GENEL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ İÇİN ASİMTOTİK YAKLAŞIM

ÖZLEM ARDIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2014

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Necip CAMUŞCU

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

Anabilim Dalı Başkanı

Özlem ARDIÇ tarafından hazırlanan GENEL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ İÇİN ASİMTOTİK YAKLAŞIM adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan: Prof. Dr. Hülya BAYRAK

Üye : Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

……………….

Özlem ARDIÇ

Üniversitesi : **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı : **Endüstri Mühendisliği**
Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans – Nisan 2014**

Özlem ARDIÇ

GENEL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ İÇİN ASİMTOTİK YAKLAŞIM

ÖZET

Bu çalışmada, genel müdahaleli ödüllü yenileme süreci ele alınmıştır. Sürecin bazı olasılık karakteristikleri için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Modeli ifade eden X(t) stokastik süreci matematiksel olarak inşa edilmiş ve bir boyutlu dağılım fonksiyonu bulunmuştur. Ardından sürecin ergodikliği ispatlanmış ve ergodik dağılımın aşikar şekli elde edilmiştir. Bulunan aşikar ifadeler için bazı dağılımlarla (üstel dağılım, Erlang dağılımı) örnekler verilmiştir. Ayrıca, ergodik dağılım için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmış ve limit dağılımı için iki terimli asimtotik açılım elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, ergodik dağılımın momentleri için kesin formüller bulunmuştur. Genel müdahale koşulu altında ergodik momentler için iki terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ergodik momentler için bulunan asimtotik açılımlar yardımıyla merkezi momentler, basıklık, çarpıklık ve değişim katsayıları için asimtotik açılımlar bulunmuştur. Elde edilen bu asimtotik açılımlarla farklı dağılımlara sahip müdahaleler (düzgün dağılım, simetrik üçgensel dağılım, simetrik olmayan üçgensel dağılım, genelleştirilmiş Beta dağılımı) söz konusu olduğu durumlar için örnekler verilmiştir. Son olarak sürecin üç önemli sınır fonksiyonelinin momentleri için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ödüllü Yenileme Süreci, Genel Müdahale, Ergodik Dağılım, Ergodik Moment, Zayıf Yakınsama, Asimtotik Açılım, Sınır Fonksiyoneli.

University	:	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	:	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	:	**Industrial Engineering**
Supervisor	:	**Professor Dr. Tahir HANALİOĞLU**
Degree Awarded and Date	:	**M.Sc. – April 2014**

Özlem ARDIÇ

ASYMPTOTIC APPROACH FOR A RENEWAL - REWARD PROCESS WITH A GENERAL INTERFERENCE OF CHANCE

ABSTRACT

In this study, a renewal-reward process with a general interference of chance is considered. Exact expressions and asymptotic expansions for some of the probability characteristic are obtained. Stochastic process $X(t)$ is constructed and one dimensional distribution function is gotten. Then, under weak conditions, the ergodicity of the process $X(t)$ is proved and exact expression for the ergodic distribution is obtained. Examples for the found exact expressions under different distributions (exponential distribution, Erlang distribution) are presented. Moreover, weak convergence theorem is proved for the ergodic distribution and two term asymptotic expansion is obtained for the limiting distribution. Besides, exact expressions for the moments of the ergodic distribution are found. Within some assumptions for the discrete interference of chance in general form, two term asymptotic expansions for the moments of the ergodic distribution are obtained. Additionally, kurtosis, skewness coefficient and coefficient of variation of the ergodic distribution are computed. Examples are given when the random variable expresses the discrete interference of chance has several distributions (Uniform distribution, symmetric triangular distribution, nonsymmetric triangular distribution, generalized Beta distribution). Finally, exact expressions and asymptotic expansions for the moments of the three important boundary functionals are obtained.

Keywords: Renewal-reward process, General discrete interference of chance, Ergodic distribution, Weak convergence, Asymptotic expansion, Boundary Functional.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince bana önemli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Tezimi okuyarak tavsiyelerde bulunan değerli jüri üyelerim Prof. Dr. Hülya BAYRAK ve Yrd. Doç. Dr. Salih TEKİN'e teşekkürlerimi sunarım. Kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine ve sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\boldsymbol{\Omega}$	Bir stokastik deneyin örnek uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Bir Ω' nın alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş bir σ cebir
$\mathbf{P(A)}$	A olayının olasılığı
$(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$	Olasılık uzayı
$\mathbf{E(X)}$	X rasgele değişkeninin beklenen değeri
$\mathbf{Var(X)}$	X rasgele değişkeninin varyansı
$\mathbf{M_1(x) * M_2(x)}$	$\int_0^x M_2(x-y)dM_1(y)$ 'e eşit olan konvolüsyon çarpım
$\mathbf{F^{*n}(x)}$	$F(x)$ fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{s})$	$M(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\mathbf{M^*(s)}$	$M(t)$ fonksiyonunun Laplace – Stiltijes dönüşümü

GENEL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİ İÇİN ASİMTOTİK YAKLAŞIM

1. GİRİŞ

Stokastik sözcüğü temelde rastlantısal anlamına gelen bir sıfattır. Stokastik süreçlerin özellikle istatistik biliminde ve endüstri mühendisliğinde önemli bir yeri vardır. J. Bernoulli (1654-1705) stokastik süreç kavramını ilk defa kullanmıştır ve olasılık teorisinin gelişimi için önemli adımlar atmıştır. Önemli çalışmalarından biri de çok sık kullanılan en büyük sayılar kanunudur. A. N. Kolmogorov bir stokastik süreç olan Markov sürecinin tanımını yapmıştır. Ayrıca verilmiş sonlu boyutlu dağılımlara göre stokastik süreçlerin inşa edilmesinin mümkün olduğunu ispat etmiştir. İlerleyen yıllarda ise daha geniş bir sınıf olan yarı-Markov süreçler çalışılmaya başlanmıştır. Yarı-Markov süreç kavramı ilk defa yakın zamanlarda Levy [32] ve Smith [42] tarafından eş zamanlı olarak öne sürülmüştür. Yine aynı yıl içerisinde, Takacs [44] aynı tipte bir stokastik süreç tanımlamış ve bu süreci bazı problemler üzerinde uygulamıştır. Yarı-Markov süreci kavramının ardından Markov yenileme süreci kavramı Pyke [37], [38], Moore ve Pyke [34] ve Pyke ve Schaufele [39], [40] tarafından araştırılmaya başlanmıştır. Feller [18]'in çalışmasında Levy [32] ve Smith [42]'in tanımladığı yarı-Markov süreçleri Kolmogorov denklemlerinin teorisi ile genelleştirmiştir. Yenileme süreçleri yarı-Markov süreçlerin sınıfındandır. Yenileme süreçleri için bulunan birçok sonuç ödüllü yenileme süreçleri için genelleştirilmişlerdir. Bunlardan bazıları güçlü sayılar kanunu, temel yenileme teoremi, merkezi limit teoremi, Blackwell teoremi ve anahtar yenileme teoremleridir.

Bu çalışmaların yanında yarı-Markov süreçlerin istatistiksel çıkarımları alanında birçok çalışma yapılmıştır. Moore ve Pyke [34] sonlu yarı-Markov kerneller için deneysel tahmin ediciler üzerine çalışmışlardır. Lagakos vd. [30] ise ergodik olmayan sonlu yarı-Markov kerneller için en büyük olabilirlik tahmin ediciler elde etmişlerdir. Akritas ve Roussas [1] yarı-Markov süreçler için parametrik asimtotik normal sonuçlar vermişlerdir. Ouhbi ve Limnios [35] yarı-Markov kernellerde parametrik olmayan tahmin edicilerle ilgili bir çalışma yapmış ve yarı-Markov kerneller için doğrusal olmayan fonksiyoneller elde etmişlerdir.

Stok kontrol, matematiksel sigorta, kuyruk teorisi, matematiksel biyoloji, güvenirlilik, stokastik finans ve fizik gibi alanlardaki birçok ilginç problem yenilenme süreçleri, ödüllü yenilenme süreçleri ve rasgele yürüyüş süreçleri gibi süreçlerle ifade edilebilmektedir. Bu süreçler üzerine birçok çalışma bulunmaktadır (Aras ve Woodroofe [9], Borovkov [13], Prabhu [36], Smith [42], Tijms [47], Janseen ve Leeuwarden [23], Çınlar [15], vb.). Bu çalışmalar çok önemli olmalarına rağmen çalışmalardaki süreçlerin ergodik dağılımları için formüller hesaplanırken matematiksel zorluklarla karşılaşılmaktadır. Öte yandan, gerçek hayat problemleri çözülürken matematiksel karmaşası daha az olan ifadeler kullanmak çözülebilirliği açısından daha iyi olmaktadır. Bu nedenle, literatürde bazı yaklaşık formüller önerilmektedir (Brown ve Solomon [14], Feller [18], Khaniev ve Kucuk [24], Khaniev ve Mammadova [25], Anisimov [8], Lotov [33], Aliyev ve Khaniyev [5], Khaniyev [26], Aliyev vd. [4], vb.).

Bu çalışmada genel müdahaleli ödüllü yenileme süreci incelenmiştir. Literatürde bu süreçlerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Ancak bu çalışmalarda müdahaleler genel değildir ve spesifik dağılımlar kullanılmıştır. Örneğin, Aliyev vd. [2] kesikli şans karışımlı X(t) ödüllü-yenileme sürecinin iki sınır fonksiyoneli N_1 ve τ_1'i incelemişlerdir. N_1 sınır fonksiyonelinin moment türeten fonksiyonu $\Psi_N(z)$ ile τ_1 sınır fonksiyonelinin Laplace dönüşümü $\Phi_\tau(\mu)$ arasındaki ilişki değerlendirmişler ve bu ilişki yardımıyla N_1 ve τ_1'in ilk dört momenti için kesin ifadeler elde etmişlerdir. Kesikli şans karışımlı müdahaleye karşılık gelen rasgele değişken üstel dağılıma sahip olduğu durumda sınır fonksiyonelleri için asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, Aliyev vd. [3], Gamma müdahaleli ödüllü yenileme sürecini incelemiş ve ergodik dağılım için asimtotik açılım elde ederek zayıf yakınsama teoremi ispatlamıştır. Bu çalışmalara ek olarak, Khaniyev ve Atalay [28] üçgensel dağılımlı müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için asimtotik açılımlar elde etmiş ve zayıf yakınsama teoremini ispatlamışlardır. Ayrıca, Monte Carlo benzetim yöntemiyle yaklaşık formüllerin doğruluğunu test etmişlerdir. Khaniyev ve Aksop [27] genelleştirilmiş Beta dağılımlı müdahaleli (s, S) tipli stok kontrol modelini ele almışlardır. Ergodik momentler için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilmiş ve zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Bulunan formüllerin doğruluğunu test etmek için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılmıştır. Khaniyev vd. [29] üçgensel dağılımlı müdahaleli (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli değerlendirmişler ve sürecin bazı koşullar altında ergodik olduğu ispatlamışlardır. Ergodik momentler için üç terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Bulunan asimtotik açılımların kesin formüllerle yakınlığı bir gerçek hayat problemi yardımıyla test edilmiştir. Bekar vd. [11] Weibull dağılımlı müdahaleli ödüllü yenileme süreci incelemiştir. Ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentler için kesin ifadeler ve iki terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Bekar [10]'ın yüksek lisans tez çalışmasında üstel müdahaleli ödüllü yenileme süreci değerlendirilmiştir. Sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, sınır fonksiyonelleri için varyans, çarpıklık ve basıklık katsayılarının asimtotik açılımları bulunmuştur. Bizim çalışmamız bu çalışmaların hepsini bir çatı altında toplamaktadır. Böylece, diğer çalışmalar bizim çalışmamızın özel bir durumu haline gelmektedir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI VE ÖN BİLGİLER

Markov ve yarı-Markov süreçlerinin ve özel hallerinin kullanıldığı alanlar gitgide artmaktadır (popüler olmuştur). Literatürde teorik çalışmaların yanında uygulamaya yönelik çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmada yarı-Markov süreçlerinin özel bir durumu olan ödüllü yenileme süreçlerini ele alınmıştır. Bu nedenle, yenileme süreçlerini daha detaylı bir şekilde incelemek faydalı olacaktır. Feller [18] yenileme sürecinin tanımını yapmış ve yenileme fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$U(t) = E\big(N(t)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

Burada, $N(t) = \min\{n \geq 1: T_n > t\}$ bir yenileme sürecidir. $T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ ise bağımsız ve aynı dağılıma sahip $\{\xi_n\}, n = 1, 2, \dots$ rasgele değişkenler dizisinin toplamlarından oluşmaktadır. Ayrıca $F^{*n}(t)$, $F(t)$ dağılım fonksiyonun kendisiyle n katlı konvolüsyon çarpımıdır.

Bu çalışmanın sonrasında Feller [18] yenileme fonksiyonu için aşağıdaki gibi iki terimli asimtotik açılım elde etmiştir:

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1).$$

Burada $\mu_n = E(\xi_1^n), n = 1, 2, \dots$’dir. Yenileme fonksiyonlarıyla ilgili bir diğer değerli çalışma da Smith [42] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Feller [18]’in yenileme fonksiyonu için bulduğu asimtotik açılıma yakın bir asimtotik açılım bulunmuştur:

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\sigma^2 - \mu_1^2}{2\mu_1^2} + o(1).$$

Burada $\sigma^2 = Var(\xi_1)$’dir. Alsmeyer [7] ve Grübel [21] harmonik yenileme ölçüleri ve ilk geçiş zamanları arasında bir bağlantı olduğunu tespit etmişlerdir. Alsmeyer [6], $x \to \infty$ iken $E(\eta_1) > 0$ olduğunda, aşağıdaki asimtotik açılımının doğru olduğunu ispatlamıştır:

$$U_1(x) = \log\left(\frac{x}{\mu}\right) + \gamma + o(1).$$

Burada, $U_1(x)$ bir harmonik yenileme fonksiyonudur. γ ise Euler katsayısıdır ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) \approx 0{,}557.$$

Csenki [16], geriye dönük ödül yapılı ödüllü yenileme süreçleriyle ilgili bir çalışma yapmıştır. Yenileme sürecinin beklenen değeri için asimtotik açılım elde etmiştir:

$$C(t) = \xi t + \eta + o(1)$$

Burada, $C(t)$ kazanılan toplam ödülün beklenen değerine karşılık gelmektedir.

Borovkov [13], $\{\xi_i\}, n = 1, 2, \ldots$ gibi birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişken dizisi tanımlamıştır. Ayrıca gelecekten bağımsız u değişkenini tanımlamıştır. Bunların yanında $E(\xi_n)$ ve $E(u)$ beklenen değerleri sonludur. Bu koşullar altında Wald özdeşliği aşağıdaki gibidir:

$$E(S_u) = E\left(\sum_{k=1}^{u}\xi_n\right) = E(\xi_1)E(u).$$

Smith [42], yenileme fonksiyonun asimtotik açılımının yanında, yukarıda tanımlanan $N(t)$ yenileme sürecinin varyansı için de aşağıdaki asimtotik açılımı elde etmiştir:

$$\operatorname{Var}\big(N(t)\big) \approx \frac{\sigma^2 t}{\mu_1^3}.$$

Brown ve Solomon [14], $\{X(t), t \geq 0\}$ şeklinde bir ödüllü yenileme süreci tanımlamışlardır. $X(t)$ yenileme sürecinin varyansı için aşağıdaki gibi iki terimli asimtotik formül elde etmiştirlerdir:

$$\operatorname{Var}\{X(t)\} = ct + d + o(1)$$

$X(t)$ ödüllü yenileme süreci çeşitli stokastik optimizasyon modellerinde özellikle de Markov ve yarı-Markov karar modellerinde ortaya çıkmaktadır.

Alsmeyer [6], $\{S_n, U_n\}, n \geq 0$ şeklinde bir yenileme sürecini ele almıştır. Burada $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ ve $U_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i$'dir. Uygun koşullar altında $(X_i, Y_i), i \geq 0$ iki boyutlu vektördür. $t \to \infty$ iken $E\left(U_{T(t)}\right)$, $Var\left(U_{T(t)}\right)$ ve $Cov\left(U_{T(t)}, T(t)\right)$ için asimtotik açılımlar elde etmiştir. Ayrıca $T(t) = \inf\{n \geq 0: S_n > t\}$'dir.

Taqqu ve Levy [45], ağır kuyruklu ödüllü yenileme süreçleri üzerine çalışmışlardır. Sonsuz varyanslı yenileme zamanlı ve sonlu varyansa sahip ödüllü durumu ispat etmişlerdir. Levy ve Taqqu [31], ayrıca, hem yenileme zamanlarının hem de ödüllerin sonlu varyansa sahip oldukları durumu ispat etmişlerdir. Willinger vd. [48] ve Taqqu vd. [46] ise açma kapama yenileme süreçleri üzerine çalışma yapmışlardır.

Yarı-Markov süreçlerle ilgili yapılan çalışmalarda ergodik teoremler üzerine olanlar büyük önem taşımaktadır. Ergodik teoremlerin yanında bu süreçlerin ergodik dağılımları da önemlidir. Smith [42] kesikli şans karışımlı süreçler için anahtar yenileme teoremi isimli ergodik teoremi ispatlamıştır. Markov süreçleriyle ilgili en genel ergodik teorem Gihman ve Skorohod [20]'un şans karışımlı yarı-Markov süreçler için verdiği ergodik teoremdir. Genel ergodik teoreme göre, $X(t)$ sürecinin zaman ortalaması 1 olasılığı ile durum ortalamasına yakınsamaktadır. Yani, her sınırlı ve ölçülebilir f(x) fonksiyonu için aşağıdaki ilişkinin 1 olasılığı ile doğru olduğu ispatlanmıştır:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)du \equiv \frac{1}{E(\tau_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x)P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z).$$

Burada $X(t)$, sürecin t anında aldığı değere ve τ_1, sürecin kontrol seviyesinin altına ilk düştüğü ana karşılık gelmektedir. Bu çalışmalara ek olarak, Ezhoz ve Shurenkov [17] yarı-Markov süreçlerle ilgili ergodik teorem ispatlamışlardır.

Stokastik süreçlerin sınır fonksiyonellerinin kesin ifadeleri ve asimtotik açılımlarıyla ilgili literatürde birçok çalışmak bulunmaktadır. Spitzer [43], Rogozin [41] ve Gusak ve Korolyuk [22] sınır fonksiyonelleri ile ilgili temel sonuçları elde etmişlerdir.

Yenileme sürecinin tanımı şu şekildedir. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış pozitif değerli bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca X_n'lerin dağılım fonksiyonu biliniyor ve $P\{X_n \le x\} = F(x), x \ge 0$ olsun. $\{X_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişken dizisinden yararlanarak aşağıdaki rasgele değişkenler dizisi oluşturulsun:

$$S_0 = 0, S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, \ldots, S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ldots$$

Not 2.1. X_i'ler pozitif değerli oldukları için $0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots < \infty$ eşitsizliği 1 olasılığı ile sağlanmaktadır. Bu durumda $\{S_n\}, n = 1, 2, \ldots$ dizisine literatürde yenileme dizisi denilmektedir.

Tanım 2.1. $N(t)$ rassal süreci, $\{S_n\}$ yenileme dizisi yardımıyla aşağıdaki gibi inşa edilebilir:

$$N(t) = \min\{n \ge 1: S_n > t\}, t \ge 0.$$

$N(t)$ sürecine literatürde yenileme süreci denilmektedir.

Örnek 2.1. $X_i \in \text{Üstel}(\lambda)$ olduğunda $N(t) = 1 + \Pi(t)$ şeklinde gösterilebilmektedir. Burada $\Pi(t)$ Poisson sürecini ifade etmektedir.

Not 2.2. Sonlu boyutlu dağılımların hesaplanması n katlı konvolüsyon çarpımları sebebiyle matematiksel olarak çok zordur. Bu nedenle, $N(t)$ yenileme sürecinin momentlerinin kullanımı tercih edilmektedir. Bunların içinde en önemlisi $N(t)$ sürecinin beklenen değeridir, çünkü diğer momentler $E(N(t))$ ile ifade edilebilmektedir. Bu önemi nedeniyle yenileme sürecinin beklenen değerine literatürde yenileme fonksiyonu denilmektedir.

Tanım 2.2. Yenileme fonksiyonu $U(t)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$U(t) \equiv E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

Burada $F^{*n}(x)$, $F(x)$ fonksiyonunun kendisiyle n katlı konvolüsyon çarpımıdır.

Not 2.3. Görüldüğü gibi yenileme fonksiyonunun hesaplanmasında sonsuz seriler ve n katlı konvolüsyon çarpımları mevcuttur. Bu zorluğu aşmak amacıyla literatürde Laplace dönüşümü kullanılmaktadır.

Tanım 2.3. Yenileme fonksiyonu $U(t)$'nin Laplace dönüşümü $\widetilde{U}(\lambda)$ aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}(\lambda) = \frac{1}{\lambda\big(1 - F^{*}(\lambda)\big)}.$$

Dolayısıyla $U(t)$ yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümünü yazabilmek için X_1 rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bilmek yeterlidir.

Laplace kullanılarak yenileme fonksiyonu elde etmenin dışında başka yöntemler de vardır. Literatürde yenileme fonksiyonları için yenileme tipli integral denklemler mevcuttur.

Yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) = 1 + F(t) + F(t) * F(t) + \cdots = 1 + F(t) * U(t). \qquad (2.1)$$

Burada $F(t) * U(t) = \int_0^t U(t-s)dF(s)$, $F(t)$ ve $U(t)$'nin konvolüsyon çarpımının gösterim şeklidir. Bu çalışmada kullanılan konvolüsyon çarpımı $F(t) * U(t) = \int_0^t U(t-s)dF(s)$ şeklindedir, fakat literatürde konvolüsyon çarpımı gösterimi $F * U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t-s)dF(s)$ şeklinde de mevcuttur.

Böylece

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)dF(s)$$

elde edilir.

(2.1) eşitliğindeki denkleme literatürde 2. tip Volterra integral denklemi denilmektedir. İstatistikçiler ise, bu ve benzeri denklemleri yenileme tipli integral denklemleri olarak adlandırmaktadır.

Tanım 2.4. 2. tip Volterra integral denklemi diğer bir deyişle yenileme tipli integral denklemi genel durumda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z(t) = G(t) + R(t) * Z(t) = G(t) + \int_{s=0}^{t} Z(t-s)\, dR(s). \tag{2.2}$$

Burada $G(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının bilindiği varsayılmaktadır. Ayrıca $R(t)$ monoton artan (azalmayan) bir fonksiyondur.

(2.2) denklemini çözmek için genelde Laplace dönüşümü kullanılmaktadır. Laplace dönüşümünün özelliklerinden yararlanarak (2.2) denkleminin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{Z}(\lambda) = \tilde{G}(\lambda) + \tilde{Z}(\lambda)R^{*}(\lambda), \lambda > 0$$

$$\tilde{Z}(\lambda) = \frac{\tilde{G}(\lambda)}{1 - R^{*}(\lambda)}.$$

Burada $\widetilde{M}(\lambda)$ ile $M(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\widetilde{M}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} M(t) dt$$

şeklinde gösterilmiştir.

Ayrıca $M^{*}(\lambda)$ ile $M(t)$ fonksiyonunun Laplace-Stiltijes dönüşümü

$$M^{*}(\lambda) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} dM(t)$$

şeklinde gösterilmiştir.

Not 2.4. Tanım 2.4'te $Z(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü için kesin ifade elde edilmiştir. Prensip olarak $Z(t)$ fonksiyonu bulunmuştur. Ancak çoğu zaman $Z^{*}(\lambda)$'nın ters Laplace dönüşümü hesaplamak imkansız olabilir. Bu nedenle yenileme tipli integral denklemlerinin çözümünü elde etmek için ardışık yaklaşım yöntemi veya asimtotik yaklaşım yöntemi kullanılmaktadır. Bu çalışmada asimtotik yaklaşım yöntemi kullanılmıştır.

Yenileme fonksiyonlarının kesin şeklini elde etmek bazı özel durumlar (üstel, Erlang,…) dışında çok zordur. Bu nedenle $t \to \infty$ iken $U(t)$ yenileme fonksiyonunun asimtotik davranışını incelemek faydalıdır. Asimtotik özellikler Laplace dönüşümü kullanılarak incelenebilir. Yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$U(t) = E(N(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t). \tag{2.3}$$

(2.3) eşitliğinin her iki tarafına t'ye göre Laplace dönüşümü uygulanınca

$$\tilde{U}(\lambda) \equiv \mathcal{L}_\lambda(U(t)) = \frac{1}{\lambda} + \tilde{F}(\lambda) + \tilde{F}(\lambda)F^*(\lambda) + \tilde{F}(\lambda)\left(F^*(\lambda)\right)^2 + \cdots = \frac{1}{\lambda(1 - F^*(\lambda))}$$

elde edilir.

Burada $F^*(\lambda)$ ve $\tilde{F}(\lambda)$ ile sırasıyla $F(t)$ dağılım fonksiyonunun Laplace ve Laplace-Stiltijes dönüşümleri gösterilmiştir. Ayrıca $F^*(\lambda) = \lambda\tilde{F}(\lambda)$'dır.

Not 2.5. Tauber-Abel teoremine göre $U(t)$'nin $t \to \infty$ iken davranışını incelemek, $\tilde{U}(\lambda)$'nın $\lambda \to 0$ iken davranışını incelemeye denktir. Tauber-Abel teoremi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Teorem 2.1. (Feller [18]) $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$, $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri olsun. Bunun yanında $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olsun. Bu takdirde $\lambda \to \infty$ iken $\tilde{F}(t) \sim \tilde{G}(t)$ olur. Bu durumun tersi de doğrudur. Yani $\lambda \to \infty$ iken $\tilde{F}(t) \sim \tilde{G}(t)$ olduğu zaman $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olur. "~" simgesi iki fonksiyonun asimtotik denkliğini ifade eder. Örneğin, $\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{G(t)} = 1$ olduğu bir durumda $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının asimtotik denkliği söz konusudur.

$\tilde{U}(\lambda)$'nın asimtotik açılımını elde etmek için öncelikle $F^*(\lambda)$ incelensin:

$$F^*(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF(t) = E\left(e^{-\lambda X_1}\right) \tag{2.4}$$

(2.4) eşitliğine Taylor serisi açılımı kullanılırsa

$$F^*(\lambda) = E\left(1 - \lambda X_1 + \frac{\lambda^2 X_1^2}{2} - \cdots\right) \tag{2.5}$$

elde edilir.

$E(X_1) = m_1$ ve $E(X_1^2) = m_2$ mevcut ve sonlu olduğu takdirde aşağıdaki ifade yazılabilir (Feller[18]):

$$F^*(\lambda) = 1 - \lambda E(X_1) + \frac{\lambda^2}{2} E(X_1^2) + o(\lambda^2) = 1 - \lambda m_1 + \frac{\lambda^2}{2} m_2 + o(\lambda^2)$$

Bu takdirde $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$\widetilde{U}(\lambda) = \frac{1}{\lambda\big(1 - F^*(\lambda)\big)} = \frac{1}{\lambda\left\{1 - \left[1 - \lambda m_1 + \frac{\lambda^2}{2} m_2 + o(\lambda^2)\right]\right\}}.$$

Özetle

$$\widetilde{U}(\lambda) = \frac{1}{m_1 \lambda^2} + \frac{m_2}{2 m_1^2 \lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{2.6}$$

elde edilir.

(2.6) eşitliğine Tauber-Abel teoremi göz önünde bulundurularak ters Laplace dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki açılım elde edilir:

$$U(t) = \frac{t}{m_1} + \frac{m_2}{2 m_1^2} + o(1).$$

Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.2. (Feller [18]) $E(X_1^2) < \infty$ olsun ve X_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde, $t \to \infty$ iken aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım yazılabilir:

$$U(t) = \frac{t}{m_1} + \frac{m_2}{2 m_1^2} + o(1).$$

Burada $m_k = E\big(X_1^k\big), k = 1, 2, \ldots$'dir.

Sonuç 2.1. (Billinsgley [12]) $0 < \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \equiv \mathrm{m}_1 < \infty$ olsun. Bu takdirde, $\mathrm{t} \to \infty$ iken

$$\frac{\mathrm{U}(\mathrm{t})}{\mathrm{t}} \to \frac{1}{\mathrm{m}_1}$$

olur.

Sonuç 2.2. $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \equiv \mathrm{m}_1 > 0$ ve $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1^2) < \infty$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki asimtotik ilişki yazılabilir:

$$\lim_{\mathrm{t}\to\infty}\left(\mathrm{U}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}_1}\right) \equiv \mathrm{c}_\mathrm{f} = \frac{\mathrm{m}_2}{2\mathrm{m}_1^2}.$$

Burada c_f katsayısında literatürde Feller sabiti denir.

Not 2.6. $\mathrm{U}(\mathrm{t}) = \mathrm{E}(\mathrm{N}(\mathrm{t}))$'nin kesin ifadesi ve asimtotik açılımı yardımıyla momentler için de kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar verilebilir. Literatürde $\mathrm{N}(\mathrm{t})$ sürecinin varyansı büyük önem taşımaktadır. $\mathrm{Var}(\mathrm{N}(\mathrm{t}))$'nin kesin şekli aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{Var}\big(\mathrm{N}(\mathrm{t})\big) = 2\mathrm{U}(\mathrm{t}) * \mathrm{U}(\mathrm{t}) + \mathrm{U}(\mathrm{t}) - \mathrm{U}^2(\mathrm{t}).$$

$\mathrm{N}(\mathrm{t})$ sürecinin varyansının kesin şeklinin yardımıyla asimtotik açılımı elde edilebilir.

Teorem 2.3. $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1^3) < \infty$ olsun ve X_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde, $\mathrm{t} \to \infty$ iken aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım yazılabilir:

$$\mathrm{Var}\big(\mathrm{N}(\mathrm{t})\big) = \frac{\sigma_\mathrm{X}^2}{\mathrm{m}_1^3}\mathrm{t} + 5\left(\frac{\mathrm{m}_2}{2\mathrm{m}_1^2}\right)^2 - \frac{2\mathrm{m}_3}{3\mathrm{m}_1^3} - \frac{\mathrm{m}_2}{2\mathrm{m}_1^2} + \mathrm{o}(1).$$

Burada $\mathrm{m}_\mathrm{k} = \mathrm{E}\big(\mathrm{X}_1^\mathrm{k}\big), \mathrm{k} = 1, 2, \ldots$ ve $\sigma_\mathrm{X}^2 = \mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_1^2$'dir.

3. SÜRECİN YORUMU VE MODELİ

t anında depodaki stok seviyesi $X(t)$'dir. $t = 0$ anında depodaki stok seviyesinin $\lambda z \geq 0$ olduğunu varsayalım. Burada λ keyfi pozitif bir katsayıdır. Rasgele zamanlarda gelen talepler birinci periyotta stoktaki λz miktarıyla karşılanmaktadır. Stok seviyesi talep miktarlarına $(-\eta_n)$ göre düşmektedir. Bu düşüşler rasgele zamanlarda $T_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ olmakta ve stok seviyesinin sıfır seviyesinin altına düştüğü ana (τ_1) kadar devam etmektedir. Bu takdirde, bu rasgele zamanlardaki stok seviyesini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$X(T_1) = \lambda z - \eta_1, X(T_2) = \lambda z - (\eta_1 + \eta_2), \cdots, X(T_n) = \lambda z - \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \cdots.$$

Burada, $\{\eta_n\}, n = 1, 2, ...$ talep miktarlarına karşılık gelen rasgele değişkenler dizisidir. Ayrıca $\{\xi_i\}, n = 1, 2, ...$ ise ardışık talepler arasında geçen süreleri ifade eden rasgele değişkenler dizisidir. Stok seviyesi sıfır seviyesinin altına düştüğü anda stok seviyesi $\lambda\zeta_1$ rasgele seviyesine getirilmekte ve birinci periyot tamamlanmış olmaktadır. Sıradaki talepler yeni başlangıç seviyesi $\lambda\zeta_1$'den karşılanmakta ve τ_2 anında stok seviyesi sıfırın altına düştüğü anda stok seviyesi anlık olarak $\lambda\zeta_2$ rasgele seviyesine kadar doldurulmaktadır. Böylelikle ikinci periyot da tamamlanmış olmaktadır. Süreçteki periyotlar bu şekilde devam etmektedir. Burada, $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, ...$ kesikli şans karışımlı müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler dizisidir. Ayrıca $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, ...$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisidir.

Bizim çalışmamızı daha önceki çalışmalardan ayıran özellik, kesikli şans karışımlı müdahalenin genel durumda inceleniyor olmasıdır. Khaniyev ve Atalay [28] üçgensel dağılımlı müdahale ile zayıf yakınsama teoremini ispatlamışlardır. Khaniyev vd. [29] ise üçgensel dağılımlı müdahale mevcutken ergodik momentler için asimtotik açılımlar elde etmişlerdir. Khaniyev ve Aksop [27] müdahale genelleştirilmiş Beta dağılımına sahipken ergodik momentler için asimtotik açılımlar bulmuş ve zayıf yakınsama teoremini ispatlamışlardır. Bu çalışmalara ek olarak, kesikli şans karışımlı müdahalenin üstel, Weibull ve Gamma gibi dağılımlara sahip olduğu makaleler de literatürde bulunmaktadır. Bahsedilen çalışmalardan müdahalenin özel dağılımlar aldığını görülebilmektedir. Diğer yandan, bu çalışmalarda talep miktarları ve talepler arasında geçen süreler keyfi dağılım alabilmektedir. İşte bu noktada, daha geniş bir sınıf için formüller bulunmak istendiğinde ζ_n rasgele değişkeninin sadece özel dağılımlar alabilmesi zorluk teşkil etmiştir. Bu yüzden, ζ_n rasgele değişkeninin keyfi dağılıma sahip olduğu durum için formüller bulunmuştur. Bu çalışmanın amacı, yukarıda adı geçen çalışmaların hepsini bir çatı altında toplamak ve modellemektir.

Gerçek hayattaki bir problemle model daha anlaşılır hale gelecektir. Bu çalışmada oluşturulan modeli daha iyi anlayabilmek için bir örnekle inceleyelim.

Enerji sektöründe bir şirket LPG üretmekte, stokta tutmakta, doldurmakta ve dağıtım yapmaktadır. Yurt içi LPG dağıtımı, boru hattı ve kara yolu taşımacılığı ile yürütülmektedir. Boru hattı kurulumu olmayan yerlerde gaz dağıtımı kara yolu ile sağlanmaktadır. LPG, bir üretim merkezinden $22\ \mathrm{m}^3$ ve $35\ \mathrm{m}^3$ kapasiteli tankerlerle 30 tane bayiye dağıtılmaktadır. Tankerler, 7 gün 24 saat GPS gözetimi altında bulunmaktadır. Satıcıya sipariş edilen gazın tesliminden sonra, eğer tanker kapasitesinin % 10'undan fazlası kalmış ise, tanker bulunduğu pozisyonda herhangi bir dağıtıcının sonraki siparişine kadar beklemektedir. Her satıcının $S = 30m^3$ miktarında stok kapasitesi bulunmaktadır. Rasgele zamanlarda (ξ_n) rasgele miktarlarda LPG (η_n) bu depolama tanklarından satılmaktadır. LPG seviyesinin stok kontrol seviyesi olan $s = S/5$ ‘ in altına düştüğü τ_n rasgele zamanlarında talep sinyali otomatik olarak üretim merkezine gönderilmektedir.

Bu talep sinyaline karşılık olarak, talepte bulunan satıcıya en yakın tanker yönlendirilmektedir. Eğer satıcıya yakın bir tanker yoksa üretim merkezinden dolu bir tanker gönderilmektedir. Güvenlik için satıcılar stok kapasitesi S’nin yaklaşık %85’ini doldurmaktadır, çünkü tankın içindeki gazın basıncı maksimum dolulukta tehlikeli hale gelebilmektedir. Ancak çok küçük bir olasılıkla bazı satıcılar çok gerekli durumlarda tankların tam kapasitelerini kullanabilmektedir. Diğer yandan, tankerde bulunan gaz satıcının tankının %85 ini dolduramasa bile, tankerdeki miktar tanka yüklenmektedir. Yukarıda bahsedilenleri özetleyecek olursak, her doldurma işleminden sonra her satıcının tankının $\%85$'i büyük olasılıkla dolu konumda olmaktadır.

Matematiksel modelimize adapte edecek olursak, tanklar stok alanlarıdır. S gibi maksimum alabileceği stok seviyesi vardır. Maksimum stok seviyesinin yanında kontrol seviyesi bulunmaktadır. s kontrol seviyesini gösterir ve $s = S/5$'tir. Talep edilen LPG miktarları rasgeledir ve η_n rasgele değişkeniyle ifade edilmektedir. Talepler arasında geçen süreler de rasgeledir ve onlar da ξ_n ile gösterilmektedir. Sistemdeki gaz miktarı kontrol seviyesinin altına düştüğü anda anlık bir biçimde gaz miktarı ζ_n rasgele seviyesine yükselmektedir.

Verdiğimiz genel modelde maksimum olarak bir kısıtlama yoktur ve kontrol seviyesi sıfır seviyesidir. Fakat verilen probleme ve problemin isteklerine göre ζ_n rasgele değişkeni için uygun gördüğümüz dağılım için bu sınırları ayarlayabiliriz. Söz konusu gerçek hayat probleminde de böyle bir durum söz konusudur. Böylelikle inceleyeceğimiz problem literatürde de sık karşılaşılan (s, S) tipli envanter modeline dönüşmüştür.

Sistemin başlama seviyeleri ζ_n rasgele değişkenlerinin s kontrol seviyesine yakın değer almaması gerekmektedir. Diğer bir deyişle, ζ_n'nin s'ye yakın olması olasılığı düşük olmalıdır, çünkü stokta az miktarda gaz olduğu zaman sistem çok çabuk yenilenmek zorunda kalacaktır. Bu da yüksek maliyetlere neden olmaktadır. Her sipariş bir maliyete sahiptir o yüzden de sık sipariş vermek istenilen bir şey değildir.

Diğer yandan ζ_n'nin S'ye çok yakın değerler alması da istenmemektedir. Elde ne kadar fazla gaz olursa onu elde tutma maliyeti de o kadar artmaktadır. Daha bir sürü sorun da olabilir. Örneğin duran gazın kalitesi düşebilir veya yüksek gaz basıncı tehlike yaratabilir. Bu sebeple ζ_n'nin S'ye de düşük olasılıkla yakın olması makul olandır. Özetle ζ_n'nin alacağı değerlerin (s, S) aralığı arasında değerler alması istenmektedir.

Tüm bu istekler göz önüne alındığında böyle bir durumda örnek olarak ζ_n rasgele değişkeni için simetrik olmayan üçgensel dağılımın uygun olduğunu söyleyebiliriz. Daha başka dağılımlar da önerilebilir.

4. SÜRECİN MATEMATİKSEL KURULUŞU

$\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ aynı $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca, ξ_n, η_n ve ζ_n rasgele değişkenleri sadece pozitif değerler alabilsin. ξ_n, η_n ve ζ_n rasgele değişkenlerinin $\Phi(t)$, $F(x)$ ve $\pi(z)$ dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibi sırasıyla verilmiş olsun:

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}\,;\, F(x) = P\{\eta_1 \leq x\};\; \pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\};\, t, x, z \geq 0.$$

$\{T_n\}$ ve $\{Y_n\}$ yenileme dizilerini aşağıdaki tanımlayalım:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,, Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,,\; n \geq 1, T_0 = Y_0 = 0, n = 1, 2, \ldots$$

ayrıca $\{N_n\}$, $n \geq 0$ tam değerli rasgele değişken dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_0 = 0;\; N_1 = N(\lambda z) = \inf\{k \geq 1 : \lambda z - Y_k < 0\},$$

$$N_{n+1} \equiv N_{n+1}(\lambda\zeta_n) = \inf\left\{k \geq N_n + 1 : \lambda\zeta_n - \left(Y_k - Y_{N_n}\right) < 0\right\}, n \geq 1'\text{dir}.$$

Burada $\inf(\emptyset) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir. Örnek olarak N_1, $\{Y_n\}$ yenileme dizisi tarafından sıfır seviyesini ilk geçiş zamanına kadar gerekli talep sayısıdır. Ayrıca,

$$\tau_0 = 0;\; \tau_1 = \tau_1(\lambda z) = T_{N_1} = \sum_{i=1}^{N(\lambda z)} \xi_i\,;\; \tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i;\; n \geq 2'\text{dir},$$

τ_1 rasgele değişkeni, X(t) sürecinin sıfır seviyesinin altına ilk kez düştüğü andır. $\nu(t)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\nu(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\},\; t > 0,$$

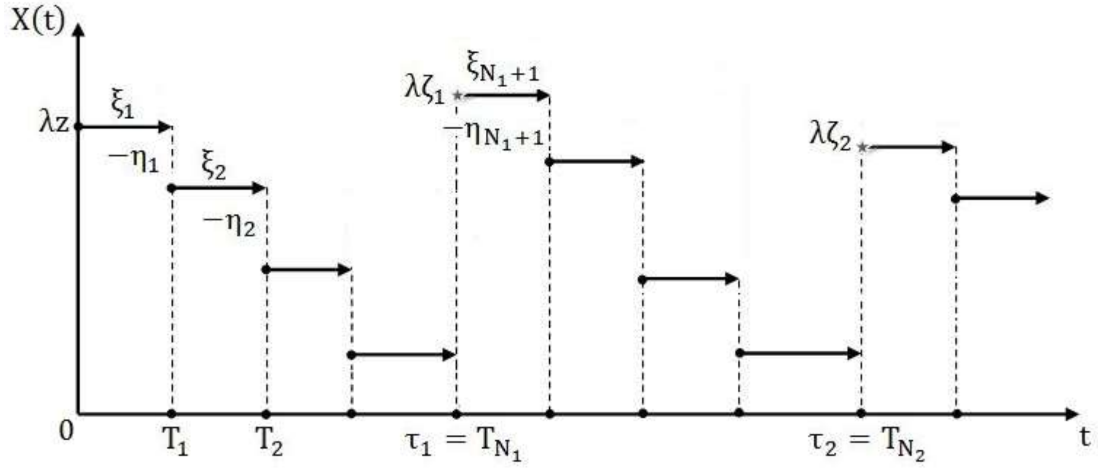
burada $\nu(t)$, t anına kadar olan sıçrama sayısına karşılık gelmektedir.

Şimdi de ele alınan $X(t)$ stokastik sürecini tanımlayalım:

$$X(t) = \lambda\zeta_n - \left(Y_{\nu(t)} - Y_{N_n}\right), \tau_n \leq t < \tau_{n+1}; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Burada, $Y_{\nu(\tau_n)} = Y_{N_n}, \zeta_0 = z$ ve $\lambda > 0$'dır.

İnşa edilen $X(t)$ sürecinin bir görünümü Şekil 4.1'deki gibidir.



Şekil 4.1. $X(t)$ sürecinin bir görünümü.

Bu çalışmada, $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi keyfi bir dağılıma sahip olabileceği için $X(t)$ süreci "genel müdahaleli ödüllü yenileme süreci" olarak adlandırılmaktadır. Bahsedilen süreç birçok yarı-Markov envanter modelini ifade etmekte kullanılabilir.

Not 4.1. Stokastik süreçlerin en genel olasılık karakteristikleri sonlu boyutlu dağılımlardır. Bu nedenle bir sonraki bölümde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılımını hesaplayacağız.

5. SÜRECİN BİR BOYUTLU DAĞILIMI

Bir önceki bölümde $X(t)$ süreci matematiksel olarak inşa edilmiştir. Süreçle ilgili daha fazla bilgi sahibi olabilmek için bu bölümde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu bir teoremle elde edilecektir ama teoremi vermeden önce aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

$Q(t,x,\lambda z) = P_{\lambda z}\{X(t) \leq x\}, t \geq 0, z \geq 0, \lambda \geq 0,$ $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonudur. Ayrıca $G(t,x,\lambda z)$ ve $R(t,\lambda z)$ kullanacağımız diğer iki notasyondur ve tanımları aşağıdaki gibidir:

$G(t,x,\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\},$

$R(t,\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 \leq t\}.$

Kullanılacak olan notasyonlar tanımlandığına göre aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.1. $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi birbirinden bağımsız olsun. Bu takdirde X(t) sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t,x,\lambda z)$ aşağıdaki gibidir:

$$Q(t,x,\lambda z) = G(t,x,\lambda z) + G(t,x,\bullet) * U_\tau(t) * R(t,\lambda z). \qquad (5.1)$$

Burada $U_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{*n}(t,\bullet)$'dir. Başka bir deyişle $U_\tau(t)$ fonksiyonu τ_1 rasgele değişkeninin ürettiği bir yenileme fonksiyonudur.

İspat. Bekar [10], $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi üstel dağılıma sahip olduğu durumda $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılımını elde etmiştir. Bu çalışmada ise $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi keyfi bir dağılıma sahip olabilmektedir. Fakat diğer yandan iki çalışmada da bulunan sonuçlar aynıdır. Farklı olarak Bekar [10] sonuca Laplace kullanarak gitmiştir. Bu çalışmada ise $\{\tau_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisinin oluşturduğu yenileme fonksiyonu $U_\tau(t)$ kullanılarak kesin sonuç elde edilmiştir.

Toplam olasılık formülüne göre $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t,x,\lambda z)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$Q(t,x,\lambda z) = P_{\lambda z}\{X(t) \leq x\} = P_{\lambda z}\{t < \tau_1; X(t) \leq x\} + P_{\lambda z}\{t \geq \tau_1; X(t) \leq x\}. \qquad (5.2)$$

(5.2) eşitliğinin ikinci kısmı için işlemler aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
P_{\lambda z}\{t \geq \tau_1; X(t) \leq x\} &= \int_{u=0}^{t} P_{\lambda z}\{\tau_1 \in du; X(t) \leq x\} \\
&= \int_{v=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} P_{\lambda z}\{\tau_1 \in du;\ \zeta_1 \in dv;\ X(t) \leq x\} \\
&= \int_{0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\tau_1 \in du\}\, P\{\zeta_1 \in dv\} P_{\lambda z}\{X(t-u) \leq x\} \\
&= \int_{0}^{t} \int_{0}^{\infty} Q(t-u, x, \lambda v)\, R(du, \lambda z) d\pi(v) \\
&= \int_{0}^{t} R(du, \lambda v) \int_{0}^{\infty} Q(t-u, x, \lambda v) d\pi(v) \\
&= \int_{0}^{t} Q(t-u, x, \bullet) R(du, \lambda z).
\end{aligned}
$$

Özetle,

$$P_{\lambda z}\{t \geq \tau_1; X(t) \leq x\} = R(t, \lambda z) * Q(t, x, \bullet) \tag{5.3}$$

şeklindedir.

Burada $Q(t, x, \bullet) = \int_0^\infty Q(t, x, \lambda z)\, d\pi(z)$, $R(u, \lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 \leq u\}$ ve $M_1(t) * M_2(t) = \int_0^t M_1(t-u) dM_2(u)$’dur.

(5.3)’ü (5.2) eşitliğinde yerine yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$Q(t, x, \lambda z) = G(t, x, \lambda z) + Q(t, x, \bullet) * R(t, \lambda z). \tag{5.4}$$

(5.4) ifadesinin her iki tarafı da $d\pi(z)$ ile çarpılıp 0’dan ∞’a integrallenildiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$Q(t, x, \bullet) = G(t, x, \bullet) + R(t, \bullet) * Q(t, x, \bullet). \tag{5.5}$$

(5.5) denklemi $Q(t, x, \bullet)$ için bir yenileme denklemidir veya başka bir deyişle II. tip Volterra integral denklemidir. Bu denklemin çözümü τ_1 rasgele değişkeninin yenileme fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir (Feller [18]):

$$Q(t, x, \bullet) = G(t, x, \bullet) * U_\tau(t) = \int_0^t G(t - s, x, \bullet) dU_\tau(s). \tag{5.6}$$

Burada $U_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{*n}(t, \bullet)$'dir. Yani $U_\tau(t)$, τ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $R(t, \bullet)$'nin n kat konvolüsyon çarpımının toplamıdır. Hatırlatalım ki, τ_1 rasgele değişkeni $X(t)$ sürecinin sıfır seviyesinin altına ilk kez düştüğü andır.

(5.6)'yı (5.4)'te yerine yazalım:

$$Q(t, x, \lambda z) = G(t, x, \lambda z) + G(t, x, \bullet) * U_\tau(t) * R(t, \lambda z) \tag{5.7}$$

ifadesini elde ederiz. (5.7)'deki $Q(t, x, \lambda z)$'nin hesaplanabilmesi için $G(t, x, \lambda z)$ ve $R(t, \lambda z)$'nin hesaplanması gerekmektedir.

Öncelikle $G(t, x, \lambda z)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} G(t, x, \lambda z) &\equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\nu(t) = n;\ \tau_1 > t; X(t) \le x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n < t < T_{n+1}; 0 < \lambda z - Y_n \le x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n < t < T_{n+1}\} P_{\lambda z}\{0 < \lambda z - Y_n \le x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)]\, [P\{Y_n \le \lambda z\} - P\{Y_n \le \lambda z - x\}] \end{aligned}$$

$$G(t, x, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)]\, [F_n(\lambda z) - F_{n+1}(\lambda z - x)]. \tag{5.8}$$

Burada $\Phi_n(t) = P\{T_n \le t\}$, $\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)$ ve $F_n(x) = P\{Y_n \le x\}$'tir. Ayrıca,

$$\Phi_n(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$’

$F_0(x) = \varepsilon(x), x \geq 0$’dır.

Şimdi de (5.7) ifadesindeki $Q(t, x, \lambda z)$’in hesaplanmasında yardımcı olan $R(t, \lambda z)$’yi bulalım:

$$R(t, \lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 \leq t\} = P_{\lambda z}\{T_{N_1} \in du\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{N_1 = n; T_n \in du\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \in du; Y_{n-1} < \lambda z < Y_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \in du\} P_{\lambda z}\{Y_{n-1} < \lambda z < Y_n\}$$

$$R(t, \lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)[F_{n-1}(\lambda z) - F_n(\lambda z)].$$

Burada $\Phi_n(t) = P\{T_n \leq t\}$ ve $F_n(x) = P\{Y_n \leq x\}$’tir.

Dolayısıyla $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t, x, \lambda z)$ elde edilmiş olunmaktadır.

Böylece Teorem 5.1’in ispatı tamamlanmıştır. □

Not 5.1. Görüldüğü gibi $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu ile çalışmak çok zordur, çünkü $Q(t, x, \lambda z)$ bir boyutlu dağılım fonksiyonu içerisinde n katlı seriler ve integraller mevcuttur. Bazı basit dağılımlarda bile kesin sonuca ulaşmak matematiksel olarak çok güçtür. Bu nedenle $X(t)$ sürecinin durağan karakteristikleri hesaplanabilir. Bu bilgilerin ışığında bir sonraki bölümde $X(t)$ sürecinin ergodikliği ispatlanacak ve ergodik dağılım fonksiyonu elde edilecektir.

6. SÜRECİN ERGODİKLİĞİ VE ERGODİK DAĞILIMIN AŞİKAR ŞEKLİ

$X(t)$ sürecinin sonlu boyutlu dağılımlarını hesaplamak matematiksel yapının karışıklığından ötürü çok zordur, çünkü hesaplamalar boyunca n katlı integraller ve seriler ortaya çıkmaktadır. Durağan karakteristikleri hesaplamak bu zorlukları ortadan kaldırabilir. $t \to \infty$ iken bir boyutlu dağılımın davranışını incelemek için $X(t)$ sürecinin ergodik karakteristikleri incelenecektir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle sürecin bazı koşullar altında ergodik olduğunu ispatlanacaktır.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu $Q_X(x,\lambda)$ ile gösterelim:

$Q_X(x,\lambda) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\}, x \geq 0$ olsun.

$X(t)$ sürecinin ergodik olduğunu göstermek için aşağıdaki önermeleri ispatlayalım:

Teorem 6.1. $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ başlangıç rasgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları sağlasın:

(i) $E(\xi_1) < \infty$;

(ii) $E(\eta_1) > 0$;

(iii) $E(\eta_1^2) < \infty$;

(iv) η_n aritmetik olmayan rasgele değişken olsun;

(v) $E(\zeta_1) < \infty$.

Bu koşullar sağlandığı takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat. $X(t)$ süreci, “kesikli şans karışımlı süreçler” olarak adlandırılan geniş bir sınıftandır. Bu kavram ilk defa A. N. Kolmogorov tarafından literatüre kazandırılmış ve birçok araştırmacı tarafından üzerinde çalışılmıştır. Özellikle, kesikli şans karışımlı süreçlerin ergodikliği üzerine literatürde birçok değerli sonuç bulunmaktadır. Bu sonuçlardan en önemli olanlarından biri Gihman ve Skorohod [20]’un verdiği ergodik teoremdir. Bu teoreme göre kesikli şans karışımlı bir sürecin ergodik olması için aşağıdaki varsayımlar sağlanmalıdır:

Varsayım 1. Öyle pozitif değerli artan rasgele anlar dizisi olsun ki, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri bir ergodik Markov zinciri oluştursun.

- Yukarıda bahsedilen rasgele anlar için 4. bölümde tanımı verilen $\{\tau_n\}, n = 1, 2, \dots$ rasgele değişkenler dizisi seçilebilir. Çünkü, $X(t)$ sürecinin bu anlarda aldığı değerler $X(\tau_1) = \lambda\zeta_1$; $X(\tau_2) = \lambda\zeta_2; \dots; X(\tau_n) = \lambda\zeta_n; \dots$ şeklindedir. $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \dots$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olduğu için $\{X(\tau_n)\}$'ler bir ergodik Markov zinciri oluşturmaktadırlar. Böylece birinci varsayım sağlanmıştır.

Varsayım 2. Ardışık $\tau_n, n = 1, 2, \dots$ rasgele anlarının arasında geçen zamanların beklenen değeri sonlu olmalıdır. Yani,

$$E(\tau_1) < \infty;\ E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty, n = 2, 3, \dots$$

olmalıdır.

- Wald özdeşliğini kullanılarak aşağıdaki eşitliği yazılabilir:

$$E(\tau_1) = E\left(\sum_{i=1}^{N_1(\lambda z)} \xi_1\right) = E(\xi_1)E\big(N_1(\lambda z)\big).$$

Burada, $N_1(\lambda z) = \min\{n \geq 1\text{: } Y_n > \lambda z\}$ ve $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$'dir. Diğer bir deyişle, $N_1(\lambda z)$, $\{Y_n\}$ yenileme dizisinin λz seviyesini ilk kez aştığı ana kadar ki sıçrama sayısıdır. Dolayısıyla, $E\big(N_1(\lambda z)\big) \equiv U_\eta(\lambda z)$ fonksiyonu $\{\eta_n\}, n = 1, 2, \dots$ rasgele değişkenler dizisinin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur. Her sonlu λz için $U_\eta(\lambda z)$ yenileme fonksiyonunun sonlu olduğu bilinmektedir (Feller[18]). Ayrıca, $E(\xi_1)$'in sonlu olduğu Teorem 6.1'in şartlarından bilinmektedir. Dolayısıyla,

$$E(\tau_1) = E(\xi_1)U_\eta(\lambda z) < \infty$$

eşitliği yazılabilir.

Şimdiye kadar $E(\tau_1)$'in sonlu olduğunu ispatlanmıştır. Şimdi de $E(\tau_n - \tau_{n-1})$, $n = 2, 3, \dots$ ifadesinin sonlu olduğunu gösterelim. Not edelim ki, $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \dots$ rasgele değişkenler dizisi bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğu için $\tau_n - \tau_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ artışları da aynı dağılıma sahiptir. Bu bilgilerin ışığında $\tau_2 - \tau_1$'in beklenen değerinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. $E(\tau_2 - \tau_1)$ aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$E(\tau_2 - \tau_1) = E(\xi_1)\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi(z). \tag{6.1}$$

$E(\xi_1)$'in sonlu olduğunu bilinmektedir. Dolayısıyla, (6.1) eşitliğindeki integralin sonlu olduğunu ispatlamak yeterlidir. $U_\eta(\lambda z)$ yenileme fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazalım:

$$U_\eta(\lambda z) = \frac{\lambda z}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g(\lambda z). \tag{6.2}$$

Burada, $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \ldots$'dir ve $g(x) \equiv U_\eta(x) - \left(\frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2}\right)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$'dır. Dolayısıyla, $\sup_x |g(x)| \equiv H < \infty$'dur (Feller [18]). (6.2) eşitliğinin her iki tarafını $d\pi(z)$ ile çarpıp sıfırda sonsuzluğa integrallendiğinde,

$$\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi(z) = \frac{\lambda E(\zeta_1)}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \int_0^\infty g(\lambda z)d\pi(z) \tag{6.3}$$

eşitliği elde edilir.

Burada, $\left|\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi(z)\right| \leq \int_0^\infty |g(\lambda z)|\, d\pi(z) \leq H\int_0^\infty d\pi(z) = H < \infty$ ‘dur.

Ayrıca, $m_2 = E(\eta_1^2) < \infty$ ve $E(\zeta_1) < \infty$ koşulları altında (6.3) eşitliğinin sağ tarafı her $\lambda \to \infty$ için sonludur. Yani, $\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi(z) < \infty$ ‘dur. Dolayısıyla $E(\tau_2 - \tau 1 < \infty$ ‘dur. Özetle, 2. varsayım sağlanmış olmaktadır. Genel ergodik teoremin her

iki varsayımı sağlanmıştır. Dolayısıyla, ele alınan $X(t)$ süreci ergodiktir.

Böylece Teorem 6.1'in ispatı tamamlanmış olur. □

Daha sonra genel ergodik teoremin (Gihman ve Skorohod [20]) 2. kısmından yararlanılarak ve uygun hesaplamalar yapılarak $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x, \lambda)$ için kesin ifade elde edilecektir.

Not 6.1. Teorem 6.1'in koşulları sağlandığı takdirde genel ergodik teoreme göre $t \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin zaman ortalaması 1 olasılığı ile durum ortalamasına yakınsamaktadır (Gihman ve Skorohod [20]). $X(t)$ sürecinin bu özelliği aşağıdaki önerme ile ifade edilebilir.

Teorem 6.2. Teorem 6.1'deki koşullar sağlansın. Her sınırlı ve ölçülebilir $f(x)(f\colon (0,\infty) \to R)$ fonksiyonu için aşağıdaki ilişki 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)du \equiv S_f = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty f(v)\big[U_\eta(\lambda z) - U_\eta(\lambda z - v)\big]d\pi(z)dv}{\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi(z)}. \qquad (6.4)$$

Burada, $U_\eta(x)$, $\{\eta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenlerinin oluşturduğu bir yenileme fonksiyonudur,

$$U_\eta(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $F^{*n}(x)$, $F(x)$ fonksiyonunun n kat konvolüsyonudur.

İspat. Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler için ergodik teoreme göre (Gihman ve Skorohod [20]) aşağıdaki ilişki doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)du \equiv S_f = \frac{1}{E(\tau_1)}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(v)P_{\lambda z}\{\tau_1 > t; X(t) \in dv\}dtd\pi(z). \qquad (6.5)$$

τ_1, $X(t)$ sürecinin sıfır seviyesine ilk kez düştüğü anı ifade eden rasgele değişkendir.

İfadelerde kısalık için $G(t, v, \lambda z) = P_z\{\tau_1 > t; X(t) \le v\}$ notasyonu dahil edilmektedir. Bu takdirde $G(t, v, \lambda z)$ şeklinde ifade edilen fonksiyonu açık bir biçimde yazalım:

$$G(t, v, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t)[F_n(\lambda z) - F_n(\lambda z - v)]. \qquad (6.6)$$

Burada $\Phi_n(t) = P\{T_n \le t\}$; $F_n(x) = P\{Y_n \le x\}$ ve $\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t), n \ge 0$'dır.

(6.6) eşitliğinde t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\widetilde{G}(k, v, \lambda z) = \frac{1 - \varphi(k)}{k}\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(k)]^n\,[F_n(\lambda z) - F_n(\lambda z - v)]. \qquad (6.7)$$

Burada $\varphi(k) = E(\exp(-k\xi_1)), k > 0$ ve $\widetilde{G}(k, v, \lambda z)$ ise $G(t, x, \lambda z)$ fonksiyonun Laplace dönüşümüdür. $k \to 0$ iken (6.7) eşitliğinin k parametresine göre iki tarafın da limiti alınırsa:

$$\int_{t=0}^{\infty} G(t, v, \lambda z)dt = \lim_{k\to 0} \widetilde{G}(k, v, \lambda z)$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1 - \varphi(k)}{k} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(k)]^n \, [F_n(\lambda z) - F_n(\lambda z - v)]$$

$$= E(\xi_1) \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(\lambda z) - F_n(\lambda z - v)]$$

$$= E(\xi_1)\big[U_\eta(\lambda z) - U_\eta(\lambda z - v)\big] \qquad (6.8)$$

şeklinde bir ifade elde edilmiş olmaktadır. (6.8)'i 0'dan ∞'a $\pi(z)$ ile integrallenildiğinde aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} G(t, v, \lambda z)dtd\pi(z) = \int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} E(\xi_1)\big[U_\eta(\lambda z) - U_\eta(\lambda z - v)\big]dtd\pi(z). \qquad (6.9)$$

(6.9) eşitliği (6.5)'te yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeyi bulunur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f\big(X(u)\big)du = \frac{1}{E(\tau_1)} E(\xi_1) \int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \big[U_\eta(\lambda z) - U_\eta(\lambda z - v)\big]dtd\pi(z). \qquad (6.10)$$

(6.10) eşitliğindeki $E(\tau_1)$'i elde etmek için $\tau_1 = \sum_{i=1}^{N_1(\lambda z)} \xi_1$ eşitliğinde Wald özdeşliğinden yararlanarak

$$E(\tau_1) = E(\xi_1)E\big(N_1(\lambda z)\big) = E(\xi_1)U_\eta(\lambda z) \qquad (6.11)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $E\big(N_1(\lambda z)\big) \equiv U_\eta(\lambda z)$'dir. (6.10) ve (6.11) eşitlikleri (6.5) eşitliğinde yerine yazılırsa (6.4) elde edilmiş olur. Dolayısıyla aşağıdaki ifade 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)du \equiv S_f = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty f(v)\big[U_\eta(\lambda z) - U_\eta(\lambda z - x)\big]d\pi(z)dv}{\int_0^\infty U_\eta(\lambda z)d\pi(z)}.$$

Böylece Teorem 6.2’nin ispatı tamamlanmış olur. □

Not 6.2. Burada $f(v)$ fonksiyonunun yerine aşağıdaki işaret fonksiyonunu kullanalım:

$$f(v) = I_{[o,x]}(v) = \begin{cases}1, & v \in [0,x]\\ 0, & v \notin [0,x]\end{cases}.$$

Bu işaret fonksiyonunun yardımıyla $Q_X(x,\lambda) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le x\}$ ergodik dağılımının kesin ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 6.1. Teorem 6.1’in koşulları sağlansın. Bu takdirde $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılımının kesin şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(x,\lambda) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le x\} = 1 - \frac{\int_{z=x/\lambda}^{\infty} U_\eta(\lambda z - x)\, d\pi(z)}{\int_{z=0}^{\infty} U_\eta(\lambda z)\, d\pi(z)}. \qquad (6.12)$$

Not 6.3. $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi $\pi(z)$ dağılımına sahip olduğu için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 6.2. Teorem 6.1’in koşulları sağlansın. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılımının kesin şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(x,\lambda) = 1 - \frac{E\Big(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\Big)}{E\Big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\Big)}, x \ge 0. \qquad (6.13)$$

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x,\lambda)$’yı elde etmiş olduk. $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonundan görülebileceği gibi hesaplamalarda $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu gereklidir. $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu için kesin ifadeler ancak $\{\eta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi kolay dağılımlara sahip olduğunda bulunabilmektedir. Bu dağılımlardan bazıları üstel dağılım ve Erlang dağılımıdır. Birçok dağılımda yenileme fonksiyonu için kesin ve kapalı formüller bulmak çok zordur. Bulunan ifadeler de karmaşıktır. Bu nedenle $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu için bulunan ifadeler daha da kompleks olurlar. $\{\eta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi basit dağılımlara sahip olduklarında da dahi bulunan ifadelerin ne kadar kompleks olduğunu aşağıdaki iki örnekle görelim.

Örnek 6.1. $\eta_1 \in \text{Üstel}\,(\alpha)$ olsun. Bu takdirde η_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\eta(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x \geq 0, \alpha > 0.$$

ζ_1 rasgele değişkeninin keyfi bir dağılıma sahip olduğunu varsayalım. Önerme 6.2'de elde edilen $Q_X(x,\lambda)$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$Q_X(x,\lambda) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\} = 1 - \frac{\int_{z=x/\lambda}^{\infty} U_\eta(\lambda z - x)\, d\pi(z)}{\int_{z=0}^{\infty} U_\eta(\lambda z)\, d\pi(z)}. \qquad (6.14)$$

Burada üstel dağılımlı rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonun kesin şekli aşağıdaki gibidir:

$$U_\eta(x) = \alpha x + 1, x \geq 0, \alpha > 0. \qquad (6.15)$$

Bu örnekte η_1 rasgele değişkeni üstel dağılıma ve ζ_1 rasgele değişkeni keyfi bir $\pi(z)$ dağılıma sahiptir. (6.15)'teki Üstel dağılımın yenileme fonksiyonunun kesin şeklini (6.14)'te yerine yazdığımızda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x,\lambda)$ aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$Q_X(x,\lambda) = 1 - \frac{\int_{z=x/\lambda}^{\infty}[\alpha(\lambda z - x) + 1]\, d\pi(z)}{\int_{z=0}^{\infty}[\alpha\lambda z + 1]\, d\pi(z)}$$

$$= 1 - \frac{\alpha\lambda \int_{x/\lambda}^{\infty} z d\pi(z) - \alpha x\big(1 - \pi(x/\lambda)\big) + \big(1 - \pi(x/\lambda)\big)}{\int_{z=0}^{\infty}[\alpha\lambda z + 1]\, d\pi(z)}$$

$$= \frac{\alpha\lambda\left[\int_0^{\infty} z d\pi(z) - \int_{x/\lambda}^{\infty} z d\pi(z)\right] + 1 + \alpha x\big(1 - \pi(x/\lambda)\big) - \big(1 - \pi(x/\lambda)\big)}{\alpha\lambda\beta_1 + 1}$$

$$= \frac{\alpha\lambda \int_0^{x/\lambda} z d\pi(z) + \alpha x + \pi(x/\lambda) - \alpha x \pi(x/\lambda)}{\alpha\lambda\beta_1 + 1}$$

$$Q_X(x,\lambda) = \frac{\alpha\lambda B_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \alpha x\left(1 - \pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) + \pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\alpha\lambda\beta_1 + 1}. \tag{6.16}$$

Burada $B_1(z) = \int_0^z t d\pi(t)$, $\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}$ ve $\beta_1 = E(\zeta_1)$'dir.

$B_1(z)$'yi aşağıdaki gibi inceleyelim:

$$B_1(z) = \int_0^z t d\pi(t) = -\int_0^z t d(1 - \pi(t))$$

$$= -\left\{-\int_0^z (1 - \pi(t))dt + t(1 - \pi(t))\Big|_0^z\right\}$$

$$= -\left\{-\int_0^z (1 - \pi(t))dt + z(1 - \pi(z))\right\}$$

$$B_1(z) = \int_0^z (1 - \pi(t))dt - z(1 - \pi(z)). \tag{6.17}$$

(6.17)'de $B_1(z)$ için bulunan ifade (6.16)'da yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilmiş olur:

$$Q_X(x,\lambda) = \frac{\alpha\lambda \int_0^{x/\lambda}(1 - \pi(t))dt - \alpha x\big(1 - \pi(x/\lambda)\big) + \alpha x\big(1 - \pi(x/\lambda)\big) + \pi(x/\lambda)}{\alpha\lambda\beta_1 + 1}$$

$$Q_X(x,\lambda) = \frac{\alpha\lambda\beta_1 R\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\alpha\lambda\beta_1 + 1}.$$

Burada, $R(z) = \frac{1}{\beta_1}\int_0^z(1 - \pi(t))dt$, $\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}$ ve $\beta_1 = E(\zeta_1)$'dir.

Örnek 6.2. $\eta_1 \in \text{Erlang}\,(2,\alpha)$ olsun. Bu takdirde η_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\eta(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}, x \geq 0, \alpha > 0.$$

Örnek 6.1'deki gibi ζ_1 rasgele değişkeninin keyfi bir dağılıma sahip olduğunu varsayalım. Burada $(2,\alpha)$ parametrelerine sahip Erlang dağılımlı rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonun genel şekli aşağıdaki gibidir:

$$U_\eta(x) = \frac{\alpha x}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\alpha x}, x \geq 0, \alpha > 0.$$

Bu takdirde η_1 rasgele değişkeni $(2,\alpha)$ parametrelerine sahip Erlang dağılımına ve ζ_1 rasgele değişkeni keyfi bir dağılıma sahip olduğunda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x,\lambda)$ için hesaplamalar aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$Q_X(x,\lambda) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\} = 1 - \frac{\int_{z=x/\lambda}^{\infty} U_\eta(\lambda z - x)\, d\pi(z)}{\int_{z=0}^{\infty} U_\eta(\lambda z)\, d\pi(z)}. \qquad (6.18)$$

Notasyonda kısalık için $I_1(\lambda) = \int_{z=0}^{\infty} U_\eta(\lambda z)\, d\pi(z)$ ve $I_2(x,\lambda) = \int_{z=x/\lambda}^{\infty} U_\eta(\lambda z -$ $x d\pi z$ olsun.

(6.18)'deki $I_1(\lambda)$'yı inceleyelim:

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{\alpha\lambda z}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\alpha\lambda z}\right) d\pi(z) = \frac{\alpha\lambda\beta_1}{2} + \frac{3}{4} + \varphi_\zeta(2\alpha\lambda). \qquad (6.19)$$

Burada $\beta_1 = E(\zeta_1)$'dir ve $\varphi_\zeta(2\alpha\lambda) = E\left(e^{-2\alpha\lambda\zeta_1}\right) = \int_0^\infty e^{-2\alpha\lambda z} d\pi(z)$ ise Laplace-stiltijes dönüşümüdür.

Şimdi de (6.18) eşitliğindeki $I_2(x,\lambda)$ integralini hesaplayalım:

$$I_2(x,\lambda) = \int_{z=x/\lambda}^{\infty} \left[\frac{\alpha(\lambda z - x)}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\alpha(\lambda z - x)}\right] d\pi(z)$$

$$= \frac{\alpha\lambda}{2}\int_{z=x/\lambda}^{\infty} z\, d\pi(z) + \int_{z=x/\lambda}^{\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{\alpha x}{2}\right) d\pi(z) + \frac{1}{4}\int_{z=x/\lambda}^{\infty} e^{-2\alpha(\lambda z - x)}\, d\pi(z)$$

$$= \frac{\alpha\lambda}{2} C_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \left(\frac{\alpha x}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(1 - \pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) + \frac{1}{4}\varphi_\zeta\left(s, \frac{x}{\lambda}\right). \qquad (6.20)$$

Burada $C_1(z) = \int_{t=z}^{\infty} t\, d\pi(t)$ ve $\varphi_\zeta(2\alpha\lambda, z) = \int_{t=z}^{\infty} e^{-2\alpha\lambda t}\, d\pi(t)$'dir.

(6.19) ve (6.20) ifadeleri (6.18)'de yerine yazılırsa $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x, \lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiş olur:

$$Q_X(x) = \frac{2\alpha\lambda\beta_1 R(x/\lambda) + 3\pi(x/\lambda) + \varphi_\zeta(2\alpha\lambda) - e^{2\alpha x}\varphi_\zeta(s, x/\lambda)}{2\alpha\lambda\beta_1 + 3 + \varphi_\zeta(2\alpha\lambda)}.$$

Burada, $R(z) = \frac{1}{\beta_1}\int_0^z (1 - \pi(t))dt$, $\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}$, $\varphi_\zeta(\alpha) = \int_{z=0}^{\infty} e^{-\alpha z} d\pi(z)$ ve $\varphi_\zeta(\alpha, z) = \int_{t=z}^{\infty} e^{-\alpha t}\, d\pi(t)$'dir.

Not 6.4. $(2, \alpha)$ parametrelerine sahip Erlang dağılımlı ve α parametreli üstel dağılımlı rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonlarının aşikar şekilleri literatürde mevcuttur. Fakat daha yüksek mertebeden Erlang dağılımı için aşikar ifadeler yoktur. Ek A'da n. mertebeden Erlang dağılımlı rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonlarının kesin ifadeleri verilmiştir.

Not 6.5. Örnek 6.1 ve Örnek 6.2'den de anlaşılacağı gibi bazı basit durumlarda bile $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının kesin ifadesini hesaplamak zordur veya elde edilen kesin ifadeler çok komplekstir. $\{\eta_n\}, n = 1, 2, ...$ rasgele değişkenler dizisi üstel ve Erlang dağılımları dışındaki dağılımlara sahip olduğu zaman $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu için kesin ifadeler daha da karmaşıklaşmaktadır. Bu sebeple ergodik dağılım için yaklaşık formüller bulmak önemlidir, çünkü kompleks ifadeler uygulamada kullanışsızdırlar. Literatürde birçok yaklaşım metodu bulunmaktadır. Bu çalışmada yaklaşım metodu olarak asimtotik yöntem kullanılmıştır. Bu bilgiler ışığında $\lambda \to \infty$ iken,

(i) $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmış ve iki terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir;

(ii) $X(t)$ sürecinin ergodik momentleri için iki terimli asimtotik açılımlar bulunmuştur.

Fakat asimtotik yöntemi kullanmadan önce $X(t)$ sürecini standartlaştırmak gerekmektedir. $X(t)$ sürecinin lineer bir dönüşümü olan $Y(t)$ sürecini tanımlayalım.

7. SÜRECİN ZAYIF YAKINSAMASI

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_X(x,\lambda)$'nın kesin ifadesinin kullanımının zor olduğu bir önceki bölümde örneklerle incelenmiştir. Zor olmasının nedeni, $Q_X(x,\lambda)$'nın kesin ifadesinin matematiksel olarak kompleks bir yapıya sahip olmasıdır. Bu zorluktan kurtulmanın etkili bir yolu $\lambda \to \infty$ iken $Q_X(x,\lambda)$ için asimtotik açılım elde etmektir. Bu bölümde $Q_X(x,\lambda)$ için iki terimli asimtotik elde edilmiştir. Fakat asimtotik yöntemi kullanmadan önce $X(t)$ sürecini standartlaştırmak gerekmektedir. $X(t)$ sürecinin lineer bir dönüşümü olan $Y(t)$ sürecini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$Y(t) = \frac{X(t)}{\lambda}.$$

Bu takdirde $Y(t)$ sürecinin $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$Q_Y(y,\lambda) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{Y(t) \le y\} = \lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{X(t)}{\lambda} \le y\right\}$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le \lambda y\} = 1 - \frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}. \tag{7.1}$$

Özetle bu bölümün amacı $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu için asimtotik açılım bulmak ve zayıf yakınsama teoremi ispatlamaktır. Bu amaçlar doğrultusunda öncelikle aşağıdaki önermeyi verelim.

Yardımcı Teorem 7.1. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

(i) $E(\eta_1^2) < \infty$,

(ii) $g(x)$ sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun,

(iii) $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$,

(iv) $\sup_{y\in R^+}|\pi'(y)| = K < \infty$ olsun.

Bu takdirde her $y \ge 0$ için $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik ilişki yazılabilir:

$$\int_{z=0}^{\infty} g(\lambda z)\, d\pi(z+y) \longrightarrow 0.$$

İspat. İspata geçmeden önce kısalık için aşağıdaki notasyonu verelim:

$$G(\lambda, y) = \int_{z=0}^{\infty} g(\lambda z)\, d\pi(z + y) \tag{7.2}$$

(7.2) eşitliği işlemlerde kolaylık açısından aşağıdaki gibi ikiye ayrılabilir:

$$G(\lambda, y) = \int_{0}^{z^*} g(\lambda z) d\pi(z + y) + \int_{z^*}^{\infty} g(\lambda z) d\pi(z + y). \tag{7.3}$$

$G_1(\lambda, z) = \int_0^{z^*} g(\lambda z) d\pi(z + y)$ ve $G_2(\lambda, z) = \int_{z^*}^{\infty} g(\lambda z) d\pi(z + y)$ olsun.

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ koşulu göz önüne alındığında her $\varepsilon > 0$ için öyle bir sonlu T değeri seçmek mümkündür ki, $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliği her $x \geq T$ için sağlansın. $z^* \equiv \frac{T}{\lambda}$ şeklinde tanımlansın.

(7.3) eşitliğindeki $G_2(\lambda, z)$ ifadesi aşağıdaki gibi incelenebilir:

$$G_2(\lambda, z) \leq \int_{z^*}^{\infty} |g(\lambda z)| d\pi(z + y) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{z^*}^{\infty} d\pi(z + y) = \frac{\varepsilon}{2}\big(1 - \pi(y + z^*)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.4}$$

(7.3) eşitliğindeki $G_1(\lambda, z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$G_1(\lambda, z) \leq \int_{0}^{z^*} |g(\lambda z)| d\pi(z + y) \leq H \int_{0}^{z^*} d\pi(z + y)$$

$$= H(\pi(y + z^*) - \pi(y)) \leq \frac{HKT}{\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.5}$$

Burada $H = \sup_{x\in R^+}|g(x)| < \infty$'dur. Ayrıca $\sup_{y\in R^+}|\pi'(y)| = K < \infty$ olduğu için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$|\pi(y + z^*) - \pi(y)| \leq Kz^* = \frac{KT}{\lambda}.$$

Burada K sonlu pozitif bir sabittir.

(7.4) ve (7.5) eşitlikleri (7.3) eşitliğinde yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$|G(\lambda,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dolayısıyla her $y \geq 0$ için $\lim_{\lambda\to\infty} G(\lambda,z) = 0$ olur veya $\lambda \to \infty$ iken $\int_{z=0}^{\infty} g(\lambda z)\, d\pi(z+y) \longrightarrow 0$ olur.

Böylece Yardımcı Teorem 7.1'in ispatı tamamlanmış olur. □

Şimdi de $\lambda \to \infty$ iken Y(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_Y(y,\lambda)$ için iki terimli asimtotik açılım elde edelim.

Teorem 7.1. Yardımcı Teorem 7.1'in koşulları sağlansın. Ayrıca $E(\zeta_1) < \infty$ olsun. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılım asimtotik açılım aşağıdaki gibidir:

$$Q_Y(y,\lambda) = R(y) + \frac{cm_1}{\lambda\beta_1}[\pi(y) - R(y)] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada $R(y) \equiv \frac{1}{\beta_1}\int_0^y (1-\pi(z))dz$, $\beta_1 \equiv E(\zeta_1)$, $m_2 = E(\eta_1^2)$ ve $c = m_2/2m_1^2$'dir.

İspat. Öncelikle $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılımının kesin şeklini verelim:

$$Q_Y(y,\lambda) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}. \tag{7.6}$$

(7.6) eşitliğindeki $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)$ ifadesi için asimtotik açılım elde edelim. $m_2 = E(\eta_1^2) < \infty$ iken yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + c + g(x). \tag{7.7}$$

Burada $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$ katsayısı literatürde sık rastlanılan Feller katsayısıdır; $g(x)$ fonksiyonu ise sınırlı bir fonksiyon olup, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$'dır.

(7.7) eşitliği kullanılarak $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)$ ifadesini aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right) = \int_{z=0}^{\infty} U_\eta(\lambda z)\, d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\lambda z}{m_1} + c\right) d\pi(z) + \int_0^\infty g(\lambda z) d\pi(z). \tag{7.8}$$

$\int_0^\infty g(\lambda z) d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 7.1'de $y = 0$ alınarak görülebilir. Bu takdirde $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)$ ifadesi için asimtotik açılım aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda\beta_1}{m_1} + c + o(1). \tag{7.9}$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta_1)$ ve $m_2 \equiv E(\eta_1^2)$'dir.

Şimdi de (7.6) eşitliğindeki $Q_Y(y, \lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonunun payında bulunan $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right)$ ifadesini ele alalım ve inceleyelim:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right) = \int_{z=y}^\infty U_\eta(\lambda z - \lambda y) d\pi(z). \tag{7.10}$$

(7.7)'da yenileme fonksiyonu için verilen ifadeyi (7.10) integralinde $U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)$ için göz önünde bulunduralım:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right) = \int_{z=y}^\infty \left[\frac{\lambda(z-y)}{m_1} + c + g\big(\lambda(z-y)\big)\right] d\pi(z)$$

$$= \int_{t=0}^\infty \left[\frac{\lambda t}{m_1} + c + g(\lambda t)\right] d\pi(t+y)$$

$$= \frac{\lambda}{m_1} D(y) + c\big(1 - \pi(y)\big) + G(\lambda, y). \tag{7.11}$$

Burada $D(y) = \int_{t=0}^\infty t d\pi(t+y)$, $G(\lambda, y) = \int_{t=0}^\infty g(\lambda t)\, d\pi(t+y)$, $m_2 \equiv E(\eta_1^2)$ ve $c = m_2/2m_1^2$'dir.

(7.11) eşitliğinde bulunan $G(\lambda, y)$ fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 7.1'de gösterilmiştir. Bu takdirde $\lambda \to \infty$ iken $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right)$ ifadesinin asimtotik açılımı aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right) = \frac{\lambda}{m_1} D(y) + c\big(1 - \pi(y)\big) + o(1) \tag{7.12}$$

Şimdi (7.12) eşitliğindeki $D(y)$ aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$D(y) = \int_{t=0}^{\infty} t d\pi(t + y) = \int_{v=y}^{\infty} (v - y) d\pi(v) = -\int_{y}^{\infty} (v - y) d(1 - \pi(v))$$

$$= -\left\{-\int_{y}^{\infty} \big(1 - \pi(v)\big) dv + (v - y)(1 - \pi(v))\Big|_{v=y}^{\infty}\right\}$$

$$= -\left\{-\int_{y}^{\infty} \big(1 - \pi(v)\big) dv + \lim_{T\to\infty} (T - y)(1 - \pi(T))\right\}$$

$$= \int_{y}^{\infty} \big(1 - \pi(v)\big) dv - \lim_{T\to\infty} (T - y)(1 - \pi(T)).$$

Özetle,

$$D(y) = -\lim_{T\to\infty} T(1 - \pi(T)) + \lim_{T\to\infty} y(1 - \pi(T)) + \int_{y}^{\infty} \big(1 - \pi(v)\big) dv. \tag{7.13}$$

(7.13) eşitliğindeki $\lim_{T\to\infty} T(1 - \pi(T))$ ifadesi aşağıdaki gibi incelenebilir.

Teoremdeki $\beta_1 \equiv E(\zeta_1) < \infty$ koşulunun sağlanabilmesi için $\pi(T)$ dağılımının kuyruk kısmı aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır:

$$1 - \pi(T) \leq \frac{b}{T^{1+\alpha}}, \alpha > 0, T \to \infty, 0 < b < \infty. \tag{7.14}$$

(7.14) ifadesinin her iki tarafı da T ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$0 \leq T\big(1 - \pi(T)\big) \leq \frac{b}{T^{\alpha}}. \tag{7.15}$$

(7.15) ifadesinde $\alpha > 0$ olduğu için $T \to \infty$ iken $(b/T^{\alpha}) \to 0$ olur. Bu takdirde aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\lim_{T\to\infty} T(1-\pi(T)) = 0. \tag{7.16}$$

Diğer taraftan her sonlu y için aşağıdaki eşitlik elde edilebilir:

$$\lim_{T\to\infty} y(1-\pi(T)) = 0. \tag{7.17}$$

Burada $y \geq 0$ sabit bir sayıdır.

(7.16) ve (7.17) eşitlikleri (7.13) eşitliğinde yerine yazılarak aşağıdaki ifade bulunabilir:

$$D(y) = \int_y^\infty \big(1-\pi(v)\big)\, dv. \tag{7.18}$$

(7.18) eşitliği (7.12) eşitliğinde kullanıldığında $\lambda \to \infty$ iken $E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right)$ ifadesi için aşağıdaki asimtotik açılım elde edilir:

$$E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right) = \frac{\lambda}{m_1}\int_y^\infty \big(1-\pi(v)\big)\, dv + c\big(1-\pi(y)\big) + o(1). \tag{7.19}$$

(7.9) ve (7.19) asimtotik açılımları (7.6) eşitliğinde yerine yazılarak $\lambda \to \infty$ iken $Q_Y(y,\lambda)$ için aşağıdaki asimtotik açılım elde edilebilir:

$$Q_Y(y,\lambda) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - \lambda y)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{\lambda}{m_1} D(y) + c\big(1-\pi(y)\big) + o(1)}{\frac{\lambda\beta_1}{m_1} + c + o(1)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{\lambda}{m_1} D(y) + c\big(1-\pi(y)\big) + o(1)}{\frac{\lambda\beta_1}{m_1}\left[1 + \frac{cm_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}$$

$$= 1 - \frac{m_1}{\lambda\beta_1}\left[\frac{\lambda}{m_1} D(y) + c\big(1-\pi(y)\big) + o(1)\right]\left[1 - \frac{cm_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\beta_1}\left[D(y) + \frac{cm_1}{\lambda}\left(1 - \pi(y) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right]\left[1 - \frac{cm_1}{\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\beta_1}\left[D(y) + \frac{cm_1}{\lambda}\big(1 - \pi(y)\big) - \frac{cm_1}{\lambda}D(y) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\beta_1}D(y) - \frac{cm_1}{\lambda\beta_1}\big(1 - \pi(y)\big) + \frac{cm_1}{\lambda\beta_1}D(y) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\beta_1}D(y) - \frac{cm_1}{\lambda\beta_1}\left[1 - \pi(y) - \frac{1}{\beta_1}D(y)\right] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Burada $D(y) = \int_y^\infty \big(1 - \pi(v)\big)\,dv$'dir.

$$Q_Y(y,\lambda) = 1 - \frac{1}{\beta_1}\int_y^\infty \big(1 - \pi(v)\big)\,dv$$

$$- \frac{cm_1}{\lambda\beta_1}\left[1 - \pi(y) - \frac{1}{\beta_1}\int_y^\infty \big(1 - \pi(v)\big)\,dv\right] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Sonuç olarak $\lambda \to \infty$ iken $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu için iki terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_Y(y,\lambda) = R(y) + \frac{cm_1}{\lambda\beta_1}[\pi(y) - R(y)] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{7.20}$$

Burada $\beta_1 \equiv E(\zeta_1)$, $m_2 \equiv E(\eta_1^2)$, $\pi(y) \equiv P\{\zeta_1 \leq y\}$ ve $R(y) \equiv \frac{1}{\beta_1}\int_0^y (1 - \pi(z)dz$'dir.

Böylece Teorem 7.1'in ispatı tamamlanmış olur. □

$Q_Y(y,\lambda)$ için iki terimli asimtotik açılım elde edilmiştir. Şimdi $\lambda \to \infty$ iken $Y(t)$ sürecinin $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremini verebiliriz.

Teorem 7.2. Yardımcı Teorem 7.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu $\lambda \to \infty$ iken $R(y)$ fonksiyonuna yakınsamaktadır. Yani;

$$Q_Y(y,\lambda) \to R(y)$$

olur. Burada $R(y)$ aşağıdaki şekildedir:

$$R(y) \equiv \frac{1}{E(\zeta_1)} \int_0^y (1 - \pi(z))dz.$$

İspat. (7.20)'deki $Q_Y(y,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu için bulunan asimtotik açılımdan $R(y)$ fonksiyonu çıkarıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$Q_Y(y,\lambda) - R(y) \leq \frac{cm_1}{\lambda\beta_1}[\pi(y) - R(y)] + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) < \varepsilon. \qquad (7.21)$$

(7.21) eşitliğinden faydalanılarak $\lim_{\lambda\to\infty} Q_Y(y,\lambda) = R(y)$ olur.

Her $y \geq 0$ için $|\pi(y) - R(y)| \leq 1$'dir. Ayrıca $\frac{cm_1}{\beta_1} < \infty$ olduğuna göre $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki asimtotik ilişkiyi yazabiliriz:

$$\frac{cm_1}{\lambda\beta_1}(\pi(y) - R(y)) \longrightarrow 0.$$

Dolayısıyla, $\lim_{\lambda\to\infty}\left(Q_Y(y,\lambda) - R(y)\right) = 0$ olur. Başka bir deyişle, $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_Y(y,\lambda)$, $R(y)$ limit dağılımına zayıf yakınsar, yani $\lambda \to \infty$ iken $Q_Y(y,\lambda) \to R(y)$ olur.

Böylece Teorem 7.2'nin ispatı tamamlanmış olur. □

Teorem 7.1 ve Teorem 7.2'den elde ettiğimiz bilgilerin ışığında aşağıdaki sonucu verelim:

Sonuç 7.1. Yardımcı Teorem 7.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki ilişki doğrudur:

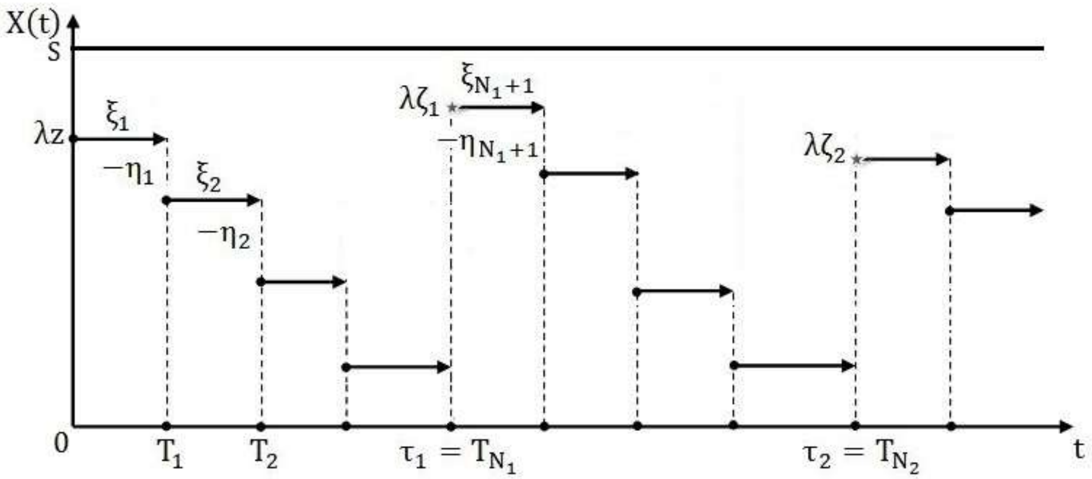
$$Q_X(x,\lambda) \sim R\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Burada $R(z)$ aşağıdaki şekildedir:

$$R(z) \equiv \frac{1}{E(\zeta_1)} \int_0^z (1 - \pi(t))dt.$$

Not 7.1. Asimtotik yöntemlerle elde edilen $R(y)$ limit dağılımı kesin formüllerden daha basit bir yapıya sahiptir (bak, Örnek 6.1 ve Örnek 6.2). Bu basit yapıdaki limit dağılımı kullanılarak $X(t)$ sürecinin birçok olasılık karakteristiklerini bulmak mümkündür.

Not 7.2. Uygulamada sık rastlanılan (s, S) tipli yarı-Markov envanter modellerini aşağıdaki örneklerle ele alalım. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_X(x, \lambda)$'nın, $R(x/\lambda)$ limit dağılımına zayıf yakınsadığını örneklerle test edelim. Bu örneklerde, $\pi(z)$ dağılımı için $[0, 1]$ aralığında düzgün dağılım ve $[0, 1]$ aralığında simetrik üçgensel dağılım kullanılacaktır. Ayrıca $s = 0$ ve $\lambda = S$ olarak alınacaktır. Bu durumda $X(t)$ sürecinin bir görünümü aşağıdaki gibidir:



Şekil 7.1. $X(t)$ sürecinin bir görünümü.

Örnek 7.1. Kesikli şans karışımlı müdahaleyi ifade eden rasgele değişken ζ_n, 0 ve 1 aralığında düzgün dağılıma sahip olsun. Bu takdirde ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\zeta(x) = 1, \pi(x) = x.$$

$X(t)$ sürecinin $Q_X(x)$ ergodik dağılım fonksiyonunu verelim:

$$Q_X(x) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(S\zeta_1 - x)\right)}{E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)}, x \in [0, S].$$

Bu takdirde $Q_X(Sy)$ ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$Q_X(Sy) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le Sy\} = 1 - \frac{E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)}{E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)}, y \in [0,1]. \quad (7.22)$$

(7.22) eşitliğindeki $E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)$ ifadesinin asimtotik açılımını bulalım:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right) = \int_0^1 \left[\frac{Sz}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_1(z)\right] d\pi(z)$$

$$= \frac{S}{2m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \int_0^1 g_1(Sz) d\pi(z). \quad (7.23)$$

Yardımcı Teorem 7.1'de (7.23) eşitliğindeki $\int_0^1 g_1(z)d\pi(z)$ ifadesinin $S \to \infty$ iken 0'a gittiği ispatlanmıştır yani $\lim_{S\to\infty} \int_0^1 g_1(z)d\pi(z) = 0$. Bu takdirde $E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)$'in iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right) = \frac{S}{2m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1). \quad (7.24)$$

(7.22) eşitliğindeki $E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)$ ifadesinin asimtotik açılımını hesaplayalım:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right) = \int_y^1 \left[\frac{Sz}{m_1} - \frac{Sy}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_2\big(S(z-y)\big)\right] d\pi(z)$$

$$= \frac{S}{2m_1}(y-1)^2 - \frac{m_2}{2m_1^2}(y-1) + \int_y^1 g_2\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z). \quad (7.25)$$

Gerekli değişken dönüşümleri uygulandığında Yardımcı Teorem 7.1'de (7.23) eşitliğindeki $\int_y^1 g_2\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z)$ ifadesinin $S \to \infty$ iken 0'a gittiği ispatlanmıştır yani $\lim_{S\to\infty} \int_y^1 g_2\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z) = 0$. Bu takdirde $E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)$ ifadesinin iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right) = \frac{S}{2m_1}(y-1)^2 - \frac{m_2}{2m_1^2}(y-1) + o(1). \tag{7.26}$$

(7.24) ve (7.26)'daki asimtotik açılımları 7.22'de yazalım:

$$Q_X(Sy) = 1 - \frac{\frac{S}{2m_1}(y-1)^2 - \frac{m_2}{2m_1^2}(y-1) + o(1)}{\frac{S}{2m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1)}.$$

$$= 1 - \frac{\frac{S}{2m_1}\left[(y-1)^2 - \frac{m_2}{m_1 S}(y-1) + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]}{\frac{S}{2m_1}\left[1 + \frac{m_2}{m_1 S} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]}$$

$$= 1 - \left\{\left[(y-1)^2 - \frac{m_2}{m_1 S}(y-1) + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]\left[1 - \frac{m_2}{m_1 S} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]\right\}.$$

Özetle,

$$Q_X(Sy) = 2y - y^2 + \frac{m_2 y(y-1)}{m_1 S} + o\left(\frac{1}{S}\right)$$

elde edilir.

$Q_X(Sy)$ ergodik dağılım fonksiyonu için bulunan asimtotik açılımdan $R(y)$ fonksiyonu çıkarıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$Q_X(Sy) - R(y) \leq \frac{m_2 y(y-1)}{m_1 S} + o\left(\frac{1}{S}\right) \leq \frac{cm_1}{2S} + o\left(\frac{1}{S}\right).$$

Burada, $m_2 \equiv E(\eta_1^2)$, $c = m_2/2m_1^2$ ve $R(y) = 2y - y^2$'dir.

$S \to \infty$ iken $cm_1/2S \to 0$ asimtotik ilişkisi yazılabilir. Ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(Sy)$, $R(y)$ limit dağılımına zayıf yakınsar, yani $S \to \infty$ iken $Q_X(Sy) \to R(y)$ olur. Bu takdirde aşağıdaki asimtotik ilişki doğrudur:

$$Q_X(x) \sim R\left(\frac{x}{S}\right) = \frac{2Sx - x^2}{S^2}, x \in [0, S].$$

Örnek 7.2. Kesikli şans karışımlı müdahaleyi ifade eden rasgele değişken ζ_n, 0 ve 1 aralığında simetrik üçgensel dağılıma sahip olsun. Bu takdirde ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_{\zeta_1}(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 4 - 4x, & 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}$$

$$\pi(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x < 1/2 \\ 4x - 2x^2 - 1, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$X(t)$ sürecinin $Q_X(x)$ ergodik dağılım fonksiyonunu verelim:

$$Q_X(x) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(S\zeta_1 - x)\right)}{E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)}, x \in [0, S].$$

Bu takdirde $Q_X(Sy)$ ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$Q_X(Sy) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq Sy\} = 1 - \frac{E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)}{E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)}, y \in [0, 1]. \tag{7.27}$$

(7.27) eşitliğindeki $E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)$ ifadesinin asimtotik açılımını bulalım:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{Sz}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_1(Sz)\right] d\pi(z) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{Sz}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_2(Sz)\right] d\pi(z)$$

$$= \frac{S}{2m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + \int_0^{1/2} g_1(Sz) d\pi(z) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} g_2(Sz) d\pi(z). \tag{7.28}$$

Burada, $m_2 \equiv E(\eta_1^2)$'dir.

Yardımcı Teorem 7.1'de (7.28) eşitliğindeki $\int_0^{1/2} g_1(Sz)d\pi(z)$ ve $\int_{1/2}^{1} g_2(Sz)d\pi(z)$ ifadelerinin $S \to \infty$ iken 0'a gittiği ispatlanmıştır, yani $\lim_{S\to\infty} \int_0^{1/2} g_1(Sz)d\pi(z) = 0$

ve $\lim_{S\to\infty}\int_{1/2}^{1} g_2(Sz)d\pi(z) = 0$’dır. Bu takdirde $E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right)$’in iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1)\right) = \frac{S}{2m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o(1). \tag{7.29}$$

(7.27) eşitliğindeki $E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)$ ifadesinin asimtotik açılımını hesaplayalım.

Not 7.3. $E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)$’nin asimtotik açılımı $y \in [0, 1/2]$ aralığındayken ve $y \in (1/2, 1]$ aralığındayken ayrı olarak hesaplanılacaktır.

Öncelikle $y \in [0, 1/2]$ aralığını ele alalım:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right) = \int_y^{\frac{1}{2}} \left[\frac{Sz}{m_1} - \frac{Sy}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_3\big(S(z-y)\big)\right] d\pi(z)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{Sz}{m_1} - \frac{Sy}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_4\big(S(z-y)\big)\right] d\pi(z)$$

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right) = \frac{2Sy^3}{3m_1} - \frac{Sy}{m_1} + \frac{S}{2m_1} - \frac{m_2 y^2}{m_1^2} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \int_y^{\frac{1}{2}} g_3\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} g_4\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z), y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{7.30}$$

Yardımcı Teorem 7.1’de (7.30) eşitliğindeki $\int_y^{\frac{1}{2}} g_3\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z)$ ve $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4 -$ 4zg4Sz−ydπ(z) ifadelerinin S→∞ iken 0’a gittiği ispatlanmıştır yani $\lim_{S\to\infty}\int_y^{\frac{1}{2}} g_3\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z) = 0$ ve $\lim_{S\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4-4z) g_4\big(S(z-y)\big)\, d\pi(z) =$ 0’dır. Bu takdirde

$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)$ ifadesinin iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right) = \frac{2Sy^3}{3m_1} - \frac{Sy}{m_1} + \frac{S}{2m_1} - \frac{m_2 y^2}{m_1^2} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1). \tag{7.31}$$

(7.29) ve (7.31)'deki asimtotik açılımları 7.27'de yazalım:

$$Q_X(Sy) = 1 - \frac{\dfrac{2Sy^3}{3m_1} - \dfrac{Sy}{m_1} + \dfrac{S}{2m_1} - \dfrac{m_2 y^2}{m_1^2} + \dfrac{m_2}{2m_1^2} + o(1)}{\dfrac{S}{2m_1} + \dfrac{m_2}{m_1^2} + o(1)},$$

$$= 1 - \frac{\dfrac{S}{2m_1}\left[\dfrac{4y^3}{3} - 2y + 1 - \dfrac{2m_2 y^2}{m_1 S} + \dfrac{m_2}{m_1 S} + o\left(\dfrac{1}{S}\right)\right]}{\dfrac{S}{2m_1}\left[1 + \dfrac{2m_2}{m_1 S} + o\left(\dfrac{1}{S}\right)\right]}$$

$$= 1 - \left\{\left[\frac{4y^3}{3} - 2y + 1 - \frac{2m_2 y^2}{m_1 S} + \frac{m_2}{m_1 S} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]\left[1 - \frac{2m_2}{Sm_1} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]\right\}.$$

Özetle,

$$Q_X(Sy) = \frac{6y - 4y^3}{3} + \frac{m_2}{m_1 S}\left[\frac{8y^3 + 6y^2 - 12y + 3}{3}\right] + o\left(\frac{1}{S}\right), y \in [0, 1/2] \tag{7.32}$$

elde edilir.

Şimdi de $y \in (1/2, 1]$ aralığı için $E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)$'nin asimtotik açılımını elde edelim.

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right) = \int_y^1 \left[\frac{Sz}{m_1} - \frac{Sy}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_5\left(S(z-y)\right)\right] d\pi(z)$$

$$= \frac{-2Sy^3}{3m_1} + \frac{2Sy^2}{m_1} - \frac{2Sy}{m_1} + \frac{2S}{3m_1} + \frac{m_2 y^2}{m_1^2} - \frac{2m_2 y}{m_1^2} + \frac{m_2}{m_1^2}$$

$$+ \int_y^1 g_5\left(S(z-y)\right) d\pi(z). \tag{7.33}$$

Yardımcı Teorem 7.1'de (7.33) eşitliğindeki $\int_y^1 g_5\big(S(z-y)\big)\,d\pi(z)$ ifadesinin $S \to \infty$ iken 0'a gittiği ispatlanmıştır yani $\lim_{S\to\infty} \int_y^1 g_5\big(S(z-y)\big)\,d\pi(z) = 0.$ Bu takdirde $E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right)$ ifadesinin iki terimli asimtotik açılımı aşağıdaki gibi olur:

$$E\left(U_\eta(S\zeta_1 - Sy)\right) = \frac{-2Sy^3}{3m_1} + \frac{2Sy^2}{m_1} - \frac{2Sy}{m_1} + \frac{2S}{3m_1} + \frac{m_2y^2}{m_1^2} - \frac{2m_2y}{m_1^2} + \frac{m_2}{m_1^2} + o(1). \tag{7.34}$$

(7.29) ve (7.34)'teki asimtotik açılımları 7.27'de yazalım:

$$Q_X(Sy) = 1 - \frac{\frac{-2Sy^3}{3m_1} + \frac{2Sy^2}{m_1} - \frac{2Sy}{m_1} + \frac{2S}{3m_1} + \frac{m_2y^2}{m_1^2} - \frac{2m_2y}{m_1^2} + \frac{m_2}{m_1^2} + o(1)}{\frac{S}{2m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o(1)},$$

$$= 1 - \frac{\frac{S}{2m_1}\left[\frac{-4y^3}{3} + 4y^2 - 4y + \frac{4}{3} + \frac{2m_2y^2}{m_1S} - \frac{4m_2y}{m_1S} + \frac{2m_2}{m_1S} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]}{\frac{S}{2m_1}\left[1 + \frac{2m_2}{m_1S} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]}$$

$$= 1 - \left\{\left[\frac{-4y^3}{3} + 4y^2 - 4y + \frac{4}{3} + \frac{2m_2y^2}{m_1S} - \frac{4m_2y}{m_1S} + \frac{2m_2}{m_1S} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left[1 + \frac{2m_2}{m_1S} + o\left(\frac{1}{S}\right)\right]\right\}.$$

Özetle $y \in (1/2, 1]$ iken,

$$Q_X(Sy) = \frac{4y^3 - 12y^2 + 12y - 1}{3} - \frac{2m_2}{m_1S}\left[\frac{4y^3 - 9y^2 + 6y - 1}{3}\right] + o\left(\frac{1}{S}\right) \tag{7.35}$$

elde edilir.

(7.32) ve (7.35)'in yardımıyla $Q_X(Sy)$ ergodik dağılımı fonksiyonunun asimtotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$Q_X(Sy) = \begin{cases} A_1(y) + B_1(y), y \in [0, 1/2] \\ A_2(y) - B_2(y), y \in (1/2, 1] \end{cases}.$$

$R(y)$ limit dağılımı ise aşağıdaki gibidir:

$$R(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ A_1(y), & y \in [0, 1/2] \\ A_2(y), & y \in (1/2, 1] \\ 1, & y > 1 \end{cases}.$$

Burada

$$A_1(y) = \frac{6y - 4y^3}{3}, B_1(y) = \frac{2cm_1}{S}\left[\frac{8y^3 + 6y^2 - 12y + 3}{3}\right] + o\left(\frac{1}{S}\right),$$

$$A_2(y) = \frac{4y^3 - 12y^2 + 12y - 1}{3}, B_2(y) = \frac{4cm_1}{S}\left[\frac{4y^3 - 9y^2 + 6y - 1}{3}\right] + o\left(\frac{1}{S}\right)\text{'dir.}$$

Burada, $m_2 \equiv E(\eta_1^2)$ ve $c = m_2/2m_1^2$'dir.

$Q_X(Sy)$ ergodik dağılım fonksiyonu için bulunan asimtotik açılımdan $R(y)$ fonksiyonu çıkarıldığında bulunan ifadeler $S \to \infty$ iken 0'a gitmektedir. Sonuç olarak, ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(Sy)$, $R(y)$ limit dağılımına zayıf yakınsar, yani $S \to \infty$ iken $Q_X(Sy) \to R(y)$ olur. Bu takdirde aşağıdaki asimtotik ilişki doğrudur:

$$Q_X(x) \sim R\left(\frac{x}{S}\right), x \in [0, S].$$

8. SÜRECİN ERGODİK MOMENTLERİ İÇİN KESİN İFADELER VE ASİMTOTİK AÇILIMLAR

$Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu için kesin ifade 6. Bölümde bulunmuştur. $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu yardımıyla önemli bilgileri elde etmek mümkündür. Özellikle $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımın momentleri için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonu ile bulunabilir. Bu bölümde $X(t)$ sürecinin ergodik momentleri için kesin ifadeler ve $\lambda \to \infty$ iken iki terimli asimtotik açılımlar elde edilmiştir.

Öncelikle $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonunu kullanarak $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımın n. dereceden momentleri için kesin ifadeleri elde edelim. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımın n. momenti $E(X^n)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$E(X^n) = \lim_{t\to\infty} E\big(X^n(t)\big), n = 1, 2, \ldots$$

$E(X^n)$ için aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 8.1. (Khaniyev vd. [29]) $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ başlangıç rasgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları sağlasın:

(i) $E(\xi_1) < \infty$;

(ii) $E(\eta_1) > 0$;

(iii) $E(\eta_1^2) < \infty$;

(iv) η_n aritmetik olmayan rasgele değişken olsun;

(v) $E(\zeta_1^{n+1}) < \infty$.

Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin n. dereceden ergodik momenti $E(X^n)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X^n) = \frac{n}{E(U_\eta(\lambda\zeta_1))} \int_0^\infty x^{n-1} E\Big(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\Big)\, dx. \qquad (8.1)$$

Burada $U_\eta(x)$, $\{\eta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi tarafından oluşturulan yenileme fonksiyonudur.

İspat. Öncelikle 6. Bölümde bulunan $Q_X(x,\lambda)$ ergodik dağılım fonksiyonunu hatırlayalım:

$$Q_X(x,\lambda) = 1 - \frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right)}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}, x \geq 0. \tag{8.2}$$

(8.2)'yi kullanarak $E(X^n)$'yi aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n dQ_X(x,\lambda) = n\int_0^\infty x^{n-1}[1 - Q_X(x,\lambda)]dx$$

$$= n\int_0^\infty x^{n-1}\frac{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right)}{E(U_\eta(\lambda\zeta_1))}dx$$

$$E(X^n) = \frac{n}{E(U_\eta(\lambda\zeta_1))}\int_0^\infty x^{n-1}E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right)dx. \tag{8.3}$$

Önerme 8.1'in ispatı tamamlanmış olur. □

Not 8.1. $X(t)$ sürecinin n. dereceden ergodik momenti $E(X^n)$ için alternatif bir formül elde etmek için aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$U_n(x) \equiv x^{n-1} * U_\eta(x) \equiv \int_0^x (x-z)^{n-1}U_\eta(z)dz, n = 1, 2, \ldots$$

Yani $U_n(x)$, $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonun konvolüsyon çarpımından oluşmaktadır.

$E(X^n)$ için alternatif ifadeyi aşağıdaki önerme ile verelim:

Önerme 8.2. (Khaniyev vd. [29]) Önerme 8.1'deki koşullar sağlansın. O zaman, $X(t)$ sürecinin n. dereceden ergodik momenti $E(X^n)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X^n) = \frac{n}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)}E\big(U_n(\lambda\zeta_1)\big), n = 1, 2, \ldots \tag{8.4}$$

İspat. (8.1) eşitliğinin integral kısmını aşağıdaki gibi ele alalım:

$$\int_0^\infty x^{n-1} E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right) dx = \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_{x/\lambda}^\infty U_\eta(\lambda z - x) d\pi(z)\right) dx$$

$$= \int_0^\infty d\pi(z) \int_0^z x^{n-1} U_\eta(\lambda z - x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty d\pi(z) \int_0^z (\lambda z - t)^{n-1} U_\eta(t)\, dx$$

$$\int_0^\infty x^{n-1} E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1 - x)\right) dx = \int_0^\infty U_n(\lambda z) d\pi(z) = E\left(U_n(\lambda\zeta_1)\right). \tag{8.5}$$

Burada $U_n(z) = z^{n-1} * U_\eta(z), n = 1, 2, \ldots$’dir.

(8.5)’teki ifade (8.1)’de yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur:

$$E(X^n) = \frac{n}{E\left(U_\eta(\lambda\zeta_1)\right)} E\left(U_n(\lambda\zeta_1)\right), n = 1, 2, \ldots$$

Böylece Önerme 8.2’nin ispatı tamamlanmış olur. □

Not 8.2. (8.4)’te $E(X^n)$ için verilen kesin ifadede bulunan $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu için kesin ifadeleri birkaç dağılım (üstel dağılım, Erlang dağılımı, vb.) dışında elde etmek çok zordur. Gerçek hayatta ise $\{\eta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi bu özel dağılımlar dışında dağılımlara sahip olabilmektedir. Bu sebeple (8.4)’te $E(X^n)$ için verilen kesin ifade $\{\eta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi genel bir dağılıma sahip olduğunda faydalı olmamaktadır. Diğer yandan $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun asimtotik özelliklerinden yararlanılarak $\lambda \to \infty$ iken $E(X^n)$ ergodik momentler için asimtotik açılım elde etmek mümkündür.

Bu bölümün temel amaçlarından biri $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin n. dereceden ergodik momentleri için iki terimli asimtotik açılımlarını elde etmektir. Bu sebeple sonraki önermelerde yardımcı olacak olan aşağıdaki iki yardımcı teoremi ispatlamak gerekmektedir.

Yardımcı Teorem 8.1. $g: R^+ \to \mathbb{R}$ ‘ ye sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ve $\pi(0) \equiv P\{\zeta_1 \leq 0\} = 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki asimtotik ilişki yazılabilir:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\infty g(\lambda z) d\pi(z) = 0. \tag{8.6}$$

İspat.

(8.6)'deki ifadeyi iki parçaya ayıralım:

$$\int_0^\infty g(\lambda z) d\pi(z) = \int_0^{z^*} g(\lambda z) d\pi(z) + \int_{z^*}^\infty g(\lambda z) d\pi(z). \tag{8.7}$$

z^* noktası aşağıdaki kurala göre seçilecektir:

Yardımcı Teorem 8.1'deki koşullara göre, x sonsuza giderken $g(x)$ sıfıra yakınsamaktadır. Her $\varepsilon_1 > 0$ için öyle bir T değeri seçmek mümkündür ki $(0 < T < \infty)$, $|g(x)| \leq \varepsilon_1$ eşitsizliği her $x \geq T$ için sağlansın. Böyle bir durumda, $z^* \equiv \frac{T}{\lambda}$ eşitsizliğini tanımlayalım.

(8.7) eşitliğinde bulunan integral ifadesinin ikinci kısmını aşağıdaki hesaplayalım:

$$\left| \int_{z^*}^\infty g(\lambda z) d\pi(z) \right| \leq \int_{z^*}^\infty |g(\lambda z)| d\pi(z) \leq \varepsilon_1 \int_{z^*}^\infty d\pi(z) = \varepsilon_1 \big(1 - \pi(z^*)\big) \leq \varepsilon_1. \tag{8.8}$$

$\pi(0) = 0$ koşulu altında, öyle bir z_1 $(0 < z_1 < \infty)$ bulmak mümkündür ki her $\varepsilon_1 > 0$ için $\pi(z_1) \leq \varepsilon_1$ sağlanmaktadır. O zaman $\frac{T}{\lambda} \leq z_1$ eşitsizliği yazılabilir. Bu bilgilerin ışığında aşağıdaki ifade verilebilir:

$$\pi\left(\frac{T}{\lambda}\right) \leq \pi(z_1) \leq \varepsilon_1. \tag{8.9}$$

(8.9) eşitsizliği hesaba katılarak, (8.7) ifadesinin ilk kısmındaki integral aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$\left|\int_{0}^{z^*} g(\lambda z)d\pi(z)\right| \leq \int_{0}^{z^*} |g(\lambda z)|d\pi(z) \leq H\int_{0}^{z^*} d\pi(z) = H\pi\left(\frac{T}{\lambda}\right) \leq H\varepsilon_1. \quad (8.10)$$

Burada $H = \sup_{x\in R^+}|g(x)| < \infty$'dur.

(8.8) ve (8.10) ifadeleri (8.7) eşitliğinin içine koyularak aşağıdaki ifadeyi elde edilebilir:

$\left|\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi(z)\right| \leq \varepsilon_1 + H\varepsilon_1 = \varepsilon_1(1 + H)$.

Özetle, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{H+1}$ ‘i seçilirse:

$\left|\int_0^\infty g(\lambda z)d\pi(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{H+1}(H + 1) = \varepsilon$ eşitliği bulunmuş olur.

Böylece $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty g(\lambda z)\pi(z) = 0$ sağlanmış olur ve Yardımcı Teorem 8.1'in ispatı tamamlanır. □

Yardımcı Teorem 8.2. $g: R^+ \to \mathbb{R}$ ‘ ye sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $\pi(0) = 0$ ve $E(\zeta_1^n) < \infty$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki asimtotik ilişki yazılabilir:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty z^n g(\lambda z)d\pi(z) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (8.11)$$

İspat.

Koşullara baktığımızda x sonsuza giderken $g(x)$ sıfıra yakınsamaktadır. Her $\varepsilon_1 > 0$ için öyle bir T değeri seçmek mümkündür ki $(0 < T < \infty)$, $|g(x)| \leq \varepsilon_1$ eşitsizliği her $x \geq T$ için sağlansın.

(8.11) eşitliğindeki integrali işlemlerde kolaylık sağlaması açısından iki parçaya bölelim:

$$\int_0^\infty z^n g(\lambda z)d\pi(z) = \int_0^{z^*} z^n g(\lambda z)d\pi(z) + \int_{z^*}^\infty z^n g(\lambda z)d\pi(z). \quad (8.12)$$

z^*'ın seçimi Yardımcı Teorem 8.1'de detaylı bir biçimde açıklanmıştır. İkinci kısımdaki integralin hesaplamaları aşağıdaki gibidir:

$$\left|\int_{z^*}^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi(z)\right| \leq \int_{z^*}^{\infty} z^n |g(\lambda z)| d\pi(z)$$

$$\leq \varepsilon_1 \int_{z^*}^{\infty} z^n d\pi(z) \leq \varepsilon_1 \int_0^{\infty} z^n d\pi(z) = \varepsilon_1 \beta_n. \tag{8.13}$$

Burada, $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$'dir.

Şimdi de (8.12)'deki integralin birinci kısmını inceleyelim:

$$\left|\int_0^{z^*} z^n g(\lambda z) d\pi(z)\right| \leq \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n H \int_0^{z^*} d\pi(z) = \frac{T^n H}{\lambda^n} \pi(z^*) \leq \frac{T^n H}{\lambda^n} = H\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n.$$

Burada $H = \sup_{x \in R^+} |g(x)| < \infty$'dur.

$\lambda \to \infty$ iken, $z \leq z^*$, $z^n \leq (z^*)^n = \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$'dir ve $\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \leq \varepsilon_1$'dir. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\left|\int_0^{z^*} z^n g(\lambda z) d\pi(z)\right| \leq H\varepsilon_1. \tag{8.14}$$

(8.13) ve (8.14) ifadeleri (8.12) eşitliğinde yerine koyulursa aşağıdaki ifade elde edilmiş olur:

$$\left|\int_0^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi(z)\right| \leq H\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \beta_n = \varepsilon_1 (H + \beta_n).$$

Burada H ve $\beta_n = E(\zeta_1^n)$ sonludur. Her $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{H + \beta_n}$'dir. Bu takdirde, $\left|\int_0^{\infty} z^n g(\lambda z) d\pi(z)\right| \leq \varepsilon$'dur.

Böylece $\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\infty} z^n g(\lambda z) \pi(z) = 0$ sağlanmış olur ve Yardımcı Teorem 8.2'nin ispatı tamamlanır. □

$\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin n. dereceden ergodik momentleri için iki terimli asimtotik açılımlarını elde etmek bu bölümün amaçlarından biridir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki önermeler verilecektir. Yardımcı Teorem 8.1 ve Yardımcı Teorem 8.2'nin yardımıyla Önerme 8.3 verilebilir.

Önerme 8.3. Aşağıdaki koşullar sağlasın:

(i) η_1 aritmetik olmayan rasgele değişken olsun,

(ii) $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < \infty$,

(iii) $\beta_1 \equiv E(\zeta_1) < \infty$

(iv) $\pi(0) = 0$ olsun.

O zaman, $\lambda \to \infty$ iken $E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big)$ için asimptotik ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{\lambda\beta_1}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1)\,. \tag{8.15}$$

Burada $m_n = E(\eta_1^n),\ n = 1, 2, \ldots$ ve $\beta_1 = E(\zeta_1)$'dir.

$X(t)$ sürecinin ergodik momentlerinin asimtotik açılımını elde etmek için gerekli olan $E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big)$ için iki terimli asimtotik açılım elde edilmiştir. $E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big)$'in dışında $E(U_n(\lambda\zeta_1))$ ifadesinin de asimtotik açılımı $X(t)$ sürecinin ergodik momentlerinin asimtotik açılımını bulmak için gereklidir. $\lambda \to \infty$ iken $E(U_n(\lambda\zeta_1))$ ifadesinin de asimtotik açılımını elde etmek için öncelikle $x \to \infty$ iken $U_n(x)$ fonksiyonunun iki terimli asimtotik açılımı bulunmalıdır. Bu sebeple aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 8.4. (Khaniyev vd. [29]) $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < \infty$ koşulu sağlansın. O zaman, $x \to \infty$ iken $U_n(x)$ yenileme fonksiyonu için asimptotik açılım aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)m_1} + c\frac{x^n}{n} + o(x^n). \tag{8.16}$$

Burada $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$'dir.

İspat. $U_n(x) = x^{n-1} * U_\eta(x)$ ifadesinin Laplace dönüşümü $\widetilde{U}_n(k)$ aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_n(k) = \frac{(n-1)!}{k^{n+1}\big(1-\varphi(k)\big)}. \tag{8.17}$$

Burada $\varphi(k) = E\left(e^{-k\eta_1}\right), k > 0$'dır.

$k \to 0$ iken $\varphi(k)$'nın Taylor serisi açılımı aşağıdaki yazılabilir:

$$\varphi(k) = 1 - km_1 + \frac{k^2}{2!}m_2 + o(k^2). \tag{8.18}$$

(8.18)'deki asimtotik açılım (8.17)'de yerine yazılırsa $k \to 0$ iken $\widetilde{U}_n(k)$ için aşağıdaki asimtotik açılım elde edilmiş olur:

$$\widetilde{U}_n(k) = \frac{(n-1)!}{m_1 k^{n+2}} + c\frac{(n-1)!}{m_1 k^{n+1}} + o\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right). \tag{8.19}$$

(8.19) asimtotik açılımına Tauber-Abel teoremi uygulanırsa $x \to \infty$ iken $U_n(x)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım elde edilmiş olur:

$$U_n(x) \equiv x^{n-1} * U_\eta(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)m_1} + c\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Burada $m_2 = E(\eta_1^2)$ ve $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$'dir.

Böylece Önerme 8.4'ün ispatı tamamlanmış olur. □

$U_n(x)$ için bulunan asimtotik açılımın yardımıyla $\lambda \to \infty$ iken $E(U_n(\lambda\zeta_1))$ ifadesinin asimtotik açılımını aşağıdaki önerme ile elde edelim.

Önerme 8.5. Aşağıdaki koşullar sağlasın:

(i) $\pi(0) = 0$,

(ii) $m_2 = E(\eta_1^2) < \infty$,

(iii) $E(\zeta_1^{n+1}) < \infty$.

Bu takdirde $\lambda \to \infty$ iken $E(U_n(\lambda\zeta_1))$ ifadesi için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım yazılabilir:

$$E(U_n(\lambda\zeta_1)) = \frac{\beta_{n+1}}{n(n+1)m_1}\lambda^{n+1} + c\frac{\beta_n}{n}\lambda^n + o(\lambda^n)\,. \tag{8.20}$$

Burada $\beta_n = E(\zeta_1^n)$ ve $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \ldots$'dir.

İspat. (8.16) eşitliğindeki gibi $U_n(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$U_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)m_1} + c\frac{x^n}{n} + h_n(x). \tag{8.21}$$

Burada $h_n(x) = x^n g(x)$ ve $g(x)$ sınırlı ve ölçülebilirdir ve $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$'dır.

Yardımcı teorem 8.2 (8.21) eşitliğine uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur:

$$E(U_n(\lambda\zeta_1)) = \frac{\beta_{n+1}}{n(n+1)m_1}\lambda^{n+1} + c\frac{\beta_n}{n}\lambda^n + o(\lambda^n)\,. \tag{8.22}$$

Böylece Önerme 8.5'in ispatı tamamlanmış olur. □

Daha önce de belirtildiği gibi, çalışmanın temel amaçlarından biri sürecin ergodik dağılımının momentleri için asimtotik açılımlar bulmaktır. Bu amaç doğrultusunda Önerme 8.4 ve Önerme 8.5 yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 8.1. Önerme 8.5'teki koşullar sağlanmış olsun. Bu takdirde $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden momentleri için asimtotik açılım aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E(X^n) = \hat{\beta}_n\lambda^n + cm_1\frac{\left(\beta_n - \hat{\beta}_n\right)}{\beta_1}\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}). \tag{8.23}$$

Burada $\beta_n = E(\zeta_1^n)$, $\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$ ve $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \ldots$'dir.

İspat. Önerme 8.3'e göre $\lambda \to \infty$ iken $E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big)$ için asimtotik açılım aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{\lambda\beta_1}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1). \tag{8.24}$$

(8.24) eşitliği kullanılarak aşağıdaki eşitlik verilebilir:

$$\Big(E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big)\Big)^{-1} = \frac{m_1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{m_2}{2m_1\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}. \tag{8.25}$$

Diğer bir yandan, Önerme 8.5'te verilen $E(U_n(\lambda\zeta_1))$ için asimtotik açılım aşağıdaki gibidir:

$$E(U_n(\lambda\zeta_1)) = \frac{\beta_{n+1}}{n(n+1)m_1}\lambda^{n+1} + c\frac{\beta_n}{n}\lambda^n + o(\lambda^n). \tag{8.26}$$

$X(t)$ sürecinin n. dereceden ergodik momenti için kesin ifade aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = n\left(E\big(U_\eta(\lambda\zeta_1)\big)\right)^{-1} E\big(U_n(\lambda\zeta_1)\big), n = 1, 2, \ldots \tag{8.27}$$

(8.26) ve (8.25) eşitlikleri (8.27) eşitliğinde yerine koyulursa;

$$E(X^n) = \frac{nm_1}{\lambda\beta_1}\left\{1 - \frac{m_2}{2m_1\lambda\beta_1} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\left\{\frac{\beta_{n+1}}{n(n+1)m_1}\lambda^{n+1} + c\frac{\beta_n}{n}\lambda^n + o(\lambda^n)\right\}$$

$$= \hat{\beta}_n\lambda^n + cm_1\frac{\left(\beta_n - \hat{\beta}_n\right)}{\beta_1}\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}).$$

elde edilmiş olur.

Burada $\hat{\beta}_n$, $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi tarafından oluşturulmuş yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımının n. momentidir. Yani;

$$\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}, n = 1, 2, \ldots$$

Böylece Teorem 8.1'in ispatı tamamlanmış olur. □

Not 8.3. Şu ana kadar $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik momentleri için iki terimli asimtotik açılım elde edilmiştir. Ergodik momentlerin asimtotik açılımları yardımıyla kolaylıkla birçok bilgiye ulaşmak mümkündür. Bu sebeple $\lambda \to \infty$ iken ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentler için iki terimli asimtotik açılımlar elde edilecektir. Ayrıca merkezi momentler yardımıyla basıklık, çarpıklık ve değişim katsayısı için yaklaşık ifadeler verilecektir.

Sonuç 8.1. Önerme 8.5'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde $\lambda \to \infty$ iken ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentler için asimtotik açılımlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$M_2 = Var(X) = \left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2\right)\lambda^2 + cm_1\left(\frac{\beta_2 - \hat{\beta}_2}{\beta_1} - 2\hat{\beta}_1\frac{\beta_1 - \hat{\beta}_1}{\beta_1}\right)\lambda + o(\lambda)$$

$$M_3 = E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3 = \left(\hat{\beta}_3 - 3\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_1^3\right)\lambda^3$$

$$+cm_1\left(\frac{\beta_3 - \hat{\beta}_3}{\beta_1} - 3\hat{\beta}_1\frac{\beta_2 - \hat{\beta}_2}{\beta_1} - 3\hat{\beta}_2\frac{\beta_1 - \hat{\beta}_1}{\beta_1} + 6\hat{\beta}_1^2\frac{\beta_1 - \hat{\beta}_1}{\beta_1}\right)\lambda^2 + o(\lambda^2);$$

$$M_4 = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E(X)^2 - 3E(X)^4$$

$$= \left(\hat{\beta}_4 - 4\hat{\beta}_3\hat{\beta}_1 + 6\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1^2 - 3\hat{\beta}_1^4\right)\lambda^4 + cm_1\left(\frac{\beta_4 - \hat{\beta}_4}{\beta_1} - 4\hat{\beta}_3\frac{\beta_1 - \hat{\beta}_1}{\beta_1} - 4\hat{\beta}_1\frac{\beta_3 - \hat{\beta}_3}{\beta_1}\right.$$

$$\left. + 12\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\frac{\beta_1 - \hat{\beta}_1}{\beta_1} + 6\hat{\beta}_1^2\frac{\beta_2 - \hat{\beta}_2}{\beta_1} - 12\hat{\beta}_1^3\frac{\beta_1 - \hat{\beta}_1}{\beta_1}\right)\lambda^3 + o(\lambda^3).$$

Burada $\beta_n = E(\zeta_1^n)$, $\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$, $m_n = E(\eta_1^n)$

$M_n = E\big(X - E(X)\big)^n, n = 1, 2, \ldots$'dir.

$\lambda \to \infty$ iken elde edilen ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentlerin asimtotik açılımlarını yardımıyla basıklık, çarpıklık ve değişim katsayıları hesaplanabilir.

Sonuç 8.2. Önerme 8.5'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, basıklık, çarpıklık ve değişim katsayıları için yaklaşık ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma_4 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 \approx \frac{\hat{\beta}_4 - 4\hat{\beta}_3\hat{\beta}_1 + 6\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1^2 - 3\hat{\beta}_1^4}{\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2\right)^2};$$

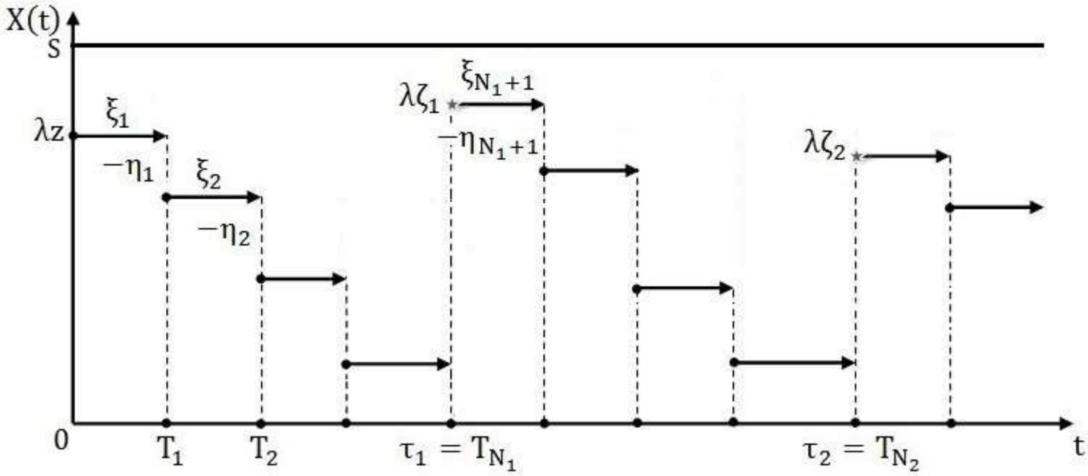
$$\gamma_3 = \frac{M_3}{\left(\sqrt{M_2}\right)^3} \approx \frac{\hat{\beta}_3 - 3\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_1^3}{\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2\right)^{3/2}};$$

$$DK = \frac{\sqrt{M_2}}{E(X)} \approx \frac{\sqrt{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1^2}}{\hat{\beta}_1}.$$

Burada $\beta_n = E(\zeta_1^n)$, $\hat{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)\beta_1}$, ve $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$, $n = 1, 2, \ldots$'dir.

Şimdiye kadar $\pi(0) = 0$ iken $\pi(z)$'nin keyfi sürekli dağılıma sahip olduğu durumda $\lambda \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentleri için iki terimli asimtotik açılımlar bulunmuştur. Bulunan asimtotik açılım yardımıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentler için iki terimli asimtotik açılımlar ve basıklık, çarpıklık ve değişim katsayıları için yaklaşık ifadeler elde edilmiştir.

Not 8.4. Çalışmanın önceki kısımlarında genel durumlar için sonuçlar elde edilmiştir. Fakat bulduğumuz sonuçların birçok uygulama alanı vardır. Özellikle bir endüstri mühendisliği problemi olan (s, S) tipli envanter modelleri temel uygulama alanlarındandır. Bu sebeple bir örnek yardımıyla (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli için iki terimli asimtotik açılımlar elde edelim. Bu örnekte, $\pi(z)$ dağılımı için $[0, 1]$ aralığında düzgün dağılım kullanılacaktır. Burada $s = 0$ ve $\lambda = S$'dir. Böyle bir sürecin görünümü Şekil 8.1'deki gibidir.



Şekil 8.1. $X(t)$ sürecinin bir görünümü.

Özel Durum 8.1. Kesikli şans karışımlı müdahaleyi ifade eden rasgele değişken ζ_n, 0 ve 1 aralığında düzgün dağılıma sahip olup, $s = 0$ ve $\lambda = S$ olsun. Bu durumda $S \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin n. ergodik momenti için iki terimli asimtotik açılım aşağıdaki gibidir:

$$E(X^n) = \frac{2S^n}{(n+1)(n+2)} + cm_1 \frac{2nS^{n-1}}{(n+1)(n+2)} + o(S^{n-1}). \tag{8.28}$$

Burada $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$; $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \ldots$ 'dir.

$S \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ilk dört başlangıç momenti için asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{S}{3} + \frac{cm_1}{3} + o(1),$$

$$E(X^2) = \frac{S^2}{6} + cm_1 \frac{S}{3} + o(S),$$

$$E(X^3) = \frac{S^3}{10} + cm_1 \frac{3S^2}{10} + o(S^2),$$

$$E(X^4) = \frac{S^4}{15} + cm_1 \frac{4S^3}{15} + o(S^3).$$

Burada $c = \frac{m_2}{2m_1^2}$; $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \ldots$ 'dir.

$S \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momenti için asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$M_2 = Var(X) = \frac{S^2}{18} + cm_1 \frac{S}{9} + o(S),$$

$$M_3 = \frac{S^3}{135} + cm_1 \frac{S^2}{45} + o(S^2),$$

$$M_4 = \frac{S^4}{135} + cm_1 \frac{4S^3}{135} + o(S^3).$$

Başlangıç ve merkezi momentlere ek olarak, basıklık, çarpıklık ve değişim katsayıları için asimtotik açılımlar aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\gamma_3 = \frac{M_3}{\left(\sqrt{M_2}\right)^3} = \frac{2\sqrt{2}}{5} + o\left(\frac{1}{S}\right), S \to \infty, \gamma_3 \approx \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0{,}566 > 0,$$

$$\gamma_4 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 = \frac{-3}{5} + o\left(\frac{1}{S}\right), S \to \infty, \gamma_4 \approx \frac{-3}{5} = -0{,}6 < 0,$$

$$DK = \frac{\sqrt{M_2}}{E(X)} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707, S \to \infty.$$

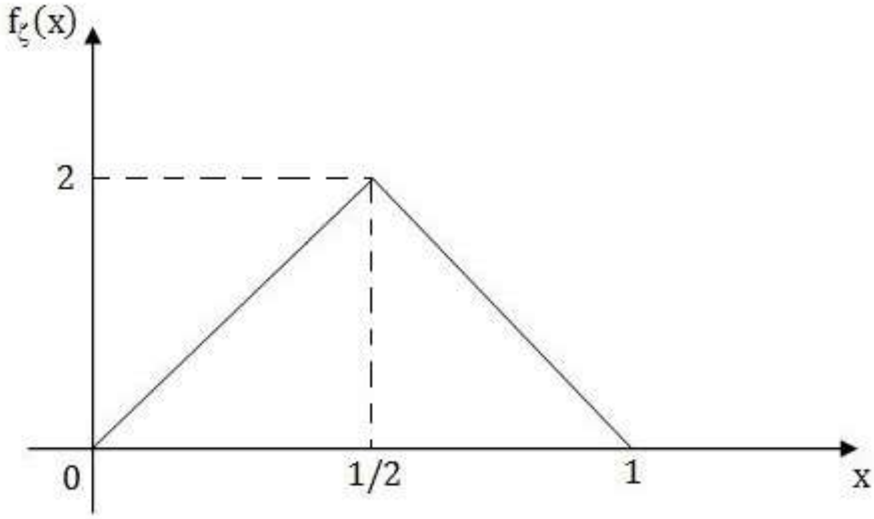
Not 8.5. (8.28) eşitliğinde momentler için elde edilen ifadenin ilk terimi olan $2/[(n+1)(n+2)]$, enteresan bir biçimde yorumlanabilir. Yani, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden momenti için bulunan asimtotik açılımının ilk terimi $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi tarafından oluşturulmuş yenileme sürecinin kalan ömrünün limit dağılımının n.

momenti ile örtüşmektedir. Bu da $X(t)/S$ sürecinin ergodik dağılımının literatürde iyi bilinen kalan ömrün limit dağılımına yakınsadığını işaret etmektedir (Smith [43]). Bunlara ek olarak, elde edilen dağılım basıklık ve çarpıklık katsayılarına göre basık ve sağa çarpıktır.

Özel Durum 8.2. $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ $[0, 1]$ aralığında değerler alabilen simetrik üçgensel dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisidir. Bu takdirde ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 4 - 4x, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{d.y.} \end{cases}.$$

$[0, 1]$ aralığında simetrik üçgensel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun görünümü Şekil 8.2'deki gibidir.



Şekil 8.2. Simetrik üçgensel dağılım.

Bu takdirde $S \to \infty$ iken ilk dört başlangıç momenti için iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{7S}{24} + cm_1 \frac{5}{12} + o(1),$$

$$E(X^2) = \frac{S^2}{8} + cm_1 \frac{S}{3} + o(S),$$

$$E(X^3) = \frac{31S^3}{480} + cm_1 \frac{59S^2}{240} + o(S^2),$$

$$E(X^4) = \frac{3S^4}{80} + cm_1 \frac{11S^3}{60} + o(S^3).$$

Başlangıç momentlerinin yanı sıra ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentler için $S \to \infty$ iken iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$M_2 = \frac{23S^2}{576} + cm_1 \frac{13S}{144} + o(S),$$

$$M_3 = \frac{167S^3}{34560} + cm_1 \frac{61S^2}{5760} + o(S^2),$$

$$M_4 = \frac{2347S^4}{552960} + cm_1 \frac{1193S^3}{69120} + o(S^3).$$

Burada $M_n = E\big(X - E(X)\big)^n, n = 1, 2, \dots,$ $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \dots$ ve $c = m_2/2m_1^2$'dir.

Elde edilen merkezi momentler yardımıyla $S \to \infty$ iken çarpıklık, basıklık ve değişim katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_3 = \frac{M_3}{\left(\sqrt{M_2}\right)^3} \approx 0{,}605 > 0,$$

$$\gamma_4 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 \approx -0{,}338 < 0,$$

$$DK = \frac{\sqrt{M_2}}{E(X)} \approx 0{,}685.$$

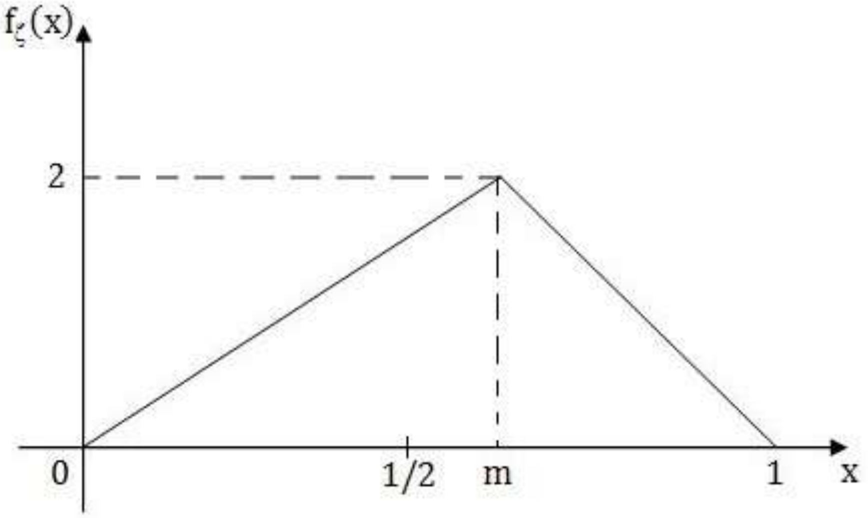
Sonuç olarak, elde edilen dağılım sağa çarpık ve basıktır.

Özel Durum 8.3. $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \dots$ rasgele değişkenler dizisi $(0, m, 1)$, $m = (1+\gamma)/2$, $\gamma \in [0, 1]$ parametreli simetrik olmayan üçgensel dağılıma sahip ve $\lambda = S$

olsun. Bu takdirde ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{m}, & 0 \leq x < m \\ \dfrac{2-2x}{1-m}, & m \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{d.y.} \end{cases}.$$

$(0, m, 1)$, $m = (1+\gamma)/2$, $\gamma \in [0, 1]$ parametreli simetrik olmayan üçgensel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun görünümü Şekil 8.3'teki gibidir.



Şekil 8.3. Simetrik olmayan üçgensel dağılım.

Bu takdirde $S \to \infty$ iken ilk dört başlangıç momenti için iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{7+4\gamma+\gamma^2}{8(3+\gamma)}S + cm_1\frac{15+12\gamma+\gamma^2}{4(3+\gamma)^2} + o(1),$$

$$E(X^2) = \frac{5+2\gamma+\gamma^2}{40}S^2 + cm_1\frac{10+7\gamma+\gamma^2}{10(3+\gamma)}S + o(S),$$

$$E(X^3) = \frac{31+26\gamma+16\gamma^2+6\gamma^3+\gamma^4}{160(3+\gamma)}S^3$$

$$+cm_1 \frac{3(31+70\gamma+36\gamma^2+10\gamma^3+\gamma^4)}{80(3+\gamma)^2} S^2 + o(S^2),$$

$$E(X^4) = \frac{21+12\gamma+10\gamma^2+4\gamma^3+\gamma^4}{560} S^4$$

$$+cm_1 \frac{77+73\gamma+41\gamma^2+15\gamma^3+2\gamma^4}{140(3+\gamma)} S^3 + o(S^3).$$

Başlangıç momentlerinin yanı sıra ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentler için $S \to \infty$ iken iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$M_2 = \frac{115+104\gamma+58\gamma^2+24\gamma^3+3\gamma^4}{320(3+\gamma)^2} S^2$$

$$+cm_1 \frac{3(65+88\gamma+46\gamma^2+8\gamma^3+\gamma^4)}{80(3+\gamma)^3} S + o(S),$$

$$M_3 = \frac{167+108\gamma+35\gamma^2+72\gamma^3+53\gamma^4+12\gamma^5+\gamma^6}{1280(3+\gamma)^3} S^3$$

$$+cm_1 \frac{3(183+204\gamma+163\gamma^2+104\gamma^3+37\gamma^4+12\gamma^5+\gamma^6)}{640(3+\gamma)^4} S^2 + o(S^2),$$

$$M_4 = \frac{49287+73104\gamma+60544\gamma^2+47184\gamma^3+31178\gamma^4}{143360(3+\gamma)^4} S^4 + o(S^4).$$

Burada $M_n = E\big(X - E(X)\big)^n, n = 1, 2, \ldots,$ $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \ldots$ ve $c = m_2/2m_1^2$'dir.

Elde edilen merkezi momentler yardımıyla $S \to \infty$ iken çarpıklık ve basıklık katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_3 = \frac{M_3}{\left(\sqrt{M_2}\right)^3} \approx \frac{2\sqrt{5}(167+108\gamma)}{(115+104\gamma)} + o(1) > 0,$$

$$\gamma_4 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 \approx \frac{-31290-136800\gamma}{7(115+104\gamma)^2} + o(1) < 0.$$

$$DK = \frac{\sqrt{M_2}}{E(X)} \approx \frac{\sqrt{115+104\gamma}}{\sqrt{5}(7+4\gamma)} + o(1).$$

Burada $\gamma \in [0,1]$'dir.

Sonuç olarak, elde edilen dağılım sağa çarpık ve basıktır.

Özel Durum 8.4. $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi $(0,1,1/2,1/2)$ parametreleriyle genelleştirilmiş Beta dağılımına sahip ve $\lambda = S$ olsun. Bu takdirde ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\zeta(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}.$$

Burada $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 1/2$'dir. Ayrıca $B(\alpha,\beta)$ tamamlanmamış Beta fonksiyonudur ve aşağıdaki gibidir:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Bu takdirde $S \to \infty$ iken ilk dört başlangıç momenti için iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{3S}{8} + cm_1\frac{1}{4} + o(1),$$

$$E(X^2) = \frac{5S^2}{24} + cm_1\frac{1}{3}S + o(S),$$

$$E(X^3) = \frac{35S^3}{256} + cm_1\frac{45}{128}S^2 + o(S^2),$$

$$E(X^4) = \frac{63S^4}{640} + cm_1\frac{7}{20}S^3 + o(S^3).$$

Başlangıç momentlerinin yanı sıra ikinci, üçüncü ve dördüncü merkezi momentler için $S \to \infty$ iken iki terimli asimtotik açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$M_2 = \frac{13S^2}{192} + cm_1\frac{7S}{48} + o(S),$$

$$M_3 = \frac{S^3}{128} + cm_1\frac{S^2}{32} + o(S^2),$$

$$M_4 = \frac{201S^4}{20480} + cm_1 \frac{111S^3}{2560} + o(S^3).$$

Burada $M_n = E\big(X - E(X)\big)^n, n = 1, 2, \ldots,$ $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2, \ldots$ ve $c = m_2/2m_1^2$'dir.

Elde edilen merkezi momentler yardımıyla $S \to \infty$ iken çarpıklık ve basıklık katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$\gamma_3 = \frac{M_3}{\left(\sqrt{M_2}\right)^3} \approx 0{,}443 > 0,$$

$$\gamma_4 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 \approx 0{,}859 < 0,$$

$$DK = \frac{\sqrt{M_2}}{E(X)} \approx 0{,}694.$$

Sonuç olarak, elde edilen dağılım sağa çarpık ve basıktır.

9. SÜRECİN SINIR FONKSİYONELLERİ İÇİN KESİN İFADELER VE ASİMTOTİK AÇILIMLAR

Sınır fonksiyonelleri stokastik süreçlerin önemli karakteristiklerindendir ve diğer karakteristiklerinin bulunmasında yardımcı olur. Bu bölümde $X(t)$ sürecinin üç sınır fonksiyoneli olan τ_1, N_1 ve S_{N_1} için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilecektir. τ_1, $X(t)$ sürecinin sıfır seviyesinin altına ilk düştüğü andır, N_1 ise o ana kadar olan sıçrama sayısıdır. τ_1, N_1 ve S_{N_1} için matematiksel gösterimler aşağıdaki gibidir:

$$\tau_1 = \tau_1(x) = \sum_{i=1}^{N_1(x)} \xi_i,$$

$$N_1 = N_1(x) = \min\{n \geq 1 : x - Y_n < 0\} = \min\{n \geq 1 : Y_n > x\},$$

$$S_{N_1} = S_{N_1(x)} = \sum_{i=1}^{N_1} \eta_i.$$

τ_1, N_1 ve S_{N_1}'in tanımları yardımıyla bu sınır fonksiyonelleri için kesin ifadeleri aşağıdaki önermeler yardımıyla verelim.

Önerme 9.1. Her sonlu x için $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentinin kesin ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$U_1(x) \equiv E\big(N_1(x)\big) = U(x),$$

$$U_2(x) \equiv E\big(N_1^2(x)\big) = 2U(x) * U(x) + U(x),$$

$$U_3(x) \equiv E\big(N_1^3(x)\big) = 6U(x) * U(x) * U(x) + 6U(x) * U(x) + U(x),$$

$$U_4(x) \equiv E\big(N_1^4(x)\big) = 24U(x) * U(x) * U(x) * U(x) + 36U(x) * U(x) * U(x)$$
$$+14U(x) * U(x) + U(x).$$

Burada $U(x) = U_\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$'tir. Ayrıca bu çalışmada kullanılan konvolüsyon çarpımı $M_1(x) * M_2(x) = \int_0^x M_2(x-y)dM_1(y)$'dir. Fakat literatürde konvolüsyon çarpımı gösterimi $M_1 * M_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} M_2(x-y)dM_1(y)$ şeklinde de mevcuttur.

İspat. $U_1(x)$'in kesin ifadesini elde etmek için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$U_1(x) \equiv E\big(N_1(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(x) = n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n[F_{n-1}(x) - F_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x). \tag{9.1}$$

(9.1) ifadesindeki $F_n(x) = P\{Y_n \leq x\}$'tir ve matematiksel olarak hesaplanması çok güçtür. Bu sebeple, bu aşamada Laplace dönüşümüne geçeceğiz. (9.1) ifadesinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{U}_1(k) = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(k) = \frac{1}{k\big(1-\varphi(k)\big)}.$$

Özetle

$$\tilde{U}_1(k) \equiv \tilde{U}(k) = \frac{1}{k\big(1-\varphi(k)\big)} \tag{9.2}$$

elde edilir. Burada $\varphi(k) = E\big(e^{-k\eta_1}\big)$ ve $\tilde{U}(k) = \int_0^{\infty} e^{-kx}U(x)dx$, $U(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. (9.2) ifadesine ters Laplace dönüşümü uygularsak $U_1(x)$'i buluruz:

$U_1(x) = U(x).$

Burada $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$'tir.

$U_2(x)$'in kesin ifadesini elde etmek için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$U_2(x) \equiv E\big(N_1^2(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2P\{N(x) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2[F_{n-1}(x) - F_n(x)]. \tag{9.3}$$

(9.3)'e Laplace dönüşümü uygulanınca aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tilde{U}_2(k) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\varphi^{n-1}(k) - \varphi^n(k))$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\varphi^{n-1}(k)(1 - \varphi(k))$$

Özetle,

$$\tilde{U}_2(k) = \frac{1 + \varphi(k)}{k\big(1 - \varphi(k)\big)^2} = \frac{2\varphi(k)}{k\big(1 - \varphi(k)\big)^2} + \frac{1}{k\big(1 - \varphi(k)\big)} \qquad (9.4)$$

elde edilir. Burada $\tilde{U}_2(k)$'yı elde etmek için gerekli olan $U^*(k)$ Laplace-stiltijes dönüşümü için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$U^*(k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} dU(x) = -\int_0^{\infty} U(x) d\big(e^{-kx}\big) + e^{-kx}U(x)\Big|_0^{\infty}$$

$$= k\int_0^{\infty} e^{-kx} d\big(U(x)\big) - 1 = k\tilde{U}(k) - 1. \qquad (9.5)$$

(9.2)'de $\tilde{U}(k)$ için bulunan ifadeyi (9.5)'te yerine yazarsak $U^*(k)$'yı aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$U^*(k) = \frac{\varphi(k)}{1 - \varphi(k)}. \qquad (9.6)$$

(9.2)'yi ve (9.6)'yı (9.4)'te yerine yazarsak $\tilde{U}_2(k)$'yı aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\tilde{U}_2(k) = 2\tilde{U}(k)U^*(k) + \tilde{U}(k). \qquad (9.7)$$

(9.7)'deki $\tilde{U}_2(k)$'ya ters Laplace işlemi uygulanınca $U_2(x)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_2(x) = 2U(x) * U(x) + U(x) = 2U^{*2}(x) + U(x).$$

$U_3(x)$'in kesin ifadesini elde etmek için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$E\left(N_1^3(x)\right) \equiv U_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 P\{N(x)=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 [F_{n-1}(x) - F_n(x)]. \tag{9.8}$$

(9.8)’e Laplace dönüşümü uygulanınca aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\widetilde{U}_3(k) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (\varphi^{n-1}(k) - \varphi^n(k))$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \varphi^{n-1}(k)(1-\varphi(k))$$

Özetle,

$$\widetilde{U}_3(k) = \frac{1 + 4\varphi(k) + \varphi^2(k)}{k\left(1-\varphi(k)\right)^3}$$

$$= \frac{6\varphi^2(k)}{k\left(1-\varphi(k)\right)^3} + \frac{6\varphi(k)}{k\left(1-\varphi(k)\right)^2} + \frac{1}{k\left(1-\varphi(k)\right)}$$

$$= 6\widetilde{U}(k)U^*(k)U^*(k) + 6\widetilde{U}(k)U^*(k) + \widetilde{U}(k) \tag{9.9}$$

elde edilir.

(9.9)’a ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_3(x)$’in kesin ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$U_3(x) = 6U(x) * U(x) * U(x) + 6U(x) * U(x) + U(x).$$

Özetle

$$U_3(x) = 6U^{*3}(x) + 6U^{*2}(x) + U(x)$$

elde edilir.

$U_4(x)$’in kesin ifadesini elde etmek için hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

$$U_4(x) \equiv E\left(N_1^4(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^4 P\{N(x)=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n^4 [F_{n-1}(x) - F_n(x)]. \tag{9.10}$$

(9.10)'a Laplace dönüşümü uygulanınca aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\widetilde{U}_4(k) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n^4(\varphi^{n-1}(k) - \varphi^n(k))$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n^4\varphi^{n-1}(k)(1 - \varphi(k)).$$

Özetle,

$$\widetilde{U}_4(k) = \frac{1 + 11\varphi(k) + 11\varphi^2(k) + \varphi^3(k)}{k\big(1 - \varphi(k)\big)^4}$$

$$= \frac{24\varphi^3(k)}{k\big(1 - \varphi(k)\big)^4} + \frac{36\varphi^2(k)}{k\big(1 - \varphi(k)\big)^3} + \frac{14\varphi(k)}{k\big(1 - \varphi(k)\big)^2} + \frac{1}{k\big(1 - \varphi(k)\big)}$$

$$= 24\widetilde{U}(k)U^*(k)U^*(k)U^*(k) + 36\widetilde{U}(k)U^*(k)U^*(k) + 14\widetilde{U}(k)U^*(k) + \widetilde{U}(k) \tag{9.11}$$

elde edilir.

(9.11)'ye ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_4(x)$'in kesin ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$U_4(x) = 24U(x) * U(x) * U(x) * U(x) + 36U(x) * U(x) * U(x)$$

$$+14U(x) * U(x) + U(x).$$

Özetle

$$U_4(x) = 24U^{*4}(x) + 36U^{*3}(x) + 14U^{*2}(x) + U(x)$$

elde edilir.

Böylece Önerme 9.1'in ispatı tamamlanmış olur. □

$N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin momentleri için kesin ifadeleri elde ettik. Bu momentlerin yardımıyla da $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin momentleri için olan kesin ifadeleri aşağıdaki önerme ile verebiliriz.

Önerme 9.2. (Aliyev vd. [3]) $\gamma_4 \equiv E(\xi_1^4) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde, her sonlu x için $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için kesin ifadeler $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin momentleri cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$E(\tau_1(x)) = \gamma_1 E(N_1(x)),$$

$$E(\tau_1^2(x)) = \gamma_1^2 E(N_1^2(x)) + \left(\gamma_2 - \gamma_1^2\right) E(N_1(x)),$$

$$E(\tau_1^3(x)) = \gamma_1^3 E(N_1^3(x)) + 3\gamma_1\left(\gamma_2 - \gamma_1^2\right) E(N_1^2(x))$$
$$+(\gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3)E(N_1(x)),$$

$$E(\tau_1^4(x)) = \gamma_1^4 E(N_1^4(x)) + 6\gamma_1^2\left(\gamma_2 - \gamma_1^2\right) E(N_1^3(x))$$
$$+(4\gamma_1\gamma_3 + 3\gamma_2^2 - 18\gamma_1^2\gamma_2 + 11\gamma_1^4)E(N_1^2(x))$$
$$+(\gamma_4 - 4\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_2^2 + 12\gamma_1^2\gamma_2 - 6\gamma_1^4)E(N_1(x)).$$

Burada $\gamma_n \equiv E(\xi_1^n), n = 1, 2, 3, 4$'tür.

τ_1 ve N_1 sınır fonksiyonelleri için kesin ifadeleri iki önerme yardımıyla verdikten sonra şimdi de S_{N_1} sınır fonksiyoneli için kesin ifadeleri elde edelim. İşlemlerde gerekli olan yardımcı teoremi vermeden önce aşağıdaki notasyonu tanımlayalım:

$$\psi(\lambda, k) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda x} E\left(e^{-kS_{N_1(x)}}\right) dx\,;\ \lambda > 0, k \geq 0.$$

Yardımcı Teorem 9.1. (Aliyev vd. [3]) $\Psi(\lambda, k)$ ikili Laplace dönüşümü η_1 rasgele değişkeninin Laplace-Stiltijes dönüşümü olan $\varphi(\alpha)$ yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\psi(\lambda, k) = \frac{\varphi(k) - \varphi(\lambda + k)}{\lambda(1 - \varphi(\lambda + k))}$$

Burada, $\varphi(\alpha) \equiv E(\exp(-\alpha\eta_1))$, $\alpha \geq 0$'dır.

Yardımcı Teorem 9.1'in yardımıyla aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 9.3. (Gever [19]) $m_3 \equiv E(\eta_1^3) < \infty$ olsun. Bu takdirde, her sonlu x için $S_{N_1(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti için kesin ifadeler $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin momentleri cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$E(S_{N_1(x)}) = m_1 U(x),$$

$$E(S_{N_1(x)}^2) = m_2 U(x) + 2m_1 U(x) * U(x) * D_1(x),$$

$$E(S_{N_1(x)}^3) = 6m_1 U^{*3}(x) * D_1^{*2}(x) + 3U^{*2}(x) * [m_1 D_2(x) + m_2 D_1(x)] + m_3 U(x).$$

Burada $U(x) = U_\eta(x)$, $\eta_n, n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenlerinin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur. Ayrıca $D_n(x) = \int_0^x t^n dF(t)$ ve $m_n \equiv E(\eta_1^n), i = 1, 2, 3$'tür.

Not 9.1. τ_1, N_1 ve S_{N_1} sınır fonksiyonellerinin kesin ifadeleri ile çalışmak çok zordur. Her üç fonksiyonelin momentleri de yenileme fonksiyonu ve onun konvolüsyon çarpımlarıyla ifade edilebiliyor. O sebeple, bu yapılar matematiksel olarak çok komplekstir. Birkaç basit dağılım (üstel dağılım, Erlang dağılımı) dışında bu yapıların hesaplanması imkânsıza yakındır. Asimtotik açılımlar gerçek hayat problemlerinde daha kullanışlıdırlar. Bu sebeple $\lambda \to \infty$ iken τ_1, N_1 ve S_{N_1} sınır fonksiyonelleri için iki terimli asimtotik açılımlar elde edilecektir.

Önerme 9.4. (Aliyev vd. [3]) $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde $x \to \infty$ iken $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için iki terimli asimtotik gösterimler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E(N_1(x)) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_1(x).$$

$$E\left(N_1^2(x)\right)=\frac{x^2}{m_1^2}+\left(\frac{2m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)x+xg_2(x).$$

$$E\left(N_1^3(x)\right)=\frac{x^3}{m_1^3}+\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)x^2+x^2g_3(x).$$

$$E\left(N_1^4(x)\right)=\frac{x^4}{m_1^4}+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)x^3+x^3g_4(x).$$

Burada $m_n=E\left(\eta_1^n\right), n=1,2$ ve $g_r(x)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup $\lim_{x\to\infty} g_r(x)=0$'dır.

Bu bölümün amaçlarından biri $\lambda\to\infty$ iken $N_1\left(\lambda\zeta_1\right)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için iki terimli asimtotik açılım elde etmektir. $N_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyoneli incelenmeden önce Yardımcı Teorem 8.1'i ve Yardımcı teorem 8.2'yi hatırlayalım.

Teorem 9.1. $m_2\equiv E\left(\eta_1^2\right)<\infty$ ve $\beta_4\equiv E(\zeta_1^4)<\infty$ olsun. Bu takdirde, $\lambda\to\infty$ iken $N_1\left(\lambda\zeta_1\right)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimtotik açılımlar verilebilir:

$$E\left(N_1\left(\lambda\zeta_1\right)\right)=\frac{\lambda\beta_1}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(1),$$

$$E\left(N_1^2\left(\lambda\zeta_1\right)\right)=\frac{\lambda^2\beta_2}{m_1^2}+\left(\frac{2m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)\lambda\beta_1+o(\lambda),$$

$$E\left(N_1^3\left(\lambda\zeta_1\right)\right)=\frac{\lambda^3\beta_3}{m_1^3}+\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)\lambda^2\beta_2+o\left(\lambda^2\right),$$

$$E\left(N_1^4\left(\lambda\zeta_1\right)\right)=\frac{\lambda^4\beta_4}{m_1^4}+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)\lambda^3\beta_3+o\left(\lambda^3\right).$$

Burada $m_n\equiv E\left(\eta_1^n\right)$ ve $\beta_n\equiv E\left(\zeta_1^n\right), n=1,2,3,4$'tür.

İspat. Önerme 9.4'teki açılımları kullanarak $N_1^n(\lambda z)$'nin momentlerini 0'dan ∞'a kadar $\pi(z)$'ye göre integralliyelim. $N_1^n(\lambda z)$'nin n. momenti için genel ifade aşağıdaki gibidir:

$$E\left(N_1^n(\lambda\zeta_1)\right) \equiv \int_0^{\infty} E\left(N_1^n(\lambda z)\right) d\pi(z), n = 1, 2, 3, 4. \tag{9.12}$$

Önerme 9.4'te $E(N_1(x))$ için olan asimtotik açılımı (9.12) eşitliğinde yerine yazarsak $E\left(N_1(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\left(N_1(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^{\infty} E(N_1(\lambda z))d\pi(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda z}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g_1(\lambda z)\right) d\pi(z).$$

$$E\left(N_1(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda\beta_1}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \int_0^{\infty} g_1(\lambda z)d\pi(z). \tag{9.13}$$

(9.13) eşitliğindeki $\int_0^{\infty} g_1(\lambda z)d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.1'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\infty} g_1(\lambda z)d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(N_1(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(N_1(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda\beta_1}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1).$$

Önerme 9.4'te $E(N_1^2(x))$ için olan asimtotik açılımı (9.12) eşitliğinde yerine yazarsak $E\left(N_1^2(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\left(N_1^2(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^{\infty} E(N_1^2(\lambda z))d\pi(z)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{(\lambda z)^2}{m_1^2} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\lambda z + \lambda z g_2(\lambda z)\right] d\pi(z).$$

$$E\left(N_1^2(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda^2\beta_2}{m_1^2} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\lambda\beta_1 + \int_0^{\infty} \lambda z g_2(\lambda z). \tag{9.14}$$

(9.14) eşitliğindeki $\int_0^{\infty} z g_2(\lambda z)d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\infty} z g_2(\lambda z)d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(N_1^2(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(N_1^2(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda^2\beta_2}{m_1^2} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\lambda\beta_1 + o(\lambda)$$

Önerme 9.4'te $E\left(N_1^3(x)\right)$ için olan asimtotik açılımı (9.12) eşitliğinde yerine yazarsak $E\left(N_1^3(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\left(N_1^3(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^\infty E\left(N_1^3(\lambda z)\right)d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{(\lambda z)^3}{m_1^3} + \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)(\lambda z)^2 + (\lambda z)^2 g_3(\lambda z)\right]d\pi(z).$$

$$E\left(N_1^3(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda^3\beta_3}{m_1^3} + \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)\lambda^2\beta_2 + \int_0^\infty (\lambda z)^2 g_3(\lambda z). \tag{9.15}$$

(9.15) eşitliğindeki $\int_0^\infty z^2 g_3(\lambda z)d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty z^2 g_3(\lambda z)d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(N_1^3(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(N_1^3(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda^3\beta_3}{m_1^3} + \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2).$$

Önerme 9.4'te $E\left(N_1^4(x)\right)$ için olan asimtotik açılımı (9.12) eşitliğinde yerine yazarsak $E\left(N_1^4(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\left(N_1^4(\lambda\zeta_1)\right) = \int_0^\infty E\left(N_1^4(\lambda z)\right)d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{(\lambda z)^4}{m_1^4} + \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{6}{m_1^3}\right)(\lambda z)^3 + (\lambda z)^3 g_4(\lambda z)\right]d\pi(z).$$

$$E\left(N_1^4(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda^4\beta_4}{m_1^4} + \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{6}{m_1^3}\right)\lambda^3\beta_3 + \int_0^\infty (\lambda z)^3 g_4(\lambda z). \tag{9.16}$$

(9.16) eşitliğindeki $\int_0^\infty z^3 g_4(\lambda z) d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty z^3 g_4(\lambda z) d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(N_1^4(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(N_1^4(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{\lambda^4\beta_4}{m_1^4} + \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{6}{m_1^3}\right)\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3).$$

Burada $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n), n = 1, 2, 3, 4$'tür.

Böylece Teorem 9.1'in ispatı tamamlanmış olur. □

Önerme 9.5. $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < \infty$ ve $\gamma_2 \equiv E(\xi_1^2) < \infty$ koşulları sağlansın. Bu takdirde $x \to \infty$ iken $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için iki terimli asimtotik gösterimler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E\left(\tau_1(x)\right) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)x + \left(\frac{m_2}{2m_1^2}\right)\gamma_1 + g_1(x),$$

$$E\left(\tau_1^2(x)\right) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^2 x^2 + \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1^2}{m_1} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\gamma_1^2\right]x + xg_2(x),$$

$$E\left(\tau_1^3(x)\right) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^3 x^3 + \left[\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{6}{m_1^2}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{3}{m_1^2}\right)\gamma_1\gamma_2\right]x^2 + x^2 g_3(x),$$

$$E\left(\tau_1^4(x)\right) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^4 x^4 + \left[\left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{12}{m_1^3}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{6}{m_1^3}\right)\gamma_1^2\gamma_2\right]x^3 + x^3 g_4(x).$$

Burada $m_n = E(\eta_1^n)$, $\gamma_n = E(\xi_1^n), n = 1, 2$ ve $g_r(x)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup $\lim_{x\to\infty} g_r(x) = 0$'dır.

Bu bölümün diğer amacı da $\lambda \to \infty$ iken $\tau_1(\lambda\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için iki terimli asimtotik açılım elde etmektir. $\tau_1(\lambda\zeta)$ sınır fonksiyoneli incelenmeden önce Yardımcı Teorem 8.1'i ve Yardımcı Teorem 8.2'yi hatırlayalım.

Teorem 9.2. $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < \infty$, $\gamma_2 \equiv E(\xi_1^2) < \infty$ ve $\beta_4 \equiv E(\zeta_1^4)$ koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $\tau_1(\lambda\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimtotik açılımlar verilebilir:

$$E(\tau_1(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)\lambda\beta_1 + \left(\frac{m_2}{2m_1^2}\right)\gamma_1 + o(1),$$

$$E(\tau_1^2(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^2\lambda^2\beta_2 + \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1^2}{m_1} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\gamma_1^2\right]\lambda\beta_1 + o(\lambda),$$

$$E(\tau_1^3(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^3\lambda^3\beta_3 + \left[\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{6}{m_1^2}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{3}{m_1^2}\right)\gamma_1\gamma_2\right]\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2),$$

$$E(\tau_1^4(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^4\lambda^4\beta_4 + \left[\left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{12}{m_1^3}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{6}{m_1^3}\right)\gamma_1^2\gamma_2\right]\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3).$$

Burada $m_n \equiv E(\eta_1^n)$, $\gamma_n \equiv E(\xi_1^n)$ ve $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $n = 1, 2, 3, 4$'tür.

İspat. Önerme 9.5'teki ifadeleri kullanarak $\tau_1^n(\lambda z)$'nin momentlerini 0'dan ∞'a kadar $\pi(z)$'ye göre integralliyelim. $\tau_1^n(\lambda z)$'nin n. momenti için genel ifade aşağıdaki gibidir:

$$E(\tau_1^n(\lambda\zeta_1)) \equiv \int_0^\infty E(\tau_1^n(\lambda z))\, d\pi(z), n = 1, 2, 3, 4. \tag{9.17}$$

Önerme 9.5'te bulunan $E(\tau_1(x))$ asimtotik açılımını (9.17) eşitliğinde yerine yazarsak $E(\tau_1(\lambda\zeta_1))$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E(\tau_1(\lambda\zeta_1)) = \int_0^\infty E(\tau_1(\lambda z))d\pi(z) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)\lambda z + \left(\frac{m_2}{2m_1^2}\right)\gamma_1 + g_1(\lambda z)\right]d\pi(z)$$

$$E(\tau_1(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)\lambda\beta_1 + \left(\frac{m_2}{2m_1^2}\right)\gamma_1 + \int_0^\infty g_1(\lambda z)d\pi(z). \tag{9.18}$$

(9.18) eşitliğindeki $\int_0^\infty g_1(\lambda z)d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.1'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty g_1(\lambda z)d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E(\tau_1(\lambda\zeta_1))$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E(\tau_1(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)\lambda\beta_1 + \left(\frac{m_2}{2m_1^2}\right)\gamma_1 + o(1).$$

Önerme 9.5'te bulunan $E(\tau_1^2(x))$ asimtotik açılımını (9.17) eşitliğinde yerine yazarsak $E(\tau_1^2(\lambda\zeta_1))$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E(\tau_1^2(\lambda\zeta_1)) = \int_0^\infty E(\tau_1^2(\lambda z))d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left\{\left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^2 (\lambda z)^2 + \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1^2}{m_1} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\gamma_1^2\right]\lambda z + \lambda z g_2((\lambda z))\right\} d\pi(z).$$

$$E(\tau_1^2(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^2 \lambda^2\beta_2 + \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1^2}{m_1} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\gamma_1^2\right]\lambda\beta_1$$

$$+ \int_0^\infty \lambda z g_2(\lambda z)d\pi(z). \qquad (9.19)$$

(9.19) eşitliğindeki $\int_0^\infty z g_2(\lambda z)d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty z g_2(\lambda z)d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E(\tau_1^2(\lambda\zeta_1))$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E(\tau_1^2(\lambda\zeta_1)) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^2 \lambda^2\beta_2 + \left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1^2}{m_1} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\gamma_1^2\right]\lambda\beta_1 + o(\lambda).$$

Önerme 9.5'te bulunan $E(\tau_1^3(x))$ asimtotik açılımını (9.17) eşitliğinde yerine yazarsak $E(\tau_1^3(\lambda\zeta_1))$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E(\tau_1^3(\lambda\zeta_1)) = \int_0^\infty E(\tau_1^3(\lambda z))d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^3 (\lambda z)^3 + \left[\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{6}{m_1^2}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{3}{m_1^2}\right)\gamma_1\gamma_2 \right] (\lambda z)^2 + (\lambda z)^2 g_3(\lambda z) \right\} d\pi(z)$$

$$E\big(\tau_1^3(\lambda\zeta_1)\big) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^3 \lambda^3\beta_3 + \left[\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{6}{m_1^2}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{3}{m_1^2}\right)\gamma_1\gamma_2 \right]\lambda^2\beta_2$$

$$+ \int_0^\infty (\lambda z)^2 g_3(\lambda z) d\pi(z). \tag{9.20}$$

(9.20) eşitliğindeki $\int_0^\infty z^2 g_3(\lambda z) d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty z^2 g_3(\lambda z) d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\big(\tau_1^3(\lambda\zeta_1)\big)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\big(\tau_1^3(\lambda\zeta_1)\big) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^3 \lambda^3\beta_3 + \left[\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{6}{m_1^2}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{3}{m_1^2}\right)\gamma_1\gamma_2 \right]\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2).$$

Önerme 9.5'te bulunan $E\big(\tau_1^4(x)\big)$ asimtotik açılımını (9.17) eşitliğinde yerine yazarsak $E\big(\tau_1^4(\lambda\zeta_1)\big)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\big(\tau_1^4(\lambda\zeta_1)\big) = \int_0^\infty E\big(\tau_1^4(\lambda z)\big) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^4 (\lambda z)^4 + \left[\left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{12}{m_1^3}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{6}{m_1^3}\right)\gamma_1^2\gamma_2 \right] (\lambda z)^3 + (\lambda z)^3 g_4(\lambda z) \right\} d\pi(z)$$

$$E\big(\tau_1^4(\lambda\zeta_1)\big) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^4 \lambda^4\beta_4 + \left[\left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{12}{m_1^3}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{6}{m_1^3}\right)\gamma_1^2\gamma_2 \right]\lambda^3\beta_3$$

$$+ \int_0^\infty (\lambda z)^3 g_4(\lambda z) d\pi(z). \tag{9.21}$$

(9.21) eşitliğindeki $\int_0^\infty z^3 g_4(\lambda z) d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty z^3 g_4(\lambda z) d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(\tau_1^4(\lambda\zeta_1)\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(\tau_1^4(\lambda\zeta_1)\right) = \left(\frac{\gamma_1}{m_1}\right)^4 \lambda^4\beta_4 + \left[\left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{12}{m_1^3}\right)\gamma_1^3 + \left(\frac{6}{m_1^3}\right)\gamma_1^2\gamma_2\right]\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3).$$

Burada $m_n \equiv E(\eta_1^n)$, $\gamma_n \equiv E(\xi_1^n)$ ve $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n)$, $n = 1, 2, 3, 4$'tür.

Böylece Teorem 9. 2'nin ispatı tamamlanmış olur. □

Önerme 9.6. (Gever [19]) $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < \infty$ koşulu sağlansın. Bu takdirde $x \to \infty$ iken $S_{N_1(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti için iki terimli asimtotik gösterimler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E\left(S_{N_1(x)}\right) = x + \frac{m_2}{2m_1} + g_1(x),$$

$$E\left(S_{N_1(x)}^2\right) = x^2 + \frac{m_2}{m_1}x + xg_2(x),$$

$$E\left(S_{N_1(x)}^3\right) = x^3 + \frac{3m_2}{2m_1}x^2 + x^2 g_3(x).$$

Burada $m_n = E(\eta_1^n), n = 1, 2$ ve $g_r(x)$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olup $\lim_{x\to\infty} g_r(x) = 0$'dır.

Bu bölümün diğer amacı da $\lambda \to \infty$ iken $S_{N_1(\lambda\zeta_1)}$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için iki terimli asimtotik açılım elde etmektir. $S_{N_1(\lambda\zeta_1)}$ sınır fonksiyoneli incelenmeden önce Yardımcı Teorem 8.1'i ve Yardımcı Teorem 8.2'yi hatırlayalım.

Teorem 9.3. $m_2 \equiv E(\eta_1^2) < \infty$ ve $\beta_3 \equiv E(\zeta_1^3)$ koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to \infty$ iken $S_{N_1(\lambda\zeta_1)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti için aşağıdaki asimtotik açılımlar verilebilir:

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda\beta_1 + \frac{m_2}{2m_1} + o(1),$$

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}^2\right) = \lambda^2\beta_2 + \frac{m_2}{m_1}\lambda\beta_1 + o(\lambda),$$

$$E\left(S^3_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda^3\beta_3 + \frac{3m_2}{2m_1}\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2),$$

Burada $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n), n = 1, 2, 3$'tür.

İspat. Önerme 9.6'daki ifadeleri kullanarak $S_{N_1(\lambda z)}$'nin momentlerini 0'dan ∞'a kadar $\pi(z)$'ye göre integralliyelim. $S_{N_1(\lambda z)}$'nin n. momenti için genel ifade aşağıdaki gibidir:

$$E\left(S^n_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) \equiv \int_0^\infty E\left(S^n_{N_1(\lambda z)}\right) d\pi(z), n = 1, 2, 3. \tag{9.22}$$

Önerme 9.6'da bulunan $E\left(S_{N_1(x)}\right)$ asimtotik açılımını (9.22) eşitliğinde yerine yazarsak $E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \int_0^\infty E\left(S_{N_1(x)}\right) d\pi(z) = \int_0^\infty \left[\lambda z + \frac{m_2}{2m_1} + g_1(\lambda z)\right] d\pi(z)$$

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda\beta_1 + \frac{m_2}{2m_1} + \int_0^\infty g_1(\lambda z) d\pi(z). \tag{9.23}$$

(9.23) eşitliğindeki $\int_0^\infty g_1(\lambda z) d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.1'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty g_1(\lambda z) d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda\beta_1 + \frac{m_2}{2m_1} + o(1).$$

Önerme 9.6'da bulunan $E\left(S^2_{N_1(x)}\right)$ asimtotik açılımını (9.22) eşitliğinde yerine yazarsak $E\left(S^2_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\left(S^2_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \int_0^\infty E\left(S^2_{N_1(\lambda z)}\right) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left[(\lambda z)^2 + \frac{m_2}{m_1}\lambda z + \lambda z g_2\left((\lambda z)\right)\right] d\pi(z).$$

$$E\left(S^2_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda^2\beta_2 + \frac{m_2}{m_1}\lambda\beta_1 + \int_0^\infty \lambda z g_2(\lambda z)d\pi(z). \tag{9.24}$$

(9.24) eşitliğindeki $\int_0^\infty zg_2(\lambda z)d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty zg_2(\lambda z)d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(S^2_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(S^2_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda^2\beta_2 + \frac{m_2}{m_1}\lambda\beta_1 + o(\lambda).$$

Önerme 9.6'da bulunan $E\left(S^3_{N_1(x)}\right)$ asimtotik açılımını (9.22) eşitliğinde yerine yazarsak $E\left(S^3_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right)$ için aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$E\left(S^3_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \int_0^\infty E\left(S^3_{N_1(x)}\right)d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty \left\{(\lambda z)^3 + \frac{3m_2}{2m_1}(\lambda z)^2 + (\lambda z)^2 g_3(\lambda z)\right\}d\pi(z)$$

$$E\left(S^3_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda^3\beta_3 + \frac{3m_2}{2m_1}\lambda^2\beta_2 + \int_0^\infty (\lambda z)^2 g_3(\lambda z)d\pi(z). \tag{9.25}$$

(9.25) eşitliğindeki $\int_0^\infty z^2 g_3(\lambda z)d\pi(z)$ ifadesinin $\lambda \to \infty$ iken 0'a gittiği Yardımcı Teorem 8.2'de ispat edilmiştir, yani $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty z^2 g_3(\lambda z)d\pi(z) = 0$'dır. Bu takdirde $E\left(S^3_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right)$ için aşağıdaki iki terimli asimtotik açılım verilebilir:

$$E\left(S^3_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \lambda^3\beta_3 + \frac{3m_2}{2m_1}\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2).$$

Burada $m_n \equiv E(\eta_1^n)$ ve $\beta_n \equiv E(\zeta_1^n), n = 1, 2, 3, 4$'tür.

Böylece Teorem 9. 3'ün ispatı tamamlanmış olur. □

Not 9.2. Anlaşılacağı gibi τ_1, N_1 ve S_{N_1} sınır fonksiyonelleri için bulduğumuz asimtotik açılımlar daha önceden bulduğumuz kesin ifadelere göre daha basit bir yapıya sahiptirler. τ_1, N_1 ve S_{N_1} sınır fonksiyonellerinin momentleri için elde edilen asimtotik açılımların uygulamadaki rahatlığını bir örnekle inceleyelim.

Örnek 9.1. η_1 rasgele değişkeni α parametreli Üstel dağılıma ve ζ_1 rasgele değişkeni ise $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olsun ve $\lambda = S$ olsun. Bu takdirde, η_1 rasgele değişkeninin ilk iki momentini ve ζ_1 rasgele değişkeninin momentleri için genel formülü verelim:

$$E(\eta_1) \equiv m_1 = \frac{1}{\alpha}, E(\eta_1^2) \equiv m_2 = \frac{2}{\alpha^2},$$

$$E(\zeta_1^n) \equiv \beta_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \ldots$$

η_1 rasgele değişkeni ve ζ_1 rasgele değişkeninin momentleri yardımıyla $N_1(\lambda\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimtotik açılımlar verilebilir:

$$E\big(N_1(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{\alpha S}{2} + 1 + o(1),$$

$$E\big(N_1^2(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{(\alpha S)^2}{3} + \frac{3\alpha S}{2} + o(S),$$

$$E\big(N_1^3(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{(\alpha S)^3}{4} + 2(\alpha S)^2 + o(S^2),$$

$$E\big(N_1^4(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{(\alpha S)^4}{5} + \frac{5(\alpha S)^3}{2} + o(S^3).$$

η_1 rasgele değişkeni ve ζ_1 rasgele değişkeninin momentleri yardımıyla $\tau_1(\lambda\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimtotik açılımlar verilebilir:

$$E\big(\tau_1(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{\alpha\gamma_1 S}{2} + \gamma_1 + o(1),$$

$$E\big(\tau_1^2(\lambda\zeta_1)\big) = \frac{(\alpha\gamma_1 S)^2}{3} + \frac{\alpha S}{2}(\gamma_2 - \gamma_1^2 + 4\gamma_1^3) + o(S),$$

$$E\left(\tau_1^3(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{(\alpha\gamma_1 S)^3}{4} + (\alpha S)^2(\gamma_1^3 + \gamma_1\gamma_2) + o(S^2),$$

$$E\left(\tau_1^4(\lambda\zeta_1)\right) = \frac{(\alpha\gamma_1 S)^4}{5} + \frac{(\alpha S)^3}{2}(2\gamma_1^3 + 3\gamma_1^2\gamma_2) + o(S^3).$$

Burada $\gamma_n \equiv E(\xi_1^n), n = 1, 2$'dir.

η_1 rasgele değişkeni ve ζ_1 rasgele değişkeninin momentleri yardımıyla $S_{N_1(\lambda\zeta_1)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti için aşağıdaki asimtotik açılımlar verilebilir:

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}\right) = \frac{S}{2} + \frac{1}{\alpha} + o(1),$$

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}^2\right) = \frac{S^2}{3} + \frac{S}{\alpha} + o(S),$$

$$E\left(S_{N_1(\lambda\zeta_1)}^3\right) = \frac{S^3}{4} + \frac{S^2}{\alpha} + o(S^2).$$

10. SONUÇLAR

Bu çalışmada daha önce yapılan kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçlerin genellemesi yapılmıştır. Önceki çalışmalarda müdahaleler sadece özel dağılımlar (üçgensel dağılım, Gamma dağılımı, üstel dağılım, Beta dağılımı, …) alabilmekteyken bu çalışmada müdahale keyfi bir dağılıma sahip olabilir. Bulunan sonuçlar yardımıyla önceki çalışmalar bu çalışmanın özel durumu haline gelmiştir. Analitik sonuçlar literatürde büyük önem taşımaktadır, ancak uygulamada kullanımları zorluk yaratmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada yaklaşım yöntemi olarak asimtotik yöntem kullanılmıştır. Özetle, bu çalışmada genel müdahaleli ödüllü yenileme süreci matematiksel olarak modellenmiş ve aşağıdaki temel sonuçlar elde edilmiştir:

1) Sürecin bir boyutlu dağılımının kesin şekli bulunmuştur.
2) Sürecin ergodikliği ispat edilmiştir.
3) Sürecin ergodik dağılımının zayıf yakınsadığı ispatlanmıştır.
4) Sürecin ergodik momentleri için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilmiştir.
5) Sürecin üç önemli sınır fonksiyoneli τ_1, N_1 ve S_{N_1} tanımlanmış ve bu fonksiyonellerin momentleri için kesin ifadeler ve asimtotik açılımlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Akritas, M.G., Roussas, G.G., Asymptotic inference in continuous time semi-Markov processes, Scand. J. Statist., 7, 73-79, 1980.

[2] Aliyev, R., Bekar, N., Khaniyev, T., Unver, I., Asymptotic expansions for the moments of the boundary functional of the renewal-reward process with a discrete interference of chance, Mathematical and Computational Applications, 15(1), 117-126, 2010.

[3] Aliyev, R., Khaniyev, T., Bekar, N., Weak convergence theorem for the ergodic distribution of the renewal-reward process with a Gamma distributed interference of chance, Theory of Stochastic Processes, 15(31), 42-53, 2009.

[4] Aliyev, R., Khaniyev, T., Kesemen, T., Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance, Communication in Statistics-Theory and Methods, 39(1), 130-143, 2010.

[5] Aliyev, R., Khaniyev, T., On the semi-Markovian random walk with Gaussian distribution of summands, Communication in Statistics-Theory and Methods, 43(1), 90-104, 2014.

[6] Alsmeyer, G., Second-order approximations for certain stopped sums in extended renewal theory, Advances in Applied Probability, 20, 391-410, 1988.

[7] Alsmeyer, G., Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12(1), 19–27, 1991.

[8] Anisimov, V.V., Averaging methods for transient regimes in overloading retrial queuing systems, Mathematical and Computational Modelling, 30(3-4), 65-78, 1999.

[9] Aras, G., Woodroofe, M., Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21, 503–519, 1993.

[10] Bekar, N., 2006, Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Analitik ve Asimtotik Yöntemlerle İncelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi, KTÜ,* Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

[11] Bekar, N., Aliyev, R., Khaniyev, T., Asymptotic expansions for a renewal-reward process with Weibull distributed interference of chance, Contemporary Analysis and Applied Mathematics, 1(2), 200-211, 2013.

[12] Billingsley, P. Convergence of Probability Measures, *John Wiley*, New York, 1968.

[13] Borovkov, A.A., Asymptotic Methods in Queuing Theory, *John Wiley*, New York, 1984.

[14] Brown, M., Solomon, H.A., Second-order approximation for the variance of a renewal-reward process, Stochastic Processes and Their Applications, 3, 301–314, 1975.

[15] Çınlar, E., Introduction to Stochastic Processes, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[16] Csenki, A., Asymptotics for renewal-reward processes with retrospective reward structure, Operation Research and Letters, 26, 201–209, 2000.

[17] Ezhoz, I.I., Shurenkov, V.S., Ergodic theorems connected with the Markov property of random processes, Theory Probab. Appl., 21, 620-624, 1977.

[18] Feller, W., Introduction to Probability Theory and Its Applications II, *John Wiley*, New York, 1971.
[19] Gever, B., 2011, Genelleştirilmiş Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Sürecinin Asimtotik Yöntemlerle İncelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi, TOBB ETÜ*, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
[20] Gihman, I.I., Skorohod, A.V., Theory of Stochastic Processes II, *Springer*, Berlin, 1975.
[21] Grübel, R., Harmonic renewal sequences and first positive sum, Journal of London Mathematical Society, 38(2), 179-192, 1988.
[22] Gusak, D.V., Korolyuk, V.S., On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theor. Probab. Appl., 13, 448-456, 1968.
[23] Janseen, A.J.E.M., Van Leeuwarden, J.S.H., On Lerchís transcendent and the Gaussian random walk, Annals of Appl. Probability, 17, 421- 439, 2007.
[24] Khaniev, T.A., Küçük Z., Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics and Probability Letters, 69(1), 91–103, 2004.
[25] Khaniev, T.A., Mammadova, Z., On the stationary characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 76(10), 861–874, 2006.
[26] Khaniyev T. A., About moments of generalized renewal process, Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phys. Tech. and Math. Sciences, 25(1), 95 – 100, 2005.
[27] Khaniyev, T., Aksop, C., Asymptotic results for an inventory model of type (s, S) with a generalized Beta interference of chance, TWMS J. App. Eng. Math., 1(2), 223-236, 2011.
[28] Khaniyev, T., Atalay, K.D., On the weak convergence of the ergodic distribution for an inventory model of type (s, S), Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(4), 599-611, 2010.
[29] Khaniyev, T., Kokangül, A., Aliyev R., An asymptotic approach for a semi-Markovian inventory model of type (s, S), Applied Stochastic Models in Business and Industry, 29(5), 439-453, 2013.
[30] Lagakos, S.W., Sommer, C.J., Zelen, M., Semi-Markov models for partially censored data, 65(2), 311-317, 1978.
[31] Levy, J.B., Taqqu, M.S., Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Annals of Statistics, 6(1), 23-24, 2000.
[32] Levy, P., Processus semi-Markoviens, Proc. Int. Congress Math., 3, 416-426, 1954.
[33] Lotov, V.I., On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, Annals of Probability, 24(4), 2154–2171, 1996.
[34] Moore, E.H., Pyke, R., Estimation of transition distributions of a Markov renewal process, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 20(1), 411-424, 1968.

[35] Ouhbi, B., Limnios, N., Nonparametric estimation for semi-Markov processes based on its hazard rate functions, Statist. Inference Stochastic Proc., 2(2), 151-173, 1999.
[36] Prabhu, N.U., Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, New York, 1981.
[37] Pyke, R., Markov renewal processes with finitely many states, Ann. Math. Statist., 32, 1243-1259, 1961.
[38] Pyke, R., Markov renewal processes: definitions and preliminary properties, Ann. Math. Statist., 32, 1231-1242, 1961.
[39] Pyke, R., Schaufele, R.A., Limit theorems for Markov renewal processes, Ann. Math. Statist., 35, 1746-1764, 1964.
[40] Pyke, R., Schaufele, R.A., The existence and uniqueness of stationary measures for Markov renewal process, Ann. Math. Statist., 37, 1439-1462, 1966.
[41] Rogozin, B.A., On the distribution of the first jump, Theor. Probab. Appl., 9, 450-464, 1964.
[42] Smith, W.L., Asymptotic renewal theorems, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, 64, 9-48, 1954.
[43] Spitzer, F., Principles of Random Walks, *Princeton*, New York, 1964.
[44] Takacs, L., Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Közl, 3, 115-128, 1954.
[45] Taqqu, M.S., Levy, J., Using Renewal Processes to Generate Long-Range Dependence and High Variability, in: Dependence in Probability and Statistics, E. Eberlein and M. S. Taqqu (Eds.), Progress in Probility and Statistics, 11, 73-89, 1986.
[46] Taqqu, M.S., Willinger, W., Sherman, R., Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling, Comput. Commun. Rev., 27(2), 5-23, 1997.
[47] Tijms, H.C., Stochastic Models: An Algorithmic Approach, *Wiley*, New York, 1994.
[48] Willinger, W., Taqqu, M.S., Sherman, R., Wilson, D.V., Self-similarity through high-variability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level, IEEE/ACM Transactions on Networking, 5(1), 71-86, 1997.

EKLER

EK A. YENİLEME FONKSİYONU İÇİN ÖRNEKLER

Erlang dağılımına sahip η_n rasgele değişkenlerin ürettiği, yenileme fonksiyonu için kesin ve açık formüller elde edilecektir. Yenileme fonksiyonunun kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x). \tag{A.1}$$

Burada $F^{*n}(x)$, $F(x)$ fonksiyonunun kendisiyle n katlı konvolüsyon çarpımını ifade etmektedir. Yenileme fonksiyonu $U(x)$'in Laplace dönüşümü aşağıda verilmiştir:

$$\tilde{U}(k) = \frac{1}{k\{1-\varphi(k)\}}. \tag{A.2}$$

Burada $\varphi(k) = E\left(e^{-k\eta_1}\right)$ ve $\tilde{U}(k) = \int_0^{\infty} e^{-kx}U(x)dx$'tir.

n. mertebeden Erlang dağılımına sahip η_n rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonlarını elde etmek için gerekli temel bilgiler (A.1) ve (A.2) yardımıyla verilmiştir. Bu bilgilerin ışığında aşağıdaki örnekler verilecektir.

Örnek A.1. η_1 rasgele değişkeni 3. mertebeden α parametreli Erlang dağılımına sahip olsun. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\eta(x) = \frac{\alpha^3 x^2 e^{-\alpha x}}{2}, x \geq 0.$$

$\varphi(k)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\varphi(k) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f_\eta(x)dx = \left(\frac{\alpha}{\alpha+k}\right)^3.$$

Yenileme fonksiyonu $U_3(x)$'in kesin ifadesi Laplace dönüşümü yöntemi ile aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$U_3(x)$'in Laplace dönüşümü aşağıda verilmiştir:

$$\widetilde{U}_3(k) = \frac{1}{k\{1-\varphi(k)\}} = \frac{1}{k\left\{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+k}\right)^3\right\}}$$

$$= \frac{2}{3k} + \frac{\alpha}{3k^2} + \frac{k+2\alpha}{3(k^2+3\alpha k+3k^2)}.$$

$$\widetilde{U}_3(k) = \frac{2}{3k} + \frac{\alpha}{3k^2} + \frac{k+\frac{3\alpha}{2}}{3\left[\left(k+\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right)^2\right]} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right)}{3\left[\left(k+\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right)^2\right]}. \tag{A.3}$$

(A.3) eşitliğine ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_3(x)$ yenileme fonksiyonunun kesin ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$U_3(x) = \frac{\alpha x}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3\alpha x}{2}}\left[\cos\left(\sqrt{3}\alpha x/2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}\alpha x/2\right)\right].$$

Örnek A.2. η_1 rasgele değişkeni 4. mertebeden α parametreli Erlang dağılımına sahip olsun.

Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_\eta(x) = \frac{\alpha^4 x^3 e^{-\alpha x}}{6}, x \geq 0.$$

$\varphi(k)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\varphi(k) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f_\eta(x)dx = \left(\frac{\alpha}{\alpha + k}\right)^4.$$

Yenileme fonksiyonu $U_4(x)$'in Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{U}_4(k) = \frac{1}{k\{1 - \varphi(k)\}} = \frac{1}{k\left\{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + k}\right)^4\right\}}$$

$$= \frac{5}{8k} + \frac{1}{8(k + 2\alpha)} + \frac{\alpha}{4k^2} + \frac{k + 2\alpha}{4(k^2 + 2\alpha k + 2\alpha^2)}.$$

$$\tilde{U}_4(k) = \frac{5}{8k} + \frac{1}{8(k + 2\alpha)} + \frac{\alpha}{4k^2} + \frac{k + \alpha}{4[(k + \alpha)^2 + \alpha^2]} + \frac{\alpha}{4[(k + \alpha)^2 + \alpha^2]}. \quad (A.4)$$

(A.4) eşitliğine ters Laplace dönüşümü uygulanınca $U_4(x)$ yenileme fonksiyonunun kesin ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$U_4(x) = \frac{\alpha x}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8}e^{-2\alpha x} + \frac{1}{4}e^{-\alpha x}\ [\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)].$$

Not A.1. (A.3) ve (A.4)'teki Laplace dönüşümlerinde bir sistematik mevcuttur. Bu sistematik yardımıyla n. mertebeden Erlang dağılımlı rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri için aşağıdaki formüller verilebilir:

- n tek ise;

$$\tilde{U}_n(k) = \frac{n + 1}{2nk} + \frac{\alpha}{nk^2} + \frac{k + 2\alpha}{n(k^2 + A_{n1}\alpha k + A_{n1}\alpha^2)} + \cdots + \frac{k + 2\alpha}{n(k^2 + A_{nr}\alpha k + A_{nr}\alpha^2)},$$

Burada, her n için $\sum_{i=1}^{r} A_{ni} = n$, $A_{nr} = 4\sin^2\left(\frac{\pi r}{n}\right)$ ve $r = 1, \ldots, [(n-1)/2]$'dir.

- n çift ise;

$$\widetilde{U}_n(k) = \frac{n+1}{2nk} + \frac{1}{2n(k+2\alpha)} + \frac{\alpha}{nk^2} + \frac{k+2\alpha}{n(k^2 + A_{n1}\alpha k + A_{n1}\alpha^2)} + \cdots$$

$$+ \frac{k+2\alpha}{n(k^2 + A_{nr}\alpha k + A_{nr}\alpha^2)}.$$

Burada, her n için $\sum_{i=1}^{r} A_{ni} = n - 2$, $A_{nr} = 4\sin^2\left(\frac{\pi r}{n}\right)$ ve $r = 1, \dots, [(n-1)/2]$'dir.

n. mertebeden Erlang dağılımlı rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonlarının kesin ifadeleri için formüller aşağıdaki gibidir:

- n tek ise;

$$U_n(x) = \frac{\alpha x}{n} + \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} e^{-A_{ni}\alpha x/2}\left[\cos(\omega_{ni}\alpha x) + Q_{ni}\sin(\omega_{ni}\alpha x)\right]$$

- n çift ise;

$$U_n(x) = \frac{\alpha x}{n} + \frac{n+1}{2n} + \frac{e^{-2\alpha x}}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} e^{-A_{ni}\alpha x/2}\left[\cos(\omega_{ni}\alpha x) + Q_{ni}\sin(\omega_{ni}\alpha x)\right]$$

Burada, $\omega_{n1} = \left(\sqrt{4A_{nr} - A_{nr}^2}\right)/2$, $Q_{nr} = (4 - A_{nr})/\left(\sqrt{4A_{nr} - A_{nr}^2}\right)$, $A_{nr} = 4\sin^2\left(\frac{\pi r}{n}\right)$ ve $r = 1, \dots, [(n-1)/2]$'dir.

Verilen bu formüllerin yardımıyla aşağıdaki ilk 10 mertebeden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri verilebilir:

$$\widetilde{U}_1(k) = \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k^2},$$

$$\widetilde{U}_2(k)=\frac{3}{4k}+\frac{1}{4(k+2\alpha)}+\frac{\alpha}{2k^2},$$

$$\widetilde{U}_3(k)=\frac{2}{3k}+\frac{\alpha}{3k^2}+\frac{k+2\alpha}{3(k^2+A_{31}\alpha k+A_{31}\alpha^2)},$$

burada $A_{31}=3$'tür.

$$\widetilde{U}_4(k)=\frac{5}{8k}+\frac{1}{8(k+2\alpha)}+\frac{\alpha}{4k^2}+\frac{k+2\alpha}{4(k^2+A_{41}\alpha k+A_{41}\alpha^2)},$$

burada $A_{41}=2$'dir.

$$\widetilde{U}_5(k)=\frac{3}{5k}+\frac{\alpha}{5k^2}+\frac{k+2\alpha}{5(k^2+A_{51}\alpha k+A_{51}\alpha^2)}+\frac{k+2\alpha}{5(k^2+A_{52}\alpha k+A_{52}\alpha^2)},$$

burada $A_{51}+A_{52}=5$'tir.

$$\widetilde{U}_6(k)=\frac{7}{12k}+\frac{1}{12(k+2\alpha)}+\frac{\alpha}{6k^2}+\frac{k+2\alpha}{6(k^2+A_{61}\alpha k+A_{61}\alpha^2)}$$
$$+\frac{k+2\alpha}{6(k^2+A_{62}\alpha k+A_{62}\alpha^2)},$$

burada $A_{61}+A_{62}=4$'tür.

$$\widetilde{U}_7(k)=\frac{4}{7k}+\frac{\alpha}{7k^2}+\frac{k+2\alpha}{7(k^2+A_{71}\alpha k+A_{71}\alpha^2)}+\frac{k+2\alpha}{7(k^2+A_{72}\alpha k+A_{72}\alpha^2)}$$
$$+\frac{k+2\alpha}{7(k^2+A_{73}\alpha k+A_{73}\alpha^2)},$$

burada $A_{71}+A_{72}+A_{73}=7$'dir.

$$\widetilde{U}_8(k)=\frac{9}{16k}+\frac{1}{16(k+2\alpha)}+\frac{\alpha}{8k^2}+\frac{k+2\alpha}{8(k^2+A_{81}\alpha k+A_{81}\alpha^2)}$$
$$+\frac{k+2\alpha}{8(k^2+A_{82}\alpha k+A_{82}\alpha^2)}+\frac{k+2\alpha}{8(k^2+A_{83}\alpha k+A_{83}\alpha^2)},$$

burada $A_{81} + A_{82} + A_{83} = 6$'dır.

$$\widetilde{U}_9(k) = \frac{5}{9k} + \frac{\alpha}{9k^2} + \frac{k+2\alpha}{9(k^2 + A_{91}\alpha k + A_{91}\alpha^2)} + \frac{k+2\alpha}{9(k^2 + A_{92}\alpha k + A_{92}\alpha^2)}$$
$$+ \frac{k+2\alpha}{9(k^2 + A_{93}\alpha k + A_{93}\alpha^2)} + \frac{k+2\alpha}{9(k^2 + A_{94}\alpha k + A_{94}\alpha^2)},$$

burada $A_{91} + A_{92} + A_{93} + A_{94} = 9$'dur.

$$\widetilde{U}_{10}(k) = \frac{11}{20k} + \frac{1}{20(k+2\alpha)} + \frac{\alpha}{10k^2} + \frac{k+2\alpha}{10\left(k^2 + A_{10,1}\alpha k + A_{10,1}\alpha^2\right)}$$
$$+ \frac{k+2\alpha}{10\left(k^2 + A_{10,2}\alpha k + A_{10,2}\alpha^2\right)} + \frac{k+2\alpha}{10\left(k^2 + A_{10,3}\alpha k + A_{10,3}\alpha^2\right)}$$
$$+ \frac{k+2\alpha}{10\left(k^2 + A_{10,4}\alpha k + A_{10,4}\alpha^2\right)},$$

burada $A_{10,1} + A_{10,2} + A_{10,3} + A_{10,4} = 8$'dir.

Örnek A.3. Verilen formüller yardımıyla 5. ve 6. mertebeden α parametreli Erlang dağılımına sahip olan rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

5. mertebeden α parametreli Erlang dağılımına sahip olan rasgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü $\widetilde{U}_5(k)$ aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{U}_5(k) = \frac{3}{5k} + \frac{\alpha}{5k^2} + \frac{k+2\alpha}{5(k^2 + A_{51}\alpha k + A_{51}\alpha^2)} + \frac{k+2\alpha}{5(k^2 + A_{52}\alpha k + A_{52}\alpha^2)},$$

burada $A_{51} + A_{52} = 5$'tir. A_{51} ve A_{52} katsayıları aşağıdaki formül yarımıyla elde edilebilir:

$$A_{nr} = 4\sin^2\left(\frac{\pi r}{n}\right)$$

Burada $r = 1,2$ ve $n = 5$'tir. Bu takdirde, $A_{51} = \left(5 - \sqrt{5}\right)/2$ ve $A_{52} = \left(5 + \sqrt{5}\right)/2$'dir. $U_5(x)$'in kesin ifadesi için formül aşağıdaki gibidir:

$$U_5(x) = \frac{\alpha x}{5} + \frac{3}{5} + \frac{e^{-A_{51}\alpha x/2}}{5}[\cos(\omega_{51}\alpha x) + Q_{51}\sin(\omega_{51}\alpha x)]$$

$$+\frac{e^{-A_{52}\alpha x/2}}{5}[\cos(\omega_{52}\alpha x) + Q_{52}\sin(\omega_{52}\alpha x)].$$

Burada, $\omega_{5r} = \left(\sqrt{4A_{5r} - A_{5r}^2}\right)/2$, $Q_{5r} = (4 - A_{5r})/\left(\sqrt{4A_{5r} - A_{5r}^2}\right)$, $A_{5r} = 4\sin^2\left(\frac{\pi r}{5}\right)$ ve $r = 1,2$'dir.

Sonuç olarak, $U_5(x)$'in kesin ifadesi için aşağıdaki gibi verilebilir:

$$U_5(x) = \frac{\alpha x}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}e^{-A_{51}\alpha x/2}\left[\cos\left(\sqrt{A_{52}}\alpha x/2\right) + \frac{3 + \sqrt{5}}{5\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\sin\left(\sqrt{A_{52}}\alpha x/2\right)\right]$$

$$+\frac{1}{5}e^{-A_{52}\alpha x/2}\left[\cos\left(\sqrt{A_{51}}\alpha x/2\right) + \frac{3 - \sqrt{5}}{5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\sin\left(\sqrt{A_{51}}\alpha x/2\right)\right].$$

6. mertebeden Erlang dağılımlı rasgele değişkenlerin oluşturduğu yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü yukarıdaki formüllerden faydalanılarak aşağıda verilmiştir:

$$\widetilde{U}_6(k) = \frac{7}{12k} + \frac{1}{12(k + 2\alpha)} + \frac{\alpha}{6k^2} + \frac{k + 2\alpha}{6(k^2 + A_{61}\alpha k + A_{61}\alpha^2)}$$

$$+\frac{k + 2\alpha}{6(k^2 + A_{62}\alpha k + A_{62}\alpha^2)}.$$

Burada $r = 1,2$ ve $n = 6$'tır. Bu takdirde, $A_{61} = 1$ ve $A_{62} = 3$'dır. $U_6(x)$'in kesin ifadesinin formülü aşağıdaki gibidir:

$$U_6(x) = \frac{\alpha x}{6} + \frac{7}{12} + \frac{e^{-2\alpha x}}{12} + \frac{e^{-A_{61}\alpha x/2}}{6}[\cos(\omega_{61}\alpha x) + Q_{61}\sin(\omega_{61}\alpha x)] +$$

$$+ \frac{e^{-A_{62}\alpha x/2}}{6}[\cos(\omega_{62}\alpha x) + Q_{6r}\sin(\omega_{62}\alpha x)].$$

Burada, $\omega_{6r} = \left(\sqrt{4A_{6r} - A_{6r}^2}\right)/2$, $Q_{6r} = (4 - A_{6r})/\left(\sqrt{4A_{6r} - A_{6r}^2}\right)$, $A_{6r} = 4\sin^2\left(\frac{\pi r}{6}\right)$ ve $r = 1{,}2$'dir.

$U_6(x)$'in kesin ifadesi için aşağıdaki gibi verilebilir:

$$U_6(x) = \frac{\alpha x}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{12}e^{-2\alpha x} + \frac{1}{6}e^{-\alpha x/2}\left[\cos\left(\sqrt{3}\alpha x/2\right) + \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\alpha x/2\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{6}e^{-\frac{3\alpha x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\alpha x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\alpha x}{2}\right)\right].$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	:	ARDIÇ, Özlem
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	01.12.1987 / Trabzon
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0 (530) 170 53 17
E – mail	:	oardic@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Orta Doğu Teknik Üniversitesi – İstatistik Bölümü	2011
Yüksek Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2014

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Konum
2011 – 2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Y. L. Öğr.

Yabancı Dil

İngilizce

YAYINLAR

A) Makaleler:

[1] Khaniyev T., Fattahpour Marandi A. A., Unver I., Ardic O., Asymptotic Approach to Boundary Functionals of a Semi-Markovian Random Walk with Generalized Delaying Barrier, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science (TJMCS), DOI: 20130014, 2013.

[2] Aliyev R., Ardic O., Khaniyev T., Asymptotic Approach for a Renewal-Reward Process with a General Interference of Chance, Communication in Statistics-Theory and Methods, is accepted, 2014.

[3] Khaniyev T., Ardic O., Weak Convergence Theorem for a Renewal-Reward Process with a General Interference of Chance, Statistics and Probability Letters, working paper, 2014.

B) Bildiriler:

[1] Ardic O., Gever B., Khaniyev T., Asymptotic Results for a Semi-Markovian Inventory Model of Type (s, S) with General Interference of Chance, 26th European Conference on Operational Research, Roma, Italy 1-4 July, 2013.

[2] Khaniyev T., Ardic O., Gever B., Stokastik Talep Altında, Düşük Kalite ve Geç Teslime İzin Verilen Durumda Optimal Envanter Modeli, Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 33. Ulusal Kongresi (Uluslar arası IEE Konferansı), İstanbul, Türkiye, 26-28 Haziran, 2013.

[3] Khaniyev T., Ardic O., Aliyev R., Asymptotic results for a renewal-reward process with a general interference of chance, 9. IGS 2014, Side, Turkey, is accepted, 10-14 May, 2014.