinci mertebeden bir gecikmeli diferensiyel denklem için τ gecikme parametresini çatallanma parametresi olarak Hopf Çatallanma analizi yapmaktır. Örneğin burada $N(t)$ bir popülasyonun yoğunluğunu gösterebilir. Burada f fonksiyonunun gerektiği kadar türevinin alınabildiği kabul edilmiştir. İlk olarak verilen (3.1) denkleminin denge noktalarını bulalım:

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0 = aN(t)f(N(t - \tau))$$

ise $N_1 = 0$ aşikar denge noktasıdır. Ayrıca kabul edelim ki $f(N_2) = 0$ olacak şekilde bir N_2 denge noktası olsun. $\tau = 0$ iken $N_1 = 0$ denge noktası $f(N_1) > 0$ ise kararsız; $f(N_1) < 0$ ise kararlı denge noktasıdır. N_2 denge noktası için ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

- (i) $N_2 > 0$ olsun. Bu takdirde $f'(N_2) > 0$ ise N_2 denge noktası kararsız; $f'(N_2) < 0$ ise kararlıdır.

(ii) $N_2 < 0$ olsun. Bu takdirde $f'(N_2) > 0$ ise N_2 denge noktası kararlı; $f'(N_2) < 0$ ise kararsızdır.

Biyolojik sistemlerde $N(t)$ genellikle popülasyonu belirttiğinden bu çalışmada $N_2 > 0$ denge noktası göz önüne alınacak ve Hopf çatallanma analizi yapılacaktır. Bunun için ilk önce (3.1) eşitliğinin sağ tarafındaki

$$F(N(t), N(t - \tau)) := aN(t)f(N(t - \tau))$$

fonksiyonunun $N_2 > 0$ denge noktası, sıfır noktasına kaydırılıp bu nokta civarında lineerleştirilir.

$t = \tau s$ ve $N(t) = N(\tau s) = x(s) + N_2$ değişken değiştirmesi yapılırsa:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dx(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx(s)}{ds} \cdot \frac{1}{\tau} \quad (3.2)$$

$$N(t - \tau) = N(\tau s - \tau) = N(\tau(s - 1)) = x(s - 1) + N_2 \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.1) denkleminde (3.2) ve (3.3) eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$\frac{dx(s)}{ds} = \tau a[x(s) + N_2]f(x(s - 1) + N_2) \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir. (3.4) denkleminde kolaylık olması için $s = t$ alınarak

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tau a[x(t) + N_2]f(x(t - 1) + N_2) := G(x(t), x(t - 1)) \quad (3.5)$$

denklemini elde edilir. Böylece N_2 denge noktası yukarıdaki dönüşüm ile $x_* = 0$ noktasına kaymış oldu. Şimdi $x_* = 0$ civarında, $G(x(t), x(t-1))$ fonksiyonunu lineerleştirirsek;

$$\begin{aligned}
G(x(t), x(t-1)) &\approx G(0,0) \\
&+ \frac{\partial G(0,0)}{\partial x(t)} [x(t) - 0] + \frac{\partial G(0,0)}{\partial x(t-1)} [x(t-1) - 0] \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G(0,0)}{\partial (x(t))^2} [x(t) - 0]^2 \right. \\
&+ 2 \frac{\partial^2 G(0,0)}{\partial x(t) \partial x(t-1)} [x(t-1) - 0][x(t) \\
&- 0] + \left. \frac{\partial^2 G(0,0)}{\partial (x(t-1))^2} [x(t-1) - 0]^2 \right) \\
&+ y. m. t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\tau a f(x(t-1) + N_2)]|_{x=0} x(t) \\
&+ [\tau a x(t) f'(x(t-1) + N_2) \\
&+ \tau a N_2 f'(x(t-1) + N_2)]|_{x=0} x(t-1) \\
&+ \frac{1}{2} (0 + 2[\tau a f'(x(t-1) + N_2)]|_{x=0} x(t)x(t-1) \\
&+ [\tau a x(t) f''(x(t-1) + N_2) \\
&+ \tau a N_2 f''(x(t-1) + N_2)]|_{x=0} [x(t-1)]^2) + y. m. t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G(x(t), x(t-1)) &= \tau a N_2 f'(N_2) x(t-1) \\
&+ \tau a f'(N_2) x(t)x(t-1) + \frac{1}{2} \tau a N_2 f''(N_2) [x(t-1)]^2 \\
&+ y. m. t.
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada *y.m.t.* kısaltması mertebesi ikiden büyük olan terimleri göstermektedir. Böylece (3.1) ile verilen diferensiyel denklem

$$m(x(t), x(t-1)) = \tau a f'(N_2) x(t) x(t-1) + \frac{1}{2} \tau a N_2 f''(N_2) [x(t-1)]^2 + y.m.t. \quad (3.6)$$

olmak üzere (3.5) denklemi

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tau a N_2 f'(N_2) x(t-1) + m(x(t), x(t-1)) \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. Bir önceki bölümde söz edildiği gibi $C = C([-1,0], \mathbb{R}^2)$ de

$$\dot{x} = L_\mu(x_t) + f(\tau, x_t)$$

tipinde bir denklem elde edilir. Hopf çatallanma için (3.7) denkleminin lineer kısmının öz değerlerinin bulunmasına ihtiyaç vardır. Öz değerleri hesaplamak için

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tau a N_2 f'(N_2) x(t-1) \quad (3.8)$$

lineer denkleminin $x(t) = e^{\lambda t}$ çözümüne sahip olduğundan yola çıkılarak karakteristik denklemi hesaplanır. Bu takdirde $M = a N_2 f'(N_2)$ olmak üzere (3.8) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda e^{\lambda t} = \tau M e^{\lambda(t-1)}$$

$$\Rightarrow \lambda = \tau M e^{-\lambda} \quad (3.9)$$

dır. (3.7) denkleminde Hopf çatallanmasının görülebilmesi için (3.9) denkleminin sıfır sanal kompleks eşlenik kökünün olması gerekmektedir. Bunu göstermek için kabul edelim ki $\omega > 0$ olmak üzere $\lambda = i\omega$, (3.9) denkleminin bir kökü olsun. Bu durumda

$$i\omega = \tau M e^{-i\omega} = \tau M (\cos(\omega) - i \sin(\omega))$$

eşitliğinin reel ve sanal kısımları:

$$\tau M \cos(\omega) = 0 \quad (3.10a)$$

$$\omega + \tau M \sin(\omega) = 0. \quad (3.10b)$$

(3.10a) eşitliğinden

$$\cos(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

elde edilir. Burada $\omega > 0$ olması zorunluluğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla

$$\omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

şeklindedir. (3.11) ifadesi ile verilen ω_n değeri (3.10b) denkleminde yerine yazılırsa;

$$(2n + 1) \frac{\pi}{2} + \tau M (-1)^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

elde edilir. Bu takdirde n değerine bağlı olarak iki durum söz konusudur:

1. Durum: n in çift olması halinde (3.10b) denklemi

$$(2n + 1) \frac{\pi}{2} + \tau_n M = 0$$

ile verilen ifadeye dönüşür. Bu eşitlikten τ_n parametresi

$$\tau_n = -(2n + 1) \frac{\pi}{2M} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Başlangıç kabulü gereğince $\tau_n > 0$ olması gerektiğinden $M = aN_2 f'(N_2) < 0$ olmak zorundadır. a ve N_2 değerleri pozitif olarak kabul edildiğinden $f'(N_2) < 0$ olmalıdır.

2. Durum: n in tek olması halinde (3.10b) denklemi

$$(2n + 1) \frac{\pi}{2} - \tau_n M = 0$$

ile verilen ifadeye dönüşür. Bu eşitlikten τ_n parametresi

$$\Rightarrow \tau_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2M} \quad (3.14)$$

olarak elde edilir. Başlangıç kabulü gereğince $\tau_n > 0$ olması gerektiğinden $M = aN_2 f'(N_2) > 0$ olmak zorundadır. a ve N_2 değerleri pozitif olarak kabul edildiğinden $f'(N_2) > 0$ olmalıdır.

Bu çalışmada özel olarak $n = 0$ seçilmiştir. Bu seçimden ötürü $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ve $\tau_0 = -\frac{\pi}{2M}$ olarak alınmıştır. (3.1) denkleminde Hopf çatallanmanın görülebilmesi için gerekli olan şartlardan bir tanesi $f'(N_2) < 0$ olarak bulunmuş olur. Bu durumda (3.9) karakteristik denklemi sırf sanal köke sahiptir.

Hatırlanacağı gibi denklemin geriye kalan öz değerlerinin reel kısmının negatif olması gerekmektedir. Bu koşulu gösterebilmek için kabul edelim ki (3.9) denkleminin $\alpha > 0$ olacak şekilde $\lambda = \alpha + i\omega$ tipinde bir kökü olsun. Bu durumda (3.9) denkleminde $\lambda = \alpha + i\omega$ alınırsa

$$\alpha + i\omega = \tau M e^{-(\alpha+i\omega)}$$

eşitliği sağlanır. Daha önce de yapılmış olduğu gibi bu denklem de reel ve sanal kısmına ayrılırsa;

$$\alpha - \tau M e^{-\alpha} \cos(\omega) = 0 \quad (3.15a)$$

$$\omega + \tau M e^{-\alpha} \sin(\omega) = 0 \quad (3.15b)$$

elde edilir.

(i) $\omega > 0$ ise (3.15a) ifadesinden $\omega > \frac{\pi}{2}$ ve (3.15b) ifadesinden $\omega < \frac{\pi}{2}$ elde edilir.

(ii) $\omega < 0$ ise (3.15a) ifadesinden $\omega < -\frac{\pi}{2}$ ve (3.15b) ifadesinden $\omega > -\frac{\pi}{2}$ elde edilir.

Sonuç olarak $\alpha > 0$ olacak şekilde (3.8) denkleminin bir öz değeri yoktur.

Hopf çatallanması için gerekli olan koşullardan bir diğeri ise

$$Re \lambda'(\tau_0) \neq 0 \quad (3.16)$$

olmasıdır. (3.1) denklemini için bu koşulun sağlanıp sağlanmadığı (3.9) eşitliğinin her iki yanının τ parametresine göre türevi alınarak kontrol edilir. Bu türev alma işleminin sonucu aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{Me^{-\lambda}}{1 + \tau Me^{-\lambda}} \cdot \quad (3.17)$$

(Burada, bu türevin tanımlı olabilmesi için $1 + \tau Me^{-\lambda} \neq 0$ ifadesini gerekliliğine dikkat edilmelidir.)

(3.17) denkleminde $\lambda = i\omega_0 = \frac{i\pi}{2}$ ve $\tau_0 = \frac{-\pi}{2M}$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \tau=\tau_0}} &= \frac{Me^{-\frac{i\pi}{2}}}{1 + \frac{-\pi}{2M} Me^{-\frac{i\pi}{2}}} = \frac{-iM}{1 + \frac{i\pi}{2}} \\ &= \frac{-2iM}{2 + i\pi} \cdot \frac{2 - i\pi}{2 - i\pi} = \frac{-4iM - 2M\pi}{4 + \pi^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ve $M = aN_2 f'(N_2)$, $f'(N_2) < 0$ olduğu hatırlanırsa

$$\Rightarrow Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) = \frac{-2M\pi}{4 + \pi^2} > 0 \quad (3.19)$$

elde edilir. Dolayısıyla $Re \lambda'(\tau_0) \neq 0$ olduğundan karşıtlık koşulu (transversality condition) sağlanır. Sonuç olarak (3.1) sisteminde, $N_2 > 0$ denge noktası için $f'(N_2) < 0$ olduğunda $\tau = \tau_0$ değerinde Hopf çatallanması görülür.

3.2. Hopf Çatallanmanın Yönü ve Kararlılık Analizi

Bu kısımda Bölüm 2'de bahsettiğimiz teoriyi kullanarak, (3.1) denkleminin Hopf çatallanmasının yönü, periyodik çözümlerin periyodu ve kararlılığı incelenecektir. Bu incelemeyi yaparken çatallanmanın $\tau = \tau_0$ için N_2 denge noktasında gerçekleştiği kabul edilmiştir.

(3.6) lineer denklemde $\tau = \tau_0 + \mu$ değişken değiştirilmesi yapılarak çatallanma değeri $\mu = 0$ değerine kaydırılmış olur. Bu takdirde (3.8) denklemi

$$\frac{dx}{dt} = (\tau_0 + \mu)Mx(t-1) \quad (3.20)$$

denklemine dönüşür. $C = C([-1,0], \mathbb{R})$ için $L_\mu: C \rightarrow \mathbb{R}$, $m: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$, ve $\phi \in C$ olmak üzere

$$L_\mu(\phi) = (\tau_0 + \mu)M\phi(-1)$$

$$m(\phi, \mu) = (\tau_0 + \mu)af'(N_2)\phi(0)\phi(-1) + \frac{1}{2}(\tau_0 + \mu)aN_2f''(N_2)[\phi(-1)]^2$$

ile verilir. Riesz Temsil Teoremi'nden $\theta \in [-1,0]$ ve $\phi \in C$ için

$$L_\mu\phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\phi(\theta)$$

ifadesi sağlanacak şekilde sınırlı değişime sahip

$$d\eta(\theta, \mu) = -(\tau_0 + \mu)aN_2f'(N_2)\delta(\theta + 1)$$

fonksiyonu vardır. Burada δ , Dirac delta fonksiyonudur. Hopf çatallanmasının yönünü, periyodik çözümlerin periyodunu ve kararlılık yapısını belirleyebilmek için yukarıdakilere ek olarak bazı tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır. $\phi \in C([-1,0], \mathbb{R})$ için ($\mu = 0$ özel durumunu incelenmektedir.)

$$\begin{aligned} A\phi(\theta) &= \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0 \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, 0)\phi(s), & \theta = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0 \\ \tau_0 M\phi(-1), & \theta = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ve

$$\begin{aligned} R\phi(\theta) &= \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0 \\ m(\phi(\theta), \mu), & \theta = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0 \\ \tau_0 af'(N_2)\phi(0)\phi(-1) + \frac{1}{2}\tau_0 aN_2f''(N_2)[\phi(-1)]^2, & \theta = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

operatörleri tanımlanırsa (3.7) denklemi (2.32) denklemine denk olur. $\psi \in C([-1,0], \mathbb{R}^*)$ için $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$ olmak üzere A operatörünün adjoint operatörü:

$$A^*\psi = \begin{cases} -\frac{d\psi}{ds}, & 0 < s \leq 1 \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t)\psi(-t), & s = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

ile verilir.

Teorem 3.1: A ve A^* operatörleri (2.38) bilinear iç çarpımı altında adjoint operatörlerdir.

İspat: $\phi \in C([-1,0], \mathbb{R})$ ve $\psi \in C([-1,0], \mathbb{R}^*)$ için $\langle \psi(s), A\phi(\theta) \rangle = \langle A^*\psi(s), \phi(\theta) \rangle$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \langle \psi(s), A\phi(\theta) \rangle &= \bar{\psi}(0)A\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) A\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \dot{\phi}(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) \\ &\quad - \int_{-1}^0 \tau_0 M \delta(\theta + 1) \left\{ \bar{\psi}(\xi - \theta)\phi(\xi) \Big|_0^\theta - \int_0^\theta \dot{\bar{\psi}}(\xi - \theta)\phi(\xi) d\xi \right\} d\theta \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 \tau_0 M \delta(\theta + 1) \{ \bar{\psi}(0)\phi(\theta) - \bar{\psi}(-\theta)\phi(0) \} d\theta \\ &\quad + \int_{-1}^0 \int_0^\theta \tau_0 M \delta(\theta + 1) \dot{\bar{\psi}}(\xi - \theta) d\theta \phi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) + \int_{-1}^0 \bar{\psi}(-\theta)\phi(0)d\eta\theta \\
&\quad - \int_{-1}^0 \int_0^\theta A^* \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta\theta\phi(\xi) d\xi \\
&= \int_{-1}^0 \bar{\psi}(-\theta)\phi(0)d\eta\theta - \int_{-1}^0 \int_0^\theta A^* \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta\theta\phi(\xi) d\xi \\
&= A^* \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta A^* \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta\theta\phi(\xi) d\xi \\
&= \langle A^* \psi(s), \phi(\theta) \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla istenilen sonuç gösterilmiş olur.

A ve A^* operatörlerine karşılık gelen $\lambda = i\omega_0$ ve $\bar{\lambda} = -i\omega_0$ öz değerlerinin $q(\theta)$ ve $q^*(\theta)$ öz vektörleri hesaplanmalıdır.

(i) $q(\theta)$, $\lambda = i\omega_0$ öz değerine karşılık gelen öz vektör olsun. Bu takdirde

$$Aq(\theta) = i\omega_0 q(\theta) \Rightarrow Aq(\theta) = \frac{i\pi}{2} q(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{d\theta} = \frac{i\pi}{2} q(\theta)$$

$$\Rightarrow q(\theta) = c_1 e^{\frac{i\pi}{2}\theta},$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadede c_1 bir sabittir. $\theta = 0$ durumunda ise yukarıdaki eşitliğin sağlandığı görülür. Sonuç olarak c_1 sabitinin seçiminden bağımsız olarak $q(\theta) = c_1 e^{\frac{i\pi}{2}\theta}$ dir.

(ii) $q^*(s), \bar{\lambda} = -i\omega_0$ öz değerine karşılık gelen öz vektör olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} A^*q^*(s) &= -i\omega_0 q^*(s) \Rightarrow A^*q^*(s) = -\frac{i\pi}{2}q^*(s) \\ \Rightarrow -\frac{dq^*}{ds} &= -\frac{i\pi}{2}q^*(s) \\ \Rightarrow q^*(s) &= c_2 e^{\frac{i\pi}{2}s}, \quad c_2: \text{sabit} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadede c_2 bir sabittir. $s = 0$ durumunda ise yukarıdaki eşitliğin sağlandığı görülür. Sonuç olarak c_2 sabitinin seçiminden bağımsız olarak $q^*(s) = c_2 e^{\frac{i\pi}{2}s}$ dir.

Yukarıda c_1 ve c_2 sabitlerinin sonsuz çokluk da değer alabileceği gösterilmiştir. Bir önceki bölümde q ve q^* öz vektörleri arasında $\langle q^*, q \rangle = 1$ ve $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ bağıntısının olması gerektiği bahsedilmişti. Öyleyse $\langle q^*, q \rangle = 1$ olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri arasında bir ilişkinin kurulması gerekmektedir.

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{q}^*(0)q(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{q}^*(\xi - \theta) d\eta(\theta) q(\xi) d\xi \\ &= c_1 \bar{c}_2 - c_1 \bar{c}_2 \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{\frac{-i\pi}{2}(\xi - \theta)} d\eta(\theta) e^{\frac{i\pi}{2}\xi} d\xi \end{aligned}$$

($c_1 = 1$ ve $c_2 = D$ olarak alınmıştır.)

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{D} \left[1 - \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{\frac{i\pi}{2}\theta} d\eta(\theta) d\xi \right] \\ &= \bar{D} \left[1 - e^{\frac{-i\pi}{2}}(-1)\tau_0 M \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{D}[1 - i\tau_0 M] \\
\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1 &\Rightarrow \bar{D}[1 - i\tau_0 M] = 1 \\
\Rightarrow \bar{D} &= \frac{1}{1 - \frac{-\pi}{2M} Mi} = \frac{2}{2 + i\pi} \\
\Rightarrow \bar{D} &= \frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \\
\Rightarrow D &= \frac{4 + 2i\pi}{4 + \pi^2} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $q(\theta) = e^{\frac{i\pi}{2}\theta}$ ve $q^*(s) = D e^{\frac{i\pi}{2}s}$ olarak elde edilir. Ayrıca $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ koşulunun sağlandığı da kolayca görülebilir.

Bölüm 2.3'te bahsedilen teori kullanılarak, $\mu = 0$ için C_0 center manifoldunun koordinatlarının hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bu koordinatlar yardımı ile (3.1) denklemini

$$\dot{z} = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}) \tag{2.43}$$

ve

$$\dot{w} = Aw + H(z, \bar{z}, \theta) \tag{2.47}$$

şeklinde iki boyuta indirgenmiş olur. z ve \bar{z} değişkenleri q ve \bar{q}^* vektörleri yönündeki C_0 manifoldunun yerel koordinatları olmak üzere, $\mu = 0$ iken $x_t \in C_0$ çözümleri için

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \langle q^*, \dot{x}_t \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \\
&= \langle q^*, Ax_t \rangle + \langle q^*, Rx_t \rangle \\
&= \langle A^* q^*, x_t \rangle + \bar{q}^*(0)Rx_t(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{q}^*(\xi - \theta)d\eta(\theta)Rx_t(\xi)d\xi \\
&= \frac{i\pi}{2} \langle q^*, x_t \rangle + \bar{q}^*(0)Rx_t(0) \\
&= \frac{i\pi}{2} z(t) + \bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t))
\end{aligned}$$

bulunur.

Bölüm 2.3.'ten Hopf çatallanmanın normal formu

$$\dot{z} = i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z})$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t)) \quad (3.25)$$

eşitliği geçerlidir. (3.25) ifadesinin hesaplanabilmesi için

$$\begin{aligned}
m(x(t), x(t-1)) &= (\tau_0 + \mu)af'(N_2)x_t(0)x_t(-1) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\tau_0 + \mu)aN_2f''(N_2)[x_t(-1)]^2 \quad (3.26)
\end{aligned}$$

fonksiyonu z ve \bar{z} değişkenleri cinsinden yazılmalıdır. (2.40) denkleminde

$$x_t(0) = w(t, 0) - 2\text{Re}\{z(t)q(0)\}$$

$$x_t(-1) = w(t, -1) - 2\text{Re}\{z(t)q(-1)\}$$

ve $w(0) = w(t, 0)$ ve $w(-1) = w(t, -1)$ göstermek üzere

$$x_t(0) = w(0) + \left(ze^{\frac{i\pi}{2}} + \bar{z}e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)$$

$$= w(0) + z + \bar{z}$$

$$x_t(-1) = w(-1) + \left(ze^{-\frac{i\pi}{2}} + \bar{z}e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$

$$= w(-1) + i(-z + \bar{z})$$

ifadeleri (3.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m_0(z(t), \bar{z}(t)) &= \tau_0 a f'(N_2)(w(0) + z + \bar{z})(w(-1) + (-iz + i\bar{z})) \\ &\quad + \frac{1}{2} \tau_0 a N_2 f''(N_2)[w(-1) + (-iz + i\bar{z})]^2 \end{aligned}$$

fonksiyonu elde edilir.

$$w(t, \theta) = w(z, \bar{z}, \theta)$$

$$= w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots$$

$$\left(\begin{array}{l} w(0) = w_{20}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}(0) z\bar{z} + w_{02}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(0) \frac{z^3}{6} + \dots \\ w(-1) = w_{20}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}(-1) z\bar{z} + w_{02}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(-1) \frac{z^3}{6} + \dots \end{array} \right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
m_0(z(t), \bar{z}(t)) &= \tau_0 a f'(N_2) \left(z + \bar{z} + w_{20}(0) \frac{z^2}{2} + w_{11}(0) z \bar{z} + w_{02}(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) \\
&\quad \left((-iz + i\bar{z}) + w_{20}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}(-1) z \bar{z} + w_{02}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \tau_0 a N_2 f''(N_2) \left[(-iz + i\bar{z}) + w_{20}(-1) \frac{z^2}{2} + w_{11}(-1) z \bar{z} \right. \\
&\quad \quad \left. + w_{02}(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right]^2 \\
m_0(z(t), \bar{z}(t)) &= \tau_0 a f'(N_2) \left[-iz^2 + iz\bar{z} + w_{20}(-1) \frac{z^3}{2} + w_{11}(-1) z^2 \bar{z} \right] \\
&\quad + \tau_0 a f'(N_2) \left[w_{02}(-1) \frac{z\bar{z}^2}{2} + \dots - iz\bar{z} + i\bar{z}^2 + w_{20}(-1) \frac{z^2 \bar{z}}{2} \right] \\
&\quad + \tau_0 a f'(N_2) \left[w_{11}(-1) z \bar{z}^2 + w_{02}(-1) \frac{\bar{z}^3}{2} + \dots - iw_{20}(0) \frac{z^3}{2} \right] \\
&\quad + \tau_0 a f'(N_2) \left[iw_{20}(0) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + w_{20}(0) w_{20}(-1) \frac{z^4}{4} + \dots \right] \\
&\quad + \tau_0 a f'(N_2) [-iw_{11}(0) z^2 \bar{z} + iw_{11}(0) z \bar{z}^2] \\
&\quad + \tau_0 a f'(N_2) [w_{11}(0) w_{20}(-1) \frac{z^3 \bar{z}}{2} + \dots] \\
&\quad + \frac{1}{2} \tau_0 a f''(N_2) \left[-z^2 + 2z\bar{z} - 2iw_{20}(-1) \frac{z^3}{2} - 2iw_{11}(-1) z^2 \bar{z} \right. \\
&\quad \quad \left. + \dots \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \tau_0 a f''(N_2) \left[-\bar{z}^2 + 2iw_{20}(-1) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + 2iw_{11}(-1) z \bar{z}^2 + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \tau_0 a f''(N_2) \left[[w_{20}(-1)]^2 \frac{z^4}{4} + 2w_{20}(-1)w_{11}(-1) \frac{z^3 \bar{z}}{2} \right. \\
& \quad \left. + \dots \right] \\
& + \frac{1}{2} \tau_0 a f''(N_2) [w_{11}(-1)]^2 z^2 \bar{z}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Fonksiyonu yeniden düzenlersek:

$$\begin{aligned}
m_0(z(t), \bar{z}(t)) &= \frac{z^2}{2} [-2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2)] + z\bar{z}a\tau_0 N_2 f''(N_2) \\
& + \frac{\bar{z}^2}{2} [2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2)] \\
& + \frac{z^2 \bar{z}}{2} [2a\tau_0 f'(N_2)w_{11}(-1) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{20}(-1)] \\
& + \frac{z^2 \bar{z}}{2} [ia\tau_0 f'(N_2)w_{20}(0) + 2ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{11}(0)] \\
& + \frac{z^2 \bar{z}}{2} [-2ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{11}(-1)] \\
& + \frac{z^2 \bar{z}}{2} ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{20}(-1) + y. m. t.
\end{aligned}$$

halini alır. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
g(z(t), \bar{z}(t)) &= \bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t)) = \bar{D}m_0(z(t), \bar{z}(t)) \\
&= \bar{D} \left\{ \frac{z^2}{2} [-2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2)] \right\} \\
& + \bar{D} \left\{ z\bar{z}a\tau_0 N_2 f''(N_2) + \frac{\bar{z}^2}{2} [2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{D} \frac{z^2 \bar{z}}{2} \{2a\tau_0 f'(N_2)w_{11}(-1) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{20}(-1)\} \\
& +\bar{D} \frac{z^2 \bar{z}}{2} \{ia\tau_0 f'(N_2)w_{20}(0) + 2ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{11}(0)\} \\
& +\bar{D} \frac{z^2 \bar{z}}{2} \{-ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{11}(-1) \\
& \quad + ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{20}(-1)\} + y. m. t.
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
g(z, \bar{z}) &= g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \\
&= \bar{q}^*(0) m_0(z(t), \bar{z}(t))
\end{aligned}$$

eşitliğinden faydalanarak g_{ij} katsayıları hesaplanır. Bunlar:

$$g_{20} = \bar{D}[-2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2)], \quad (3.27a)$$

$$g_{11} = \bar{D}[a\tau_0 N_2 f''(N_2)], \quad (3.27b)$$

$$g_{02} = \bar{D}[2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2)], \quad (3.27c)$$

$$\begin{aligned}
g_{21} &= \bar{D}[2a\tau_0 f'(N_2)w_{11}(-1) + a\tau_0 f'(N_2)w_{20}(-1) + ia\tau_0 f'(N_2)w_{20}(0) \\
&\quad - 2ia\tau_0 f'(N_2)w_{11}(0) - 2ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{11}(-1) \\
&\quad + ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{20}(-1)]. \quad (3.27d)
\end{aligned}$$

g_{21} katsayısının hesaplanabilmesi için $w_{20}(0), w_{20}(-1), w_{11}(0)$ ve $w_{11}(-1)$ değerlerinin bilinmesine ihtiyaç vardır. (2.40) denkleminde

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t, \theta) &= \dot{x}_t(\theta) - 2\operatorname{Re}\{\dot{z}(t)q(\theta)\} \\
&= (Ax_t + Rx_t) - 2\operatorname{Re}\left([i\omega_0 z(t) + \bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t))]\right)q(\theta) \\
&= A[w(t, \theta) + 2\operatorname{Re}\{z(t)q(\theta)\}] + Rx_t - 2\operatorname{Re}(i\omega_0 z(t)q(\theta)) \\
&\quad - 2\operatorname{Re}\left(\bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\right) \\
&= Aw(t, \theta) + 2\operatorname{Re}(z(t)Aq(\theta)) + Rx_t - 2\operatorname{Re}(i\omega_0 z(t)q(\theta)) \\
&\quad - 2\operatorname{Re}\left(\bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\right) \\
&= Aw(t, \theta) + 2\operatorname{Re}(z(t)i\omega_0 q(\theta)) + Rx_t - 2\operatorname{Re}(i\omega_0 z(t)q(\theta)) \\
&\quad - 2\operatorname{Re}\left(\bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\right) \\
&= Aw(t, \theta) + Rx_t - 2\operatorname{Re}\left(\bar{q}^*(0)m_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta)\right) \\
\dot{w} &= \begin{cases} Aw - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)m_0 q(\theta)\}, & -1 \leq \theta < 0 \\ Aw - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)m_0 q(0)\} + m_0(z(t), \bar{z}(t)), & \theta = 0 \end{cases} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{20}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.46)$$

olmak üzere

$$\dot{w} = Aw + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (2.47)$$

ile tanımlanırsa

$$Aw - \dot{w} = -H(z, \bar{z}, \theta) \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir. (3.28) ile verilen ifadeden ise $\theta \in [-1,0]$ için

$$H(z, \bar{z}, \theta) = -2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)m_0(z, \bar{z})q(\theta)\} \quad (3.30)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -[\bar{q}^*(0)m_0(z, \bar{z})q(\theta) + \overline{\bar{q}^*(0)m_0(z, \bar{z})q(\theta)}] \\ &= -[\bar{q}^*(0)m_0(z, \bar{z})q(\theta) + q^*(0)m_0(z, \bar{z})\bar{q}(\theta)] \\ &= -[g(z, \bar{z})q(\theta) + \bar{g}(z, \bar{z})\bar{q}(\theta)] \\ &= -\left[q(\theta) \left(g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{q}(\theta) \left(\bar{g}_{20} \frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}z\bar{z} + \bar{g}_{02} \frac{z^2}{2} + \dots \right) \right] \\ &= -\left[(q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}) \frac{z^2}{2} - (q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11})z\bar{z} \right. \\ &\quad \left. - (q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}) \frac{\bar{z}^2}{2} - y. m. t. \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_{20} = -(q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02}) \quad (3.31a)$$

$$H_{11} = -(q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}) \quad (3.31b)$$

$$H_{02} = -(q(\theta)g_{02} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{20}) \quad (3.31c)$$

şeklinde elde edilir.

$$w(z, \bar{z}, \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta)z\bar{z} + w_{20}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.41)$$

olduğundan $w(t, \theta)$ fonksiyonunun (2.37) tanımını kullanılarak $\dot{w}(t, \theta)$ türevi

$$\dot{w} = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \quad (3.32)$$

şeklindedir. (2.41) ifadesi z ve \bar{z} göre türevlenirse

$$\dot{w}_z = w_{20}(\theta)z + w_{11}(\theta)\bar{z} + w_{30}\frac{z^2}{3} + \dots$$

$$\dot{w}_{\bar{z}} = w_{11}(\theta)z + w_{02}(\theta)\bar{z} + \dots$$

ifadeleri elde edilir. (3.32) denkleminde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \dot{w} &= w_{20}(\theta)z\dot{z} + w_{11}(\theta)(z\dot{\bar{z}} + \bar{z}\dot{z}) + w_{02}(\theta)\bar{z}\dot{z} + \dots \\ &= w_{20}(\theta)z(i\omega z + g(z, \bar{z})) \\ &\quad + w_{11}(\theta)[\bar{z}(i\omega z + g(z, \bar{z})) + z(-i\omega \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}))] \\ &\quad + w_{02}(\theta)\bar{z}(-i\omega \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z})) + \dots \\ &= \frac{z^2}{2} 2i\omega w_{20}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

olarak bulunur. w_{ij} ve H_{ij} katsayıları arasında bir ilişki kurabilmek için (3.29) eşitliğinin sol tarafını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} Aw(t, \theta) &= Aw_{20}(t, \theta)\frac{z^2}{2} + Aw_{11}(t, \theta)z\bar{z} \\ &\quad + Aw_{20}(t, \theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + Aw_{30}(t, \theta)\frac{z^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Aw(t, \theta) - \dot{w} = (A - 2i\omega)w_{20}(t, \theta) \frac{z^2}{2} + Aw_{11}(t, \theta)z\bar{z} + \dots$$

(3.29) ifadesinden dolayı ise

$$(2i\omega_0 - A)w_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta) \quad (3.33a)$$

$$Aw_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta) \quad (3.33b)$$

⋮

şeklinde katsayıları eşitleyebiliriz. (3.33a) ve (3.33b) eşitlikleri yardımı ile $w_{ij}(\theta)$ katsayıları hesaplanabilir.

(i) $w_{20}(\theta)$ Katsayısının Hesaplanması: (3.33a) eşitliğinden

$$(A - 2i\omega_0)w_{20}(\theta) = (q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02})$$

$$\Rightarrow \dot{w}_{20} - 2i\omega_0 w_{20} = (q(\theta)g_{20} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{02})$$

$$\Rightarrow (w_{20}e^{-2i\omega\theta})' = e^{-2i\omega\theta}(g_{20}e^{i\omega\theta} + \bar{g}_{02}e^{i\omega\theta})$$

$$\Rightarrow w_{20}e^{-2i\omega\theta} = \int (g_{20}e^{-i\omega\theta} + \bar{g}_{02}e^{-3i\omega\theta})d\theta$$

$$= \left[\frac{-1}{i\omega} g_{20}e^{-i\omega\theta} + \frac{-1}{3i\omega} \bar{g}_{02}e^{-3i\omega\theta} \right] + E_1$$

$$\Rightarrow w_{20}(\theta) = \left[\frac{i}{\omega} g_{20}e^{i\omega\theta} + \frac{i}{3\omega} \bar{g}_{02}e^{-i\omega\theta} \right] + E_1 e^{2i\omega\theta}$$

olarak bulunur. Burada E_1 bir sabittir. E_1 sabitinin hesaplamak için

$$(A - 2i\omega_0)w_{20}(0) = -H_{20}(0) \quad (3.34)$$

eşitliğinden faydalanılacaktır.

$$\begin{aligned}
Aw_{20}(0) &= A \left[\left[\frac{i}{\omega} g_{20} q(\theta) + \frac{i}{3\omega} \bar{g}_{02} \bar{q}(\theta) \right] + E_1 e^{2i\omega\theta} \right] \\
&= \frac{i}{\omega} g_{20} A q(\theta) + \frac{i}{3\omega} \bar{g}_{02} A \bar{q}(\theta) + E_1 \int_{-1}^0 d\eta(\theta) e^{2i\omega\theta} \\
&= \frac{i}{\omega} g_{20} i\omega q(\theta) + \frac{i}{3\omega} \bar{g}_{02} (-i\omega) \bar{q}(\theta) + E_1 \int_{-1}^0 d\eta(\theta) e^{2i\omega\theta}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$2i\omega w_{20}(0) = -2g_{20}q(\theta) - \frac{2}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(\theta) + 2i\omega E_1$$

ve

$$H_{20}(0) = -(q(0)g_{20} + \bar{q}(0)\bar{g}_{02}) - 2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2).$$

Yukarıdaki ifadeler (3.34) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& -g_{20} + \frac{1}{3}\bar{g}_{02} + E_1 \int_{-1}^0 d\eta(\theta) e^{2i\omega\theta} - \left[-2g_{20}q(\theta) - \frac{2}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(\theta) + 2i\omega E_1 \right] \\
& = -H_{20}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g_{20} + \bar{g}_{02} + E_1 \int_{-1}^0 d\eta(\theta) e^{2i\omega\theta} - 2i\omega E_1 \\
&\quad = (g_{20} + \bar{g}_{02}) + 2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2) \\
&\Rightarrow E_1 \left[\int_{-1}^0 d\eta(\theta) e^{2i\omega\theta} - 2i\omega \right] = 2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2) \\
&\Rightarrow E_1 = \frac{2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)}{-a\tau_0 N_2 f'(N_2) - 2i\omega}
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
w_{20}(\theta) &= \left[\frac{i}{\omega} g_{20} e^{i\omega\theta} + \frac{i}{3\omega} \bar{g}_{02} e^{-i\omega\theta} \right] \\
&\quad + e^{-2i\omega\theta} \frac{2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)}{-a\tau_0 N_2 f'(N_2) - 2i\omega}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

(ii) $w_{11}(\theta)$ Katsayısının Hesaplanması: (3.33b) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
Aw_{11}(\theta) &= (q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}) \\
\dot{w}_{11} &= (q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}) \\
&= g_{11}e^{i\omega\theta} + \bar{g}_{11}e^{-i\omega\theta} \\
\Rightarrow w_{11}(\theta) &= \frac{1}{i\omega} g_{11}e^{i\omega\theta} + \frac{-1}{i\omega} \bar{g}_{11}e^{-i\omega\theta} + E_2 \\
&= \frac{-i}{\omega} g_{11}e^{i\omega\theta} + \frac{i}{\omega} \bar{g}_{11}e^{-i\omega\theta} + E_2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada E_2 bir sabittir. E_2 sabitinin hesaplanması için

$$Aw_{11}(0) = -H_{11}(0) \quad (3.36)$$

ifadesi kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} Aw_{11}(\theta) &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta)w_{11}(\theta) \\ &= \frac{-i}{\omega}g_{11}Aq(\theta) + \frac{i}{\omega}\bar{g}_{11}A\bar{q}(\theta) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 \end{aligned}$$

ve

$$H_{11} = -(q(\theta)g_{11} + \bar{q}(\theta)\bar{g}_{11}) + a\tau_0N_2f''(N_2).$$

Yukarıdaki ifadeleri (3.36) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{-i}{\omega}g_{11}(i\omega q(0)) + \frac{i}{\omega}\bar{g}_{11}(-i\omega\bar{q}(0)) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 \\ = (g_{11} + \bar{g}_{11}) - a\tau_0N_2f''(N_2) \\ \Rightarrow g_{11} + \bar{g}_{11} + \int_{-1}^0 d\eta(\theta)E_2 = (g_{11} + \bar{g}_{11}) - a\tau_0N_2f''(N_2) \\ \Rightarrow a\tau_0N_2f'(N_2)E_2 = -a\tau_0N_2f''(N_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{-f''(N_2)}{f'(N_2)}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$w_{11}(\theta) = \frac{-i}{\omega} g_{11} e^{i\omega\theta} + \frac{i}{\omega} \bar{g}_{11} e^{-i\omega\theta} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)}. \quad (3.37)$$

$\omega = \omega_0 = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere (3.35) ve (3.37) ifadelerinden

$$w_{20}(0) = \left[\frac{2i}{\pi} g_{20} + \frac{2i}{3\pi} \bar{g}_{02} \right] + \frac{2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)}{-a\tau_0 N_2 f'(N_2) - 2i\omega},$$

$$w_{20}(-1) = \left[\frac{2}{\pi} g_{20} - \frac{2}{3\pi} \bar{g}_{02} \right] + \frac{2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)}{a\tau_0 N_2 f'(N_2) + 2i\omega},$$

$$w_{11}(0) = \frac{-2i}{\pi} g_{11} + \frac{2i}{\pi} \bar{g}_{11} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)},$$

$$w_{11}(-1) = \frac{-2}{\pi} g_{11} - \frac{2}{\pi} \bar{g}_{11} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)}.$$

Yukarıdaki eşitliklerde ve g_{ij} katsayılarında $\tau_0 = \frac{-\pi}{2M}$ değerini yerine yazılarak yeniden hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}
g_{20} &= \bar{D}[-2ia\tau_0 f'(N_2) - a\tau_0 N_2 f''(N_2)] \\
&= \bar{D} \left[i \frac{\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \bar{D}[a\tau_0 N_2 f''(N_2)] \\
&= \bar{D} \left[-\frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{02} &= \bar{D} \left[2ia \frac{-\pi}{2aN_2 f'(N_2)} f'(N_2) - a \frac{-\pi}{2aN_2 f'(N_2)} N_2 f''(N_2) \right] \\
&= \bar{D} \left[-\frac{i\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
w_{20}(0) &= \frac{2i}{\pi} \bar{D} \left[i \frac{\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] + \frac{2i}{3\pi} D \left[i \frac{\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \\
&\quad + \frac{2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)}{-a\tau_0 N_2 f'(N_2) - 2i\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow w_{20}(0) &= -\frac{2\bar{D}}{N_2} + \frac{i\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{2D}{3N_2} + \frac{iDf''(N_2)}{3f'(N_2)} + \frac{4}{5N_2} - \frac{2i}{5N_2} \\
&\quad - \frac{2if''(N_2)}{5f'(N_2)} - \frac{f''(N_2)}{5f'(N_2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{20}(-1) &= \frac{2}{\pi} \bar{D} \left[i \frac{\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] - \frac{2}{3\pi} D \left[i \frac{\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \\
&\quad + \frac{2ia\tau_0 f'(N_2) + a\tau_0 N_2 f''(N_2)}{a\tau_0 N_2 f'(N_2) + 2i\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w_{20}(-1) &= \frac{2i\bar{D}}{N_2} + \frac{\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{2iD}{3N_2} - \frac{Df''(N_2)}{3f'(N_2)} - \frac{4}{5N_2} + \frac{2i}{5N_2} \\ &\quad + \frac{2if''(N_2)}{5f'(N_2)} + \frac{f''(N_2)}{5f'(N_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{11}(0) &= \frac{-2i}{\pi} g_{11} + \frac{2i}{\pi} \bar{g}_{11} + \frac{-f''(N_2)}{f'(N_2)} \\ &= \frac{i\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{iDf''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{11}(-1) &= \frac{-2}{\pi} \bar{D}[a\tau_0 N_2 f''(N_2)] - \frac{2}{\pi} D[a\tau_0 N_2 f''(N_2)] \\ &\quad - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \end{aligned}$$

$$w_{11}(-1) = \frac{\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} + \frac{Df''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)},$$

olarak bulunur.

Elde edilen bu değerler kullanılarak g_{21} katsayısı

$$\begin{aligned} g_{21} &= \bar{D}[2a\tau_0 f'(N_2)w_{11}(-1) + a\tau_0 f'(N_2)w_{20}(-1) + ia\tau_0 f'(N_2)w_{20}(0) \\ &\quad - 2ia\tau_0 f'(N_2)w_{11}(0) - 2ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{11}(-1) \\ &\quad + ia\tau_0 N_2 f''(N_2)w_{20}(-1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{21} &= 2\bar{D}a \frac{-\pi}{2aN_2f'(N_2)} f'(N_2) \left(\frac{\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} + \frac{Df''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right) \\
&\quad + \bar{D}a \frac{-\pi}{2aN_2f'(N_2)} f'(N_2) \left(\frac{2i\bar{D}}{N_2} + \frac{\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{2iD}{3N_2} - \frac{Df''(N_2)}{3f'(N_2)} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{4}{5N_2} + \frac{2i}{5N_2} + \frac{2if''(N_2)}{5f'(N_2)} + \frac{f''(N_2)}{5f'(N_2)} \right) \\
&\quad + \bar{D}ia \frac{-\pi}{2aN_2f'(N_2)} f'(N_2) \left(-\frac{2\bar{D}}{N_2} + \frac{i\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{2D}{3N_2} + \frac{iDf''(N_2)}{3f'(N_2)} + \frac{4}{5N_2} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{2i}{5N_2} - \frac{2if''(N_2)}{5f'(N_2)} - \frac{f''(N_2)}{5f'(N_2)} \right) \\
&\quad - 2\bar{D}ia \frac{-\pi}{2aN_2f'(N_2)} N_2f''(N_2) \left(\frac{i\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{iDf''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right) \\
&\quad - 2\bar{D}ia \frac{-\pi}{2aN_2f'(N_2)} N_2f''(N_2) \left(\frac{\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} + \frac{Df''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right) \\
&\quad + \bar{D}ia \frac{-\pi}{2aN_2f'(N_2)} N_2f''(N_2) \left(\frac{2i\bar{D}}{N_2} + \frac{\bar{D}f''(N_2)}{f'(N_2)} - \frac{2iD}{3N_2} - \frac{Df''(N_2)}{3f'(N_2)} - \frac{4}{5N_2} \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{2i}{5N_2} + \frac{2if''(N_2)}{5f'(N_2)} + \frac{f''(N_2)}{5f'(N_2)} \right) \\
\Rightarrow g_{21} &= -\frac{\pi\bar{D}^2 f''(N_2)}{N_2 f'(N_2)} + \frac{9\pi\bar{D}f''(N_2)}{10N_2f'(N_2)} + \frac{2i\pi D\bar{D}}{3N_2^2} + \frac{\pi\bar{D}}{5N_2^2} - \frac{3i\pi\bar{D}}{5N_2^2} \\
&\quad - \frac{7i\pi\bar{D}f''(N_2)}{10N_2f'(N_2)} + \frac{7i\pi D\bar{D}}{6} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 - \frac{11i\pi\bar{D}}{10} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \\
&\quad + \frac{\pi\bar{D}}{5} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki bilgiler ışığında $c_1(0)$ Lyapunov katsayısı hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
c_1(0) &= \frac{i}{\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} \\
&= \frac{2i}{\pi} \left(\bar{D} \left[i \frac{\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \right) \left(\bar{D} \left[\frac{-\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \right) \\
&\quad - \frac{4i}{\pi} \left(\bar{D} \left[\frac{-\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \right) \left(D \left[\frac{-\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \right) \\
&\quad - \frac{2i}{3\pi} \left(\bar{D} \left[i \frac{-\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \right) \left(D \left[i \frac{\pi}{N_2} + \frac{\pi}{2f'(N_2)} f''(N_2) \right] \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi \bar{D}^2 f''(N_2)}{N_2 f'(N_2)} + \frac{9\pi \bar{D} f''(N_2)}{10N_2 f'(N_2)} + \frac{2i\pi D \bar{D}}{3N_2^2} + \frac{\pi \bar{D}}{5N_2^2} - \frac{3i\pi \bar{D}}{5N_2^2} \right. \\
&\quad \quad \quad - \frac{7i\pi \bar{D} f''(N_2)}{10N_2 f'(N_2)} + \frac{7i\pi D \bar{D}}{6} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \\
&\quad \quad \quad \left. - \frac{11i\pi \bar{D}}{10} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 + \frac{\pi \bar{D}}{5} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \right) \\
c_1(0) &= \frac{\pi \bar{D}^2 f''(N_2)}{2N_2 f'(N_2)} - \frac{i\pi \bar{D}^2}{2} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 - \frac{7i\pi D \bar{D}}{12} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 - \frac{\pi D \bar{D}}{3N_2^2} \\
&\quad + \frac{9\pi \bar{D} f''(N_2)}{20N_2 f'(N_2)} + \frac{\pi D \bar{D}}{10N_2^2} - \frac{3i\pi \bar{D}}{10N_2^2} - \frac{7i\pi \bar{D} f''(N_2)}{20N_2 f'(N_2)} \\
&\quad - \frac{11i\pi \bar{D}}{20} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 + \frac{\pi \bar{D}}{10} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2
\end{aligned}$$

dır. $c_1(0)$ katsayısının reel ve sanal kısmının ayırabilmesi için D katsayısının değerlerini hesaplamalıyız.

$$D = \frac{4 + 2i\pi}{4 + \pi^2} \Rightarrow \bar{D} = \frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2},$$

$$\bar{D}^2 = \left(\frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \right)^2 = \frac{16 - 16i\pi - 4\pi^2}{(4 + \pi^2)^2},$$

$$D\bar{D} = \frac{4 + 2i\pi}{4 + \pi^2} \cdot \frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} = \frac{16 + 4\pi^2}{(4 + \pi^2)^2} = \frac{4}{4 + \pi^2}.$$

Bu değerler $c_1(0)$ Lyapunov katsayısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1(0) = & \frac{\pi f''(N_2)}{2N_2 f'(N_2)} \left[\frac{16 - 16i\pi - 4\pi^2}{(4 + \pi^2)^2} \right] - \frac{i\pi}{4} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \left[\frac{16 - 16i\pi - 4\pi^2}{(4 + \pi^2)^2} \right] \\ & - \frac{7i\pi}{12} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \left[\frac{4}{4 + \pi^2} \right] - \frac{i\pi}{3N_2^2} \left[\frac{4}{4 + \pi^2} \right] \\ & + \frac{9\pi f''(N_2)}{20N_2 f'(N_2)} \left[\frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \right] + \frac{\pi}{10N_2^2} \left[\frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \right] \\ & - \frac{3i\pi}{10N_2^2} \left[\frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \right] - \frac{7i\pi f''(N_2)}{20N_2 f'(N_2)} \left[\frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \right] \\ & - \frac{11i\pi}{20} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \left[\frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \right] \\ & + \frac{\pi}{10} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \left[\frac{4 - 2i\pi}{4 + \pi^2} \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

olarak elde edilir. μ_2 için $c_1(0)$ değerinin reel kısmına ihtiyaç vardır. (3.38)

ifadesinin reel ve sanal kısımları ayrılırsa reel kısmı:

$$\begin{aligned} Re\{c_1(0)\} = & \frac{8\pi f''(N_2)}{N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} - \frac{2\pi^3 f''(N_2)}{N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} \\ & - \frac{8\pi^2}{(4 + \pi^2)^2} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 + \frac{9\pi f''(N_2)}{5N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)} \\ & + \frac{2\pi}{5N_2^2(4 + \pi^2)} - \frac{3\pi^2}{5N_2^2(4 + \pi^2)} - \frac{7\pi^2 f''(N_2)}{10N_2^2(4 + \pi^2)} \end{aligned}$$

$$-\frac{11\pi^2}{5N_2^2(4+\pi^2)} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 + \frac{2\pi}{5(4+\pi^2)} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2$$

elde edilir. Bu ifade yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} Re\{c_1(0)\} &= \frac{f''(N_2)(80\pi - 20\pi^3 + 18\pi(4+\pi^2) - 7\pi^2(4+\pi^2))}{5N_2f'(N_2)(4+\pi^2)^2} \\ &+ \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \frac{(-80\pi^2 - 11\pi^2(4+\pi^2) + 4\pi(4+\pi^2))}{10(4+\pi^2)^2} \\ &+ \frac{2\pi - 3\pi^2}{5N_2^2(4+\pi^2)} \end{aligned}$$

olur.

$$\mathfrak{h}_1 = -542.7030305$$

$$\mathfrak{h}_2 = -2121.040358$$

$$\mathfrak{h}_3 = -23.3256279$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} Re\{c_1(0)\} &= \frac{\mathfrak{h}_1 f''(N_2)}{5N_2 f'(N_2)(4+\pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_2}{10(4+\pi^2)^2} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \\ &+ \frac{8\pi + 76\pi^2}{5N_2^2(4+\pi^2)} \\ &= \frac{2\mathfrak{h}_1 f'(N_2) f''(N_2) + N_2 \mathfrak{h}_2 [f''(N_2)]^2}{10N_2 [f'(N_2)]^2 (4+\pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_3}{5N_2^2(4+\pi^2)} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (3.38) ifadesinin sanal kısmı ise

$$\begin{aligned}
Im\{c_1(0)\} &= \frac{-8\pi^2}{N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} - \frac{8\pi}{(4 + \pi^2)^2} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \\
&+ \frac{2\pi^3}{(4 + \pi^2)^2} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 - \frac{7\pi}{3(4 + \pi^2)} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \\
&+ \frac{4\pi}{3N_2(4 + \pi^2)} - \frac{9\pi^2 f''(N_2)}{10N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)} - \frac{\pi^2}{5N_2^2(4 + \pi^2)} \\
&- \frac{6\pi}{5N_2^2(4 + \pi^2)} - \frac{7\pi f''(N_2)}{5N_2 f'(N_2)} - \frac{11\pi}{5(4 + \pi^2)} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \\
&- \frac{\pi^2}{5(4 + \pi^2)} \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2
\end{aligned}$$

dır. Bu ifade yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
Im\{c_1(0)\} &= f''(N_2) \frac{(-80\pi^2 - 9\pi^2(4 + \pi^2) - 14\pi(4 + \pi^2)^2)}{10N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} \\
&+ \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \frac{(-120\pi + 30\pi^3 - 35\pi(4 + \pi^2) - 33\pi(4 + \pi^2))}{15(4 + \pi^2)^2} \\
&+ \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \frac{(-3\pi^2(4 + \pi^2))}{15(4 + \pi^2)^2} \\
&- \frac{\pi^2 + 6\pi}{5N_2(4 + \pi^2)^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\mathfrak{h}_4 = -2631.572992$$

$$\mathfrak{h}_5 = 876.7144133$$

$$\mathfrak{h}_6 = -28.71916032$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{c_1(0)\} &= f''(N_2) \frac{\mathfrak{h}_4}{10N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} + \left[\frac{f''(N_2)}{f'(N_2)} \right]^2 \frac{\mathfrak{h}_5}{15(4 + \pi^2)^2} \\ &\quad + \frac{\mathfrak{h}_6}{5N_2(4 + \pi^2)^2} \\ &= \frac{3\mathfrak{h}_4 f'(N_2) f''(N_2) + 2\mathfrak{h}_5 N_2 [f''(N_2)]^2}{30N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_6}{5N_2(4 + \pi^2)^2} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Çatallanmanın yönünü tespit edebilmek için $\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}\{c_1(0)\}}{\alpha'(0)}$ katsayısının işareti tespit edilmelidir. (3.19) ifadesinden

$$\alpha'(0) = \operatorname{Re}\{\lambda'(\tau_0)\} = -\frac{2M\pi}{4 + \pi^2} > 0$$

olduğu bilinmektedir. Öyleyse çatallanmanın yönü için $\operatorname{Re}\{c_1(0)\}$ 'in işaretine bakmak yeterlidir.

$$\operatorname{Re}\{c_1(0)\} = \frac{2\mathfrak{h}_1 f'(N_2) f''(N_2) + N_2 \mathfrak{h}_2 [f''(N_2)]^2}{10N_2 [f'(N_2)]^2 (4 + \pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_3}{5N_2^2 (4 + \pi^2)^2}$$

1. $f''(N_2) \neq 0$ ise
 - (i) $Re\{c_1(0)\} < 0$ ise çatallanma süperkritik,
 - (ii) $Re\{c_1(0)\} > 0$ ise çatallanma subkritik olur.
2. $f''(N_2) = 0$ ise çatallanma süperkritik olur

Periyodik çözümlerin kararlılık analizi için $\beta_2 = 2Re\{c_1(0)\}$ değerinin hesaplanması gerekmektedir.

$$\beta_2 = 2 \left(\frac{2h_1 f'(N_2) f''(N_2) + N_2 h_2 [f''(N_2)]^2}{10N_2 [f'(N_2)]^2 (4 + \pi^2)^2} + \frac{h_3}{5N_2^2 (4 + \pi^2)} \right)$$

$$\beta_2 = \frac{2h_1 f'(N_2) f''(N_2) + N_2 h_2 [f''(N_2)]^2}{5N_2 [f'(N_2)]^2 (4 + \pi^2)^2} + \frac{2h_3}{5N_2^2 (4 + \pi^2)}$$

şeklinde bulunur.

1. $f''(N_2) \neq 0$ ise
 - (i) $Re\{c_1(0)\} < 0$ ise periyodik çözümler kararlı,
 - (ii) $Re\{c_1(0)\} > 0$ ise periyodik çözümler kararsızdır.
2. $f''(N_2) = 0$ ise periyodik çözümler kararlı.

Periyodik çözümlerin periyodu hakkında yorum yapabilmek için ise $\tau_2 = \frac{-(Im\ c_1(0) + \mu_2 \omega'(0))}{\omega_0}$ değeri hesaplanmalıdır. (3.18) den biliyoruz ki $M = aN_2 f'(N_2)$ olmak üzere

$$Im\{\lambda'(0)\} = \omega'(0) = \frac{-4M}{4 + \pi^2}$$

şeklindedir. Öyleyse

$$Im\{c_1(0)\} = \frac{3\mathfrak{h}_4 f'(N_2) f''(N_2) + 2\mathfrak{h}_5 N_2 [f''(N_2)]^2}{30N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_6}{5N_2(4 + \pi^2)^2}$$

ve

$$\begin{aligned} \omega'(0)\mu_2 &= \frac{-4M}{4 + \pi^2} \cdot \frac{-(4 + \pi^2)}{2M\pi} \cdot \left(\frac{2\mathfrak{h}_1 f'(N_2) f''(N_2) + N_2 \mathfrak{h}_2 [f''(N_2)]^2}{10N_2 [f'(N_2)]^2 (4 + \pi^2)^2} \right) \\ &\quad + \frac{-4M}{4 + \pi^2} \cdot \frac{-(4 + \pi^2)}{2M\pi} \cdot \frac{\mathfrak{h}_3}{5N_2^2 (4 + \pi^2)^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{2\mathfrak{h}_1 f'(N_2) f''(N_2) + N_2 \mathfrak{h}_2 [f''(N_2)]^2}{10N_2 [f'(N_2)]^2 (4 + \pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_3}{5N_2^2 (4 + \pi^2)^2} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{-2}{\pi} \cdot \left(\frac{3\mathfrak{h}_4 f'(N_2) f''(N_2) + 2\mathfrak{h}_5 N_2 [f''(N_2)]^2}{30N_2 f'(N_2)(4 + \pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_6}{5N_2(4 + \pi^2)^2} \right) \\ &\quad - \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\frac{2\mathfrak{h}_1 f'(N_2) f''(N_2) + N_2 \mathfrak{h}_2 [f''(N_2)]^2}{10N_2 [f'(N_2)]^2 (4 + \pi^2)^2} + \frac{\mathfrak{h}_3}{5N_2^2 (4 + \pi^2)^2} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer $f''(N_2) = 0$ ise

$$\tau_2 = \frac{-2\mathfrak{h}_6}{5\pi N_2(4 + \pi^2)^2} - \frac{4\mathfrak{h}_3}{5N_2^2 \pi^2 (4 + \pi^2)^2}$$

olarak elde edilir. Şu ana kadar yapılan hesaplamalar ve elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremleri verir.

Teorem 3.2: (3.1) tipindeki genel gecikmeli diferensiyel denklemi için

- (i) $\tau < \tau_0$ ise (3.1) denkleminin $N_2 > 0$ denge noktası asimptotik karardır.
- (ii) $\tau > \tau_0$ ise N_2 denge noktası kararsızdır.
- (iii) $f'(N_2) < 0$ ise $\tau_0 = \frac{-\pi}{2M}$ değerinde Hopf çatallanma görülür.

Teorem 3.3: (3.1) denklemini için

1. $f''(N_2) \neq 0$ ise
 - (i) $Re\{c_1(0)\} < 0$ ise çatallanma süperkritik,
 - (ii) $Re\{c_1(0)\} > 0$ ise çatallanma subkritik olur.
 - (iii) $Re\{c_1(0)\} < 0$ ise periyodik çözümler karardır,
 - (iv) $Re\{c_1(0)\} > 0$ ise periyodik çözümler kararsızdır.
 - (v) $\tau_2 > 0$ ise periyod artan,
 - (vi) $\tau_2 < 0$ ise periyod azalandır.
2. $f''(N_2) = 0$ ise çatallanma süperkritik, periyodik çözümler karardır ve periyodik çözümlerin periyodu

$$\tau_2 = \frac{-2h_6}{5\pi N_2(4 + \pi^2)^2} - \frac{4h_3}{5N_2^2\pi^2(4 + \pi^2)}$$

dır.

3.3. Nümerik Çalışmalar

Bu kısımda, tez çalışmasında ele alınan (1.1) gecikmeli diferensiyel denklem tipine örnek olarak, en bilinen denklemlerden biri olan Lojistik Denklem ele alınarak nümerik çalışmalar yapılmıştır. İşlemler için Matlab DDE 23 paket programı kullanılmıştır.

(3.1) denkleminde

$$f(N(t - \tau)) = 1 - \frac{N(t - \tau)}{K}$$

seçilirse

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) \quad (3.39)$$

gecikmeli lojistik denklemi elde edilir. Özel olarak $a = 1$ ve $K = 1$ alınırsa (3.39) denklemi

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(1 - N(t - \tau)) \quad (3.40)$$

denkleminde dönüşür. $N_1 = 0$, bu sistemin aşıkâr denge noktasıdır. Ancak biyolojik açıdan bu çalışmada $N_2 = 1$ pozitif denge noktası ile ilgileneceğiz. Uygun değışken değıştirmesi altında (3.40) denklemi

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\tau x(t-1)(x(t)+1) \quad (3.41)$$

denkleminde denk olur. $f'(N_2) = f'(1) = -1 < 0$ olduğundan $\tau_0 = \frac{\pi}{2}$ çatallanma değeridir. Aynı zamanda $f''(N_2) = f''(1) = 0$ olduğundan çatallanma süperkritik ve periyodik çözümler kararsızdır. Bu sonuçları doğrulamak üzere (3.39) denklemini için Hopf çatallanma parametreleri hesaplanırsa:

$$c_1(0) = \frac{-40i\pi + 12\pi - 6i\pi^2 - 36i\pi - 18\pi^2}{30N_2^2(4 + \pi^2)}$$

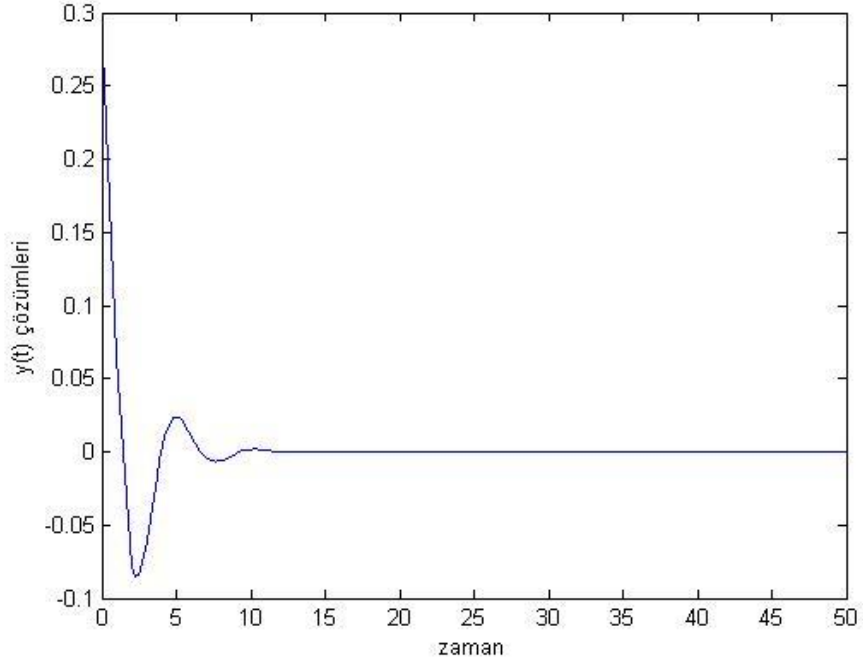
$$\mu_2 = 0.7424777962 > 0$$

$$\beta_2 = -0.672712133 < 0$$

$$\tau_2 = 0.2434726191 > 0$$

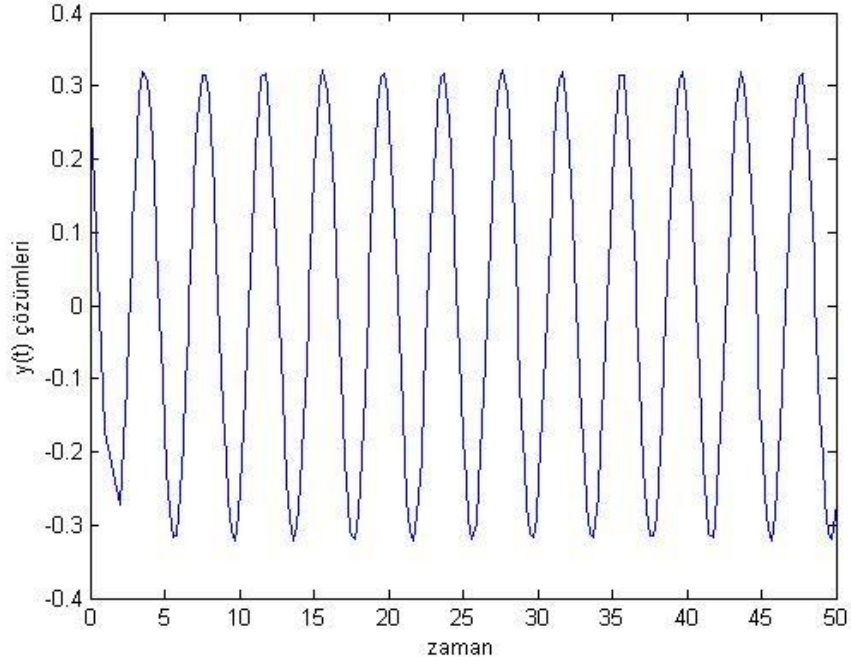
olarak elde edilir. Bu değerlerden de anlaşılacağı üzere $\mu_2 > 0$ olduğundan Hopf çatallanma süperkritik, $\beta_2 > 0$ olduğundan periyodik çözümler kararsız ve $\tau_2 > 0$ olduğundan periyod artandır. Bir önceki kısımda vermiş olduğumuz teoriyi elde edilen bu sonuçlar desteklemektedir.

Yapılan nümerik çalışmalarda, başlangıç noktası $x_0 = 0.2$ olarak alınmıştır.



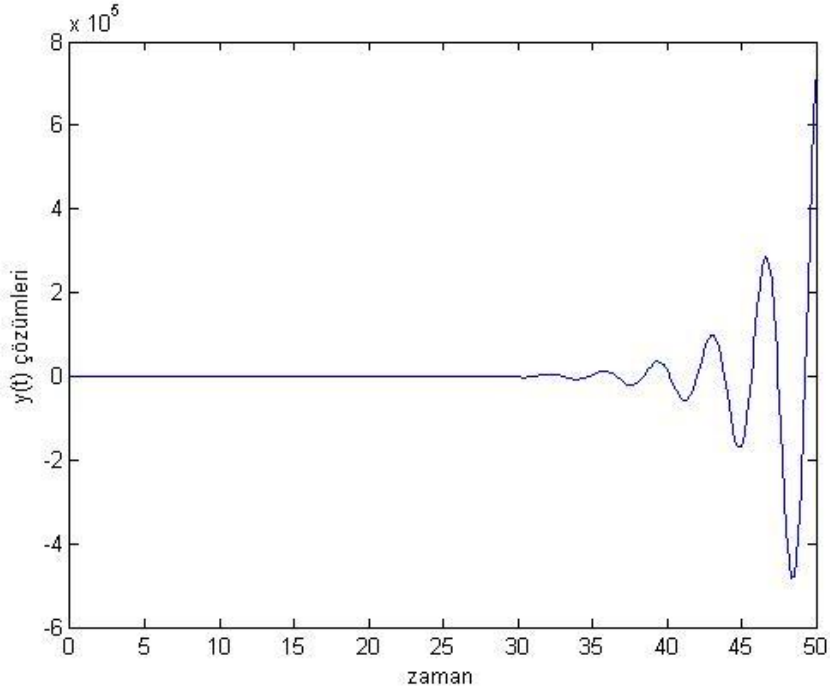
Şekil 3.1. $\tau = \pi/4$ için Popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği

Şekil 3.1 göstermektedir ki N_2 denge noktası $\tau \in [0, \pi/2)$ için asimptotik kararlıdır.



Şekil 3.2. $\tau = \pi/2$ için Popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği

Şekil 3.2 göstermektedir ki N_2 denge noktası $\tau = \pi/2$ için sistemin kararlılık yapısı değişmiştir.



Şekil 3.3. $\tau = 3\pi/4$ için Popülasyon yoğunluğunun zamana göre grafiği

Şekil 3.3 göstermektedir ki N_2 denge noktası $\tau = \pi$ için sistemin kararlı yapısı değişmiş ve kararsız hale gelmiştir.

Yapılan bu nümerik çalışma, gecikme parametresindeki değişimin denge noktasının kararlılığı üzerindeki etkisini doğrulamıştır. Gerçekten de Şekil 3.3'den (3.39) denkleminin denge noktasının kritik değeri geçtikten sonra kararsız hale geldiği ve ayrıca elde edilen periyodik çözümlerinden kararlı olduğu görülmektedir.

BÖLÜM 4

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Dinamik sistemleri matematiksel olarak ifade ederken gerçeğe yakın bir model kurabilmek için gecikmeli diferensiyel denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Aynı zamanda bu tür sistemlerde mutlaka bir parametre bulunduğundan ötürü bu parametrenin değişiminin sistem üzerinde yarattığı etki merak konusu olmuştur. Sistemin parametresinin sebep olduğu değişim çatallanma olarak adlandırılmakta idi. Periyodik çözümlerin varlığından söz etmesi dolayısı ile Hopf çatallanma diğer çatallanma tiplerine göre öne çıkmaktadır.

Bu tezin ilk bölümünde çalışılan konuya genel bir bakış sunulmuş, gecikmeli diferensiyel denklemlere ve onların dinamik sistemler için önemine kısaca değinilmiştir. Böylece ilerleyen bölümlerde karşılaşılabilecek olan kavramlar hakkında bilgi verilmeye çalışılmıştır.

İkinci bölümde, “Çatallanma nedir?” sorusu cevaplanmaya çalışılmış, zaman göre kesikli ve sürekli sistemler için çatallanma tiplerinden bahsedilmiştir. Hopf çatallanma tipi ise özel olarak incelenmiştir. E. Hopf bu çatallanma tipini diferensiyel denklemler için incelemişken Wright [27,36-39] ve Jones [40] yaptıkları çalışmalar ile gecikmeli diferensiyel denklemler için periyodik çözümlerin varlığını göstererek Hopf çatallanmanın gecikmeli diferensiyel denklemlere uygulanmasının önünü açmışlardır. Bu yapılan çalışmalara farklı bir yaklaşım veren Hassard [26], bu tez çalışmasının temel taşı olmuştur.

Üçüncü bölümde, $a, \tau > 0$ sabitler olmak üzere

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t)f(N(t - \tau)) \quad (3.1)$$

tipindeki gecikmeli diferensiyel denklemin Hopf çatallanma analizi yapılmıştır. Hopf çatallanmanın görülebilmesi için gerekli olan koşulun $\tau = \tau_0$ iken $N_2 > 0$ denge noktası için $f'(N_2) < 0$ olması olduğu gösterildi. Dolayısıyla (3.1) şeklinde modellenen bir dinamik sistemde Hopf çatallanmasının görülebilmesi için sadece f fonksiyonunun gecikmeli durum değişkenine göre birinci türevinin işaretinin kontrol edilmesi yeterlidir. Çatallanan periyodik çözümlerin yönü, kararlılığı ve periyodu için ise f fonksiyonunun gecikmeli durum değişkenine göre ikinci türevi kontrol edilmelidir. Ayrıca ortaya atılan teori, en yaygın olarak kullanılan gecikmeli lojistik denklem üzerinde yapılan nümerik çalışma ile desteklenmiştir. (3.40) denklemi için $\tau_0 = \pi/2$ çatallanma değeri olarak bulunmuştur. Aynı zamanda $\tau < \tau_0$ için sistemin kararlı olduğu (Şekil 3.1.), $\tau = \tau_0$ iken kararlılık yapısının bozulduğu (Şekil 3.2.) ve $\tau > \tau_0$ durumunda ise sistemin denge noktasının kararlı halden kararsız hale geldiği görülmüştür (Şekil 3.3.). Böylece yapılan çalışmanın nümerik olarak da doğruluğu gösterilmiştir.

Yapılan bu çalışmanın, (3.1) tipindeki bir gecikmeli diferensiyel denklem ile modellenen dinamik sistemlerin periyodik çözüme sahip olup olmadığı konusunda yapılacak olan çalışmalara ışık tutması beklenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Allen, L.J.S., An Introduction to Mathematical Biology, *Prentice Hall*, Upper Saddle River, New Jersey, 2007.
- [2] Stewart, J., Calculus: Concept and Context, BROOKS/COLE, CA, USA, 2001.
- [3] Goel, N.S., Maitra, S.C. ve Montroll, E.W., Nonlinear Models of Interacting Populations, Academic Press, New York, 1971.
- [4] May, R.M., Stability and Complexity in Model Ecosystems, *Princeton Univ. Press*, New Jersey, USA, 1973.
- [5] Cushing, J.M., Integrodifferential Equations with Delay Models in Population Dynamics, Lecture Notes in Biomath. # 20, S.Levin (Ed.), *Springer-Verlag*, Berlin, 1977.
- [6] Pielou, E.C., Mathematical Ecology, *John Wiley and Sons*, New York, 1977.
- [7] Freedman, H.I., Deterministic Mathematical Models in Population Ecology, *Marcel Dekker*, New York, 1980.
- [8] Slobodkin, L.B., Growth and Regulation of Animal Populations, *Dover Publications*, New York, 1980.
- [9] Oliveira-Pinto, F. ve Connolly, B.W., Applicable Mathematics of Non-Physical Phenomena, *Ellis Horwood Limited*, New York, 1982.
- [10] Waltmen, P., Competition Models in Population Biology, *SIAM*, Philadelphia, USA, 1983.
- [11] Rose, M.R., Quantitative Ecological Theory, *Croom Helm*, London, 1987.
- [12] Edelstein-Keshet, L., Mathematical Models in Biology, *Random Hous*, New York, 1988.
- [13] Yodzis, P., Introduction to Theoretical Ecology, *Harper & Row*, London, 1989.
- [14] Murray, J.D., Mathematical Biology, *Springer-Verlag*, Berlin, 1989.
- [15] Scheuring, I., Allee effect increases the dynamical stability of populations, *J. Theor. Bio.*, 199: 407-414, 1999.
- [16] Çelik, C., Merdan, H., Duman, O., Akın, Ö., Allee Effects on Population Dynamics with Delay, *Chaos, Solitons and Fractals*, 37, 65-74, 2008.
- [17] Merdan, H., Duman, O., On The Stability Analysis of a General Discrete-Time Population Model Involving Predation and Allee Effects, *Chaos, Solitons and Fractals*, 40, 1169-1175, 2009.
- [18] Merdan, H., Duman, O., Akın, Ö., Çelik, C., Allee Effects on Population Dynamics in Continuous (overlapping) Case, *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 1994-2001, 2009.
- [19] Duman, O., Merdan, H., Stability Analysis of Continuous Population Model Involving Predation and Allee Effect, *Chaos, Solitons and Fractals*, 41, 1218-1222, 2009.
- [20] Strogatz, S.H., Nonlinear Dynamics and Chaos, *Perseus Books Publishing*, L.L.C., 1994.
- [21] Gopalsamy, K., Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of population Dynamics, *Kluwer Academic Pub.*, The Netherlands, 1992.
- [22] Jacquez, J., Compartmental Analysis in Biology and Medicine, 3. Ed. BioMedware, Ann Arbor, Mich, 1996.

- [23] Kuang, Y., Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, *Academic Press*, Inc., San Diego, 1993.
- [24] Çelik, C., The stability and Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons and Fractals*, 37, 87-99, 2007.
- [25] Li, B., Wang, M., Diffusion-driven instability and Hopf bifurcation in Brusselator system, *App. Math. And Mech.*, 29, 825-832, 2008.
- [26] Hassard, N.D., Kazarinoff, Y.H. ve Wan, Y-H., Theory and Applications of Hopf Bifurcation, London Math. Soc. Lecture Notes, 41, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1981.
- [27] Wright, E.M., The Non-Linear Difference-Differential Equation, *J. Reine und Angew. Math.*, 194, 66-87, 1955.
- [28] Brayton, R.K., Bifurcation of periodic solutions in a nonlinear difference-differential equation of neutral type, *Quart. Appl. Math.*, 24, 215-224, 1966.
- [29] Kolmanovskii, V.B., ve Nosov, V.R., Stability of Functional Differential Equations, *Academic Press*, London, 1986.
- [30] Driver, R.D., A neutral system with state-dependent delay, *J. Diff. EQns.*, 54, 73-86, 1984.
- [31] Sharpe, F.R., ve Lotka, A.J., Contribution to the analysis of malaria epidemiology IV: Incubation lag, *Supplement to Amer. J: Hygiene*, 3, 96-112, 1923.
- [32] Volterra, V., Variazioni et fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, *R. Comitato Talassografico Memoria*, 131, 1-142, 1927. İngilizce çevirisi: Scudo ve Ziegler, 1978.
- [33] Scudo, F.M., ve Ziegler, J.R., The Golden Age of Theoretical Ecology, *Springer*, Berlin, 1978.
- [34] MacDonald, N., Time Lags in Biological Models, *Lecture Notes in Biomath.*, 27, *Springer*, Berlin.
- [35] Glass, L., ve Mackey, M.C., Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 316, 214-235, 1979.
- [36] Wright, E.M., The Non-Linear Difference-Differential Equation, *Quart. A. Of Math.*, 17, 245-252, 1946.
- [37] Wright, E.M., The Linear Difference-Differential Equation with Asymptotically Constant Coefficients, *Amer. J. of Math.* 70, 221-238, 1948.
- [38] Wright, E.M., The Linear Difference-Differential Equation with Constant Coefficients, *Proc. Roy. Soc., Edinburgh*, 62, 387-393, 1949.
- [39] Wright, E.M., The Stability of Solutions of Non-Linear Difference-Differential Equation, *Proc. Roy. Soc., Edinburgh*, 63, 18-26, 1950.
- [40] Jones, G.S., The Existence of periyodic solutions of $f'(x) = -af(x - 1)(1 + f(x))$, *J. Math. Anal. And Applic.*, 5, 435-450, 1962.
- [41] Chafee, N., A Bifurcation Problem for Functional Differential Equation of Finitlt Retarded Type, *J. Math. Anal. And Applics.*, 35, 312-348, 1971.
- [42] Yafia, R., Hopf bifurcation in a delayed model for tumor-immune system competition with negative immune response, *Disc. Dyn. in Nature and Soc.*, 1-9, 2006.

- [43] Yafia, R., Hopf bifurcation analysis and numerical simulations in an ODE model of the immune system with positive immune response, *Nonlinear Anal.:Real World Appl.*, 8, 1359-1369, 2007.
- [44] Wang, M., Stability and Hopf bifurcation for a prey-predator model with prey-stage structure and diffusion, *Math. Biosciences*, 212, 149-160, 2008.
- [45] Li, K., Wei, J., Stability and Hopf bifurcation analysis of a prey-predator system with two delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 42, 2606-2613, 2009.
- [46] Elaydi, S.N., *Discrete Chaos*, Chapman & Hall/CRC, BocaRaton, London, New York, Washington, D.C., 2000.
- [47] Rasband, S.N., *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, *John Wiley & Sons*, New York, 1990.
- [48] Marsden, J.E., McCracken, M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, *Applied Math. Sciences*, Vol. 19, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [49] Hutchinson, G.E., Circular Casual System in Ecology, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 50, 221-246, 1948.
- [50] Walter, G.G., Delay-Differential Equation Models for Fisheries, *Journal of the Fisheries Res. Board of Canada*, 30, 939-945, 1973.
- [51] Hale, J.K., *Functional Differential Equations*, *Applied Math. Sci.*, Vol. 3, *Springer-Verlag*, New York, 1971.
- [52] Halanay, A., *Differential Equations; Stability, Oscillations, Time Lags*, *Math. In Sci. And Eng. Vol.23*, *Academic Press*, New York, 1966.
- [53] Claeysen, J.R., Effect of Delays on Functional Differential Equations, *J. Diff. Eqns.*, 20, 404-440, 1976
- [54] Riesz, F., Sz.-Nagy, B., *Functional Analysis*, Blackie & Son Limited, London, 1955.
- [55] Hopf, E., Abzweigung Einer Periodischen Losung Von Einer Stationaren Losung Eines Differential Systems, *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipsig Math.*, 94, 3-22, 1942., İngilizce Çevirisi: L. Howard ve N. Kopell, 81, 163-205.
- [56] Kuznetsov, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, *Applied Mathematical Sciences*, 112, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [57] Smith, H., *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Springer-Verlag, New York 2010.
- [58] “Bifurcation Theory” erişim adresi: http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation_theory, erişim tarihi: 05.07.2011.
- [59] “Delay Diferential Equation” erişim adresi: http://en.wikipedia.org/wiki/Delay_diferential_equation, erişim tarihi: 13.07.2011.
- [60] “Delay-diferential equations” erişim adresi: http://www.scholarpedia.org/artical/Delay_diferential_equations, erişim tarihi: 13.07.2011.
- [61] “Center Manifold Teoremi” erişim adresi: http://en.wikipedia.org/wiki/Center_manifold, erişim tarihi: 13.07.2011.

EKLER

A. CENTER MANİFOLD TEOREMİ

Bir dinamik sistemin denge noktasının center manifoldu, denge noktası civarındaki davranışı kararlı manifoldun çekimi ya da kararsız denge noktasının itimi tarafından kontrol edilemeyen yörüngelerden oluşmaktadır. Dinamik sistemlerin denge noktasını incelerken ilk yapılması gereken işlem lineerleştirmedir. Negatif reel kısma sahip öz değerlere karşılık gelen öz vektörler, kararlı manifoldu veren kararlı öz uzaylar oluştururlar. Kararlı manifold kendisine yakın olan yörüngeleri çeker. Benzer olarak, pozitif reel kısma sahip öz değerler, kendisine yakın yörüngeleri iten kararsız manifoldu, reel kısmı sıfır olan özdeğerler ise center manifoldu verir. Center manifold civarındaki davranış lineerleştirme yardımı ile belirlenemez. Dolayısıyla incelenmesi daha zordur [61].

Sistemin ilgi çeken davranışı center manifold üzerinde meydana geldiğinden, center manifoldlar çatallanma teorisinde önemli bir rol üstlenmektedir. $x \in \mathbb{R}^n$ ve f fonksiyonu gerektiği kadar türevlenebilir olmak üzere

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{a.1})$$

$x^* = 0$ denge noktasına sahip bir dinamik sistemi gösterebiliriz. $A = \frac{df}{dx}(x^*)$ olmak üzere

$$\dot{x} = Ax$$

bu dinamik sistemin lineer halidir. Bu durumda A matrisi üç alt uzay tanımlar. Bunlar:

- (i) Reel kısmı negatif olan öz değere karşılık gelen genelleştirilmiş öz vektörler tarafından gerilen kararlı alt uzay,
- (ii) Reel kısmı pozitif olan öz değere karşılık gelen genelleştirilmiş öz vektör tarafından gerilen kararsız alt uzay,
- (iii) Reel kısmı sıfır olan öz değere karşılık gelen genelleştirilmiş öz değerler tarafından gerilen merkez alt uzay.

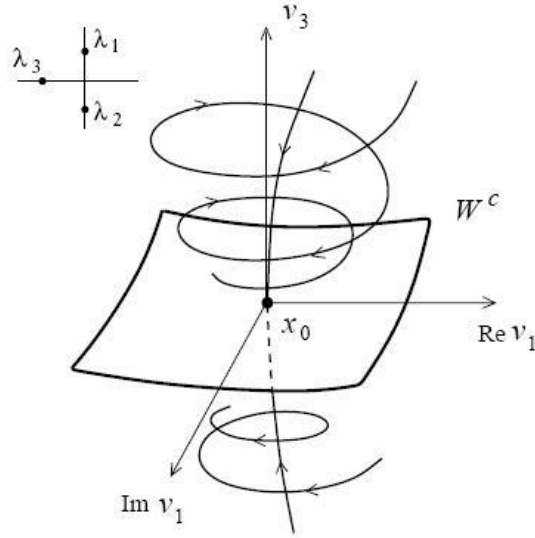
Bu üç alt uzaya lineerleştirilmiş sistemin bütün değişmez alt uzayları denir.

Lineer olmayan sistem, yörüngelerini içeren değişmez manifolda sahiptir. Kararlı alt uzaya teğet olan değişmez manifolda kararlı manifold denir. Benzer olarak kararsız alt uzaya teğet olan değişmez manifolda kararsız manifold, merkez uzaya teğet olan değişmez manifolda ise center manifold denir.

T^c sanal eksen üzerinde n_0 tane öz değerin birleşimine karşılık gelen lineer (genelleştirilmiş) öz uzayı, φ^t , (a.1) denklemleri ile ilişkili akıyı gösterir.

Teorem (Center Manifold Teoremi): (a.1) denkleminin x^* denge noktasında T^c uzayına teğet olan, lokal olarak tanımlanmış n_0 -boyutlu $W_{loc}^c(0)$ değişmez manifoldu vardır. Ayrıca, her $t \geq 0$ ($t \leq 0$) için $\varphi^t x \in U$ ise $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$) iken $\varphi^t \rightarrow W_{loc}^c(0)$ olacak şekilde $x^* = 0$ denge noktasının bir U komşuluğu vardır.

Tanım: $W_{loc}^c(0)$ manifolduna center manifold denir.



Şekil a.1. Hopf çatallanmada iki boyutlu center manifold

$u \in \mathbb{R}^{n_0}$, $w \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, B sanal eksen üzerindeki öz değerlere karşılık gelen $n_0 \times n_0$ tipinde bir matris ve C , sanal eksen üzerinde yer almayan (yani reel kısmı sıfır olmayan) öz değerlere karşılık gelen $n_+ + n_- \times n_+ + n_-$ tipinde bir matris olmak üzere (a.1) denklemleri

$$\dot{u} = Bu + g(u, w) \tag{a.2}$$

$$\dot{w} = C + h(u, w)$$

şeklinde yazılabilir. Burada g ve h fonksiyonları kuadratik terimden başlayan terimleri içeren Taylor açılımına sahip fonksiyonlardır.

Hopf Çatallanma için Center Manifoldun Hesaplanması

(a.1) denklemi $n_0 = 2$ için, $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^{n-2}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1(u_1, u_2, w) \\ G_2(u_1, u_2, w) \end{pmatrix} \quad (\text{a.3})$$

$$\dot{w} = Cw + H_1(u_1, u_2, w)$$

olarak yazılır. $z = u_1 + iu_2$ değişken değiştirmesi ile (a.3) sistemi

$$\dot{z} = i\omega_0 z + G(z, \bar{z}, w)$$

$$\dot{w} = Cw + H(z, \bar{z}, w)$$

kompleks sistemine dönüşür. Burada G ve H fonksiyonları $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ ve $w \in \mathbb{R}^{n-2}$ değişkenlerinin kompleks değerli fonksiyonlarıdır. $w_{ij} \in \mathbb{C}^{n-2}$ olmak üzere W^c manifoldu

$$w = W(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} w_{20} z^2 + w_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} w_{02} \bar{z}^2 + O(|z|^3) \quad (\text{a.4})$$

gösterimine sahiptir. $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}; G_{01}, G_{10}, H_{ij} \in \mathbb{R}^{n-2}; H_{11}$ reel ve $H_{20} = \bar{H}_{02}$ olmak üzere Taylor açılımından

$$\begin{aligned} \dot{z} = & i\omega_0 z + \frac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} G_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} G_{21} z^2 \bar{z} + \langle G_{10}, w \rangle z \\ & + \langle G_{01}, w \rangle \bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (\text{a.5})$$

$$\dot{w} = Cw + \frac{1}{2} H_{20} z^2 + H_{11} z \bar{z} + \frac{1}{2} H_{02} \bar{z}^2 + \dots$$

olarak yazılır. Burada

$$G_{ij} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} G(z, \bar{z}, 0) \Big|_{z=0}, \quad i+j \geq 2,$$

$$\bar{G}_{10,i} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial z} G(z, \bar{z}, w) \Big|_{z=0, v=0}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\bar{G}_{01,i} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial \bar{z}} G(z, \bar{z}, w) \Big|_{z=0, v=0}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$H_{ij} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} H(z, \bar{z}, 0) \Big|_{z=0}, \quad i+j = 2.$$

(a.4) ifadesi (a.5) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} (2i\omega_0 I - C)w_{20} &= H_{20} \\ -Cw_{11} &= H_{11} \\ (-2i\omega_0 I - C)w_{02} &= H_{02} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece center manifoldu tanımlayan katsayılar bulunmuş olur. Bu katsayılar yardımı ile de çatallanmanın yönü, oluşan periyodik çözümlerin periyodu ve kararlılık yapıları belirlenir.

B. MATLAB KODLARI

Bölüm 3.4'de gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümünü veren Matlab kodu aşağıdaki gibidir:

```
function hde1

t=linspace(0,50,5);
sol = dde23(@ddex1de,1,@ddex1hist,t);
figure;
plot(sol.x,sol.y)
xlabel('zaman');
ylabel('y(t) çözümleri');

% -----

function s = ddex1hist(t)

s = 0.3;

% -----

function dydt = ddex1de(t,y,Z)

ylag1 = Z(:,1);

dydt = [ -(pi./4).*ylag1(1)];
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AKKOCAOĞLU, Hande
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 12.08.1986 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 292 40 00
Faks : 0 (312) 292 40 91
e-mail : hakkocaoglu@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2009
Yüksek Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2011	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar