

MODÜLER FORMLARA BİLGİSAYAR İLE YAKLAŞIM

Ali Kemal Uncu

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2010

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver Kaynak

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ömer Akın

Anabilim Dalı Başkanı

Ali Kemal Uncu tarafından hazırlanan "MODÜLER FORMLARA BİLGİSAYAR İLE YAKLAŞIM" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ

Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Çetin Ürtiş

Üye : Yrd. Doç. Dr. Zülfükar Saygı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hamza Yeşilyurt

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Muhtar Güloğlu

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ali Kemal Uncu

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı : Matematik
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans - Temmuz 2010

Ali Kemal Uncu

MODÜLER FORMLARA BİLGİSAYAR İLE YAKLAŞIM

ÖZET

Bu tez çalışmasında modüler grup ve denklik altgruplarının özellikleri verilmektedir. Modüler formların tanımı ve özellikleri anlatılmaktadır. Modüler formlar uzayı için bu uzayın tam olarak sınıflandırılması yapılmıştır. Modüler semboller ve Manin semboller anlatılıp bu sembollerin modüler formlar ile alakaları açıklanmıştır. Yapılan sınıflandırmalar kullanılarak bilgisayarda hesaplamaların nasıl yapılması gerektiği açıklanmış ve örnekler verilmiştir. Bu tez verilen bir modüler form uzayı için baz nasıl inşa edilir sorusunu yanıtlamaktadır. Bahsedilen konularla eş zamanlı olarak SAGE adlı William Stein tarafından geliştirilen açık kaynak cebir programı hakkında bilgi verilip, modüler form uzayları üzerinde hesaplamalar yapıp, bunların yorumları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Modüler form, Hecke operatörü, modüler grup, denklik altgrubu, modüler sembol, manin sembol, Eisenstein serisi, cusp form, SAGE

University : TOBB Economics and Technology University
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Mathematics
Supervisor : Assist. Prof. Dr. Çetin ÜRTİŞ
Degree Awarded and Date : M.Sc. - July 2010

Ali Kemal Uncu

COMPUTING ASPECTS OF MODULAR FORMS

ABSTRACT

This thesis gives an expanded description of modular forms. Starting from modular group and congruence subgroup, the theory of modular forms is constructed and the origins of modular forms are given. Classification of modular form spaces are done. Using the classifications, the discussion about computing aspects are given. For computing purposes the theory of modular and Manin symbols are built and the relations between symbols and forms are given. The problems of explicit computing and creating a basis for a modular forms space are done in this thesis. **SAGE**, the open source algebra program, is used throughout the chapters to exemplify the given theories.

Keywords: Modular forms, Hecke operators, modular group, congruence subgroups, modular symbols, Manin symbols, Eisenstein series, cusp forms, **SAGE**

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca yardım, katkı ve eleőtirileri ile beni yönlendiren öncelikle danışmanım Yrd. Doç. Dr. Çetin ÜRTİŞ'e ve çok değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Hamza YEŞİLYURT ve Yrd. Doç Dr. Ahmet Muhtar GÜLOğLU'na ve matematik kariyerinde bu günlere gelmemi saęlamıő adlarını sayamayacağım bütün öğretim elemanlarına,

Hiçbir zaman benden yardımlarını esirgememiő ofis arkadaşlarıma,

Beni her zaman destekleyen ve bugünlere gelmemi sağlayan anneme teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER	VI
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	VIII
1. Önsöz	1
2. Temel Kavramlar	3
2.1. Modüler Grup	3
2.2. Denklik Altgrupları	7
2.3. Modüler Grup ve Denklik Altgruplarında SAGE ile işlemler	11
3. Modüler Formlar	15
3.1. Modüler Formların Gelişimi	15
3.1.1 Periyodik Fonksiyonlar	15
3.1.2 Eliptik Fonksiyonlar	19
3.2. Modüler Formlar	22
3.2.1 Modüler Formların Tanımı ve Bazı Örnekler	22
3.2.2 Eisenstein Serisinin Fourier Açılımı	26
3.2.3 Cusp Formlar	29
3.2.4 Modüler Formların Lineer Vektör Uzayı	30
3.2.5 Hecke Operatörü	37

4. Modüler Semboller	43
4.1. Denklik Altgrupları ile alakalı Riemann Yüzeyle	43
4.2. İki ağırlıklı Modüler Formlar için Modüler Semboller	46
4.3. İki ağırlıklı Manin Sembolleri	52
4.4. İki Ağırlıklı Modüler Semboller için Hecke Operatörü	56
4.5. k Ağırlıklı Modüler Semboller	58
4.6. k ağırlıklı Manin Sembolleri	62
4.7. k Ağırlıklı Modüler Semboller için Hecke operatörü	68
5. Modüler Form uzayları için Baz oluşturulması	72
5.1. Dirichlet Karakterleri	72
5.2. Eisenstein Altuzayları için Baz üretilmesi	76
5.3. İki ağırlıklı Cusp Formlar Uzayı için Baz oluşturulması	77
5.4. k ağırlıklı Cusp Formlar Uzayı için Baz oluşturulması	79
6. SAGE de Ayrıntılı Örnekler	84
7. L Fonksiyonlarının Özel Değerlerinin Bulunması	101
REFERANSLAR	109
ÖZGEÇMİŞ	111

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Γ için bir Temel Bölge	7
Şekil 3.1. Bir kafes için paralelkenar	18
Şekil 4.1. \mathbb{H}/Γ	44
Şekil 4.2. $H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(11))), \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	47
Şekil 4.3. \mathbb{H} da cusp noktasından başka cusp noktasına giden eğriler	48

BÖLÜM 1

1. Önsöz

Bu tez çalışmasının amacı sayılar teorisinde paha biçilemeyecek bir teori olan modüler formların hesaplamaya yatkın hale nasıl getirileceği sorusunun cevaplanmasıdır. Sayılar teorisinde ortaya atılan basit görünümlü birçok soru gizemini korumaktadır. Bu tip sorular için analitik sayılar teorisinden gelen alt sınırlar ile elle hesaplamaların üstesinden gelebileceği durumların arasını bilgisayar yardımı ile kontrol ederek ilerlemeye çalışılabiliriz.

Modüler formların öneminden bahsetmek gerekirse, Andrew Wiles'in Fermat'ın son teoreminin ispatının iskeletini bu fonksiyonların oluşturduğunu söylersek herhalde modüler formların önemini yeterince açıklamış oluruz. Bu teori, Fermat'ın son teoreminde olduğu gibi, birçok gösterim probleminin çözümünde yer alır; mesela bir sayının verilen çift sayıda kareler toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabileceğini bilmekteyiz.

Bu tezin motivasyonu olan soru "*İstenilen bir modüler formlar uzayını nasıl inşa ederiz?*" dir. Bu soru için gerekli teknikler sırasıyla geliştirilmiş veya bulunabileceği referanslar verilmiştir. Çalışmada hesaplama zorluğundan teknik olarak bahsedilmemiştir; ancak verilen algoritmalar-dan karmaşıklık analizi yapmak mümkündür. Anlatılan konulara verilen örnekler için William Stein tarafından yazılmış SAGE cebir programı kullanılmıştır ve okuyucunun SAGE ile işlem yapabilecek seviyeye gelmesi amacıyla örnekler adım adım açıklanmıştır.

Bölümlerin organizasyonundan bahsederek, birinci bölüm önsözün kendisi olmak üzere; ikinci bölüm modüler formların tanımlanması için zorunlu olan özel matris grupları ve bu grupların kümeler üzerine etkilerinin verilmesini amaçlamaktadır. Bu bilgiler ile beraber daha sonraki bölümlerde akla gelebilecek sorular cevaplanmıştır. Modüler grup ve denklik altgrupları özellikleriyle beraber anlatıldıktan sonra SAGE ile işlemlerin nasıl yapıldığı yorumlanabileceği konusuna örnekler verilip açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde çift periyotlu fonksiyonlar ve eliptik fonksiyonlar özetlenmiş ve modüler formlara, bir önceki bölümdeki bilgileri de içine katarak, geçiş yapılmıştır. Modüler formların kompleks analizden gelen birçok özelliği bu bölümde açıklanmıştır. Modüler formların bir vektör uzayı olduğu fikriyle beraber Miller bazı fikri verilmiş ve bu sonuçlar için q serileri

tanımlanmıştır. Bunların yanısıra modüler formların anlaşılmasında önemi yadsınamayacak olan Hecke operatörleri anlatılmıştır ve özellikleri verilmiştir. Bölümün tamamında modüler formlar hakkında SAGE'den örnekler bulunmaktadır ve bu örneklerin yorumu mevcuttur.

Dördüncü bölümde ise modüler formlar uzayının hesaplanması için gerekli olan modüler semboller tanımlanmıştır. Bu teoriyi geliştirmek için denklik altgruplarının temel bölgelerine karşılık gelen kompakt Riemann yüzeyleri anlatılmıştır. Modüler sembollerin modüler formlar ile alakaları verilmiştir. Hesaplama yapmak için modüler sembollerin yerini tutacak Manin sembolleri tanımlanmıştır, özellikleri ve avantajları anlatılmıştır. Modüler ve Manin sembolleri üzerinde Hecke operatörlerinin etkisi açıklanmıştır. Bölüm boyunca SAGE ile yapılmış işlemler yorumlarıyla beraber sunulmuştur.

Beşinci bölümde modüler formlar uzayı için nasıl baz oluşturabiliriz sorusunun cevabı yer almaktadır. Bu sorunun tam cevaplanabilmesi için Dirichlet karakteri tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir, sonrasında da Miyake'nin çalışmaları anlatılmıştır. Miyake'nin çalışmaları ve modüler (Manin) sembollerin, modüler formlarla nasıl eşleneceği anlatılmıştır. Verilen herhangi bir modüler formlar uzayı için bir bazın nasıl oluşturulup hesaplanabileceğinin ayrıntıları verilmiştir.

Yukarıda sözü edilen bölümlerde hesaplamaların nasıl yapılabileceği tafsilatlı bir şekilde anlatılmıştır.

Altıncı bölüm, bir önceki bölümün teorik bilgilerini, seçilmiş birkaç özel modüler formlar uzayının bazının oluşturulmasına örnek göstermek üzere eklenmiştir. SAGE ile yapılan hesaplar yorumlanmış ve elle yapılan birkaç örnek ile desteklenmiştir.

Son bölümde ise SAGE'nin farklı konular için de hesaplamalar yaptığını göstermek amacıyla L fonksiyonlarının özel değerleri konusuna Dookhitser'in fikirleri özetlenerek bakılmaktadır. Bu bölümün amacı sayılar teorisi çalışan bir bireye L fonksiyonları hakkında nümerik yaklaşımların nasıl yapıldığını özetlemektir.

BÖLÜM 2

2. Temel Kavramlar

Modüler formları tanımlamadan önce bilinmesi gereken bazı konuları inceleyelim.

Bu bölümün tamamında anlatılacak olan fikirler, verilecek ve ispatlanacak olan teoremler, [19], [3], [11] ve [10]'dan derlenmiştir. Daha fazla bilgi için bu yayınlara başvurulabilir.

2.1. Modüler Grup

Bu bölümde modüler formları anlamamızda kilit rol oynayacak olan modüler grubu tanımlayacağız ve birkaç özelliğini vereceğiz.

Öncelikle daha genel ve gerekli olabilecek bazı grupları tanımlayalım.

\mathbb{R} reel sayılar kümesi olmak üzere, $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$, girdileri reel sayı olan $n \times n$ kare matrisler kümesini gösterebiliriz.

Tanım 2.1.0.1. $n \in \mathbb{N}$ bir doğal sayı olmak üzere n boyutlu genel lineer grup $GL_n(\mathbb{R})$,

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.0.2. $GL_n(\mathbb{R})$ 'nin determinanı 1 olan elemanlarının oluşturduğu kümeye n boyutlu özel lineer grup denir ve $SL_n(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$SL_n(\mathbb{R})$ 'nin n boyutlu genel lineer grubun bir alt grubu olduğu aşikardır. Özel başka bir alt grup olarak elemanları tamsayı olan ($n \times n$ boyutlu matrisler grubu) $SL_n(\mathbb{Z})$ ile gösterilir ve bu grup $SL_n(\mathbb{R})$ 'nin ayrık bir alt grubudur. Özel olarak $\Gamma := SL_2(\mathbb{Z})$ 'ye Modüler grup denir.

Bölümün geri kalanında modüler grubun ileride ihtiyacımız olacak özellikleri hakkında bilgi vereceğiz.

Teorem 2.1.0.3. Modüler Grup Γ ,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri tarafından üretilir.

İspat: T ve S açıkça modüler grubun elemanlarıdır ve $S^2 = -1$ dir. $SL_2(\mathbb{Z})$ den bir eleman $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alalım ($\det A = 1$). S matrisinin A 'ya etkisi satırlarını bir işaret değişikliği ile birlikte yer değiştirmesi şeklindedir.

$$SA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Öbür taraftan T matrisi'nin herhangi bir tamsayı kuvveti $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Buradan T matrisinin A matrisi üzerine etkisinin bir öteleme olduğunu görürüz, yani $n \in \mathbb{Z}$ için

$$T^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + cn & b + dn \\ c & d \end{pmatrix}$$

olur.

$SL_2(\mathbb{Z})$ den alınan herhangi bir $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi için iki durum söz konusudur. Eğer $c \neq 0$ ise öyle bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ki $T^n A$ matrisinin sol üst bileşeni c 'den mutlakça küçük olur. Sonra S matrisini bu matrise uygularsak sol üst bileşen mutlakça sol alttaki bileşenden büyük olacaktır ve aynı işlemi böylece tekrarlırsak en sonunda sol alt bileşeni 0 eden (bu zaten diğer $c = 0$ durumudur) bir matris elde ederiz. Elde ettiğimiz bu matris, m bir tamsayı olmak üzere, $\pm \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde olmak zorundadır, bu matrisi T^{-m} matrisi ile soldan çarparsak elimize $\pm I$ matrisi geçer ve -1 ile $+1$ 'i S^2 matrisini kullanarak değiştirebiliriz. \square

Not. İspatta anlatılan algoritma Γ dan alınan herhangi bir matrisi T ve S lerin bir dizisi olarak yazmaya yarar ve bu dizi yazılımı tektir. Aynı zamanda bu işlem, Euclid Algoritmasını kullandığı için sonlu adımda biter. Bu özellik Γ dan alınan bir elemanın T ve S lerin bir sonlu dizisi şeklinde yazılımı için bir algoritma olarak kullanılabilir.

Modüler grup, üst yarı düzlem

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

üzerine doğrusal kesirli dönüşümler ile etki eder. Yani eğer $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$$

özelliği $\forall z \in \mathbb{H}^*$ için sağlanır.

Bunun bir etki olduğunu ispat edelim: I modüler grubun birimi ise $\forall z \in \mathbb{H}$ için $I(z) = (1z+0)/(0z+1) = z$ olur. $T(z) = z+1$ ve $S(z) = -1/z$ olduğunu biliyoruz. Herhangi $\gamma, \beta \in \Gamma$ için γ ve β , T ve S ler cinsinden tek türlü yazılacağından çarpımları da bu iki elemanın dizilerinin ard arda yerleştirilmiş halidir ve tek türüdür iki elemanın çarpımında elemanların ard arda etkisine bundan dolayı eşit olur.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe Γ 'nın keyfi bir elemanının bileşenleri sırasıyla a, b, c, d ile gösterilecektir.

Modüler grup bu etki altında üst yarı düzlemi yörüngelere ayırır ve bu etki bir bağıntı tanımlar; $z, w \in \mathbb{H}$ için $z \sim_{\Gamma} w$ eğer $\exists \gamma \in \Gamma$ öyle ki $\gamma(z) = w$ ve bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 2.1.0.4. $D = \{z = x + iy : |x| < 1/2, |z| > 1\}$ kümesi modüler grup Γ için bir temel bölgedir yani şu özellikleri sağlar:

- D , \mathbb{H} 'de bir bölgedir,
- Γ 'nın her yörüngesinin bir elemanı D veya D nin sınırı, ∂D 'de bulunur,

- D 'nin hiçbir noktası birbirine denk değildir.

Bu teoremin ispatını yapmadan önce ispatta ihtiyacımız olacak bir lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.1.0.5. *Seçilen bir $z \in \mathbb{H}$ için Γz yörüngesinde yüksekliği, sanal kısmı, z den büyük olan sonlu sayıda eleman vardır, yani bir yörüngede en büyük yüksekliğe sahip elemanlardan bahsedilebilir.*

İspat: Herhangi $z \in \mathbb{H}$ ve $\gamma \in \Gamma$ alalım

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + d)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \operatorname{Re}(\gamma(z)) + \frac{i(ad - bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

$\gamma \in \Gamma$ olduğundan $ad - bc = 1$, buradan $\operatorname{Im}(\gamma(z)) = \operatorname{Im}(z)/|cz + d|^2$ olduğu ortaya çıkar ve $z \in \mathbb{H}$ için $\operatorname{Im}(\gamma(z)) \geq \operatorname{Im}(z)$ yapacak (c, d) ikililerinin sayısı sonludur, buradan da Γz de yüksekliği z den büyük olan sonlu sayıda eleman olduğu görülür. \square

İspat: [Teorem (2.1.0.4)] \mathbb{H} nin Γ altındaki keyfi bir yörüngesinde maksimal yüksekliğe sahip bir nokta seçelim bunu ötelemelerle, $z = x + iy$, $|x| \leq 1/2$ aralığına taşıyabiliriz o zaman açıkça

$$\begin{aligned} D' &= \left\{ z = x + iy \in \mathbb{H} : |x| < \frac{1}{2}, |cz + d| > 1 \forall c, d \in \mathbb{Z} \text{ with } c \neq 0 \right\} \\ &= \bigcap_{c, d \in \mathbb{Z}, c \neq 0} \left\{ z \in \mathbb{H} : |x| < \frac{1}{2}, |cz + d| > 1 \right\} \end{aligned}$$

kümesi Γ için bir temel bölgedir. D' ile D 'nin aynı küme olduklarını gösterebilirsek ispat tamamlanır. $c = 1, d = 0$ seçersek $D' \subseteq D$ olduğu görülür.

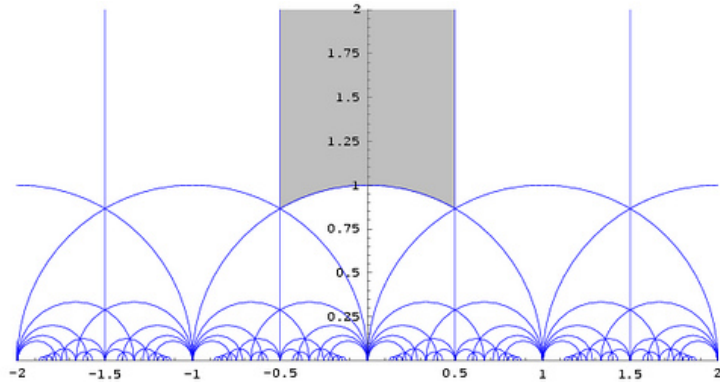
Öte yandan $\forall z \in D$ ve $c \neq 0$ için

$$|cz + d|^2 = c^2|z|^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2 > c^2 - |cd| + d^2 \geq 1$$

sağlandığından $D \subseteq D'$ olur, yani kümeler eşittir. \square

Modüler grup için bir temel bölge alalım. Denklik bağıntısını göz önüne alıp tersten gittiğimizde bu Γ 'nın bütün elemanlarının bu bölgenin kapanışı üzerine etkisiyle \mathbb{H} 'nin kapatılacağını söyler. Öte yandan daha önce Teorem (2.1.0.3) de S ve T matrislerinin modüler grup Γ 'yı ürettiklerini görmüştük.

Bu bilgiler birleştirildiğinde, Γ için bir temel bölgeye S ve T lerin ard arda uygulanışıyla \mathbb{H} nin kapatılabildiği sonucu ortaya çıkar. Aşağıda, [8] den alınmış figür bunu açıklar;



Şekil 2.1. Γ için bir Temel Bölge

2.2. Denklik Altgrupları

Bu bölümde, özellikle kuadratik formlar çalışılırken bolca karşılaşılan, modüler grubun önemli altgruplarına ve bu altgrupların sağladığı özelliklere bakacağız.

Bundan sonra $N \in \mathbb{Z}$ için N modundaki tamsayılar kümesini $\mathbb{Z}_N := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ile gösterelim.

Tanım 2.2.0.6. $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_N$ doğal homomorfizma, $\varphi(n) = \bar{n}$, modüler grup Γ dan $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ ye bir homomorfizma $\bar{\varphi}$ meydana getirir öyle ki,

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c) & \varphi(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Bu homomorfizmanın çekirdeği Γ_N ile gösterilir ve bu altgrubu kapsayan ve $SL_2(\mathbb{Z})$ de endeksi aynı olan herhangi bir özaltgruba (*modüler grubun*) N seviyesindeki denklik altgrubu denir.

Eş bir tanım olarak, $\bar{\varphi}$ homomorfizmasının çekirdeğine veya çekirdeğini kapsayan herhangi bir altgrubuna (*modüler grubun*) *denklik altgrubu* denir. Bu altgrubun içinde kalan T^N elemanlarının pozitif en küçük üssünde bu grubun seviyesi denir.

Denklik altgruplarına en basit örnek Γ_1 olabilir, açıkça $\Gamma_1 = \Gamma$ dır ve bu grubun seviyesi 1 dir.

$\bar{\varphi}$ nin bir homomorfizma olduğu $A, B \in \Gamma$ için $\bar{\varphi}(AB) = \bar{\varphi}(A)\bar{\varphi}(B)$ olduğu kolayca gösterilerek ispatlanabilir.

Aşağıdaki gruplar en önemli iki denklik altgrubudur;

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

Verilen kümelerin birer altgrup olduğu açıktır. Bunun yanısıra $\Gamma_0(N) \triangleright \Gamma_1(N) \triangleright \Gamma_N$ normal altgrup bağlantılarının olduğu aşıkardır.

İlgimizi Γ_N üzerine yoğunlaştıralım.

Teorem 2.2.0.7. Γ_N, Γ 'nın bir normal altgrubudur ve $\Gamma/\Gamma_N \cong SL_2(\mathbb{Z}_N)$ dir.

İspat: Bir homomorfizmanın çekirdeği normal altgrup olduğundan teoremin ilk kısmı ispata gerek duymaz.

Öte yandan teoremin ikinci kısmı için $\bar{\varphi}$ nin sadece $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ yi örten bir homomorfizma olduğunu göstermek gereklidir; gerisi birinci izomorfizma teoreminden açıktır. Örtenliği göstermek için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ nin bir elemanı olsun, yani $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ sağlansın. Bu $ad - bc + mN = 1$ eşitliğini sağlayan bir m tamsayısı olmasını gerektirir. Buradan $(c, d, N) := \text{ebob}(c, d, N) = 1$ olduğunu görürüz, demek ki öyle bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ki $(c, d + nN) = 1$ sağlanır. Bu bilgiyle artık genelliği bozmadan $(c, d) = 1$ olduğunu varsayabiliriz.

$A = \begin{pmatrix} a + eN & b + fN \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisine bakalım; bu matrisin determinanı $ad - bc + N(ed - fc) = 1 + N(m + ed - fc)$ dir. $(c, d) = 1$ olduğundan e, f tamsayılarını Bezout teoremi gereğince $m = fc - ed$ denklemini sağlayacak şekilde seçebiliriz bu da $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ olduğunu yani $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ den seçtiğimiz herhangi bir matris için $SL_2(\mathbb{Z})$ de bir matris bulabileceğimizi gösterir. \square

Denklik altgrupları için temel bölge inşa etmek istediğimizde koset temsilcilerine ve bunların sayılarına ihtiyacımız olacağından Γ_N nin Γ daki endeksini bulmaya çalışacağız. Önce bir tanım verelim.

Tanım 2.2.0.8. N tamsayısı için $(a, b, N) = 1$ özelliğini sağlayan a, b tamsayı çiftine N modunda primitif denir. N moduna göre primitif olan çiftlerin sayısını $\lambda(N)$ ile göstereyim.

Lemma 2.2.0.9. $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ nin elemanlarının ikinci satırları N moduna göre primitiftir.

İspat: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ de bir elemanı temsil ediyor olması $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ ya da bir m tamsayısı için $ad - bc + mN = 1$ demektir. Bu da zaten $(c, d, N) = 1$ olduğunu gösterir yani c, d çifti N moduna göre primitiftir. \square

Lemma 2.2.0.10. N moduna göre verilen (c, d) primitif çifti için $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ özelliğini sağlayan ve birbirlerine denk olmayan N adet (a, b) çifti bulunur. Verilen (c, d) primitif çifti için $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ de N adet $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi vardır.

İspat: (c, d) primitif çifti ve seçilen her $a \in \mathbb{Z}_N$ için $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ denklemini sağlayacak bir $b \in \mathbb{Z}_N$ bulunmalıdır, bu da zaten primitif (c, d) için, N adet (a, b) çifti olduğunu söyler. \square

Lemma 2.2.0.11. $\lambda(N)$, N 'ye göre çarpımsal bir fonksiyondur yani eğer $(p, q) = 1$ ise $\lambda(p)\lambda(q) = \lambda(pq)$ olur.

İspat: p_1, p_2 tamsayıları aralarında asal, $(p_1, p_2) = 1$, ve (c_i, d_i) çifti p_i moduna göre primitif çiftler olsun ($i = 1, 2$). O zaman $(c_1p_2 + c_2p_1, d_1p_2 + d_2p_1)$ çifti $(p_1, p_2) = 1$ olduğundan p_1p_2 moduna göre primitiftir. Buradan p_1 ve p_2 nin denk olmayan çiftlerinin p_1p_2 için denk olmayan çiftler ürettiği ortaya çıkar, yani $\lambda(p)\lambda(q) \leq \lambda(pq)$ sağlanır.

Öte yandan p_1p_2 için bir primitif (c, d) çifti alalım, bu çift hem p_1 e hemde p_2 ye göre primitif olmalıdır çünkü p_1, p_2 aralarında asallardır. Açıkça anlatmak gerekirse (c, d) primitif çifti $ad - bc \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$ denkleğini, $a, b \in \mathbb{Z}_{(p_1p_2)}$ için, sağlar. Bu denklikte tarafları p_i ye bölersek ($i = 1, 2$), denklik $p_1p_2/(p_1, p_2)$ modunda olacaktır ki bu sayı da ya p_1 ya da p_2 dir. Buradan da görülür ki $\lambda(p)\lambda(q) \geq \lambda(pq)$ sağlanır. \square

Lemma 2.2.0.12. p asal sayı ise $\lambda(p^k) = p^2k(1 - 1/p^2)$ olur.

İspat: Biliyoruz ki \mathbb{Z}_{p^k} da terslenebilir elemanların sayısı

$$|\mathbb{Z}_{p^k}^*| := |(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*| = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - 1/p)$$

dir.

Buradan p ile arasında asal olan bir $c \in \mathbb{Z}_{p^k}$ seçersek p^k moduna göre primitif çift oluşturacak d için p^k seçimimiz olur. Öte yandan eğer c, p ile aralarında asal değilse c için p^{k-1} seçenek vardır. Bu durumda d yi özel olarak p ile aralarında asal seçeriz yani d için $p^k(1 - 1/p)$ seçim yapılabilir. Bu iki koşulu toplarsak;

$$p^k(1 - \frac{1}{p}).p^k + p^{k-1}.p^k(1 - \frac{1}{p}) = p^k(1 - \frac{1}{p})(1 + \frac{1}{p}) = p^k(1 - \frac{1}{p^2})$$

primitif çift elde etmiş oluruz. \square

Artık Γ_N nin Γ daki indeksini önceki lemmaları kullanarak verebiliriz.

Teorem 2.2.0.13. $[\Gamma : \Gamma_N] = N^3 \prod_{p|N} (1 - \frac{1}{p^2})$

İspat: $[\Gamma : \Gamma_N]$ yi bulmanın $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ nin eleman sayısını bulmakla aynı soru olduğunu (2.2.0.7) de gösterildiği gibi $\Gamma/\Gamma_N \simeq SL_2(\mathbb{Z}_N)$ olduğundan biliyoruz. Aritmetiğin temel teoreminden N sayısının asal çarpanların çarpımı olduğunu göz önünde bulundurulursa, bu asal

ve asal sayı kuvvetleri için primitif eleman sayılarını (2.2.0.12) ile bulabiliriz. Bu çiftlerin çarpımlarının da primitif çiftler oluşturacağını (2.2.0.11) lemmasından biliyoruz ve son olarak (2.2.0.10) lemmasında ispatlandığı şekliyle her primitif çift için $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ de N adet matris bulunduğundan istenen sonuç ortaya çıkar. \square

Bundan sonraki sorular Γ_N için koset temsilcilerinin nasıl bulunacağı ve Γ_N için bir temel bölgenin nasıl inşa edileceği olabilir. Koset temsilcilerinin nasıl bulunacağını bilmekteyiz. Γ_N için bir temel bölgeyi ise şu şekilde inşa ederiz.

Theorem 2.2.0.14. Γ_N, Γ nin m endeksli denklik altgrubu olsun ve sağ koset temsilcilerini T_i ile adlandıralım ($i = 1, 2, \dots, m$). Eğer D modüler grup Γ için bir temel bölge ise,

$$D^* = \bigcup_{i=1}^m T_i D$$

Γ_N için bir temel bölgedir.

İspat: D^* kümesinin elemanlarının Γ_N etkisi altında bütün üst yarı düzlemi örttüğü açıktır. Herhangi seçilen bir $A \in \Gamma_N$ için $AD^* \cap D^* \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım, o zaman $\exists i, j \in 1, 2, \dots, m$ öyle ki $AT_i = T_j$ sağlanır; ancak bu açıkça bir çelişkidir. \square

Burada Γ_N için temel bölgenin tanımı (2.1.) üzerinde verilen denklik bağıntısının denklik grupları üzerine genişletilmesiyle de gösterilebilir. Yani $z, w \in \mathbb{H}$ için $\gamma(z) = w$ sağlanacak $\exists \gamma \in \Gamma_N$ var ise z ve w Γ_N altında denktir denir, $z \sim_{\Gamma_N} w$ şeklinde gösterilir ve bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Böylece birbirinden bağımsız yörüngelerin elemanlarının temel bölge özelliklerini sağlayan bir kümesi de Γ_N için bir temel bölge olur.

2.3. Modüler Grup ve Denklik Altgruplarında SAGE ile işlemler

SAGE her türlü matris cebiri işlemini yapabilir. $\cdot + \cdot, \cdot - \cdot, \cdot * \cdot, \cdot ^{-1}, transpose(\cdot)$ işlemleri sırasıyla matrisleri toplama, çıkarma, çarpma, tersini alma ve transpozunu almaya tekabül eder¹.

¹Bunun dışındaki her türlü işlemler ve SAGE hakkında öğrenilmek istenilen şeyler için "<http://www.sagemath.org/doc/reference/>" sitesine başvurulabilir.

SAGE, modüler grubu bir obje olarak hafızasında tutabilir ve üreteçlerini bulabilir. SAGE komutlarını altlarında sonuçları ile verirsek;

```
SAGE:SL2Z=SL(2,ZZ); SL2Z
```

Special Linear Group of degree 2 over Integer Ring

```
SAGE: SL2Z.gens()
```

```
[  
[ 0 1]  
[-1 0],  
[1 1]  
[0 1]  
]
```

SAGE nin verdiği üreteç matrisleri kullanmak için isim vermek de mümkündür;

```
SAGE: S,T = SL2Z.gens()
```

```
SAGE: S
```

```
[ 0 1]  
[-1 0]
```

Denklik altgrupları olarak SAGE ye $\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_1(N)$ yi tanıtabiliriz. $\Gamma_1(N)$ için koset temsilcileri aşıkardır; ancak bunun dışında SAGE, $\Gamma_0(N)$ için de koset temsilcilerini bulabilir.

Bundan sonra SAGE ile yapacağımız işlemlerdeki adımlar için $N = 21$ seçelim.

```
SAGE:G0 = Gamma0(21); G0
```

```
Congruence Subgroup Gamma0(21)
```

```
SAGE:G1 = Gamma1(21); G1
```

```
Congruence Subgroup Gamma1(21)
```

```
SAGE: list(G0.coset_reps())
```

```
[[1, 0, 0, 1], [0, -1, 1, 0], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 1, 3], [-1, -1, 2, 1]]
```

Burada SAGE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şeklindeki bir matrisin gösterimini $[a, b, c, d]$ şeklinde yapmaktadır.

Bu özelliklerin dışında SAGE, modüler gruba ve denklik altgruplarını birer obje olarak aldığı için bir matrisin bizim denklik altgrubumuzda (ya da modüler grupta) olup olmadığını şu şekilde sorabiliriz.

```
SAGE: [1,1,0,1] in G1
```

```
True
```

```
SAGE: [3,1,8,3] in G1
```

```
False
```

```
SAGE: [3,1,8,3] in G
```

```
True
```

Bunun dışında SAGE bu tip denklik altgruplarının üreteç elemanlarını da bu grubun $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ içindeki görüntüsüne bakarak ve $\Gamma(N)$ nin üreteçlerini bu listeye ekleyerek bulabilir ve Γ gibi listeleyebilir.

Daha ileride de birçok defa SAGE nin kullanımları ile komutların ve sonuçların ne anlama geldiğine bakacağız.

BÖLÜM 3

3. Modüler Formlar

Modüler formlar konusuna giriş yapmadan önce bu konunun karşımıza nerelerde çıktığına bakalım. Bu iki bölümde üstünden geçeceğimiz bazı fikirleri daha sonra modüler formlar üzerinde de kullanacağız.

3.1. Modüler Formların Gelişimi

3.1.1 Periyodik Fonksiyonlar

Periyodik fonksiyonların tanımını vererek başlayalım. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon eğer

$$f(x + n) = f(x), \forall n \in \mathbb{Z}$$

özelliğini sağlıyor ise bu fonksiyona 1 *periyotlu periyodik fonksiyon* denir. Periyot özel olarak belirtilmedikçe 1 olarak alalım.

Basit bir örnek olarak trigonometrik fonksiyonları gösterebiliriz. Sinüs fonksiyonunu ele alalım; her $n \in \mathbb{Z}$ için $\sin(x) = \sin(x + 2n\pi)$ olduğundan bu fonksiyon 2π periyotlu periyodik bir fonksiyondur. Buradan basit bir modifikasyon yaparsak $f(x) := \sin(2\pi x)$ fonksiyonu bir periyotlu periyodik fonksiyon olduğunu görürüz.

Biraz daha komplike bir metodla özel fonksiyonlardan nasıl periyodik fonksiyonlar elde edilebileceğine bakalım.

Tanım 3.1.1.1 (Hızla Azalan). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu eğer $\forall a \in (0, 1)$ pozitif sayısı için

$$|f(x)| < a^{|x|}$$

özelliğini yeterince büyük x değerleri için sağlıyor ise, f fonksiyonuna *hızla azalan* denir.

Periyodik fonksiyonlara geri dönelim; hızla azalan bir f fonksiyonu alırsak

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \quad (3.1.1)$$

fonksiyonu mutlak yakınsaktır ve dahası açıkça periyodiktir.

Bunu basitçe ispatlayalım, hızla azalan özelliğinden dolayı

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) < \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < \infty$$

sağlanır; buradan mutlak değerler alarak, $g(x)$ 'in mutlak yakınsak olduğu görülür.

Periyodik fonksiyonlar konusunda

$$e(x) := e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$$

fonksiyonu çok önemli bir yer tutar. Her periyodik ve parçalı sürekli fonksiyonun, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, Fourier seri gösterimi vardır; öyle ki sabitler

$$a_n = \int_0^1 f(x) e(-nx) dx \quad (3.1.2)$$

olmak üzere f fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx) \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılır.

Dahası eğer f sürekli bir fonksiyon ise (3.1.3) serisi mutlak yakınsak, dolayısıyla düzgün yakınsaktır.

(3.1.1) fonksiyonu periyodik ve parçalı süreklidir yani Fourier serisi gösterimi için gereken özellikleri sağlar. Burada $\hat{f}(y)$, f fonksiyonunun \mathbb{R} üzerinde Fourier dönüşümü olsun. Fourier

serisi bileşenlerine bakarsak;

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)e(-nx)dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x)e(-n(x-k))dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e(-nx)e(nk)dx = \hat{f}(x)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eşitlikte $n, k \in \mathbb{Z}$ olduğundan $e(nk) = e^{2\pi ink} = 1$ olur. Düzgün şekilde yazarsak

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e(-nx)e(nk)dx = \hat{f}(x)$$

elde ederiz.

Buradan (3.1.3) seri açılımı, (3.1.1) de verilen $g(x)$ fonksiyonu için şu şekle dönüşür.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e(nx)$$

Bu eşitlikte $x = 0$ olarak alırsak çıkan sonuç *Poisson Toplam Formülü*'dür.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

ve bu argüman sadece f ve \hat{f} hızla azalan ise geçerlidir.

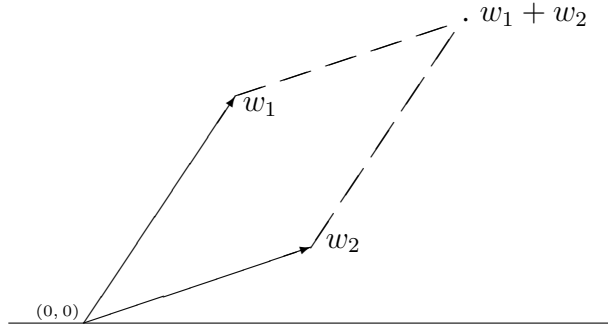
Şimdi çift periyotlu fonksiyonları incelemeye başlayabiliriz.

Tanım 3.1.1.2 (Çift Periyotlu Fonksiyonlar). Eğer $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu argümanları birbirinden farklı w_1 ve w_2 kompleks sayılarına göre periyodik ise, yani $\forall z \in \mathbb{C}$ ve $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ için $f(z + nw_1 + mw_2) = f(z)$ sağlanıyor ise bu fonksiyona *çift periyotlu fonksiyon* denir.

Burada çift periyotlu fonksiyonları periyodik fonksiyonlardan ayıran asıl özellik w_1 ve w_2 nin argümanlarının birbirinden farklı olmasıdır, başka bir deyişle $w_1/w_2 \notin \mathbb{R}$ dir. Bu bölümde bundan sonra w_1 ve w_2 nin argümanlarının farklı olduğunu düşüneceğiz.

Eğer w_1 ve w_2 kompleks sayıları f çift periyotlu fonksiyonunun her periyodunu lineer kombinasyon olarak oluşturuyorsa (w_1, w_2) çiftine *temel periyot çifti* denir. Temel periyot çifti tek değildir ve dahası bir çiftten başka bir çifte geçiş yapılabilir.

$\Lambda(w_1, w_2) := \{nw_1 + mw_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlanan noktalar kümesi üreteçleri tek şekilde yazılabilen (free) toplamsal bir gruptur ve w_1, w_2 sayılarının ürettiği *kafes* olarak adlandırılır. Periyot çiftlerinin ürettiği kafeslere periyot kafesleri denebilir.



Şekil 3.1. Bir kafes için paralelkenar

İki temel periyot çifti (w_1, w_2) ve (w'_1, w'_2) eğer ürettikleri periyot kafesleri aynı ise denktir denir. Yani periyot çiftleri denk olduğunda $\Lambda(w_1, w_2) = \Lambda(w'_1, w'_2)$ gerçekleşir.

Teorem 3.1.1.3. (w_1, w_2) ve (w'_1, w'_2) çiftleri denk ise $\exists \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ öyle ki

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ yani açıkça gösterirsek } \begin{matrix} w'_1 = aw_1 + bw_2 \\ w'_2 = cw_1 + dw_2 \end{matrix} \quad (3.1.4)$$

gerçeklenir.

Bu teoremin ispatını (2.1.0.3) teoreminin ispatında $SL_2(\mathbb{Z})$ nin \mathbb{H} üzerine etkisini düşünerek kolayca elde edebiliriz.

Periyodik fonksiyonların bir ileri seviyesi çift periyotlu fonksiyonlar bize birçok teknik ve bilgi zenginliği sunar. Burada \mathbb{C} , kompleks yapıları bir Riemannian yüzeyi (manifold) olarak düşünülür, yani üzerinde bir metrik vardır ve lokal olarak Euclid uzayına izomorftur; dahası üzerinde analiz (calculus) yapılabilir. Bundan dolayı burada, tanımını daha sonra vereceğimiz meromorfik fonksiyonları çalışabiliriz ve sadece bunları çalışarak bile, fonksiyonların kök ve kutuplarını incelemeye dayanan önemli özellikler elde edebiliriz.

3.1.2 Eliptik Fonksiyonlar

Modüler formlara gelmeden önce kompleks analizden, modüler formların tanımını üstüne kuracağımız bir tanım vermemiz gerekiyor.

Tanım 3.1.2.1 (Holomorfik ve Meromorfik). \mathcal{R} , kompleks düzlem \mathbb{C} nin açık bir kümesi olsun. $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu eğer \mathcal{R} de analitik ise bu fonksiyona *holomorfik* denir.

$f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu eğer \mathcal{R} de sayılabilir nokta dışında analitik ve analitikliğin bozulduğu ξ noktaları için $(z - \xi)^n f(z)$ fonksiyonunu ξ de kompleks türeve sahip hale getirecek $n \in \mathbb{Z}^+$ bulunabiliyor ise (f nin ξ de n . dereceden kutbu var ise) *meromorfik* tir.

Örnek. e^z fonksiyonu \mathbb{C} de analitiktir ve burada hiç bir kutup noktası bulunmaz, ondan \mathbb{C} de holomorftir. Aynı şekilde bütün sabit fonksiyonlarda \mathbb{C} de holomorftir.

Öte yandan $f(z) = 1/(z - 5)^2$ fonksiyonunun $z = 5$ noktasında 2. dereceden kutbu vardır ve onun dışındaki her yerde analitiktir. Yani $f(z)$ fonksiyonu 5 i içeren herhangi bir açık küme üzerinde meromorftir; ancak 5 i içermeyen herhangi bir açık küme üzerinde holomorftir.

Bütün holomorfik fonksiyonlara meromorfik fonksiyonlar olarak da bakılabilir.

Eliptik fonksiyonlar ilk olarak eliptik integrallerin ters fonksiyonları olarak ortaya çıkmışlardır; ancak biz eliptik fonksiyonları daha sonradan çalışılan meromorfikliğe dayalı özellikleriyle inşa edeceğiz. Bunun için önce bir tanım verelim.

Tanım 3.1.2.2 (Eliptik Fonksiyonlar). $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu eğer çift periyotlu meromorfik bir fonksiyon ise f ye eliptik denir.

Eliptik fonksiyonun sabit fonksiyon olmayan bir örneğini vermek hiç kolay değildir. Buna zemin oluşturmak için önce bazı özelliklerini ispatlamadan verelim.

Özellik 3.1.2.3. Sabit olmayan eliptik bir fonksiyonun temel periyot çifti bulunur.

Bir eliptik fonksiyon için herhangi bir temel periyot çiftinin (3.1.1) deki şekilde olduğu gibi içinde kalan alana temel paralelkenar denir.

Önemli bir sonuç olarak, Liouville teoreminden sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun kafes elemanlarının parçaladığı bir paralelkenar içinde en az bir adet kutup noktası bulunması gerektiği açıktır; aksi takdirde periyodiklik nedeniyle herhangi bir kafes içersinde kutup bulunmayacağından fonksiyonun \mathbb{C} üzerinde bir kutbunun olmadığı ve bundan dolayı sabit olduğu ortaya çıkar.

Özellik 3.1.2.4. Bir eliptik fonksiyon için temel paralelkenarın sınırlarında alınan kapalı kontur integralinin sonucu sıfırdır.

Eliptik fonksiyonlar periyodik olduğundan dolayı bunu göstermek çok kolaydır, paralelkenarın karşılıklı kenarları birbirleriyle sadeleşir; ancak daha önemli bir sonuç Rezidü teoreminden hemen ortaya çıkar. Fonksiyonun kapalı bir kontur üzerinde integrali alındığından dolayı bu integralin değeri rezidülerinin toplanması olmalıdır yani daha açıkçası fonksiyonun en azından birbirini sadeleştirebilecek iki kutup noktası veya rezidü bırakmayacak ikinci dereceden bir kutup noktası olması gerekmektedir.

f eliptik bir fonksiyon ise f' de aynı periyotlara sahip eliptik bir fonksiyondur. Buradan f'/f fonksiyonunun da eliptik olacağı görülür. Bu fonksiyonun temel paralelkenar üzerindeki integrali (3.1.2.4) ten sıfır olur; Rezidü teoreminden bu integral f fonksiyonunun dereceleri ile birlikte sıfırlarının sayısının kutuplarının sayısından farkıdır; yani bir eliptik fonksiyonun temel paralelkenarda veya diğer bütün paralelkenarlarda sıfırlarının sayısı ve kutuplarının sayısı dereceleri ile birlikte sayıldıklarında birbirlerine eşittir.

Artık sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun inşasına geçebiliriz. Burada n, m tamsayılar (w_1, w_2) temel periyod çifti olmak üzere $w = nw_1 + mw_2$ olsun. Weierstrass'ın yöntemini izleyerek $z = 0$ noktasında rezidü bırakmayacak ikinci dereceden kutup noktası olan bir fonksiyon fikriyle yola çıkarsak, her kafes noktası w da fonksiyonun Laurent açılımı vardır ve serinin esas kısmı

$$\frac{A}{(z-w)^2} + \frac{B}{(z-w)}$$

şeklindedir. Fonksiyonun rezidüsü 0 olacağından $B = 0$ olmalıdır, kolaylık açısından $A = 1$ seçilebilir.

Buradan (3.1.1) fikrini kafes elemanları için uygularsak,

$$\sum_{w \in \Lambda(w_1, w_2)} \frac{1}{(z - w)^2}$$

serisini elde ederiz. Bu seri kafes noktalarında 2. dereceden kutup noktasına sahip olur; ancak seri mutlak yakınsak değildir. Bu nedenle, aynı fikri kullanarak

$$f = \sum_{w \in \Lambda(w_1, w_2)} \frac{1}{(z - w)^3}$$

fonksiyonunu ele alırız; açıkça bu, mutlak yakınsak ve her kafes noktasında 3. dereceden kutup noktasına sahip bir fonksiyondur.

Eğer bu fonksiyonun 0 dan z ye integralini alırsak yeni fonksiyonun kutup noktaları gene kafes noktalarında 2. dereceden olur ve integrasyon sonrasında elde edilen seriyi -1 ile çarparsak *Weierstrass \wp fonksiyonunu* elde ederiz.

$$\wp := \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq w \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{(z - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}. \quad (3.1.5)$$

Eliptik fonksiyon olarak Weierstrass \wp fonksiyonu bir çok özelliği sağlıyor olsa da biz sadece modüler fonksiyonlara geçiş için önemli kısımlarını inceleyeceğiz.

(3.1.5) serisi, üzerinde modifikasyon yapılarak,

$$\wp = z^{-2} + \sum_{m=1}^{\infty} (m + 1) G_{m+2} z^m$$

şekline

$$G_k(w) = \sum_{0 \neq w \in \Lambda} w^{-k} \quad (3.1.6)$$

olmak üzere sokulabilir.

Aynı zamanda Weierstrass \wp fonksiyonu

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

diferensiyel gecikme denklemini sağlar. Buradaki g_2, g_3 katsayıları sırasıyla;

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6$$

dır. Ayrıca bir diğer önemli değişmez olarak diferensiyel gecikme denkleminin diskriminantını gösterebiliriz;

$$\Delta(w) = g_2^3 - 27g_3^2$$

dir. Dahası $\Delta(w)$ sıfır değerini hiçbir kafes için almaz

G_m serisine *Eisenstein serisi* adı verilir. İlgimizi burada karşımıza çıkan G_m Eisenstein serisine (veya Δ ya) çevirirsek bunun $\Lambda(w_1, w_2)$ kafesinin bir fonksiyonu olduğunu görürüz. Tanımından dolayı eliptik fonksiyonun temel periyot çifti denk bir çift ile değiştirilse de fonksiyonun sabit kalacağını söyleyebiliriz; ancak kafes değişirse Eisenstein serisinin (veya Δ nın) değeri de değişir yani kafesin bir fonksiyonu olan Eisenstein serisi (veya dolaylı yoldan Δ) sabit bir fonksiyon değildir.

Özel olarak Δ nın sabit bir fonksiyon olmadığını göstermek için G_4 ve G_6 nın kök ve kutup noktaları karşılaştırılmalıdır.

3.2. Modüler Formlar

3.2.1 Modüler Formların Tanımı ve Bazı Örnekler

Modüler formların resmi tanımı verilmeden önce daha anlaşılır olması açısından bu fonksiyonları kısaca, modüler grup veya denklik altgruplarından bazılarının etkisi altında etkiye bağlı olarak değerlerinde bir deformasyon gösteren kompleks analitik fonksiyonlardır şeklinde anlatabiliriz.

Bundan sonraki bölümlerde (2.2.) bölümünden farklı olarak Γ_N, Γ elemanlarının N modundaki görüntüleriyle eşleşmesinin çekirdeğini kapsayan ve çekirdekle aynı endekse sahip olan

herhangi bir denklik altgrubunu temsil edecek.

Tanım 3.2.1.1 (Modüler Formlar). Γ_N , N dereceli denklik altgrubunu belirtsin. Eğer bir f fonksiyonu $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerinde holomorfik ve $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_N$ ve $\forall z \in \mathbb{H}$ için

$$f(z) = (cz + d)^{-k} f(\gamma(z)) = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

özellği sağlanıyor ise f fonksiyonuna Γ_N üzerinde k ağırlıklı modüler form denir. Farklı kaynaklarda Γ_N üzerinde yerine bazen N seviyeli dendiği de görülebilir.

Modüler formlar hakkında yapabileceğimiz bir gözlem alınan denklik alt sınıfı bu fonksiyonlar üzerinde kısıtlama yarattığıdır yani Γ ya endeksi ne kadar büyük denklik altgrupları seçersek bu denklik altgrubu üstündeki modüler formların o kadar az özelliği sağlamalarına gerek olur.

Örnek. Sabit fonksiyonlar Γ üzerinde 0 ağırlıklı modüler formlardır.

Elimizde başka bir örnek olması açısından bir önceki bölümün sonunda verilen G_k Eisenstein serisine $\Lambda(w_1, w_2)$ kafesinin bir fonksiyonu olarak tekrar bakalım

$$\begin{aligned} G_k(w_1, w_2) &= \sum_{0 \neq w \in \Lambda} \frac{1}{w^k} \\ &= \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^k} \end{aligned}$$

Burada w_1 ve w_2 , $\text{Im}(w_1/w_2) > 0$ kalacak şekilde yeniden isimlendirilebilir, Bundan sonra $z = w_1/w_2$ nin üst yarım düzlem \mathbb{H} da kaldığını düşüneceğiz. Öyleyse Eisenstein serisi $G_k(w_1, w_2)$ kafesinin bir fonksiyonu olarak değil, üst yarım düzlemde kompleks sayılara bir fonksiyon olarak da düşünülebilir, bunun için tek yapılması gereken bir önceki tanımda w_1 yerine z , w_2 yerinde 1 koymaktır.

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz + n)^k}$$

Burda dikkat edilirse $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ için $G_k(z) = (cz + d)^{-k} f(\gamma(z))$ sağlanır yani

Eisenstein serisi sabit olmayan, Γ üzerinde k ağırlıklı bir Modüler formdur.

Modüler formların özelliklerinden bahsetmeye başlayalım. f , Γ ve $\Gamma_0(N)$ üzerinde tek $k \in \mathbb{Z}$ ağırlıklı bir modüler form olsun. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ ($\in \Gamma_0(N)$) olduğundan

$$f(z) = (-1)^k f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(z)\right) = -f(z) \Rightarrow f(z) \equiv 0$$

olduğu görülür. Yani tek ağırlıklı modüler form yoktur.

Tanımdan kolay bir şekilde çıkarılabilecek iki özelliği yazıp ispat edelim.

Özellik 3.2.1.2. Γ_N üzerinde sırasıyla k_1 ve k_2 ağırlıklı iki modüler formun çarpımı gene Γ_N üzerinde $k_1 + k_2$ ağırlıklı bir modüler formdur.

İspat: f ve g , Γ_N üzerinde sırasıyla k_1 ve k_2 ağırlıklı modüler formlar olsun. $\forall \gamma \in \Gamma_N$ için $h(z) := f(z)g(z)$ fonksiyonu,

$$h(z) = (cz + d)^{k_1} f(\gamma z) (cz + d)^{k_2} g(\gamma z) = (cz + d)^{k_1 + k_2} f(\gamma z) g(\gamma z) = (cz + d)^{k_1 + k_2} h(\gamma z)$$

şeklinde olduğundan Γ_N üzerinde $k_1 + k_2$ ağırlıklı bir modüler form olur. \square

Örnek. $\Delta(z) = g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2 = (60G_4(z))^3 - 27(140G_6(z))^2$ bu özellikten dolayı, Γ üzerinde, 12 ağırlıklı bir modüler formdur.

Özellik 3.2.1.3. f , Γ_N üzerinde k_1 ve g , Γ_M üzerinde k_2 ağırlıklı iki modüler form ise $h(z) := f(z)g(z)$, $\Gamma_N \cap \Gamma_M$ üzerinde $k_1 + k_2$ ağırlıklı bir modüler formdur.

İspat kesişimden bir eleman alınarak bir önceki ispatın tekrarlanmasıyla açıkça görülür.

Verilen tanım ve özellikler ne kadar modüler formları anlamamızda bize yardımcı olsa da modüler formlar üzerinde hesaplamalar için $GL_2(\mathbb{Q})$ 'nin fonksiyonlar üzerine etkisini tanımlayalım. Daha sonra bu etki altında modüler formların yukarıda yazan tanıma eş olan tanımını verelim.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $GL_2(\mathbb{Q})$ 'nin \mathbb{H} den \mathbb{C} 'ye k ağırlıklı sağ etkisini tanımlayalım. $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q})$ olmak üzere;

$$(f^{[\gamma]^k})(z) := \det(\gamma)^{k-1}(cz + d)^{-k} f(\gamma(z)) \quad (3.2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.2.1.4. (3.2.7) formülü $GL_2(\mathbb{Z})$ 'nin \mathbb{H} den \mathbb{C} 'ye fonksiyonların üzerine bir sağ etki meydana getirir. Özel olarak $\gamma_1, \gamma_2 \in GL_2(\mathbb{Z})$ olmak üzere,

$$f^{[\gamma_1\gamma_2]^k} = (f^{[\gamma_1]^k})^{[\gamma_2]^k} \quad (3.2.8)$$

İspat: (3.2.7)'nin $GL_2(\mathbb{Z})$ içinde bir sağ etki meydana getirdiği $GL_2(\mathbb{Z}) \trianglelefteq GL_2(\mathbb{Q})$ olduğundan açıktır.

Şimdi (3.2.8)'i ispatlayalım. $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ olsun. Buradan matrislerin çarpımı $\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{pmatrix}$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} (f^{[\gamma_1\gamma_2]^k})(\tau) &= \det(\gamma_1\gamma_2)^{k-1}((cw + dy)\tau + (cx + dz))^{-k} f(\gamma_1\gamma_2\tau) \\ &= \det(\gamma_1)^{k-1} \det(\gamma_2)^{k-1} (c(w\tau + x) + d(y\tau + z))^{-k} f(\gamma_1\gamma_2\tau) \\ &= \det(\gamma_1)^{k-1} \det(\gamma_2)^{k-1} (y\tau + z)^{-k} (c(\gamma_2\tau + d))^{-k} f(\gamma_1\gamma_2\tau) \\ &= \det(\gamma_2)^{k-1} (y\tau + z)^{-k} (f^{[\gamma_1]^k})(\gamma_2\tau) \\ &= (f^{[\gamma_1]^k})^{[\gamma_2]^k}(\tau) \end{aligned}$$

□

Tanımladığımız bu etkiden sonra modüler fonksiyonları şöyle tekrar tanımlayabiliriz.

Tanım 3.2.1.5 (Modüler Form). $f(z)$, \mathbb{H}^* kümesinde holomorfik fonksiyonuna $\forall \gamma \in \Gamma_N$ için eğer $(f^{[\gamma]^k})(z) = f(z)$ özelliğini sağlıyor ise Γ_N üzerinde k ağırlıklı bir *modüler form* denir

Bu tanım daha önce verdiğimiz (3.2.1.1) tanımıyla eşitir çünkü bu tanımı açarsak her $\gamma \in \Gamma_N$

için $(f^{[\gamma]^k})(z) = \det(\gamma)^{k-1}(cz + d)^{-k}f(\gamma(z)) = (cz + d)^{-k}f(\gamma(z)) = f(z)$ eşitliklerini görürüz ki bu eşitliklerin sonucusu ile birlikteki varsayımlarımız modüler formlar için verdiğimiz ilk tanımdır.

3.2.2 Eisenstein Serisinin Fourier Açılımı

Eisenstein serisinin tanımını hatırlatmakla başlarsak, k çift doğal sayısı ve (m, n) tamsayılar çifti için

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz + n)^k}$$

serisine k ağırlıklı *Eisenstein serisi* denir. Bunun yanısıra yakınsaklık için $k > 2$ olması gerektiği bilinen bir gerçektir. Bu fonksiyonun $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ üzerinde k ağırlıklı bir modüler form olduğunu bir önceki bölümde belirttik yani bu fonksiyon \mathbb{H}^* üzerinde holomorftir.

Bir küçük gözlemle yola çıkarsak, $G_k(z)$ daha önce tanımladığımız $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin etkisi altında sabit kalır;

$$G_k^{[T]^k}(z) = \det(T)^{k-1}(0z + 1)^{-k}G_k(Tz) = G_k(Tz)$$

Öte yandan $e(z) = e^{2\pi iz}$ fonksiyonunda T nin etkisi altında sabittir ve \mathbb{C}/T sonsuz şeridini \mathbb{C}^* orijin noktası olmayan kompleks düzlemine birebir eşler yani bir izomorfizmadır. Sonuç olarak \mathbb{H} üzerinde holomorftir ve T nin etkisi altında değişmez (1 periyotlu bir periyodik fonksiyon olarakta gözlemleyebiliriz) olan bir f fonksiyonu, $g(q)$ \mathbb{C}^* üzerinde holomorftir bir fonksiyon olmak üzere $f(z) = g(e(z))$ şeklinde yazılabilir. $f(z)$ nin $z = \infty$ holomorftir olması $g(q)$ nun $q = 0$ da holomorftir olması demektir, ve $g(q)$ nun $q = 0$ noktasında Laurent seri açılımı vardır hatta bu noktada holomorftir olduğundan seri açılımının esas bölümü 0 dır.

$$f(z) = g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

Bu seri açılımı T etkisi altında değişmeyen bir fonksiyon için ∞ noktasında açılmış seri açılımı olarak görülebilir ve meromorftir fonksiyonlar için bu yapılanma genişletilebilir.

Burada $q = e(z)$ dir, bundan sonrada aksi belirtilmedikçe bu şekilde kullanılacaktır.

Bu yapılanma Eisenstein serisinin Fourier açılımı olduğunu gösterir ve bu seri açılımı $\pi \cos \pi z / \sin \pi z$ fonksiyonunun seri açılımında akıllıca modifikasyonlar yapılarak elde edilmiştir ve şu şekildedir;

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{\Gamma(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

Burada $\zeta(k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ Riemann zeta fonksiyonu, $\Gamma(k) := \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt = (k-1)!$ Gamma fonksiyonu ve $\sigma_s(n) := \sum_{1 \leq d|n} d^s$ şeklinde verilmiş aritmetik fonksiyonlardır. Bu noktada Eisenstein serisinin sayılar teorisinde önemli bir yer tuttuğunu hemen anlayabiliriz çok basit bir örnek olarak Riemann zeta fonksiyonunun çift k tamsayısındaki değerini, $G_k(z)$ yi oluşturup $z \rightarrow \infty$ bakarak hemen elde edebiliriz.

Aynı şekilde $\Delta(z) = g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2$ nin Fourier açılımını verirsek sabit terimin sadeleştiğini görürüz. $\tau(n)$ Ramanujan fonksiyonu olmak üzere $\Delta(z)$ nin Fourier açılımı şu şekildedir;

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

Biraz hesaplamadan bahsetmek gerekirse, SAGE verilen bir ağırlık k için bu seri açılımlarını istenilen netliğe kadar seri açılımının formülü belli olduğu için yapabilir ve bu seri birer obje olarak hafızasında tutar ki, bize seri çarpımı toplamı gibi işlemleri yapma esnekliği kazandırır. SAGE Eisenstein serilerinin ve Δ nın q açılımını normalize edilmiş fonksiyonlara göre yapmaktadır yani q nun katsayısı daha sonraki amaçlar için hep birdir. SAGEde Eisenstein serisi $E_k = G_k/a_1$ ve $\Delta_{\text{SAGE}} = \Delta/(2\pi)^{12}$ şeklindedir.

SAGEden örnek verelim.

SAGE: E4 = eisenstein_series_qexp(4)

$$1/240 + q + 9*q^2 + 28*q^3 + 73*q^4 + 126*q^5 + 252*q^6 + 344*q^7 + 585*q^8 + 757*q^9 + O(q^{10})$$

SAGE: E6 = eisenstein_series_qexp(6)

$$-1/504 + q + 33 * q^2 + 244 * q^3 + 1057 * q^4 + 3126 * q^5 + 8052 * q^6 + 16808 * q^7 + 33825 * q^8 + 59293 * q^9 + O(q^{10})$$

Hesaplama netliğini 6ya ayarlarsak SAGE bize q seri açılımının 6 ya kadar olan bölümünü verecektir;

SAGE: eisenstein_series_qexp(18,6)

$$-43867/28728 + q + 131073 * q^2 + 129140164 * q^3 + 17180000257 * q^4 + 762939453126 * q^5 + O(q^6)$$

Δ in seri açılımında SAGE otomatik olarak yapabilir ve bu modüler formun ağırlığı belli olduğu için bilgisayara verdiğimiz sayı komutu netliği belirtmektedir.

SAGE: delta_qexp(5)

$$q - 24 * q^2 + 252 * q^3 - 1472 * q^4 + O(q^5)$$

Bu serilerle işlem yapılabilmesine basit bir örnek olarak

SAGE: E4^2

$$1/57600 + 1/120 * q + 43/40 * q^2 + 547/30 * q^3 + 16513/120 * q^4 + 13021/20 * q^5 + 23521/10 * q^6 + 102943/15 * q^7 + 140911/8 * q^8 + 4785157/120 * q^9 + O(q^{10})$$

SAGE: E4^2-E6

$$269/134400 - 119/120 * q - 1277/40 * q^2 - 6773/30 * q^3 - 110327/120 * q^4 - 49499/20 * q^5 - 56999/10 * q^6 - 149177/15 * q^7 - 129689/8 * q^8 - 2330003/120 * q^9 + O(q^{10})$$

verilebilir. Son yapılan iki işlem hakkında biraz daha bilgi vermek gerekirse (3.2.1.2) dan bilindiği üzere $E4^2$ kendisiyle çarpım olduğu için artık 8 ağırlıklı bir modüler formdur ancak $E4^2-E6$ bir modüler form mudur bu noktada cevaplanamaz.

Bu bölümde dikkat edersek Γ modüler grubu altında modüler formların seri açılımlarından bahsedildi ancak bunun herhangi bir denklik alt grubuna da geliştirilmesi yapılmıştır yani herhangi bir denklik alt grubunun altında bir modüler form aldığımız zaman gene bu modüler for-

mun holomorfiklik özellikleri sayesinde $z = \infty$ noktasındaki Fourier serisi açılımı hakkında bahsedilebilir.

3.2.3 Cusp Formlar

Modüler Formların tanımından sonra, bu teorinin merkez objelerinden biri olan *cusplar kümesi*'ni ve Γ 'nin bu küme üzerine etkisine bakalım. *Cusplar kümesi*;

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

dir.

$\Gamma = GL_2(\mathbb{Q})$ 'in herhangi bir $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanı $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ üzerine şu şekilde etki eder;

$$\gamma(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{eğer } z \neq \infty \\ \frac{a}{c} & \text{eğer } z = \infty \end{cases}$$

Özel olarak eğer c veya $cz + d$ sıfır ise,

$$\gamma(z) = \infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$$

şeklinde tanımlanır.

Denklik altgrubu Γ_N 'in cusp noktalarının birbirlerinden farklı yörüngelerinin kümesini $C(\Gamma_N)$ ile gösterelim. $C(\Gamma_N)$ 'in elemanlarını, yörüngeleri, bir temsilci eleman ile belirteceğiz.

Lemma 3.2.3.1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ için öyle bir $\gamma \in \Gamma$ vardır ki $\gamma(\alpha) = \beta$ gerçekleşir.

İspat: $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ olduğu için iki durum vardır. Eğer $\alpha \in \mathbb{Q}$ ise öyle iki aralarında asal tam sayı p, q vardır ki $\alpha = p/q$ dur. Bezout teoreminden o zaman p, q için $pd + qb = 1$ eşitliğini sağlayacak b, d ikilisi vardır. Bundan dolayı $\gamma_\alpha = \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ dir ve $\gamma_\alpha(\infty) = \alpha$ sağlanır. aynı şekilde eğer β da rasyonel ise bir γ_β matrisi vardır (değilse $\gamma_\beta = I$ alınır). O zaman

$\gamma_\beta \gamma_\alpha^{-1}$ matrisi α yı β ya taşır. □

Lemma 3.2.3.2. *Herhangi bir denklik altgrubu Γ_N için birbirine denk olmayan cusplar kümesi $C(\Gamma_N)$ sonlu elemanlıdır.*

İspat: Denklik altgrubu Γ_N 'in Γ da ki indeksi m olsun. O zaman $\exists T_i \in \Gamma, i = 1, 2, \dots, m, \Gamma_N$ için bir temel bölge $D_{\Gamma_N} = T_1 D \cup T_2 D \cup \dots \cup T_m D$ dir. Bu da bize $T_i(\infty)$ cusp noktalarının Γ_N 'in farklı yörüngelerini oluşturduğunu gösterir.

Bunların dışında bir cusp noktası ξ olduğunu düşünelim o zaman o cusp noktası özel bir $\gamma \in \Gamma$ ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere bir $\gamma T_i D$ nin sınır noktasıdır bu da çelişkidir çünkü varsayımımız $[\xi] \notin \{[T_i(\infty)] : i = 1, \dots, m\}$ iken sonucumuz $\xi = \gamma T_i(\infty) \in [T_i(\infty)]$ dur. Yani $C(\Gamma_N)$ 'in sonlu elemanı vardır ve bu elemanlar koset temsilcilerinin ∞ üstüne etkimesinden ortaya çıkan yörüngelerdir. □

Tanım 3.2.3.3. [Cusp Form] Eğer Γ_N üzerinde k ağırlıklı bir modüler form bu denklik altgrubunun, D_{Γ_N} in, her cusp noktasında 0 değerini alıyor ise bu fonksiyona cusp form denir.

Örnek. *Herhangi bir Eisenstein serisi, q seri açılımından görülebileceği gibi cusp form değilken, $\Delta(z)$, Γ nın tek cusp noktası olan ∞ ($q = 0$) da 0 değerini alır, q seri açılımında sabit terimi yoktur, yani bir cusp formdur.*

3.2.4 Modüler Formların Lineer Vektör Uzayı

Aynı denklik altgrubu altında, iki aynı ağırlıklı modüler formun toplamının gene bir modüler form olacağı aşikardır, yani modüler formlar kompleks sayılar üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Herhangi bir verilen ağırlık için modüler formların vektör uzayında 0 fonksiyonunun bulunduğu söylememizde bir sorun olmaz. Notasyon olarak k (çift) ağırlıklı, Γ_N denklik altgrubu altındaki modüler formlar uzayını $\mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ ve cusp formlar uzayını $\mathcal{S}_k(\Gamma_N)$ ile gösterelim. \mathcal{M}_k ve \mathcal{S}_k şeklinde grup belirtilmeyen durumlar modüler grup gamma altındaki modüler ve cusp formlar için kullanılacaktır.

Burada bir notasyona daha ihtiyacımız olacak, f fonksiyonunun $\mathbb{H} \cup \infty$ nin bir elemanı için $ord_\alpha(f)$, $f(z)/(\alpha - z)^n$ fonksiyonunu holomorfik yapan en büyük n tamsayı değerini

gösterebiliriz. Yani $ord_\alpha(f)$, f fonksiyonunun α noktasında eğer sıfırı veya kutup noktası var ise bu noktaların derecesini belirtir.

Şimdi $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ üzerindeki modüler formların yapısına dair bir teorem verebiliriz. D , (2.1.0.4) da verilen temel bölge olmak üzere;

Teorem 3.2.4.1. [Valence formülü] Herhangi verilen çift k doğal sayısı ve f , \mathcal{M}_k nin sıfır olmayan bir elemanı ise,

$$ord_\infty(f) + \frac{1}{2}ord_i(f) + \frac{1}{3}ord_\rho(f) + \sum_{w \in D - \{\rho, i\}} ord_w(f) = \frac{k}{12}$$

$\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ olmak üzere verilen denklem gerçekleşir.

Bu teoremin ispatı D temel bölgesinin sınırlarında alınan kontur integraline rezidü teoremi uygulanmasından kolayca çıkmaktadır, [19], [10] ve [11] kitaplarından bu ispat takip edilebilir.

Her cusp formun bir modüler form olduğunu sadece üzerlerinde fazladan bir koşul daha olduğunu hatırlatalım. Bunun dışında cusp form olmayan modüler formlarında cusp noktalarında 0 değerini almıyor olmaları bütün modüler formların sadece i_∞ deki değerlerinin bütün kompleks sayıların bu değerlerden elde edilebileceğini gösterir. Bu özellikler bir tam dizi oluşturur;

$$0 \rightarrow \mathcal{S}_k \rightarrow \mathcal{M}_k \xrightarrow{i_\infty} \mathbb{C}$$

Burada elde ettiğimiz tam dizi şu lemmayı ispatlar. Lemma sadece vektör uzayının elemanı modüler formları i_∞ noktasındaki görüntüsü sıfır olanlar ve sıfır olmayanlar olarak iki alt vektör uzayına ayırmaya dayalıdır.

Lemma 3.2.4.2. k ikiden büyük çift bir tamsayı ise k ağırlıklı modüler formlar uzayı $\mathcal{M}_k = \mathcal{S}_k \oplus \mathbb{C}G_k$ şeklinde iki parça olarak sınıflandırılabilir.

Herhangi bir sabit olmayan f modüler formu alındığında bu fonksiyon \mathbb{H}^* da holomorfik olduğundan verilen keyfi $w \in \mathbb{C}$ için $ord_w(f)$ negatif değildir. burdan yola çıkarak Valence formülünün kullanımından bir özellik verelim

Önerme 3.2.4.3. $k = 0, 2$ ise $\mathcal{M}_k = 0$ dır, yani ağırlığı 0 veya 2 olan sabit olmayan bir modüler form yoktur.

Burada f , k ağırlıklı sabit olmayan modüler formumuzu simgelesin.

İspat: $k = 0$ durumunu gözönüne aldığımızda, Valence formülü

$$ord_{\infty}(f) + \frac{1}{2}ord_i(f) + \frac{1}{3}ord_{\rho}(f) + \sum_{w \in D - \{\rho, i\}} ord_w(f) = 0$$

şekline dönüşür bir önceki paragraftan biliyoruz ki bu f modüler fonksiyonunun derecesi her hangi bir noktada negatif olmayan bir sayıdır, bu da bize bütün bu toplamdaki terimlerin sıfır olduğunu söyler yani $\forall w \in \bar{D} := D \cup \partial D, ord_w(f) = 0$ olur. buda fonksiyonun sabit olduğunu gösterir.

$k = 2$ durumu için aynı şekilde baktığımızda sağ taraf $1/6$ olur ancak bunu sağlayabilecek bir şekil negatif olmayan sayılarla mümkün değildir. Sonuç olarak her iki durumda da $\mathcal{M}_k = \mathbb{C}$ sabit fonksiyonlar olur. \square

Bu önermeyi daha büyük sayılar için yapmaya devam edelim;

$k=4$ Valence formülü $ord_{\rho}(f) = 1$ ve ρ ya Γ altında denk olmayan diğer bütün $w \in \bar{D}$ için $ord_w(f) = 0$ olduğu zaman gerçekleşir. $G_4(z)$ nin ρ noktasında sıfır olduğu biliniyor o zaman $\exists c \in \mathbb{C}$ öyle ki $f(\infty) - cG_4(\infty) = 0$ ve bu yeni fonksiyon bir önceki fonksiyon gibi 4 ağırlıklı bir modüler form olur; ancak bu durum $ord_{\infty}(f - cG_4) = 1$ yaptığından Valence formülü sağlanmaz yani bu fonksiyon sabit bir fonksiyondur bu da \mathcal{M}_4 uzayının $G_4(z)$ tarafından gerildiğini söyler

$k=6$ Valence formülü $ord_i(f) = 1$ ve tüm $w \not\equiv i \pmod{\Gamma}$ için $ord_w(f) = 0$ olduğunda sağlanır. $G_6(z)$, i noktasında sıfır değerini alır ve \mathcal{M}_6 uzayının $G_6(z)$ tarafından gerildiği bir önceki durumla aynı şekilde ispatlanır.

$k=8$ Bu durumun sağlanması için $ord_{\rho}(f) = 2$ ve tüm $w \not\equiv \rho \pmod{\Gamma}$ için $ord_w(f) = 0$ olması gerekir. ve $G_4(z)^2$ bu özelliği sağlar ve öncekilerle aynı argüman ile \mathcal{M}_8 uzayının $G_4(z)^2$ tarafından gerildiği ortaya çıkar

Bu işleme istendiği kadar devam edilebilir ve bu Valence formülü yardımıyla şu teorem ispatlanmış olur

Teorem 3.2.4.4. k çift bir pozitif tamsayı olmak üzere \mathcal{M}_k modüler formlar uzayının bazı

$$\{G_4^a G_6^b \mid 4a + 6b = k, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

şeklindedir.

$k = 12$ durumunu incelerken $\Delta(z)$ fonksiyonunu gözönüne alarak farklı bir bakış açısı elde edebiliriz.

Teorem 3.2.4.5. Δ ile çarpım \mathcal{M}_{k-12} den \mathcal{S}_k ya bir izomorfizma tanımlar.

İspat: \mathcal{M}_{k-12} den herhangi bir elemanın Δ ile çarpım işlemi (3.2.1.2) özelliğinden anlaşılacağı şekilde \mathcal{S}_k uzayına birebir bir eşleme ortaya çıkarır. Bundan sonra göstermemiz gereken tek şey \mathcal{S}_k dan alınan bir eleman için \mathcal{M}_{k-12} de karşılık olduğudur. Δ fonksiyonunun \mathbb{H} üzerinde herhangi bir noktada sıfır olmadığını (Bu özellik şu noktadaki $\Delta(z)$ fonksiyonu, (3.1.2) bölümündeki $\Delta(z, 1)$ fonksiyonu ile aynı olduğunu görülerek anlaşılabilir) biliyoruz. O zaman $f \in \mathcal{S}_k$ ise $f/\Delta \in \mathcal{M}_{k-12}$ (3.2.7) tanımından dolayı gerçekleşir. \square

Bu teorem bize \mathcal{M}_{k-12} nin \mathcal{S}_k ile eşlenebildiğini gösterir ve bu da k ağırlıklı modüler formlar uzayının $\mathcal{M}_k = \Delta(z)\mathcal{M}_{k-12} \oplus G_k(z)\mathbb{C}$ şeklinde sınıflandırılabilirliğini gösterir. Dahası önceki bilgilerimizle beraber artık bu uzayların boyutu hakkında bir sonuç çıkarabiliriz.

$$\text{Sonuç 3.2.4.6. } \text{boyut}\mathcal{M}_k = \begin{cases} 0 & \text{eğer } k \text{ negatif veya tek ise} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{eğer } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{eğer } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

$\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_1(N)$ denklik altgrupları için baz ve boyut soruları da yanıtlanmıştır ve SAGE, $\mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ için baz ve boyut belirtebilmektedir. Bu sonuçları [16], [10] veya [22] dan bulabilirsiniz; ancak [22] da ispatlar bulunmamaktadır.

SAGE de bu işlemlerin nasıl yapıldığına bakmadan önce bazların anlamlı olması açısından SAGE in herhangi bir denklik alt grubu (modüler grup Γ da dahil olmak üzere) içinde kullanıldığı, başka bir sorunun cevabında yardımcı olacak, algoritmayı bir teorem olarak verelim.

Teorem 3.2.4.7 (Victor Miller Basis). $\mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ nın boyutu n olsun. $a_i(f)$, f fonksiyonunun q açılımındaki i . terimi göstermek üzere öyle bir baz f_0, \dots, f_{n-1} vardır ki $a_i(f_j) = \delta_{i,j}$, $(i, j = 0, \dots, n-1)$ sağlanır.

Victor Miller bu teoremi yalnızca Γ altındaki cusp form altuzayı için yapmıştır.

Teoremin ispatı ve algoritma olarak kullanılan şekli baz elemanlarının q açılımı yapıldıktan sonra Gauss eliminasyon yöntemi ile kanonik hale getirilmesine dayanır. Bütün baz elemanları $\mathbb{C}[[q]]$ seri halkasının içinde olduğu için bu mümkündür. SAGE bu algoritmayı cusp formlar altuzayı ve cusp form olmayan modüler formlar altuzaylarına ayrı ayrı uygular.

Burada altı çizilmesi gereken bir başka konu ise ne kadar $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ modüler formlar uzayında (3.2.4.5) dan görüldüğü gibi baz elemanlarının biri dışında bütün elemanlar cusp form olsada, bu $N \neq 1$ durumunda $\mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ için geçerli değildir bu durumda birden fazla cusp form olmayan modüler form oluşabilmektedir. Bu oluşabilecek modüler formların bulunması denklik alt grubunun cusplarının bulunmasından sonra sadece cusplarda 0 olmayacak lineer bağımsız modüler formlar üretilip bu formların ∞ deki q seri açılımının oluşturulması şeklinde yapılır (burada $\mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ in boyutu bilindiğinden tam bir baz oluşturulması için kaç Eisenstein serisine ihtiyaç olduğunu bilmekteyiz). Bu noktada $\mathcal{M}_k(\Gamma_N) = E_k(\Gamma_N) \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma_N)$ şeklinde E_k Eisenstein serilerinin görüntülerinin altuzayı (Eisenstein altuzayı) olmak üzere sınıflandırılabilir ve SAGE bunu yapmaktadır. Bu konu hakkında daha fazla bilgi [11] de bulunmaktadır.

SAGE de Γ için işlemler ile başlayalım.

SAGE: `M4 = ModularForms(1,4); M4`

Modular Forms space of dimension 1 for Congruence Subgroup Gamma0(1) of weight 4 over Rational Field

Bu noktada SAGE modüler form uzayını bir cisim olarak tanımlar ve bize modüler form uzayının boyutunun kaç olduğunu hangi denklik alt grubu altında hesaplandığının ve ağırlığının ne olduğuyla birlikte q seri açılımının hangi formal seri halkasında olduğunu söyler.

SAGE: `M4.basis()`

$[1 + 240 * q + 2160 * q^2 + 6720 * q^3 + 17520 * q^4 + 30240 * q^5 + O(q^6)]$

Burada baz elemanı görüldüğü gibi bir önceki bölümde verilen 4 ağırlıklı Eisenstein serisinin normalize edilmemiş halidir.

SAGE: M4.dimension()

1

(3.2.4.4) teoremini göstermek açısından 10 ağırlıklı modüler formlara bakalım burada baz elemanın beklediği gibi G_4G_6 olduğunu bir önceki bölümdeki serilerin çarpımına bakarak anlayabiliriz

SAGE: M10 = ModularForms(1,10); M10

Modular Forms space of dimension 1 for Congruence Subgroup Gamma0(1) of weight 10 over Rational Field

SAGE: M10.basis()

[$1 - 264 * q - 135432 * q^2 - 5196576 * q^3 - 69341448 * q^4 - 515625264 * q^5 + O(q^6)$]

Daha büyük bir ağırlık alındığı zaman (3.2.4.7) teoreminin algoritmasında kullanıldığını görebiliriz.

SAGE: M24 = ModularForms(1,24); M24.basis()

[$q + 195660 * q^3 + 12080128 * q^4 + 44656110 * q^5 + O(q^6)$,

$q^2 - 48 * q^3 + 1080 * q^4 - 15040 * q^5 + O(q^6)$,

$1 + 131040/236364091 * q + 1099243323360/236364091 * q^2 + 12336522153621120/236364091 * q^3 + 9221121336284413920/236364091 * q^4 + 1562118530273437631040/236364091 * q^5 + O(q^6)$]

Burada baz elemanları görüldüğü gibi sıralı olmamalarına karşın kanonik şekildedirler. Aynı zamanda SAGE modüler form uzaylarını üretirken sınıflandırmasında yapar ve bu özellik istenirse modüler formlar uzayının sadece altuzayları üzerinde çalışma imkanı sağlar;

SAGE: M24.eisenstein_subspace()

Eisenstein subspace of dimension 1 of Modular Forms space of dimension 3 for Congruence Subgroup Gamma0(1) of weight 24 over Rational Field

SAGE: M24.eisenstein_subspace().basis()

$[1+131040/236364091*q+1099243323360/236364091*q^2+12336522153621120/236364091*q^3 + 9221121336284413920/236364091 * q^4 + 1562118530273437631040/236364091 * q^5 + O(q^6)]$

SAGE: M24.cuspidal_subspace().basis()

$[q + 195660 * q^3 + 12080128 * q^4 + 44656110 * q^5 + O(q^6),$

$q^2 - 48 * q^3 + 1080 * q^4 - 15040 * q^5 + O(q^6)]$

Denklik alt sınıfları üstünde çalıştığımız zaman daha önce belirttiğimiz özellikleri görebiliriz.

SAGE: M12_Gamma0_2 = ModularForms(2,12); M12_Gamma0_2

Modular Forms space of dimension 4 for Congruence Subgroup Gamma0(2) of weight 12 over Rational Field

SAGE: M12_Gamma0_2.eisenstein_subspace()

Eisenstein subspace of dimension 2 of Modular Forms space of dimension 4 for Congruence Subgroup Gamma0(2) of weight 12 over Rational Field

Bu noktada altuzayın boyutundan görüldüğü üzere bu uzayda cusp form olmayan lineer bağımsız 2 tane modüler form ailesi bulunmaktadır ki bu durum Γ üzerinde çalışırken (3.2.4.5) dan dolayı asla gerçekleşmez.

SAGE: M12_Gamma0_2.basis()

$[q + 252 * q^3 - 2048 * q^4 + 4830 * q^5 + O(q^6),$

$$q^2 - 24 * q^4 + O(q^6),$$

$$1 + 65520/691 * q^2 + 134250480/691 * q^4 + O(q^6),$$

$$q + 2048 * q^2 + 177148 * q^3 + 4194304 * q^4 + 48828126 * q^5 + O(q^6)]$$

Yukarıdaki bu bölümün son örneği ise **SAGE** in (3.2.4.7) teoreminin algoritmasını altuzaylara kendi içlerinde uyguladığının bir örneğidir; ilk iki baz elemanı cusp form iken geriye kalanlar aslında Eisenstein altuzayının elemanlarıdır ancak sonuncu eleman cusp form olmamasına rağmen görüldüğü gibi sabit terime sahip değildir.

Daha önce (3.2.2) bölümünün sonunda cevaplanamaz dediğimiz verilen bir q serisi modüler form mudur? sorusu eğer ağırlığı ve denklik altgrubu tahmin edilebiliyorsa deneme yanılma yöntemiyle istenilen netliğe kadar Victor Miller bazı sayesinde artık cevaplanabilir. Tek yapılması gereken q serisi için içinde olduğundan şüphelenilen uzayın Miller bazını yazıp bazın kanonik olmasından ötürü katsayıların eşitlenip eşitlenmediğine bakmaktır.

3.2.5 Hecke Operatörü

Hecke operatörleri verilen bir sayı için modüler formlar üzerinde sayıyla akalı bir ortalama aldırma operatörü olarak işlemektedir. Daha açık bir anlatımla Λ kafesi üzerinde tanımlanmış bir f fonksiyonu için n . Hecke operatörü; Λ' , Λ içinde n endeksli kafesleri üzerinden $\sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} f(\Lambda')$ şeklinde toplama şeklinde tanımlanmaktadır ve dahası f fonksiyonunun bazı özelliklerini korumaktadır. Modüler formlar kafeslerin fonksiyonları olarak görülebilir, böyle bakıldığında Hecke operatörlerinin Modüler formlar uzayı içinde özelliklerin geçişine yani denkliklerin görülmesine imkan sağlar. Bu operatör bu nedenlerden dolayı modüler formlar teorisinde büyük bir yer tutmaktadır. Daha fazla bilgi [3] den alınabilir.

Kolaylık olması açısından Hecke operatörünün tanımını ve özelliklerini modüler grup Γ üzerindeki modüler formlar için yapacağız ancak denklik altgrupları için başlangıç noktamız olacak.

$$H_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{Z}) \mid a \geq 1, ad = n \text{ ve } 0 \leq b < d \right\}$$

kümesini

$$H_n(N) := \begin{cases} \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc} 1 & * \\ 0 & n \end{array} \right) \pmod{N} \right\} & \text{eğer } n|N \\ \dots \cup \left(\begin{array}{cc} a & b \\ N & n \end{array} \right) & \text{eğer } n \nmid N \end{cases}$$

ile değiştirerek verilecek sonuçların genişletilmiş halleri bulunabilir.

Tanım 3.2.5.1 (Hecke Operatörü). k ağırlıklı, n . Hecke operatörü f , \mathbb{H} üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olmak üzere

$$T_{n,k}(f) = \sum_{\gamma \in H_n} f^{[\gamma]k}(z)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.5.2. Eğer $f \in \mathcal{M}_k$ ise $T_{n,k}(f)$ de \mathcal{M}_k nin bir elemanıdır.

Bu teoremin ispatında H_n kümesinin Hermite normal forma sokulabildiği özelliği yani $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere $H_n\gamma$ kümesinin içindeki her matrisi köşegenleştirebilecek tek bir matrisin bulunabileceği kullanılıp oradan operatör özelliğinin sağlandığı gösterilmektedir; ancak ispat Hecke cebirinin özelliklerinin bilinmesini gerektirdiği için kısa bir anlatımla geçmek daha uygun olacaktır.

Bu noktadan sonra Hecke operatörü gösterimi yaparken ağırlığı belirten k yı kullanmayacağız ve bir modüler forma uyguladığımız Hecke operatörünü formun ağırlığıyla aynı ağırlıkta kullanıldığını düşüneceğiz.

Hecke operatorunun en önemli özelliklerinden biri çarpımsal olmasıdır.

Özellik 3.2.5.3. k ağırlıklı modüler formlar üzerinde Hecke operatörü

$$i \quad T_{mn} = T_m T_n = T_n T_m$$

eğer $(n, m) = 1$ ise,

$$ii \quad T_{p^n} = T_{p^{n-1}} T_p - p^{k-1} T_{p^{n-2}}$$

eğer p asal ise

özelliklerini sağlar.

Bunun bir sonucu olarak;

Sonuç 3.2.5.4. T_{p^n} , p asal olduğu takdirde T_p nin bir polinomu olarak yazılabilir.

ortaya çıkmaktadır, tek yapılması gereken özelliklerin kullanılıp p^n derecesinin düşürülmesidir.

Hecke operatörünün modüler formların seri açılımlarına nasıl etki ettiğini gördüğümüz zaman asıl anlamı ortaya çıkmaktadır.

Teorem 3.2.5.5. f , modüler grup Γ altında k ağırlıklı $\sum_{n \geq 0} a_n q^n$ şekline Fourier seri açılımına sahip bir modüler form olsun. O zaman bu seri üzerine n . Hecke operatörü T_n

$$T_n(f) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{1 \leq d|(n,m)} d^{k-1} a_{mn/d^2} \right) q^m$$

şeklinde etki eder.

Bu teoremin sonuçlarını vermeden önce hesaplama açısından ne anlama geldiğini anlatırsak, birbirinden farklı Hecke operatörlerini kesilmiş (belli bir netliğe kadar hesaplanmış) bir modüler form'un q açılımına uyguluyarak serinin gerisini (bir sonraki asal kuvvetine kadar) hesaplayabiliriz veya eğer bir serinin bütün asal kuvvetlerindeki katsayılar biliniyor ise bütün seriyi öğrenebiliriz.

Şimdi teoremin teorik zenginlik katan sonuçlarını verelim.

Sonuç 3.2.5.6. Hecke operatörleri \mathcal{M}_k ve \mathcal{S}_k yı korur, yani eğer $f(\infty) = 0 (\neq 0)$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n(f)(\infty) = 0 (\neq 0)$ olur.

Sonuç 3.2.5.7. \mathcal{S}_{12} bir boyutlu bir uzay olduğu ve Δ tarafından gerildiği için Δ , 12 ağırlıklı Hecke operatörleri için özform (eigenform) olur. Aynı şekilde modüler grup altındaki modüler form uzayları için E_k , Eisenstein altuzayı hep 1 boyutlu olduğundan Eisenstein serileri Hecke operatörleri için hep özform olurlar.

Hecke operatörlerinin \mathcal{M}_k uzayı üzerinde nasıl hesaplandığını algorütma olarak verelim.

Algoritma 3.2.5.8 (Hecke Operatörü). Bu algoritma \mathcal{M}_k modüler formlar uzayı için, (3.2.4.7) da anlatılan Miller bazı üzerinde Hecke operatörünün nasıl hesaplandığını anlatmaktadır.

- i \mathcal{M}_k nin (3.2.4.6) sonucuna göre boyutu, d , bulunur.
- ii Bu uzay için (3.2.4.7) fikrini kullanarak kanonik bazı $f_0, \dots, f_{d-1} \pmod{q^{dn+1}}$ netliğinde hesaplanır. burada netliğin q^{dn+1} kullanılmasının sebebi (3.2.5.5) de verilen seride q^{nd+1} e kadar olan bütün katsayıların gerekmesidir.
- iii $T_n(f_i)$, $i = 0, \dots, n-1$ için $\pmod{q^d}$ de hesaplanır ve f_0, \dots, f_{n-1} bazının elemanlarının lineer kombinasyonu olarak yazılır. Baz kanonik olduğundan buradaki lineer kombinasyonun katsayıları, $T_n(f_i)$ nin seri açılımındaki q^d ye kadar olan katsayılarıdır.
- iv Hecke operatörünün baz üzerine etkisi matris formatında yazılır. Burada matrise yazma işleminde satırlar kaçınıcı baz elemanı olduğunu sütunlar ise heske operatöründen sonra kaçınıcı baz elemanından lineer kombinasyonda hangi katsayıyla etkilendiğini gösterir. Örnek vermek gerekirse bir Eisenstein serisi için seri özform olduğu için matriste sadece kendisine karşılık gelen satır ve sütunda sıfır olmayan bir değer gerisinde hep sıfır değeri çıkacaktır.

Bu Hecke operatörü matrisi ile alakalı önemli bir açık problem bulunmaktadır.

Hipotez 3.2.5.9. p asal ve $k \geq 2$ olmak üzere, p . Hecke operatörü T_p nin \mathcal{S}_k uzayının bazına etkisinden çıkan matrisin karakteristik polinomu indirgenemezdir.

SAGE de Hecke operatörü daha sonra karşılaştığımız başka algoritmalar kullanmakla birlikte denklik altgrupları içinde tanımlanmıştır. Şimdi Γ üzerindeki modüler formlar için Hecke operatörlerinin SAGE de hesaplamalarına bakacağız burada bir önceki bölümde tanımladığımız \mathcal{M}_4 ve \mathcal{M}_{24} gruplarını kullanacağım.

SAGE: M4.basis()

$$[1 + 240 * q + 2160 * q^2 + 6720 * q^3 + 17520 * q^4 + 30240 * q^5 + O(q^6)]$$

Burada baz elemanı bildiğimiz üzere E_4 Eisenstein serisidir ve bir özformdur yani herhangi bir Hecke operatörü altındaki görüntüsü bir katsayıyla çarpılmasına eşittir.

SAGE: hecke_operator_on_qexp(M4.basis()[0], 7, 4)

$$344 + 82560 * q + 743040 * q^2 + 2311680 * q^3 + O(q^4)$$

Görüldüğü gibi burada 4 ağırlıklı 7. Hecke operatörünün E_4 Eisenstein serisinin 344 özdeğeri ile çarpılmasıdır.

Buradaki echelon form komutu uzayın bazını kanonik hale getirmek için kullanılır. Daha önce belirttiğimiz gibi özel bir komut olmadan **SAGE** modüler form uzaylarını sınıflandırır ve her alt uzayın bazını kanonik hale getirir ancak algoritmada bahsedildiği üzere bu noktada Hecke Matrisini en primitif ve sorunsuz şekilde yazmak için kanonik baza ihtiyacımız vardır.

SAGE: M24 = ModularForms(1,24).echelon_form() ; M24.basis()

$$[1 + 52416000 * q^3 + 39007332000 * q^4 + 6609020221440 * q^5 + O(q^6),$$

$$q + 195660 * q^3 + 12080128 * q^4 + 44656110 * q^5 + O(q^6),$$

$$q^2 - 48 * q^3 + 1080 * q^4 - 15040 * q^5 + O(q^6)]$$

SAGE: T2 = M24.hecke_matrix(2); T2

$$\begin{bmatrix} 8388609 & 0 & 39007332000 \\ 0 & 0 & 20468736 \\ 0 & 1 & 1080 \end{bmatrix}$$

SAGE: T11 = M24.hecke_matrix(11); T11

$$\begin{bmatrix} 895430243255237372246532 & 496425571825135680000 & 4164320021150955531640320000 \\ 0 & 407518320132 & 791558771097600 \\ 0 & 38671600 & 449283648132 \end{bmatrix}$$

Burada ise hipotezin iki özel değerinde denenmesini göstermek için bu matrislerin karakteristik polinomlarını çarpanlarına ayırmaya çalışalım.

SAGE: T2.charpoly().factor()

$$(x - 8388609) * (x^2 - 1080 * x - 20468736)$$

SAGE: T11.charpoly().factor()

$$(x - 895430243255237372246532) * (x^2 - 856801968264 * x + 152480473377151271633424)$$

Görüldüğü gibi burada elde ettiğimiz bilgiler (3.2.5.9) hipotezi ile çelişmez; çünkü cusp formlar altuzayının bazına Hecke operatörünün etkisinden çıkacak karakteristik polinomlar sırasıyla $(x^2 - 1080 * x - 20468736)$ ve $(x^2 - 856801968264 * x + 152480473377151271633424)$ olacaktır. Bu durumun sebebi Γ altındaki k ağırlıklı Eisenstein altuzayının 1 boyutlu olup çarpanlara ayırmada karşılaştığımız birinci dereceden faktöre denk geliyor olmasıdır.

BÖLÜM 4

4. Modüler Semboller

Bu noktada söylenmesi gereken önemli bir nokta modüler formların q açılımındaki terimlerin önemli olduğudur. Uygulanması biliniyorsa buna göre oluşturulan bir modüler formun Fourier açılımındaki katsayılar aritmetik özellikleri saymak için ayarlanabilir.

Bir önceki bölümde tanımlar dışında genelde tam modüler grup $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ nin üzerinde çalışmıştık. Bundan sonra genelde denklik altgruplarında çalışacağız ancak bu altgruplar altındaki modüler formların özelliklerinin hesaplanması bazı noktalarda daha zor olduğundan ilk olarak Birch tarafından ortaya atılan ve Manin tarafından formülize edilen modüler semboller fikriyle hesaplamalar yapacağız ve burada yaptığımız hesapları modüler formlar kısmında ne anlama geldiğini açıklayacağız.

Önce denklik altgruplarının ürettiği Riemann Yüzeylerini inceleyelim.

4.1. Denklik Altgrupları ile alakalı Riemann Yüzeyleri

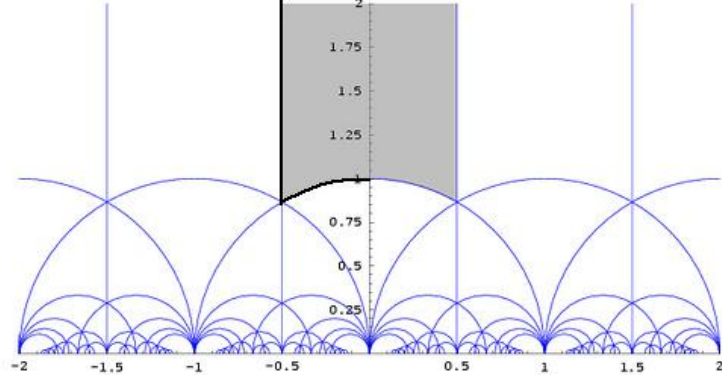
Bu bölümde [10] de verilen özellikleri özetleyeceğiz.

\mathbb{H}/Γ , üst yarım düzlem \mathbb{H} nin Γ altında denk olmayan elemanların kümesini gösterebilir. Temel bölge kapanışında bütün denklik sınıflarından en az bir elemana sahip olduğu için bu küme Γ için bir temel bölgenin sınır kümesinin bir alt grubunun temel bölgeye eklenmesi olarak görülebilir. Burada bahsedilen denklik (2.1.), (2.2.) bölümlerinde anlatılan denklidir. \mathbb{H}/Γ_N aynı şekilde Γ_N için tanımlanabilir.

\mathbb{H}/Γ_N , ($N \in \mathbb{N}$) bir Riemann yüzeyi olarak görülebilir ve kompaktlaştırılması $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ nun gerekli elemanları eklenerek yapılabilir.

$\Gamma = \Gamma_1$ için kompakt Riemann yüzeyini bulmaya çalışalım. T ve S nin Γ yı ürettiğini biliyoruz ondan dolayı D nin sınırlarında kümeye eklenmesi gereken noktaları bu üreteçleri gözönünde bulundurarak bulabiliriz. (Şekil 2.1.) şeklinde D nin sağında ve solunda $Re(z) = \pm 1/2$ doğruları T altında birbirine denktir. Aynı şekilde D nin altında kalan yayın i noktasına göre sağında

ve solunda kalan noktaları birbirine S altında denktir. Buradan \mathbb{H}/Γ kalın çizgiler D temel bölgesine dahil olmak üzere aşağıdaki şekilde [8] belirtilebilir;



Şekil 4.1. \mathbb{H}/Γ

Buradan bu Riemann yüzeyinin kompaktlaştırılmasında $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ cusplar kümesinden sadece ∞ noktasının eklenmesi gerekir.

Dikkat edilirse şekildedeki açıkça görülebileceği gibi kompakt Riemann yüzeyi için \mathbb{H} da doğal bir üçgenleşme oluşur o zaman bunu Euler karakteristik formülü ile kullanarak elimizdeki Riemann yüzeyinin genusunu (kompaktlaştırıldığında ortaya çıkan delik sayısını) bulabiliriz.

Teorem 4.1.0.10 (Euler Karakteristiği). \mathcal{X} Euler karakteristiğini, g genusu ve σ_i , i -simpleksleri sayısını göstermek üzere verilen kompakt Riemann yüzeyi R için;

$$\mathcal{X} = 2 - 2g = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$$

sağlanır.

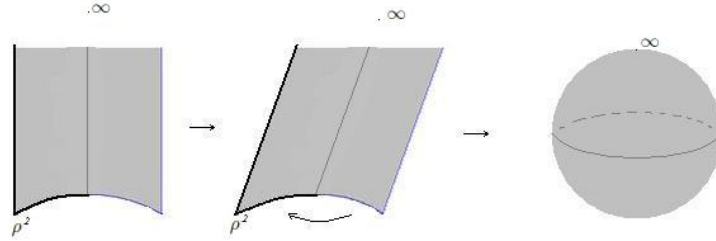
Euclid geometrisinde 0-simpleksler köşeler, 1-simpleksler kenarları ve 2-simpleksler yüzleri belirtir.

Bu özelliği kullanarak bir kompakt Riemann yüzeyinin genusunu bulabiliriz. Bir örnek olarak az önce bulduğumuz Riemann yüzeyinin kompaktlaştırmasıyla çalışalım.

Örnek 4.1.0.11. (Şekil 4.1.) şeklinden kontrol edilebileceği gibi 1-simpleksler, $\rho^2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, i ve ∞ noktalarıdır. o zaman Euler karakteristiğini hesaplırsak;

$$\mathcal{X} = 3 - 3 + 2 = 2$$

olduğunu buluruz. Yani bu Riemann yüzeyinin genus sayısı 0 dır, dahası genus sayısı, $g = 0$ olduğu için bu Riemann yüzeyi topolojik olarak bir küreye eşittir. Burada karışıklığı önlemek için tekrar belirtirsek birbirine denk olan kenarlar sayılmamıştır.



Bir denklik altgrubu için genus sayısını bulmakta aynı şekilde kolaydır. Tek yapılması gereken daha önceden (2.3.) bölümünde yaptığımız şekilde **SAGE** ile denklik alt grubunun coset temsilcilerini bulup daha sonra \mathbb{H} da çıkan temel bölgeye göre \mathbb{H}/Γ_N i bulup Euler karakteristik formülünü uygulamaktır. **SAGE** genus sayısını bulmak istediğimizde daha dolaylı bir yoldan bulmaktadır, bu yönü de zamanı geldiğinde açıklayacağız.

Şimdi $\Gamma_0(11)$ denklik alt grubu için örnek verelim **SAGE** bu grubun koset temsilcilerini ve üreteç elemanlarını bulabilir.

SAGE: `list(Gamma0(11).coset_reps())`

```
[[1, 0, 0, 1], [0, -1, 1, 0], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 1, 3], [1, 3, 1, 4], [1, 4, 1, 5], [1, 5, 1, 6],
[1, 6, 1, 7], [1, 7, 1, 8], [1, 8, 1, 9], [1, 9, 1, 10]]
```

SAGE: `Gamma0(11).generators()`

```
[[1 1] [0 1], [-1 0] [0 -1], [ 1 -1] [ 0 1], [ 1 -1] [ 11 -10], [ 6 -5] [ 11 -9], [ 15 -13] [ 22 -19], [
25 -22] [ 33 -29], [ 9 -5] [ 11 -6], [ 46 -41] [ 55 -49], [ 19 -13] [ 22 -15], [ 29 -22] [ 33 -25], [
49 -41] [ 55 -46], [10 -1] [ 11 -1], [-10 1] [-11 1]]
```

Buna göre bulunacak olan temel bölgeyi çizmek kolaydır ve bu temel bölgenin sınırlarındaki noktalarda $\Gamma_0(11)$ altında denkliğe üreteç elemanlar ile bakabiliriz ve böylece $\mathbb{H}/\Gamma_0(11)$ i bulmuş oluruz. Bütün bu işlemler yapıldığında $\Gamma_0(11)$ için temel bölgenin kompakt Riemann yüzeyinin genusunun 1 olduğu görülür yani çıkan Riemann yüzeyi bir torustur.

4.2. İki ağırlıklı Modüler Formlar için Modüler Semboller

(3.2.4) bölümünde $k \geq 4$ olmak üzere $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ modüler uzayınının bazının tam anlamıyla hesaplanabildiğini görmüştük. Bilindiği üzere (3.2.4.1) den dolayı Γ altında 2 ağırlıklı bir modüler uzay bulunmamakta; denklik altgruplarına geçtiğimiz zaman 2 ağırlıklı modüler formların bulunabileceğini bilmekteyiz.

Daha önceki sınıflandırmamızla aynı şekilde $\Gamma_0(N)$ için 2 ağırlıklı modüler formlar uzayını,

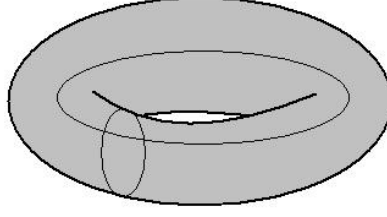
$$\mathcal{M}_2(\Gamma_0(N)) = E_2(\Gamma_0(N)) \oplus \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $E_2(\Gamma_0(N))$ genelleştirilmiş Eisenstein serileri olup tam olarak bilinmektedir. Bu nedenden dolayı bu bölümdeki asıl amacımız $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ için bir baz oluşturmak olacaktır. Burada $\Gamma_0(N)$ seçilmiş olmasının sebebi modüler formların sayılar teorisine uygulamalarında karşımıza sıkça çıkan bir grup olmasıdır, bu grubu kapsayan bir denklik altgrubu için bazı sonuçların genişletilmesi gerekebilir.

Daha önceki bölümlerde, denklik altgruplarında bu konu gözardı edilmişti ancak özellikle Γ üzerinde çalışırken, Δ bizim için bir örnek eleman teşkil etmekteydi; fakat şu an böyle bir elemanımız olmadığından 2 ağırlıklı cusp formlar için bildiğimiz tek özelliğin $\Gamma_0(N)$ için bir temel bölge alındığı zaman bütün cusp noktalarında sıfır olacağı bilgisi. Bu temel bölgeyi bir önceki bölümde anlatıldığı şekilde kompakt bir Riemann yüzeyi olarak düşünelim ve $\mathcal{X}(\Gamma_0(N))$ ile gösterelim. Topolojik olarak bu Riemann yüzeyi genus'u g olan bir torustur. Bu torusun genus sayısını ve kompaktlaştırmayı bir önceki bölümde anlatmıştık.

Burada 1. homoloji sınıfı bizim için önemli olacak. $\mathcal{X}(\Gamma_0(N))$ için birinci homoloji sınıfını $H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(N))), \mathbb{Z}$ ile gösterelim bu sınıf kapalı 1 döngülerin (1 simplekslerin $\mathcal{X}(\Gamma_0(N))$ üzerindeki görüntüsünün kapalı olanlarının tamsayı katsayılı sembolik toplamları), 2 döngülerin (2 simplekslerin $\mathcal{X}(\Gamma_0(N))$ deki görüntülerinin tamsayı katsayılı sembolik toplamları) sınırları modunda incelenmesidir. Bundan dolayı $H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(N))), \mathbb{Z}$ baz elemanları yazılabilen rank'ı $2g$ olan toplamsal bir gruptur. Yani her genus için iki üreteç eleman vardır ve $H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(N))), \mathbb{Z}$ nin her elemanı bu elemanların lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir.

Örnek olarak $\Gamma_0(11)$ için Riemann yüzeyi üzerinde gösterelim;



Şekil 4.2. $H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(11))), \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Hecke operatörünün $H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(N))), \mathbb{Z}$ üzerine etkisi bilinmektedir ve dahası,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) \times H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(N))), \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \quad (4.2.1)$$

integral ile tanımlanmış eşleme dejenere olmayan bir eşlemedir. Tam tanımını verirsek $f \in \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ ve $x \in H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(N))), \mathbb{Z}$ için

$$\langle f, x \rangle = 2\pi i \int_x f(z) dz$$

şeklindedir.

Buradan görülebileceği gibi eğer homoloji grubunda lineer kombinasyonları tamsayı kombinasyonlar yerine reel sayı katsayılı kombinasyonlar olarak alırsak,

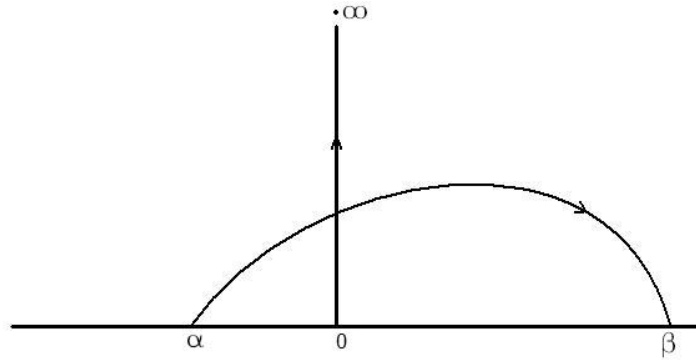
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) \times H_1(\mathcal{X}(\Gamma_0(N))), \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (4.2.2)$$

eşlemesi \mathbb{C} yi örten bir eşleme olur yani her $f \in \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ ve $z \in \mathbb{C}$ için $x \in H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{C})$ bulunabilir ve aynı şekilde homoloji grubundan bir elemanın verilmesiyle cusp formun ne olması gerektiği için en az bir çözüm bulabiliriz. Burada bahsedilen özellik teoriktir ve ancak bir sonraki teorem ile hesaplamaya uygun olduğu özelliği ortaya çıkar.

Teorem 4.2.0.12. (4.2.2) dejenere olmayan ve Hecke operatörü altında eşdeğişimli bir eşlemedir, yani herhangi n doğal sayısı için $\langle T_n f, x \rangle = \langle f, T_n x \rangle$ gerçekleşir.

Bu teoremin ispatını daha sonraki bir bölümde, daha genel bir hali için, vereceğiz.

Burada homoloji grubunda kapalı döngüler olma özelliğini kaldırır ve bir cusptan cuspa giden homoloji grubunda düşünebiliriz. Bu grubu $H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z}; \{cusp\})$ olarak gösterelim. O zaman bu grup daha önce tanımladığımız $H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z})$ grubunu kapsar ve dahası bu grubun elemanları (bazı denklikler altında) \mathbb{H} de bir cusptan, bir başka cusp noktasına giden herhangi bir eğri olarak düşünülebilir. $\alpha, \beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ olmak üzere $\{\alpha, \beta\}$ çiftine 2 ağırlıklı modüler sembol denir ve cusp noktaları üzerine genişletilmiş homolojide olduğu gibi α dan β ya \mathbb{H} üzerinde bir eğri olarak düşünülür; ancak daha sonra bir denklik altında modüler sembol ne demektir tanımlayacağız.



Şekil 4.3. \mathbb{H} da cusp noktasından başka cusp noktasına giden eğriler

α, β ve $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ olmak üzere, \mathbb{M}_2 kümesi, 2 ağırlıklı modüler sembol $\{\alpha, \beta\}$ elemanlarının, 3 terim denkleği;

$$\{\alpha, \beta\} + \{\beta, \gamma\} + \{\gamma, \alpha\} = 0 \quad (4.2.3)$$

sağlanan ve herhangi bir bükülmesi olmayan (yani birbiriyle aslen aynı olup gösterimce birbirinden farklı elemanları ayıklanmış) grubu olsun. \mathbb{M}_2 bükülmesi olmayan bir küme olduğu için (4.2.3) dan açıkça;

$$\{\alpha, \alpha\} = 0 \quad ve \quad \{\alpha, \beta\} = -\{\beta, \alpha\}$$

olduğu ortaya çıkar. Buradan görülebileceği gibi bu sembolde cusp noktalarının yazımının sırası önem taşımaktadır.

Bu grubun elemanları üstüne $GL_2(\mathbb{Q})$ nun etkisini tanımlayabiliriz, şöyleki $g \in GL_2(\mathbb{Q})$ olmak üzere

$$g\{\alpha, \beta\} = \{g(\alpha), g(\beta)\}$$

şeklinde ve burada $GL_2(\mathbb{Q})$ nun $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ üzerine etkisi (3.2.3) bölümünde tanımlanan etkidir ve bir sol etki olduğu açıktır.

$\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ uzayına, $\Gamma_0(N)$ altında, 2 ağırlıklı modüler semboller grubu diyelim ve bu küme \mathbb{M}_2 nin $g \in \Gamma_0(N)$, $x \in \mathbb{M}_2$ olmak üzere $x - g(x)$ şeklindeki elemanlarının ürettiği alt-modüllere bölümü olsun ve her türlü bükülme ayıklansın. $\Gamma_0(N)$ için bir modüler sembol bu kümenin bir elemanıdır ve etki altındaki denkliklerden dolayı denk elemanları genellikle bir temsilci eleman ile gösteririz.

Grup etkisi $\Gamma_0(N)$ altında modüler semboller için bazı özellikleri açığa koyar.

Örnek 4.2.0.13. N doğal sayısı ne olursa olsun bazı modüler semboller $\Gamma_0(N)$ için 0 dır. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ olduğu için $\{\infty, 0\} = \{T(\infty), T(0)\} = \{\infty, 1\}$ sağlanır. O zaman $\{\infty, 0\} - \{\infty, 1\} = 0$ olduğu görülür ki buda (4.2.3) den açıkça $\{0, 1\} = 0$ olduğunu gösterir.

Bu örneğin daha gelişmiş halini gözler önüne sermek gerekirse.

Örnek 4.2.0.14. N doğal sayısının seçimine bakılmaksızın $\{n, m\}$ modüler sembolü $n, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ de 0 dır. Bir önceki örnekle aynı fikirden yola çıkarak başlarsak $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ olduğundan açıkça şu denklik gösterilebilir. $0 = \{0, \infty\} - \{0, \infty\} = \{n, \infty\} - \{m, \infty\} = \{n, m\}$

Burada Manin'in ispatladığı bir izomorfizmayı da dile getirmekte fayda var ki $\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N)) \cong H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z}; \{cusp\})$ sağlanmaktadır. Bu bilgiler bize bir sonraki adımımız için yol göstermektedir; modüler semboller uzayı homoloji ile birebir eşlenen objeler olduğuna göre ve homoloji elemanlarının bazılarını cusp formlarla eşleyebildiğimize göre amacımız bu uzayda cusp formları anlamak adına cusp formlarla eşlenen modüler sembollerini aramak olmalıdır.

Manin, $\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ uzayının $H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z})$ ye izomorf olan altuzayını sınıflandırmayı başarmıştır öyle ki $\mathbb{B}_2(\Gamma_0(N))$ baz elemanları $C(\Gamma_0(N)) = \Gamma_0(N) \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ olan, $\{\alpha\}$ şeklindeki elemanlar olsun. Bu kümenin sonlu olduğunu (3.2.3.2) de daha önce vermiştik. O zaman,

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{M}_2(\Gamma_0(N)) &\rightarrow \mathbb{B}_2(\Gamma_0(N)) \\ \{\alpha, \beta\} &\rightarrow \{\beta\} - \{\alpha\} \end{aligned}$$

şeklinde bir eşleme vardır ve bu eşlemeye *sınır eşlemesi* denir. Sınır eşlemesinin çekirdeğini $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ ile gösterebiliriz bu altuzaya *cuspsal modüler semboller* denir, dahası bu uzayın elemanları $\mathcal{X}(\Gamma_0(N))$ üzerindeki görüntüsü kapalı eğrilerin tamsayı katsayılı lineer kombinasyonuna karşılık gelen modüler semboller olur. Dahası

Teorem 4.2.0.15. $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) \cong H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z})$ gerçektir.

Teoremin ispatı son cümlemizde belirttiğimiz şekilde $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ in herhangi bir elemanının $\mathcal{X}(\Gamma_0(N))$ de kapalı eğrilerin lineer kombinasyon olarak yazılabildiğini ve birebir eşleme yapılabildiğini göstermeye dayanmaktadır.

Şimdi tensor çarpımı ile elde ettiğimiz bir bilgiye bakarsak, R değişmeli bir halka olmak üzere $\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N), R) := \mathbb{M}_2(\Gamma_0(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ ve $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N), R) := \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ şeklinde tanımlansın.

Özellik 4.2.0.16. $\text{boyut}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) = 2 \text{boyut}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ sağlanır

İspat: $\text{boyut}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{Z}) = \text{boyut}_{\mathbb{C}} H_1(\Gamma_0(N), \mathbb{C}) = \text{boyut}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_2(\Gamma_0(N)) = 2g$ □

Bu noktada **SAGE** in nasıl genus ve cusp form uzayı boyutu hesabı yaptığını anlatabiliriz. Genus hesabı için **SAGE** de verilen denklik altgrubuna karşılık gelen ilişkili modüler sembol uzayını ve bazını oluşturup, sınır eşlemesiyle cuspsal eleman sayısı bulduktan sonra genus sayısı bulunan sayının yarısıdır. Aynı şekilde modüler formlar uzayının boyutunda genus sayısı artı cuspsal olmayan baz elemanları sayısı şeklinde bulunur.

SAGE ile biraz işlem yaparak şimdiye kadar bulduklarımıza örnekler verelim. Modüler sembollerini basmak için önce **SAGE** de basım şeklini ayarlamamız gerekiyor.

```
SAGE: set_modsym_print_mode('modular');
```

```
 $\Gamma_0(15)$  grubuna göre modüler semboller uzayını oluşturalım
```

```
SAGE: MS = ModularSymbols(Gamma0(15),2); MS
```

```
Modular Symbols space of dimension 5 for Gamma_0(15) of weight 2 with sign 0 over Ratio-
```

nal Field

SAGE bize bu uzayın boyutunu hangi cisim üzerinde tanımlı olduğunu ve dahası bazının ne olduğunu söyleyebilir.

SAGE: MS.basis()

(Infinity,0, 1/4,1/3, -1,-4/5, -1/2,-2/5, -2/3,-3/5)

Bu uzaydan cuspsal olan elemanların oluşturduğu uzayı sınıflandırırız.

SAGE: CS = MS.cuspidal_subspace(); CS

Modular Symbols subspace of dimension 2 of Modular Symbols space of dimension 5 for Gamma_0(15) of weight 2 with sign 0 over Rational Field

SAGE: CS.basis()

(1/4,1/3 - -1/2,-2/5 + -2/3,-3/5, -1,-4/5 - -1/2,-2/5)

Burada cuspsal modüler semboller uzayı 2 boyutlu bir uzay olduğu için bizim modüler formlar uzayı için beklediğimiz boyut genus sayısı 1 (ki bu sayının cusp formlar altuzayının boyutu olması gerektiğini (4.2.0.16) dan bilmekteyiz) ile cuspsal olmayan modüler sembollerin oluşturduğu altuzayın boyutunun toplamı olması idi ki bu durumda bu sayısında 3 olduğu aşıkardır. Kontrol etmek için $\Gamma_0(15)$ üzerinde 2 ağırlıklı modüler formlar uzayını oluşturalım.

SAGE: MF = ModularForms(Gamma0(15),2); MF

Modular Forms space of dimension 4 for Congruence Subgroup Gamma0(15) of weight 2 over Rational Field

SAGE: MF.cuspidal_subspace()

Cuspidal subspace of dimension 1 of Modular Forms space of dimension 4 for Congruence Subgroup Gamma0(15) of weight 2 over Rational Field

Görüldüğü gibi modüler formlar uzayının boyutu 4 ve bunun içindeki cusp formlar altuzayının

boyutu beklediğimiz gibi 1 dir.

Şimdi modüler sembollerin gösterimini, anlaşılmasını ve hesaplanabilirliğini daha da kolaylaştıracak bir şekile geçmeye çalışalım.

4.3. İki ağırlıklı Manin Sembolleri

$\Gamma_0(N)$ denklik altgrubunun Γ altında sonlu endekse sahip olduğunu bilmekteyiz o zaman Γ içinde $\Gamma_0(N)$ için r_0, r_1, \dots, r_m sağ koset temsilcilerini seçelim. Yani $\Gamma = \Gamma_0(N)r_0 \cup \Gamma_0(N)r_1 \cup \dots \cup \Gamma_0(N)r_m$ ayrık birleşimi gerçeklensin. Sağ koset temsilcilerinin $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ile birebir eşlenebildiğini biliyoruz yani herhangi bir koset temsilcisi $r_i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yerine $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ den $(c : d)$ elemanını kullanabiliriz.

Bunun dışında Manin'in başka gözlemlediği bir nokta ise $\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ için baz elemanlarının $r_i\{\infty, 0\}$ şeklindeki elemanların tamsayı katsayılı lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğidir. Bu özelliği bir teorem olarak verirsek.

Teorem 4.3.0.17 (Manin). N bir doğal sayı ve r_0, r_1, \dots, r_m elemanları $\Gamma_0(N)$ için Γ içinde sağ koset temsilcileri olsun. Her $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$, $r_0\{\infty, 0\}, r_1\{\infty, 0\}, \dots, r_m\{\infty, 0\}$ kümesinin tamsayı katsayılı bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Bu teoremi ispatlamanın birden fazla yolu var ancak burada ispatı tümevarım ile yapmayı tercih edeceğim.

İspat: $\{\alpha, \beta\} = -\{0, \alpha\} + \{0, \beta\}$ şeklinde yazılabileceğinden ve $\alpha, \beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ olduğundan, $(a, b) = 1$ olmak üzere $\{0, a/b\}$ şeklindeki bir elemanın koset temsilcilerinin bir lineer kombinasyonu olarak göstermek bizim için yeterlidir. $(a, b) = 1$ olduğundan $b \in \{0, 1, 2, \dots\}$ diyebiliriz ve $b = 0$ durumunda bahsedilen modüler sembol $\{0, \infty\}$ dür ki bunu $\Gamma_0(N)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kosedinin temsilcisinin etkisi olarak görebiliriz yani $b = 0$ durumu gerçekleşir. $b > 0$ olduğunmu düşünelim, a ve b aralarında asal olduğundan Bezout teoremini kullanırsak a' ve b' tamsayıları bulabiliriz ki $ab' - ba' = 1$ sağlanır yani $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \in \Gamma$ olur, dahası bu eleman

$\gamma \in \Gamma_0(N)$ olmak üzere bir i için γr_i şeklinde yazılabilir. Buradan

$$r_i\{0, \infty\} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \{0, \infty\} = \{a'/b', a/b\} = \{0, a/b\} - \{0, a'/b'\}$$

olduğu görülür ve tümevarımdan dolayı $\{0, a'/b'\}$ elemanında $r_0\{\infty, 0\}, r_1\{\infty, 0\}, \dots, r_m\{\infty, 0\}$ kümesinin tamsayı katsayılı bir lineer kombinasyonudur. \square

Bu ispatladığımız teorem bize aslında modüler sembollerle uğraşmamız gerektiğini sadece sağ koset temsilcilerini seçip $r_0\{\infty, 0\}, r_1\{\infty, 0\}, \dots, r_m\{\infty, 0\}$ kümesinin lineer bağımsız bir altkümesini baz olarak alabileceğimizi göstermektedir. Koset temsilcilerinin bulunmasını birinci bölümde yapmıştık. r_i ler daha önce tanımlandığı gibi olmak üzere, $[r_i]$ şeklinde gösterilen elemanlara 2 *ağırlıklı Manin sembolleri* denir ve bu elemanlar $r_i\{0, \infty\}$, Γ nın sağ etkisi ($[r_i]\gamma = [r_i]$, $\gamma \in \Gamma$) altındaki denklik sınıflarını temsil ederler yani başka bir deyişle modüler semboller yerine kullanılabilirler.

Bu teoremden bir önceki argümanında kullanırsak, modüler semboller yerine aslında $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ den elemanları da kullanabiliriz, bu elemanlarada gene 2 *ağırlıklı Manin sembolleri* denir, ki SAGE de 2 ağırlıklı modüler semboller için bunu yapmaktadır.

$\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ için bir baz oluşturmak konusunda Manin'in bir teoremini verirsek;

Teorem 4.3.0.18 (Manin). Önceki tanımlar geçerli olmakla beraber. $\sigma := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve

$\tau := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere M Manin sembolleri $[r_0][r_1], \dots, [r_m]$ kümesinin her $i = 0, \dots, m$ için

$$[r_i] + [r_i]\sigma \quad \text{ve} \quad [r_i] + [r_i]\tau + [r_i]\tau^2$$

elemanlarının her türlü bükülmesi ayrılmış şekilde olan kümesi ise $M \cong \mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ izomorfizması vardır ve $[r_i]$ *mapstor* _{i} $\{0, \infty\}$ ile verilir.

Bu teoremden anlaşılacağı gibi $\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ için bir baz yazmak isteniyorsa buradaki elemanları ve elemanların ilişkilerini gözönüne almak yeterlidir. Zaten bu eşlemenin örten

olduğu (4.3.0.17) den açıktır, ancak birebir olduğunu göstermek için M nin elemanlarını modüler sembollerin denklik sınıfları cinsinden yazarak birbirinden farklı elemanların ancak birbirinden farklı modüler sembolere gidebileceğini göstermek gerekmektedir.

Burada verdiğimiz fikirlerin SAGE de uygulamasına bakalım, bir önceki örnekte modüler sembol formatında bir çıktı istediğimiz için Manin sembolü formatına değiştirme komutuyla başlıyoruz ancak normalde bir değiştirme yapılmamış ise SAGE zaten Manin sembolü formatında çıktı vermektedir.

```
SAGE: set_modsym_print_mode('manin');
```

MS bir önceki örneğimizdekiyle aynı olsun yani;

```
SAGE: MS = ModularSymbols(Gamma0(15),2); MS
```

Modular Symbols space of dimension 5 for Gamma_0(15) of weight 2 with sign 0 over Rational Field

Aşağıda verilen Manin üreteçleri komutu bize $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ in birbirine eşit olmayan elemanların bir listesini vermektedir mesela $(3, 3) = (1, 1)$ olduğundan $(3, 3)$ elemanı listede yer almaz.

```
SAGE: MS.manin_generators()
```

```
[(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (1,11), (1,12), (1,13), (1,14), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,8), (5,1), (5,2), (5,3)]
```

Bu listedeki elemanları (4.3.0.18) teoreminde anlatılan özellikler ile SAGE eleyip bir baz oluşturmaktadır.

```
SAGE: MS.basis()
```

```
((1,0), (3,4), (5,1), (5,2), (5,3))
```

Manin üreteçleri $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ nin elemanları olduğu için istenirse buradan geri dönülerek Γ içinde $\Gamma_0(N)$ nın sağ koset temsilcileri bulunabilir, tek yapılması gereken Bezout teoreminden primitif (c, d) çifti için $ad - bc = 1$ eşitliğini sağlayacak (a, b) tamsayı çiftini oluşturmaktır.

SAGE: [x.lift_to_sl2z(15) for x in MS.manin_generators()]

[[1, 0, 0, 1], [0, -1, 1, 0], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 1, 3], [1, 3, 1, 4], [1, 4, 1, 5], [1, 5, 1, 6],
[1, 6, 1, 7], [1, 7, 1, 8], [1, 8, 1, 9], [1, 9, 1, 10], [1, 10, 1, 11], [1, 11, 1, 12], [1, 12, 1, 13], [1,
13, 1, 14], [-2, -1, 3, 1], [-1, -1, 3, 2], [1, 1, 3, 4], [2, 3, 3, 5], [2, 5, 3, 8], [-4, -1, 5, 1], [-2, -1,
5, 2], [-3, -2, 5, 3]]

Baz elemanlarının Manin üreteçlerinin lineer bir kombinasyonu olarak nasıl yazıldığını merak ediyorsak aşağıda verilen komut kullanılır; ancak boyut küçükken matris seyrek olacağından **SAGE** matrisi basmak yerine seyrek bir matris olduğu bilgisini verebilir bu durumda listele komutuyla matrisi elde etmemiz mümkündür.

SAGE: MS.manin_gens_to_basis()

24 x 5 sparse matrix over Rational Field

SAGE: MS.manin_gens_to_basis().list()

[-1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, -1, 0, -1, 0, 0,
0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 1, 0, -1, 1, 0, 1, 0,
-1, 1, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, -1, 1, 0, 0,
-1, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 1, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

Modüler sembollerdede aynı özellik mevcutta vardır ancak bir elemanı bazın bir lineer kombinasyonu olarak yazdırmak için şu komut kullanılır.

SAGE: MS((4,8/7))

-(5,1) + (5,2)

ve bir önceki örnekle aynı şekilde gene cuspsal modüler semboller uzayı oluşturulup, bu uzayın boyutu bazı **SAGE** tarafından buldurulabilir.

SAGE: MS.cuspidal_subspace().basis()

((3,4) - (5,2) + (5,3), (5,1) - (5,2))

Amacımız olan $\Gamma_0(N)$ üzerindeki 2 ağırlıklı cusp formlar altuzayı için bir baz yazma sorusunda daha öncede önemini vurguladığımız bir objeye daha gereksinimimiz var. Bu obje de modüler ya da Manin sembollerine Hecke operatörünün nasıl etki edeceği ve nasıl bir etki yaptığı.

4.4. İki Ağırlıklı Modüler Semboller için Hecke Operatörü

Daha önce Hecke operatörünü modüler formlar üzerinde (3.2.5) de tanımlamıştık gene orada tanımladığımız H_n ve $H_n(N)$ kümelerini kullanacağız ve iki tane tanım vereceğiz. Hatırlatma olarak $N = 1$ durumunda $H_n = H_n(N)$ olmaktadır.

Tanım 4.4.0.19 (Modüler Semboller üzerinde Hecke Operatörü). p, N sayısını bölmeyen bir asal olmak üzere p . Hecke operatörü,

$$T_p(\{\alpha, \beta\}) = \sum_{\gamma \in H_n(N)} \gamma\{\alpha, \beta\}$$

şeklinde tanımlanır.

Daha önce modüler semboller ile homoloji sınıflarının arasında geçişlerin bulunduğunu anlattık ondan dolayı $\langle \cdot, \cdot \rangle$ integral eşlemesinde modüler semboller içinde Hecke eşdeğişimlidir yani $f \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(N))$ ve $x \in \mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ olmak üzere $\langle T_n f, x \rangle = \langle f, T_n x \rangle$ sağlanır ve burada integral eşlemesi $\langle f, \{\alpha, \beta\} \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Aynı şekilde Hecke operatörü Loic Merel tarafından Manin sembolleri üzerinde Heilbronn Cremona matrisleri ile tanımlanmıştır. Biz Heilbronn, Cremona matrislerinin tanımına ve oluşturulmasına bakmayacağız; ancak notasyon için bu matrislerin kümesine HC_n diyelim.

Tanım 4.4.0.20 (Manin Sembolleri üzerinde Hecke Operatörü). p bir asal ve $[r_i]$, Γ içinde $\Gamma_0(N)$ in bir sağ koset temsilcisiyle ilişkili Manin sembolü olsun o zaman bu sembol üzerinde p . Hecke operatörü,

$$T_p([r_i]) = \sum_{\gamma \in HC_p} [r_i]\gamma$$

şeklinde tanımlanır.

Burada ve literatürde Manin sembolünü anlatmanın tek gereği aslında hesaplamaya daha yatkın ve notasyon olarak modüler sembollerden daha kolay belirtilebildiğidir. Modüler sembollerde $GL_2(\mathbb{Q})$ nun etkisi lineer kesirli dönüşümler iken Manin sembollerinde 2 tane 2×2 matrisin çarpımının yapıyor olması bu iki tip sembolün birlikte anılmasının asıl sebebidir.

Şimdi Modüler semboller üzerinde Hecke operatörlerinin etkisine SAGE ile örnekler verelim.

SAGE Heilbronn, Cremona matrislerini listeyen bir Algoritmaya sahiptir;

SAGE: HeilbronnCremona(7)

The Cremona-Heilbronn matrices of determinant 7

SAGE: HeilbronnCremona(7)[0]

[1, 0, 0, 7]

SAGE: HeilbronnCremona(7)[1]

[7, 3, 0, 1]

Bunun dışında Modüler semboller üzerinde baz elemanlarına istediğimiz Hecke operatörünü uygulayabiliriz.

SAGE: T3 = MS.T(3); T3

Hecke operator T_3 on Modular Symbols space of dimension 5 for Gamma_0(15) of weight 2 with sign 0 over Rational Field

SAGE: T2 = MS.T(2).matrix(); T2

[3 1 0 -1 1]

[0 1 2 0 -2]

[0 1 1 1 1]

[0 1 2 0 1]

[0 -1 0 1 2]

Burada Hecke operatörünün bize verdiği matris i . satırdaki elemanın Hecke operatörü uygulandıktan sonra çıkan elemanın baz elemanlarının lineer bir kombinasyonu olarak yazıldığında sütuna göre j . baz elemanından kaç tane bulunduğunu belirtir. Mesela burada baz b_1, \dots, b_5 olsun, bu matrise göre 2. Hecke operatörünün uygulanmasından sonra $T_2(b_4) = b_2 + 2*b_3 + b_5$ şekline dönüşmüştür.

SAGE: T2.charpoly().factor()

$$(x + 1)^2 * (x - 3)^3$$

Burada da Hecke operatörlerinin aralarında asal ise değişmeli olduğunu aşağıdaki örnek ile verebiliriz.

SAGE: T2*T3 - T3*T2 == 0 True

Önceki bölümlerde anlattığımız 2 ağırlıklı modüler semboller fikrini şimdi k ağırlıklı modüler formlara karşılık gelecek şekildeki modüler semboller için genişletelim.

4.5. k Ağırlıklı Modüler Semboller

Hatırlatma yapmak adına (4.2.) bölümünde yaptığımız \mathbb{M}_2 grubunun tanımını tekrarlıyalım.

2 ağırlıklı modüler sembol elemanlarını biz \mathbb{H}^* in üzerinde cuspsal homolojinin elemanları olarak düşünmekteyiz, başka bir deyişle her bir 2 ağırlıklı modüler sembol bir cusptan başka bir cusp noktasına giden birer eğri olarak düşünülebilir. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ olmak üzere \mathbb{M}_2 , $\{\alpha, \beta\}$ şeklindeki elemanların $\{\alpha, \beta\} + \{\beta, \gamma\} + \{\gamma, \alpha\} = 0$ ve herhangi bir bükülmesi olmayan, bazı oluşturulabilen ve dahası her elemanı baz cinsinden tek şekilde yazılabilen, değişmeli bir gruptur.

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}[X, Y]_n$, X ve Y değişkenli n . dereceden homojen polinomları belirtsin. Şimdi ikiden büyük bir k tamsayısı için $\mathbb{M}_k := \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M}_2$ kümesini ele alalım. Bu küme bükülmesi olmayan değişmeli bir gruptur ve $X^i Y^{k-i-2} \otimes \{\alpha, \beta\}$

şeklinde elemanlar barındırır.

Bir önceki bölümde izlediğimiz sırayı devam ettirerek Γ_N denklik altgrubunun burada $\mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ üzerine etkisini tanımlayalım. Eğer $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_N$ ve $P(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ ise Γ_N in $\mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ üzerine sol etkisi,

$$\gamma P(X, Y) = P(dX - bY, -cX + aY)$$

şeklinde tanımlanır. Bu etkiyi $z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ olarak alırsak,

$$\gamma P(z) = P(\gamma^{-1}z)$$

şeklinde de algılayabiliriz. Sol etki olduğunda bir satırla ispatlayalım; $\gamma, \tau \in \Gamma_N$ olsun,

$$\gamma\tau P(z) = P((\gamma\tau)^{-1}z) = P(\tau^{-1}\gamma^{-1}z) = \tau P(\gamma^{-1}z) = \gamma(\tau P)(z)$$

sağlandığı görülür.

Öte yandan Γ_N in \mathbb{M}_2 elemanlarına etkisinin $\gamma\{\alpha, \beta\} = \{\gamma\alpha, \gamma\beta\}$ şeklinde tanımlandığını (4.2.) bölümünden bilmekteyiz.

Şimdi bu bildiğimiz iki etkiyi birleştirerek Γ_N in \mathbb{M}_k üzerinde sol etkisini $\gamma \in \Gamma_N$ ve $P(z) \otimes \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{M}_k$ için,

$$\gamma(P(z) \otimes \{\alpha, \beta\}) = gP(z) \otimes g\{\alpha, \beta\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

İki ağırlıklı modüler semboller ve homojen polinomlar notasyon olarak karıştırmayacağından bundan sonra $P(z) \otimes \{\alpha, \beta\}$ şeklindeki yazılım yerine tensor çarpımını gösterimden çıkarıp $P(z)\{\alpha, \beta\}$ şeklinde yazacağız.

Artık denklik altgrubunun etkisi bilindiği üzere Γ_N için k ağırlıklı modüler sembol tanımını 2 ağırlıklılarda olan tanımında kapsayan biçimde yapılabilir.

Tanım 4.5.0.21 (Modüler Sembol). $k \geq 2$ olan bir tamsayı ve Γ_N , Γ nın bir denklik altgrubu

olsun. $x \in \mathbb{M}_k$ ve $g \in \Gamma_N$ olmak üzere \mathbb{M}_k kümesinin $x - gx$ şeklindeki denklilere ve bükülmelere göre bölüm grubu $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ ile gösterilir ve Γ_N için k ağırlıklı modüler semboller olarak adlandırılır.

Burada açık olmayan bir nokta ne kadar $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ bir vektör uzayı oluştursa da rankının sonlu olup olmadığıdır. $\mathbb{M}_2(\Gamma_N)$ vektör uzayının homolojiden gelmesinden rankının sonlu olduğunu biliyoruz buna $\mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ için monomların, tek terimli polinomların, sayısının sonlu olduğu bilgisini eklersek $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ in sonlu ranka sahip olacağı sonucunu elde edebiliriz.

R halkası üzerindeki modüler semboller ise $\mathbb{M}_k(\Gamma_N, R) := \mathbb{M}_k(\Gamma_N) \otimes R$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Manin sembollerine geçmeden önce cuspsal modüler semboller burada daha önce tanımladığımız sınır eşleminin k ağırlıklı modüler semboller için tanımlanmış hali ile bulmaktayız. $\mathbb{B}_k := \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2} \otimes \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ diye tanımlanan toplamsal grup. $\mathbb{B}_k(\Gamma_N)$, $g \in \Gamma_N$ olmak üzere \mathbb{B}_k nin $x - gx$ denkliğine ve bükülmelere bölüm grubu olarak tanımlandığında,

$$b : \mathbb{M}_k(\Gamma_N) \rightarrow \mathbb{B}_k(\Gamma_N)$$

$$P(z)\{\alpha, \beta\} \mapsto P(z)\{\beta\} - P(z)\{\alpha\}$$

şeklinde tanımlanan eşleme bir halka homomorfizmasıdır ve dahası çekirdeğine k ağırlıklı cuspsal modüler semboller denir.

Modüler Semboller uzayını SAGE de daha önceki burumda olduğu gibi tanımlayıp baz elemanlarını bulabiliriz ancak modüler sembollerin hesabı zor olduğundan bu baz elemanlarını SAGE Manin sembollerinden oluşturacaktır. Bu da elemanların bir önceki durumda olduğu gibi güzel bir görüntü sergilemesi olasılığını ortadan kaldırmaktadır.

SAGE de bir modüler semboller uzayı olarak başlayalım ve bu uzayın bazını yazdıralım.

SAGE: `MS = ModularSymbols(Gamma0(13),4); MS`

Modular Symbols space of dimension 8 for Gamma_0(13) of weight 4 with sign 0 over Rational Field

SAGE: `MS.gens()`

```

(X^2 * {0, Infinity},
16 * X^2 * {3/4, 1} - 24 * X * Y * {3/4, 1} + 9 * Y^2 * {3/4, 1},
25 * X^2 * {4/5, 1} - 40 * X * Y * {4/5, 1} + 16 * Y^2 * {4/5, 1},
49 * X^2 * {6/7, 1} - 84 * X * Y * {6/7, 1} + 36 * Y^2 * {6/7, 1},
81 * X^2 * {8/9, 1} - 144 * X * Y * {8/9, 1} + 64 * Y^2 * {8/9, 1},
100 * X^2 * {9/10, 1} - 180 * X * Y * {9/10, 1} + 81 * Y^2 * {9/10, 1},
121 * X^2 * {10/11, 1} - 220 * X * Y * {10/11, 1} + 100 * Y^2 * {10/11, 1},
144 * X^2 * {11/12, 1} - 264 * X * Y * {11/12, 1} + 121 * Y^2 * {11/12, 1})

```

```
SAGE: Ms1 = MS.gens()[0]; Ms1
```

```
X^2 * {0, Infinity}
```

Yukarıda görüldüğü gibi SAGE ile elde ettiğimiz bazdan eleman seçmek kolay bir iştir. Öte yandan $\mathbb{M}_k(\Gamma_N) = \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2} \otimes \mathbb{M}_2(\Gamma_N)$ olduğunu bildiğimizden kendimiz bir eleman üretebilmeliyiz; ancak bu özellik SAGE de daha geliştirilmemiştir.

```
SAGE: R = PolynomialRing(ZZ, 2, 'XY');
```

```
SAGE: X, Y = R.gens();
```

```
SAGE: MS2 = ModularSymbols(Gamma0(13), 2); A = MS2.linear_combination_of_basis((0, -1)); A
```

```
-{Infinity, 0}
```

Polinom halkamızı ve 2 ağırlıklı modüler sembol uzayını yukarıdaki şekilde alırız. Burada `MS2.linear_combination_of_basis((0,-1))` komutunda $(0,-1)$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Manin sembolünü temsil etmektedir. SAGE e kendi oluşturduğumuz bir elemanı bazın lineer bir kombinasyonu olarak yazmasını şu şekilde söylüyoruz,

```
SAGE: MS.linear_combination_of_basis(X*Y*A)
```

```
Traceback (most recent call last): ... TypeError: unsupported operand parent(s) for '**': 'Multivariate Polynomial Ring in X, Y over Integer Ring' and 'Modular Symbols space of dimension 1 for Gamma_0(13) of weight 2 with sign 0 over Rational Field'
```

Ancak görüldüğü gibi SAGE bize Polinom ve Modüler sembol objelerinin çarpılması yapılamayacağını söyleyen bir hata veriyor. Bu fonksiyonu Manin sembollerinin sonunda sorunsuzca kullanacağız. Şimdi başka bir Modüler sembol seçip Modüler semboller arasında toplama çıkarma yapabileceğimizi gösterelim;

SAGE: Ms2 = MS.gens()[5]; Ms2

$$100 * X^2 * \{9/10, 1\} - 180 * X * Y * \{9/10, 1\} + 81 * Y^2 * \{9/10, 1\}$$

SAGE: Ms1 + 3*Ms2

$$X^2 * \{0, Infinity\} + 300 * X^2 * \{9/10, 1\} - 540 * X * Y * \{9/10, 1\} + 243 * Y^2 * \{9/10, 1\}$$

Bu durumdada SAGE sınır eşlemesine bakarak cuspsal altuzayı oluşturabilir ve bu altuzay için bir baz yazabilir.

SAGE: CS = MS.cuspidal_subspace(); CS.basis()

$$\begin{aligned} & (16 * X^2 * \{3/4, 1\} - 24 * X * Y * \{3/4, 1\} + 9 * Y^2 * \{3/4, 1\} - 144 * X^2 * \{11/12, 1\} + \\ & 264 * X * Y * \{11/12, 1\} - 121 * Y^2 * \{11/12, 1\}, \\ & 25 * X^2 * \{4/5, 1\} - 40 * X * Y * \{4/5, 1\} + 16 * Y^2 * \{4/5, 1\} - 144 * X^2 * \{11/12, 1\} + \\ & 264 * X * Y * \{11/12, 1\} - 121 * Y^2 * \{11/12, 1\}, \\ & 49 * X^2 * \{6/7, 1\} - 84 * X * Y * \{6/7, 1\} + 36 * Y^2 * \{6/7, 1\} - 144 * X^2 * \{11/12, 1\} + \\ & 264 * X * Y * \{11/12, 1\} - 121 * Y^2 * \{11/12, 1\}, \\ & 81 * X^2 * \{8/9, 1\} - 144 * X * Y * \{8/9, 1\} + 64 * Y^2 * \{8/9, 1\} - 144 * X^2 * \{11/12, 1\} + \\ & 264 * X * Y * \{11/12, 1\} - 121 * Y^2 * \{11/12, 1\}, \\ & 100 * X^2 * \{9/10, 1\} - 180 * X * Y * \{9/10, 1\} + 81 * Y^2 * \{9/10, 1\} - 144 * X^2 * \{11/12, 1\} + \\ & 264 * X * Y * \{11/12, 1\} - 121 * Y^2 * \{11/12, 1\}, \\ & 121 * X^2 * \{10/11, 1\} - 220 * X * Y * \{10/11, 1\} + 100 * Y^2 * \{10/11, 1\} - 144 * X^2 * \\ & \{11/12, 1\} + 264 * X * Y * \{11/12, 1\} - 121 * Y^2 * \{11/12, 1\}) \end{aligned}$$

4.6. k ağırlıklı Manin Sembolleri

Manin sembollerinin geliştirilme amacının hem modüler sembollere başka bir bakış açısı yaratmak hemde semboller vektör uzayında işlemleri kolaylaştırmak olduğunu belirtmiştik.

$\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ için *Manin sembolleri*, $P \in \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ ve $g \in \Gamma$ olmak üzere $[P, g] := g(P, \{0, \infty\}) \in$

$\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ şeklinde tanımlanan elemanlardır.

Dikkat edilirse eğer $\Gamma_N g = \Gamma_N h$ ise $[P, g] = [P, h]$ geçeklenir. İspatını kısaca verirsek $\Gamma_N g = \Gamma_N h$ durumu bize $g = \gamma h$ durumunu sağlayan $\exists \gamma \in \Gamma_N$ in varlığını söyler ve bu bilgiyi $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ in elemanlarının $x - \gamma x$ şeklindeki bükülmelerin atıldığı ile birleştirirsek bu elemanların aynı olmak zorunda olduğu ortaya çıkar.

Γ_N, Γ içinde sonlu, m , endeksli olduğu için bir üstteki paragrafa dayanarak Γ_N için seçilen sağ koset temsilcileri listesi, $[r_0, r_1, \dots, r_m]$, bize Manin sembollerinin sonlu ranklı olması gerektiğini gösterir, dahası,

$$\{[X^i Y^{k-i-2}, r_j] \mid i = 0, 1, \dots, k-2 \text{ ve } j = 0, 1, \dots, m\}$$

kümesi Manin sembollerinin hepsini üretir.

Manin sembollerinin genelleştirilmesindeki ana fikir (4.3.0.17) teoreminden gelmektedir. g matrislerinin koset temsilcileri içinden veya (4.3.0.18) teoremine uygun seçilmesiyle $\mathbb{M}_2(\Gamma_N)$ modüler sembollerini üretecek elemanlar bulabiliriz. Bu durum sağlanıyor olsada $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ Manin sembolleri tarafından üretilebilir mi sorusuna Manin evet cevabı getirmiştir.

Özellik 4.6.0.22. k ağırlıklı Manin sembolleri $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ uzayını üretir.

İspat: Bu özelliğin ispatı (4.3.0.17) teoreminin ispatının bir tekrarı olacaktır ve sadece polinom kısmı için bir özelliği kullanmamız gerekecektir. $P\{\alpha, \beta\} = P\{\alpha, 0\} + P\{0, \beta\}$ şeklinde yazılabildiğinden ve $\alpha, \beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ olduğundan, $(a, b) = 1$ şeklinde verilmiş tamsayılar için, $P\{0, b/a\}$ nin Manin sembollerinin tamsayı katsayılı bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğini göstermemiz yeterli olacaktır.

$a = 0$ durumu için $P\{0, b/a\} = P\{0, \infty\} = [P, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$ olduğu aşikardır. $a > 0$ durumuna bakarsak Bezout teoreminden $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ öyleki $\gamma = \begin{pmatrix} b & x \\ a & y \end{pmatrix}$ olmak üzere $\det \gamma = 1$ sağlanır ($\gamma \in \Gamma$).

$$\gamma P\{0, \infty\} = (\gamma P)\{x/y, b/a\} = (\gamma P)\{0, b/a\} - (\gamma P)\{0, x/y\}$$

denkleminde tümevarım hipotezinden dolayı $(\gamma P)\{0, x/y\}$ Manin sembollerinin lineer bir

kombinasyonu olarak yazılabilir ve $\gamma \in \Gamma$ olduğundan $(\gamma P)\{0, b/a\} = [\gamma^{-1}P, \gamma]$ Manin sembolüdür. Burada $\gamma^{-1}P$ ya bakılırsa γ modüler grubun elemanı olduğundan $\gamma^{-1}P \in \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ olur. \square

Artık Manin sembollerinin $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ modüler semboller uzayını üretebildiğini bildiğimizden, Manin sembollerinin kendi arasındaki ilişkileri sorgulamalıyız. Bu sorunun cevabı bize Manin sembollerinin üreteç elemanlarını oluşturmamızda da yardımcı olacaktır. Γ nın Manin sembolleri üzerine sağ etkisini $[P, g]h = [h^{-1}P, gh]$ şeklinde tanımlayalım. Matrisler

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere.

Teorem 4.6.0.23. x, k ağırlıklı bir Manin sembolü olmak üzere

i $x + x\sigma = 0$

ii $x + x\tau + x\tau^2 = 0$

iii $x - xJ = 0$

eşitlikleri sağlanır ve bu eşitlikler Manin sembolleri arasındaki bütün eşitliklerdir. Bu teorem bize modüler semboller $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ i düşündüğümüzde bu gruba karşılık gelen sonlu sayıda Manin sembolü olduğunu söylemektedir.

Bu teoremden dikkat edilirse J nin Γ_N denklik altgrubu içinde olması durumunda *iii* eşitliği otomatik olarak sağlanmış olur.

İspat: Merel in [17] da verdiği şekliyle Manin sembollerinin bu denklikleri sağladığını

gösterelim. $x = [P, g]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
[P, g] + [P, g]\sigma &= [P, g] + [\sigma^{-1}P, g\sigma] \\
&= g(P\{0, \infty\}) + (g\sigma)((\sigma^{-1}P)\{0, \infty\}) \\
&= (gP)\{g(0), g(\infty)\} + (gP)\{g\sigma(0), g\sigma(\infty)\} \\
&= (gP)(\{g(0), g(\infty)\} + \{g(\infty), g(0)\}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Burada modüler sembollerde sıranın önemli olmasından kaynaklı olarak toplam halindeki iki eleman birbirinin tersi olmuştur.

$$\begin{aligned}
[P, g] + [P, g]\tau + [P, g]\tau^2 &= [P, g] + [\tau^{-1}P, g\tau] + [\tau^{-2}P, g\tau^2] \\
&= g(P\{0, \infty\}) + g\tau((\tau^{-1}P)\{0, \infty\}) + g\tau^2((\tau^{-2}P)\{0, \infty\}) \\
&= (gP)(\{g(0), g(\infty)\} + \{g\tau(0), g\tau(\infty)\} + \{g\tau^2(0), g\tau^2(\infty)\}) \\
&= (gP)(\{g(0), g(\infty)\} + \{g(\infty), g(1)\} + \{g(1), g(0)\}) \\
&= (gP)\{g(0), g(0)\} = 0
\end{aligned}$$

Son olarak;

$$\begin{aligned}
[P, g] - [P, g]J &= g(P\{0, \infty\}) - gJ((J^{-1}P)\{0, \infty\}) \\
&= (gP)(\{g(0), g(\infty)\} - \{gJ(0), gJ(\infty)\}) \\
&= (gP)(\{g(0), g(\infty)\} - \{g(0), g(\infty)\}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Burada \mathbb{M}_2 için verilen (4.3.0.18) teoreminin bu teoremin özel bir durumu olduğu ortaya çıkar, dahası bunun nedeni J matrisinin \mathbb{M}_2 üzerine etkisinin aşıkâr olmasıdır.

Burada bir diğer ispatlanması gereken nokta ise bu Manin sembolleri arasında başka bir denklik olmayışıdır. İspatın bu kısmı Manin sembollerinin bu denkliklere ve bükülmelere göre bölüm grubunun $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ ile izomorf olduğunu göstererek yapılmaktadır. Tam ispatı için [17] ya başvurulabilir. \square

Teorem sayesinde Manin sembolleri için üreteç elemanlarını bulabiliriz. Manin sembollerinin sonlu sayıda olduğunu biliyoruz yani Manin sembollerini listeler ve sonrasında bu bağıntılara

bakarsak bağımsız Manin sembollerini seçebiliriz; ancak bu noktada σ , τ ve J in sırasının değişmesi farklı sonuçlar verdiği için bir bağıntıyı bitirip sonra çıkan semboller arasında diğer bağıntıyı yapmak doğru cevabı vermeyebilir. SAGE bir bağıntı matrisi oluşturup bu matrisi en sonunda echelon forma çevirmeyi tercih etmektedir.

Manin sembollerinin tanımına geri dönersek sağ koset temsilcilerine ihtiyacımız var. $\Gamma_N \backslash \Gamma$ kosetinin elemanlarını yani Γ_N için sağ koset temsilcilerini yazmayı biliyoruz, hatta verilen bir eleman için hangi kosete ait olduğunu verebilecek algoritmalar [14] ün kitaplarında veya [4] te mevcuttur.

Şimdi J. E. Cremona'nın özel bir denklik altgrubu için verdiği bir teoreme bakalım. Bu vereceğimiz teorem $\Gamma_0(N)$ durumunda koset temsilcilerini $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ ile eşleyebildiğimiz gerçeğinin ((4.3.) bölümünün başında anlatılan eşlemenin), $\Gamma_1(N)$ için karşılığıdır.

Teorem 4.6.0.24. Γ_N nin Γ altındaki sağ koset temsilcileri, $(c, d, N) = 1$ olmak üzere, $(c, d) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ elemanlarıyla birebir eşlenebilir. Yani $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanına sahip koset (c, d) ile eşlenir.

Bu teoremin önemi gene bir önceki durumda olduğu gibi notasyon olarak Manin sembollerini gösterirken matrisler ile çalışmaktansa ikililerle çalışılacak olunmasıdır.

İspat: Bu ispat [22] den kopyalanmıştır; ancak ordaki ispatın kendisinde aslen [5] te geçen ispatın uygulamasıdır.

$i = 1, 2$ olmak üzere $\gamma_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \Gamma$ olsun. $\gamma_1 \gamma_2^{-1}$ e bakarsak

$$\gamma_1 \gamma_2^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_2 - b_1 c_2 & * \\ c_1 d_2 - d_1 c_2 & a_2 d_1 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Burada $\gamma_1 \gamma_2^{-1}$ elemanının $\Gamma_1(N)$ de olması için gerek ve yeterli şart,

$$c_1 d_2 - d_1 c_2 = 0 \pmod{N} \tag{4.6.4}$$

$$a_1 d_2 - b_1 c_2 = a_2 d_1 - b_2 c_1 = 1 \pmod{N} \tag{4.6.5}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

γ_i elemanlarının determinantları 1 olduğundan eğer $(c_1, d_1) = (c_2, d_2) \pmod{N}$ ise (4.6.4) ve (4.6.5) eşitlikleri sağlanır.

Öte yandan eğer (4.6.4) ve (4.6.5) eşitlikleri sağlanıyor ise,

$$\begin{aligned} c_2 &\equiv a_2 d_1 c_2 - b_2 c_1 c_2 \pmod{N} \\ &\equiv a_2 d_2 c_1 - b_2 c_2 c_1 \pmod{N} \\ &\equiv c_1 \pmod{N} \end{aligned}$$

gerçeklenir ve aynı şekilde $d_1 \equiv d_2 \pmod{N}$ de gösterilir. □

Burada bu teoremi ispatlamanın en güzel yanı ise artık $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(N))$ in elemanı olan bir Manin sembolünü $[X^i Y^{k-i-2}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}]$ ile göstermek yerine (i, c, d) üçlüsü ile gösterebiliyor olmamızdır.

SAGE de yapacağımız işlemleri notasyon farkını ve elemanların hesaplanmasının kolaylığını göstermek amacıyla bir önceki bölüm ile aynı modüler semboller uzayını ele alalım.

SAGE: MS = ModularSymbols(Gamma0(13),4); MS

Modular Symbols space of dimension 8 for Gamma_0(13) of weight 4 with sign 0 over Rational Field

Bu modüler semboller uzayının Manin üreteç elemanlarını bulursak;

SAGE: MS.gens()

$([X^2, (0, 1)], [X^2, (1, 4)], [X^2, (1, 5)], [X^2, (1, 7)], [X^2, (1, 9)], [X^2, (1, 10)], [X^2, (1, 11)], [X^2, (1, 12)])$

Bir önceki örnek ile aynı bazı bize vermektedir. $[X^2, (0, 1)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^2\{0, \infty\} = X^2\{0, \infty\}$ şeklinde manin sembollerini açarak bazların aynı olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi özel olarak bir eleman üretmek için bölümün sonunda belirttiğimiz üçlü gösterimi SAGE e vermemiz yeterli olur. Daha önce Modüler sembol üretmiş; ancak SAGE in bu

fonksiyonunu kullanamamıştık.

SAGE: MS.linear_combination_of_basis((1,0,1))

$$-3/28 * [X^2, (1, 4)] + 1/7 * [X^2, (1, 5)] - 9/28 * [X^2, (1, 7)] + 9/14 * [X^2, (1, 9)] - 6/7 * [X^2, (1, 10)] + 23/28 * [X^2, (1, 11)] - 9/28 * [X^2, (1, 12)]$$

Burada $(1, 0, 1) = [X^1 Y^1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$ Manin sembolüne karşılık gelmektedir.

Daha önce yaptığımız bir gözlemi hatırlatmak gerekirse denklik altgrubu ne kadar küçük olursa (endeksi ne kadar büyük olursa), üstündeki koşullar azaldığından modüler formlar uzayı o kadar büyüyebiliyordu. Aynı koşullar modüler semboller için geçerli olduğundan üstleri örneklerde yer alan $\Gamma_0(13)$ ü $\Gamma_1(13)$ ile yer değiştirirsek boyutun artışı görebiliriz.

SAGE: MS = ModularSymbols(Gamma1(13),4); MS

Modular Symbols space of dimension 42 for Gamma_1(13) of weight 4 with sign 0 and over Rational Field

SAGE: MS.gens()

$$([X^2, (0, 5)], [X^2, (0, 6)], [X^2, (0, 9)], [X^2, (0, 10)], [X^2, (0, 11)], [X^2, (0, 12)], [X^2, (7, 1)], [X^2, (7, 4)], [X^2, (7, 5)], [X^2, (7, 6)], [X^2, (7, 9)], [X^2, (7, 10)], [X^2, (7, 11)], [X^2, (7, 12)], [X^2, (8, 0)], [X^2, (8, 2)], [X^2, (8, 11)], [X^2, (8, 12)], [X^2, (9, 5)], [X^2, (9, 8)], [X^2, (9, 9)], [X^2, (9, 10)], [X^2, (9, 11)], [X^2, (10, 2)], [X^2, (10, 3)], [X^2, (10, 7)], [X^2, (10, 8)], [X^2, (10, 10)], [X^2, (10, 12)], [X^2, (11, 1)], [X^2, (11, 2)], [X^2, (11, 4)], [X^2, (11, 5)], [X^2, (11, 7)], [X^2, (11, 9)], [X^2, (11, 10)], [X^2, (12, 3)], [X^2, (12, 4)], [X^2, (12, 5)], [X^2, (12, 7)], [X^2, (12, 11)], [X^2, (12, 12)])$$

4.7. k Ağırlıklı Modüler Semboller için Hecke operatörü

Bu bölümde (4.4.) bölümünde olduğu gibi Hecke operatörünün Modüler ve Manin semboller üzerine nasıl etki ettiğini göreceğiz.

$$\Delta_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = n, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & n \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümesi verilen Γ_N denklik altgrubu için $\Gamma_N \Delta_n = \Delta_n \Gamma_N = \Delta_n$ özelliğini sağlar ve dahası $\Gamma_N \backslash \Delta_n$ sonlu bir gruptur.

Daha önce k ağırlıklı modüler sembollerin üzerinde tanımladığımız sol etkiyi, $GL_2(\mathbb{Z})$ in elemanları için aynı şekilde genişletelim yani $\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$ için $\gamma P(z)\{\alpha, \beta\} = P(\gamma^{-1}z)\{\gamma(\alpha), \gamma(\beta)\}$ şeklinde tanımlansın. O zaman R , $\Gamma_N \backslash \Delta_n$ in belli bir koset temsilcileri kümesini göstermek üzere Modüler semboller üzerinde n . Hecke operatörü $T_n(P(z)\{\alpha, \beta\}) = \sum_{\gamma \in R} \gamma P(z)\{\alpha, \beta\}$ şeklinde tanımlanır. Dahası tanımlanan operatör $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ uzayını korur.

Burada tanımlanan Hecke operatörünün koset temsilcilerinin değişmesi durumunda değişmeyeceği aşikardır.

Bu noktada özellikle Hecke operatörü uygulamalarında Manin sembollerine neden ihtiyaç duyduğumuzu göz önüne serebiliriz. Verilen Hecke operatör tanımını uygulamak için $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ i oluşturmak T_n operatörünü uygulamak ve baz elemanları cinsinden yazmak gereklidir. Bu işlemler k büyüdükçe veya Γ_N in Γ içindeki endeksi arttıkça zorlaşmaktadır; fakat L. Merel [17] makalesinde Manin sembolleri için Hecke operatörünün nasıl etki edeceğine kolay bir çözüm bulmuştur.

Manin sembolü $[P, g]$ ye n . Hecke operatörünün etkisi

$$T_n([P, g]) = \sum_{\substack{a > b \geq 0 \\ d > c \geq 0 \\ ad - bc = n}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [P, g]$$

şeklinindedir. Bu operatörün daha önce tanımladıklarımızla örtüştüğünü görmek için [17] veya [4] e bakılabilir.

Manin sembolleri üzerine tanımlanan bu operatör, Modüler semboller için tanımlanandan daha efektif ve hızlıdır çünkü burada koset temsilcisi bulup listelemeye gerek duyulmamaktadır.

SAGE de Hecke operatörlerinin modüler semboller uzayı üzerine etkisine örnek verelim. Önceki bölümlerden modüler sembol uzayını tanımlamayı ve bazını oluşturmayı görmüştük ve burada $\mathbb{M}_{10}(\Gamma_0(2))$ modüler sembol uzayını ele alacağız.

```
sage: MS = ModularSymbols(Gamma0(2),10); MS
```

Modular Symbols space of dimension 4 for Gamma_0(2) of weight 10 with sign 0 over Rational Field

```
sage: MS.basis()
```

```
([X7 * Y, (1, 1)], [X8, (0, 1)], [X8, (1, 0)], [X8, (1, 1)])
```

Hecke operatörünün **SAGE** de bir eleman üzerine etkisi tanımlanmamıştır bunun yerine bütün baz üzerine etkisine bakılabilir.

```
sage: T2 = MS.T(2).matrix(); T2
```

```
[ 16 0 0 0]
```

```
[ 0 512 16 -16]
```

```
[ 0 256 17 -16]
```

```
[ 0 256 1 0]
```

```
sage: T7 = MS.T(7).matrix(); T7
```

```
[-952 0 0 0]
```

```
[ 0 40353608 1301760 -1301760]
```

```
[ 0 0 19525448 20828160]
```

```
[ 0 0 19526400 20827208]
```

Bu Hecke matrislerinin karakteristik polinomlarını çarpanlarına ayırırsak özdeğerlerini bulmuş

oluruz ki bu özdeğerleri bir sonraki bölümde modüler formlar uzayı için bir baz oluştururken kullanacağız.

```
sage: T2.fcp()
```

$$(x - 512) * (x - 1) * (x - 16)^2$$

```
sage: T7.fcp()
```

$$(x - 40353608)^2 * (x + 952)^2$$

```
sage: MS.cuspidal_subspace().T(2).matrix()
```

```
[16 0]
```

```
[ 0 16]
```

```
sage: MS.cuspidal_subspace().T(7).matrix()
```

```
[-952 0]
```

```
[ 0 -952]
```

Burada karşımıza çıkan başka bir özellik ise (3.2.5.9) hipotezinin modüler sembollerde geçerli olmayışıdır.

Bunların dışında Hecke operatörü aralarında asal sayılar için değişmeli olma özelliğini korumaktadır.

```
sage: T7*T2 == T2*T7
```

```
True
```


BÖLÜM 5

5. Modüler Form uzayları için Baz oluşturulması

Bir Modüler formlar uzayı üzerinde çalışmaya başladığımız zaman aslında bu uzayın bir vektör uzayı olması gerektiğinden ve elemanlarının sağlayacağı özelliklerden başka bir bilgiye sahip olmuyoruz. Bu nedenden dolayı bundan sonraki asıl amacımız alınan herhangi bir Modüler form uzayı için baz oluşturmak olacak.

Miyake kendi çalışmalarında Eisenstein serilerinin istenilen Modüler formlar uzayındaki görüntülerinin nasıl olacağı ve dolayısı ile bu uzay altındaki Eisenstein altuzayının nasıl yazılabileceğini bulmuş, [16] ten daha fazla bilgi alınabilir. Bu bilgiye önceki bölümde verilen Modüler Sembol fikrini ekleyerek Modüler form uzayları için bir baz oluşturulmasında nasıl kullanılacağına bakacağız.

Miyake'nin sonuçlarını vererek başlamadan önce gerekli olacağından Dirichlet Karakterlerini tanıtalım.

5.1. Dirichlet Karakterleri

Dirichlet karakterleri gösterimler teorisinde olduğu kadar sayılar teorisinde de oldukça sık karşımıza çıkmaktadır. Dirichlet karakterlerini temel olarak $\mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ modüler uzayı verildiği zaman bunun Eisenstein altuzayının bazını oluştururken kullanmaktayız.

Tanım 5.1.0.25 (Dirichlet Karakteri). R bir tamlık bölgesi olmak üzere N moduna göre *Dirichlet karakteri*, $\varepsilon : \mathbb{Z} \rightarrow R$ şeklinde bir eşlemedir öyleki bu eşleme başka bir $f : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \langle \zeta \rangle$ ile verilen bir homomorfizma üstüne kurulur.

$$\varepsilon(a) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } (a, N) \neq 1 \text{ ise} \\ f(a \pmod{N}) & \text{eğer } (a, N) = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. burada ζ , R içinde 1 in bir köküdür.

Dirichlet karakterinin en basit örneği olarak Legendre sembolü $\left(\frac{a}{p} \right)$ yi gösterebiliriz. Bu fonksiyon p modunda bir Dirichlet karakteridir, a sayısı eğer p ile arasında asal değil ise 0

değerini, diğer durumlar için a sayısının p modundaki görüntüsüne göre ± 1 değerlerini alır.

N modula göre R üzerinde tanımlanmış bütün Dirichlet karakterlerinin kümesi $D(N, R)$ ile gösterilsin. Bu kümenin çarpımsal grup olduğu, f bir homomorfizma olduğundan, açıktır. Buradan $D(N, R)$ ve $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \langle \zeta \rangle$ şeklindeki homomorfizmalar birebir eşlenebildiğinden, $D(N, R) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ olduğu görülür. Başka bir sonuç ise $|(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*| = \varphi(N)$ olduğundan ζ nın seçimine göre $|D(N, R)|$ in Euler phi değerine eşit veya bu değeri bölecek bir sayı olmasıdır ve açıkça eşitlik; ancak ζ nın $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ grubunun derecesinin bir katı seçilmesiyle olabilir.

Bir Dirichlet karakterini, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ nin bir elemanı ile eşliyebiliyor olmak bize hesaplama açısından bolca kolaylık sağlar çünkü $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ grup teorisinden bildiğimiz üzere cyclic grupların çarpımı şeklinde yazılabilir. C_i cyclic gruplar ve g_i bu grupların üreteç elemanları, veya başka bir deyişle $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ kümesini üreten elemanlar olmak üzere $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \cong \prod_{0 \leq i \leq n} C_i = \prod_{0 \leq i \leq n} \langle g_i \rangle$ şeklinde yazılabilir. Dahası $a_i \in C_i$ olmak üzere Dirichlet karakteri $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ şeklinde bir liste olarak düşünülebilir ve hesaplamalar her cyclic grup için kendi altında yapılarak kolaylaştırılabilir. SAGE verilen bir Dirichlet karakter için böyle bir liste oluşturmakta ve işlemleri bu listeler üzerinde yapmaktadır.

SAGE $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ve $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ gruplarını oluşturabilir ve $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ için üreteç elemanları, sayılar teorisinde geçtiği adıyla $p|N$ şeklindeki asallar için $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ in primitif kökleri, hesaplayabilir. Dahası verilen ε karakteri için ε karakterinin derecesi primitif köklerin derecelerinin en küçük ortak katı olarak bulunabilir.

```
SAGE: R = Integers(45); R
```

```
Ring of integers modulo 45
```

```
SAGE: R.unit_gens()
```

```
[11, 37]
```

Dirichlet karakterleri grubu $D(N, R)$ aşağıdaki komutla oluşturulur ve özel olarak tamlık bölgesi verilmemiş ise SAGE grubun derecesini bulduktan sonra ζ_k yani k . dereceden birim kökünü \mathbb{Q} ya ekleyerek cyclotomik cisim $\mathbb{Q}(\zeta_k)$ yı tamlık bölgesi olarak alır. SAGE de ζ_k , anlaşılma kolaylığı açısından "zeta k" şeklinde gösterilmektedir.

SAGE: D45=DirichletGroup(45); D45

Group of Dirichlet characters of modulus 45 over Cyclotomic Field of order 12 and degree 4

SAGE: D45.exponent()

12

Birbirinden farklı Dirichlet karakterlerini listeletebiliriz ancak $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ grubu büyük sayılar için geniş bir grup olacağından bu liste sevimsizleşir.

SAGE: list(D45)

```
[[1, 1],[zeta122, 1],[zeta122 - 1, 1],[-1, 1],[-zeta122, 1],[-zeta122 + 1, 1],  
[1, zeta123],[zeta122, zeta123],[zeta122 - 1, zeta123],[-1, zeta123],[-zeta122, zeta123],  
[-zeta122 + 1, zeta123],[1, -1],[zeta122, -1],[zeta122 - 1, -1],[-1, -1],  
[-zeta122, -1],[-zeta122+1, -1],[1, -zeta123],[zeta122, -zeta123],[zeta122-1, -zeta123],  
[-1, -zeta123],[-zeta122, -zeta123],[-zeta122 + 1, -zeta123]]
```

Bir Dirichlet karakterini özel olarak seçme işlemini iki şekilde yapabiliriz ve bu karakter için noktada değer buldurabiliriz. Birinci şeklimiz listenin bir elemanını özel olarak seçmektir;

SAGE: eps = D45[1]; eps

$[zeta12^2, 1]$

İki noktada değerine bakarsak $(3, 45) = 3$ olduğundan $\text{eps}(3)$ tanım gereği 0 dır. Diğer noktada değerine ise ayrık logaritma probleminde en gelişmiş algoritma olan *baby step giant step* algoritması ile üreteşlerin istenen nokta için üstleri bulunur ve listede verilen alakadar değerlerin o üstleri alınıp elemanlar çarpılarak hesap yapılır.

SAGE: eps(3)

0

SAGE: eps(7)

$-zeta12^2$

$eps(7)$ yi daha açık bir şekilde yazalım. Bu noktadaki karakterimiz $eps = [zeta12^2, 1]$ aslen listeleme şeklinden ötürü $[\varepsilon(11), \varepsilon(37)]$ ile aynıdır, ve dikkat edilirse $7 \equiv 11^7 * 37 \pmod{45}$ olduğunu görürüz. Buradan $eps(7) = eps(11)^7 eps(37) = -zeta12^2$ olur.

SAGE de Dirichlet karakterini listeden seçmek yerine istenilen şekilde tanımlamakta mümkündür.

SAGE: $K = D45.base_ring(); K$

Cyclotomic Field of order 12 and degree 4

SAGE: $zeta = K.0; zeta$

$zeta12$

SAGE: $eps2 = D45([-1, zeta^4]); eps2$

$[-1, zeta12^2 - 1]$

Burada $eps2$ görüldüğü gibi listenin bir elemanıdır ancak liste kullanılmadan üretilmiştir.

Dirichlet karakterleri ile alakalı daha sonra kullanmamız gereken bir tanımını verelim.

Tanım 5.1.0.26. Verilen $\varepsilon \in D(N, R)$ olmak üzere eğer $c|N$ şeklindeki sayılardan $\varepsilon^* \in D(c, R)$ olan ve $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $\varepsilon(a) = \varepsilon^*(a)$ özelliği sağlanan bir eleman bulunabilen c sayılarının en küçüğüne verilen karakterin *ileticisi* denir. Eğer bir karakterin ileticisi kendisi ise o karaktere *primitif karakter* denir.

Örnek 5.1.0.27. aşık karakter $\varepsilon = 1$ için 1 bu karakterin N değerine göre değişmemekle birlikte ileticisidir. $D(2, \mathbb{C})$ nin aşık olmayan herhangi bir karakterin ileticisi her şartta 2 olacaktır yani aşık olmayan karakterler bu grupta primitiftir.

Artık Dirichlet karakterleri hakkında yeterince bilgiye sahip olduğumuz için Eisenstein altuzayları için bir baz oluşturabiliriz.

5.2. Eisenstein Altuzayları için Baz üretilmesi

Burada ispat sunmadan vereceğimiz sonuçlar Miyake tarafından bulunmuştur ve buradaki fikir $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\varepsilon \in D(N,R)} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N), \varepsilon)$ şeklindeki sınıflandırmadır. $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N), \varepsilon)$ notasyonu ile ε karakterli modüler formları ifade etmekteyiz ki bu uzayın elemanları

$$f \left[\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right]_{(mod N)}(z) = \varepsilon(d)f(z)$$

özelliğini sağlayan modüler formlardır diye tanımlanmaktadır. Bundan önce karakter kullanmadığımız tanımladığımız modüler formları aşikar karakterli olarak düşünebiliriz.

χ ve ψ , ileticileri L ve R olan primitif Dirichlet karakterleri olsun ve

$$E_{k,\chi,\psi}(q) = c_0 + \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{n|m} \psi(n)\chi(n/m)n^{k-1} \right) q^m \in \mathbb{Q}(\chi, \psi)[[q]], \quad (5.2.1)$$

$$c_0 = \begin{cases} 0 & \text{eğer } L > 1 \text{ ise} \\ -\frac{B_{k,\psi}}{2k} & \text{eğer } L = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde $B_{k,\psi}$, ψ karakterine göre tanımlanmış k . Bernoulli sayısı olmak üzere tanımlansın.

Burada Dirichlet karakterlerinin ikisi de eğer aşikar karakterler ise $E_{k,\chi,\psi} = E_k$ olur ki buradaki E_k , k ağırlıklı Γ üzerindeki Eisenstein serisidir.

Teorem 5.2.0.28 (Miyake). k çift bir doğal sayı, t bir tamsayı ve χ ve ψ daha önce verildiği şekliyle Dirichlet karakterleri olsun, $k=2$ ve karakterlerin aşikar olması durumu haricinde $E_{k,\chi,\psi}(q^t)$, $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(RLt), \chi/\psi)$ nin bir elemanı olur. Dışarıda bırakılan durumda ise $t > 1$ olması durumunda $E_{k,\chi,\psi} = E_2$ dir ve $E_2(q) - tE_2(q^t)$, $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(t))$ nin bir elemanı olur.

Bu teorem bize karakterlerin belli şartları sağlar şekilde seçildiğinde modüler formlar uzayının bazı elemanlarını tanımladığımız $E_{k,\chi,\psi}$ elemanı ile elde edebileceğimizi gösterir.

Teorem 5.2.0.29. (??) ile elde edilen elemanlar $RLt|N$ ve $\varepsilon = \chi/\psi$ olmak üzere $E_k(\Gamma_1(N), \varepsilon)$, Eisenstein altuzayının bir bazını oluşturur. Dahası $k \neq 2$ iken $t = 1$ durumu ele alındığında oluşan Eisenstein serileri özformlar olur (bu serilere Hecke operatörü uygulanması karşılık

gelen özdeğerleri ile çarpılması ile aynı sonucu verir). $k = 2$ durumunda da $E_2(q) - tE_2(q^t)$, $t > 1$ için bir özformdur.

Burada Miyake [16] kitabında karakterlerin seçilmesine dayalı olarak $\Gamma_1(N)$ veya $\Gamma_0(N)$ üzerinde Eisenstein altuzayı için bir baz oluşturulabildiğini açıklamıştır. Bunu ise Dirichlet karakterlerinin izomorf olduğu $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ uzayını ele alarak göstermiştir.

5.3. İki ağırlıklı Cusp Formlar Uzayı için Baz oluşturulması

Şu noktada Modüler semboller hakkında bildiğimiz bilgileri gözden geçirirsek, (2 ağırlıklı) $\Gamma_0(N)$ modüler sembollerin uzayının nasıl olduğunu ve boyutunun ve bazının oluşturulabileceğini ve nasıl oluşturulduğunu biliyoruz. Cuspsal modüler sembollerin sınır eşleşmesiyle bulunacağını ve bu sembollerin cusp formlar ile eşlendiğini biliyoruz. Bunun yanısıra Hecke eşdeğişimli olduğu için modüler formlar yerine modüler sembolleri kullanabileceğimiz aşikar bir gerçek.

Ancak bu bilgileri asıl amacımız olan $\Gamma_0(N)$ üzerinde 2 ağırlıklı cusp formlar altuzayının bir bazını yazmak için Hecke operatörünün q açılımlarında oynadığı önemli bir rolü açıklamalıyız. Daha önce verdiğimiz bir teoremi hatırlatma olarak yazalım.

Hatırlatma 5.3.0.30. (3.2.5.5) f , modüler grup Γ altında k ağırlıklı $\sum_{n \geq 0} a_n q^n$ şekline Fourier seri açılımına sahip bir modüler form olsun. O zaman bu seri üzerine n . Hecke operatörü T_n

$$T_n(f) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{1 \leq d | (n, m)} d^{k-1} a_{mn/d^2} \right) q^m$$

şeklinde etki eder.

Bu teoremin en önemli sonucu $a_i(f)$, f modüler formunun seri açılımında q^i li terinin katsayısını göstermek üzere;

Corollary 5.3.0.31. $a_1(T_n(f)) = a_n(f)$

olmasıdır. İspatında kısa bir şekilde verebiliriz.

İspat: $m = 1$ iken q lu terimin katsayısı $1 * a_{1.n/1^2}$ olur. □

Bu teoremin önemi Hecke operatörünün modüler formun, q lu terimi ile q^n li terimi arasında bir bağlantı kurmasıdır. Dahası modüler semboller bilindiğinde herhangi bir modüler formun sabit terimi ve ona karşılık gelen modüler sembolün bilinmesi halinde q seri açılımının yazılabilmesidir.

Başka bir sonuçta sabit olmayan bir cusp formun açılımındaki q lu terimin katsayısının 0 olmayacağıdır çünkü eğer 0 ise bir önceki sonuç gereğince bütün katsayılar sıfır olur yani form 0 fonksiyonuna denk olur.

Burada fikirlerin oturması açısından şunlar söylenebilir. $\Gamma_0(N)$ üzerinde modüler semboller uzayı ile modüler formlar uzayı, cuspsal homoloji ile alakalıdır. dahası integral eşlemeler dejenere olmayan Hecke eşdeğişimli eşlemelerdir bu da Hecke operatörü altında modüler formlarda belli bir değişiklik gösteren bir elemanla aynı değişikliği gösterecek bir modüler sembol bulunabileceğini göstermektedir, dahası modüler semboller için Hecke operatörünü uygulamak Manin sembolleri ile hesaplanabilir.

Bu ilişkiler ışığında, 2 ağırlıklı $\Gamma_0(N)$ altındaki cusp formlar altuzayı için artık bir baz oluşturulabilir; çünkü cusp formların q açılımında sabit terimi sıfırdır ve cuspsal modüler bir sembole Hecke operatörü uygulayarak bir cusp formun istenilen netliğe kadar q^n li terimlerinin katsayıları alınabilir. Bunu bir algoritma olarak yazıp bölümü bitirelim.

Algoritma 5.3.0.32 (2 ağırlıklı Cusp formlar uzayının bir bazını oluşturmak). N ve B verilmiş iki pozitif tamsayı olmak üzere bu algoritma $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ için bir q^B netliğine kadar bir baz oluşturmaktadır.

i $\mathbb{M}_2(\Gamma_0(N))$ uzayı için bir baz (4.3.0.18) da anlatıldığı şekil ile oluşturulur.

ii sınır eşlemesiyle cuspsal olan semboller ve $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ bulunur.

iii (4.2.0.16) dan $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$, cuspsal modüler formlar uzayının boyutu d bulunur.

iv $[T_n]$, n . Hecke operatörü T_n nin $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ in bazına uyguladığında çıkan matrisi göstermek üzere ve $a_{ij}([T_n])$ bu matrisin i . satırı, j . sütunundaki girdiyi göstermek üzere

$$f_{ij}(q) = \sum_{n=1}^{B-1} a_{ij}([T_n])q^n + O(q^B)$$

lineer bağımsız seri sayısı d olana kadar yazılır.

ve bu algoritma $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ için q^B netliğinde bir baz yazmış olur; çünkü cuspsal modüler semboller cusp formlar ile ilişkilidir, dahası Hecke operatörü uygulanmadan bir cuspsal modüler sembolün katsayısı olan 1 i bir cusp formun q lu terimindeki katsayı olarak, Hecke operatörü altında iki tarafta aynı değişikliği gösterdiği için, düşünebiliriz.

Bu noktada hatırlatılması gereken bir diğer nokta ise cuspsal modüler semboller uzayının boyutunun cusp formlar uzayının boyutunun 2 katı olmasıdır bundan dolayı algoritma işletilirken alınan bir seri daha önce alınmış lineer bağımsız serilerin bir kombinasyonu olabilmektedir.

Diğer ağırlıklar ve benzer denklik altgrupları için SAGE in benzer işlemler yaptığını gelecek bölümde göstereceğiz. Dip not olarak, (3.2.4) bölümünde modüler formlar uzayı için bir baz yazarken SAGE in Eisenstein altuzayı ve cusp form altuzayını en baştan sınıflandırdığını görmüştük ki bunun nedeni aslında baz elemanlarının cusp form altuzayları için modüler semboller, Eisenstein altuzayları içinse Miyake'nin çalışmalarıyla kolayca hesaplanıyor olmasıdır.

5.4. k ağırlıklı Cusp Formlar Uzayı için Baz oluşturulması

Bu bölümde modüler formlar ve modüler semboller arasında Hecke operatörleri altında eşdeğişimli bir eşleme tanımlayacağız ve bu eşlemeyi modüler formların bir bazını oluşturmak için kullanacağız.

$k \geq 2$ ve $\overline{\mathcal{S}}_k(\Gamma_N) = \{\overline{f} \mid f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_N)\}$, üstçizgi kompleks eşleği göstermek üzere, k ağırlıklı *antiholomorfik cusp formlar uzayı* olsun. Merel [17] makalesinde

$$\delta : (\mathcal{S}_k(\Gamma_N) \otimes \overline{\mathcal{S}}_k(\Gamma_N)) \times \mathbb{M}_k(\Gamma_N) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle (f_1, f_2), P\{\alpha, \beta\} \rangle \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f_1(z)P(z, 1)dz + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(z)P(\overline{z}, 1)d\overline{z}$$

eşlemesini tanımlamış ve bu eşleme hakkında özellikler sunmuştur. Burada bahsedilen integraller α dan β ya herhangi bir kontur üstünde alınan integrallerdir, modüler semboller homolojiden geldiğinden bize burada bu esnekliği sunar.

Özellik 5.4.0.33. δ eşlemesi iyi tanımlıdır, yani modüler sembol denk bir modüler sembol ile değiştirildiği zaman sonuç değişmez.

İspat, integralde değişken değiştirilmesiyle ve matris özelliklerini kullanarak kolayca elde edilmektedir. (5.4.) ispatına bakılarak aynı adımlarla bu ispat yapılabilir.

Buraya bu eşlemenin aslında dejenere bir eşleme olduğunu ve çoğu $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ elemanı için eşlemenin 0 çıkacağını not düşmekte yarar var; lakin 2 ağırlıklı modüler semboller için geliştirdiğimiz integral eşlemesinin soyutlaştırılmış hali olan bu eşlemenin daha önce gördüğümüz özellikleri burada da mevcut.

Teorem 5.4.0.34 (Shokurov). δ eşlemesi cuspsal modüler semboller üzerine kısıtlandığında yani $\mathcal{S}_k(\Gamma_N) \otimes \overline{\mathcal{S}}_k(\Gamma_N) \times \mathbb{S}_k(\Gamma_N) \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlandığında bu eşleme kompleks uzayların dejenere olmayan bir eşlemesi olur.

İspat [20] makalesinde bulunmaktadır ya da Shokurov sembolleri hakkında yeterli bilgiye sahip biri [17] de anlatıldığı şekliyle ispatı ortaya çıkarabilir.

Bu teorem bize özel bir durumunu daha önce homolojiyi kullanarak ispatladığımız bir teoremin genel halini verir.

Sonuç 5.4.0.35. $\text{boyut}_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_k(\Gamma_N, \mathbb{C}) = 2\text{boyut}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_k(\Gamma_N)$

Buradan görüldüğü gibi her cusp forma karşılık modüler semboller uzayında iki tane cuspsal sembol gelmektedir, bir kendisi diğeri ise antiholomorfik halinin görüntüsüne karşılık gelmek üzere.

Başka bilinen bir özellik ise $\mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ içinde $E_k(\Gamma_N)$ in boyutu kadar cuspsal olmayan modüler sembol bulunmaktadır.

Şimdi bu eşlemenin Hecke operatörü ile ilişkisini çalışmaya başlayabiliriz. Daha önce (3.2.1) ve (3.2.5) bölümlerinden iki adet hatırlatma yapalım. $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_N$ olmak üzere

$$f^{[\gamma]k}(z) = \det(\gamma)^{k-1} (cz + d)^{-k} f(\gamma z)$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörü $f \in \overline{\mathcal{S}}_k(\Gamma_N)$ için

$$f^{[\gamma]'k}(z) = \det(\gamma)^{k-1} (c\bar{z} + d)^{-k} f(\gamma z)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Aynı şekilde Hecke operatörü $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_N)$ için $T_n(f) = \sum_{\gamma \in H_n} f^{[\gamma]^k}(z)$ daha önce tanımlanmıştı, bu tanımıda $f \in \overline{\mathcal{S}}_k(\Gamma_N)$ için $T_n(f) = \sum_{\gamma \in H_n} f^{[\gamma]^k}(z)$ şeklinde verebiliriz.

Burada verdiğimiz tanımlarla beraber en sonunda daha en başlarda (4.2.0.12) teoreminde sözünü ettiğimiz Hecke eşdeğişimliliği ispatlayabiliriz. Hecke operatörünün özelliklerinin taşınabilir olması halihazırda tanımlamış ve birçok örnek verdiğimiz modüler sembollerin, modüler formlar yerine kullanılabilceği fikrini de pekiştirmiş olacaktır.

Teorem 5.4.0.36. $(f_1, f_2) \in (\mathcal{S}_k(\Gamma_N) \otimes \overline{\mathcal{S}}_k(\Gamma_N))$ ve $P\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{M}_k(\Gamma_N)$ olmak üzere, her n doğal sayısı için

$$\langle T_n(f_1, f_2), P\{\alpha, \beta\} \rangle = \langle (f_1, f_2), T_n(P\{\alpha, \beta\}) \rangle$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bu teoremin ispatında [17] i takip edeceğiz. Bu işlemeyi cusp formları ayırarak parça parça inceleyelim, burada $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$ olmak üzere $j(\gamma, z) = cz + d$ yi göstereyim,

$$\begin{aligned} \langle T_n(f_1), P\{\alpha, \beta\} \rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} T_n(f_1)P(z, 1)dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{\gamma \in H_n} f_1^{[\gamma]^k} P(z, 1)dz \end{aligned}$$

Modüler form f hızla azalan olduğundan integral mutlak yakındadır.

$$\begin{aligned} &= \sum_{\gamma \in H_n} \int_{\alpha}^{\beta} f_1^{[\gamma]^k} P(z, 1)dz \\ &= \sum_{\gamma \in H_n} \int_{\alpha}^{\beta} \det(\gamma)^{k-1} j(\gamma, z)^{-k} f_1(\gamma(z))P(z, 1)dz \end{aligned}$$

$gz \mapsto z$ değişken değişimini uygularsak.

$$= \sum_{\gamma \in H_n} \int_{\gamma\alpha}^{\gamma\beta} \det(\gamma)^{k-1} j(\gamma, \gamma^{-1}z)^{-k} f_1(z)P(\gamma^{-1}z, 1)d\gamma^{-1}z$$

$\tilde{\gamma} = \det \gamma * \gamma^{-1}$ i gösterebiliriz o zaman $\tilde{\gamma}(z) = \gamma^{-1}(z)$ olduğu aşikardır. Bunun yanısıra $\tilde{\gamma}$ nin determinanı $\det \gamma$ olacağından $d(\gamma^{-1}z) = d(\tilde{\gamma}z) = \frac{\det(\gamma)dz}{j(\tilde{\gamma}, z)}$ olduğunu görürüz.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\gamma \in H_n} \int_{\gamma\alpha}^{\gamma\beta} \det(\gamma)^{k-1} f_1(z) j(\tilde{\gamma}, z)^k \det(\gamma)^{-k} P(\tilde{\gamma}z, 1) d\gamma^{-1}z \\
&= \sum_{\gamma \in H_n} \int_{\gamma\alpha}^{\gamma\beta} \det(\gamma)^{k-1} f_1(z) j(\tilde{\gamma})^k \det(\gamma)^{-k} P(\tilde{\gamma}z, 1) \frac{\det(\gamma)dz}{j(\tilde{\gamma}, z)} \\
&= \sum_{\gamma \in H_n} \int_{\gamma\alpha}^{\gamma\beta} f_1(z) P(\tilde{\gamma}z, 1) dz \\
&= \sum_{\gamma \in H_n} \int_{\gamma\alpha}^{\gamma\beta} f_1(z) (\gamma P)(z, 1) dz = \langle (f_1), T_n(P\{\alpha, \beta\}) \rangle
\end{aligned}$$

Benzer bir eşitlik $f_2 \in \overline{\mathcal{S}}_k(\Gamma_N)$ içinde sağlanır ve teorem ispatlanmış olur. \square

Bu teoremin öneminden bu sefer biraz daha teknik ayrıntılar ile tekrar bahsederek Hecke operatörünün cuspsal modüler semboller ve cusp formlar arasında aşdeğişimli olması bu uzayların bazlarına uygulanan Hecke operatörlerinin aynı özdeğerleri alacağı söylenebilir; ancak bir cusp form için iki adet aynı özdeğerli cuspsal modüler sembolün çıkacağı aşikardır. Farklı Hecke operatörleri altında bu özdeğerler bulunup hangi modüler sembole karşılık geldiği sınıflandırılarak bir baz yazılabilir; ancak bahsedilen algoritma; ancak Hecke matrisi köşegenleştirilebilir ise geçerlidir. Hecke matrisleri Hermite normal formuna sokulabildiğinden bir matrisin köşegenleştirilebilir olması burada yeterlidir. Buda bir cusp form olan bir özform yazmakta kullanılabilir ki bunların örneklerini bir sonraki bölümde göreceğiz.

Merel'in cuspsal modüler semboller ile cusp formları eşleme çalışmaları, köşegenleşebilen Hecke operatörü matrisleri dışındaki özel durumlar dışında bir baz inşaa edilmesi için yeterli değildir. Burada Atkin-Lehner-Li teori ve dejenere olma eşlemeleri konuya dahil olur.

N ve M , $M|N$ sağlanan ve t de N/M yi bölen pozitif tamsayılar olsun. Γ_N burada $\Gamma_0(N)$

veya $\Gamma_1(N)$ göstermek üzere;

$$\begin{aligned}\alpha_t : \mathcal{S}_k(\Gamma_M) &\rightarrow \mathcal{S}_k(\Gamma_N) \\ f(q) &\mapsto f(q^t)\end{aligned}$$

eşlemesine *dejenere olma eşlemesi* adı verilir ve öbür yön $\mathcal{S}_k(\Gamma_N) \rightarrow \mathcal{S}_k(\Gamma_M)$ içinde β_t eşlemesi bulunmaktadır, bu eşlemelerin özellikler için [15] kitabına başvurulabilir.

$\mathcal{S}_k(\Gamma_N)_{eski}$ dejenere olma eşlemeleri ile N in tam bölenlerinden getirilmiş cusp formların altuzayı, $\mathcal{S}_k(\Gamma_N)_{yeni}$ ise dejenere olma eşlemesi ile ortaya çıkmayan, başka bir deyişle $\beta_t(\Gamma_N)$ nin çekirdeklerinin çekirdeklerinin kesişiminde kalan, cusp formların altuzayını gösterebilir. O zaman cusp formlar uzayının bir sınıflandırılması,

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_N) = \mathcal{S}_k(\Gamma_N)_{yeni} \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma_N)_{eski}$$

şeklinde yapabiliriz.

Bu noktada Atkin-Lehner-Li nin verdiği teorem indirgeme yöntemi ile cusp formlar uzayı için bir bazın yazılabileceğini bize gösterir.

Teorem 5.4.0.37. [Atkin-Lehner-Li] Cusp formlar uzayı,

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_N) = \bigoplus_{M|N} \bigoplus_{t|N/M} \alpha_t(\mathcal{S}_k(\Gamma_M)_{yeni})$$

şeklinde sınıflandırılabilir.

Teoremin ispatı $\Gamma_1(N)$ için [6] da ve genel hali ise [2] makalesinde bulunabilir.

Burada görüldüğü şekliyle artık herhangi bir ağırlık ve denklik altgrubu Γ_N verildiğinde, N in tam bölenlerine soruyu indirgeyip onlar için bir baz oluşturur ve sonrasında dejenere olma eşlemeleriyle $q \mapsto q^t$ değişimi ile istediğimiz cusp formlar uzayının bazını oluşturabiliriz.

BÖLÜM 6

6. SAGE de Ayrıntılı Örnekler

Bu bölümde bir önceki bölümde yaptığımız modüler semboller ile modüler formların eşlenmesini adım adım yapacağız ve SAGE ile bu işlemlerin nasıl yapıldığını göstereceğiz. $k \geq 2$ olan çift bir tamsayı için $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ ve $\mathcal{M}_k(\Gamma_{51})$ modüler formlar uzaylarının bazlarının nasıl yazılacağına bakacağız.

Ful modüler grup Γ için bir bazın zaten k ağırlığına göre $\{E_4^a E_6^b \mid 4a + 6b = k, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ şeklinde olacağını biliyoruz. Şimdi $k = 6$ ve $k = 26$ durumlarında bu uzaylar için Miyake'nin çalışmalarını ve modüler sembollerini kullanarak bir baz oluşturalım.

SAGE: MS6 = ModularSymbols(Gamma0(1),6); MS6

Modular Symbols space of dimension 1 for Gamma_0(1) of weight 6 with sign 0 over Rational Field

Burada olası bütün modüler semboller, (4.6.) bölümünün sonunda verilen üçlü notasyona göre;

$$x_0 = (0, 0, 0), x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (2, 0, 0), x_3 = (3, 0, 0), x_4 = (4, 0, 0),$$

elemanlarıdır. Bu elemanların (4.6.0.23) teoremindeki denkliklerine bakılırsa elimize sütunlar modüler sembol elemanlarını göstermek üzere denklik matrisi,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -3 & 6 & -3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

şeklinindedir burada çizginin üzerindeki denklikler $x + x\sigma = 0$ altındakiler $x + x\tau + x\tau^2 = 0$ dan gelen denklemlerdir. anlamlarına bakalım sırasıyla satırlar, $x_0 = -x_4, x_1 = x_3, x_2 = 0$ ve

$3x_0 - 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ dir. Son eşitlikte önceki bildiklerimizi kullanırsak $x_4 = -2x_1$ elde ederiz ki buda bu modüler semboller uzayında her elemanın x_4 cinsinden yazılabileceğini gösterir. Matrisde daha sonraki denklemler echelon forma geldiğinde sıfır olacak satırlardır. Burada (4.6.0.23) teoreminin J matrisli eşitliğine ihtiyaç $J \in \Gamma$ olduğundan bulunmamaktadır. SAGE bu işlemleri kendi altında otomatik olarak yapmaktadır.

SAGE: MS6.basis()

$([X^4, (0, 0)],)$

Bu Manin sembolünün modüler sembol karşılığını da SAGE den isteyebiliriz.

SAGE: MS6.basis()[0].modular_symbol_rep()

$X^4 * \{0, Infinity\}$

Cusp formlara karşılık geldiklerinden dolayı cuspsal modüler sembollerin neler olduğunu sorabiliriz ancak daha önce (3.2.4.1) teoreminden öğrendiğimiz üzere bu ağırlıkta Γ altında cusp form bulunmamaktadır.

SAGE: MS6.boundary_map()

Hecke module morphism boundary map defined by the matrix

[-1]

Domain: Modular Symbols space of dimension 1 for Gamma_0(1) of weight ...

Codomain: Space of Boundary Modular Symbols for Congruence Subgroup Gamma0(1) ...

Görüldüğü üzere sınır eşlemesi altında 0 olan eleman olmamıştır ondan dolayı bu uzayda cuspsal modüler sembol dolayısıyla karşılık gelen modüler formlar uzayı $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ da cusp form bulunmaz.

$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ içinde cusp form olmadığını ve $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ nın bazı cuspsal olmayan tek bir elemandan oluştuğu için boyutunun 1 olacağını biliyoruz. Şimdi bu baz elemanını Miyake'nin tekniği ile yazalım, Eisenstein serisinin görüntüsünün Γ altında modüler form olması için (5.2.1) for-

mülünde her iki karakterde aşikar karakterler olarak alınmalıdır. O zaman baz elemanı,

$$E_6(q) = -\frac{B_6}{12} + \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{n|m} n^5 \right) q^m$$

şekline dönüşür yani seri (3.2.2) bölümünde tanımladığımız normalize edilmiş Eisenstein serisine dönüşür ki buda beklenen sonuçtur. Denklemdaki B_6 , 6. Bernoulli sayısını belirtmektedir ve değeri $1/42$ dir.

SAGE: bernoulli(6)

1/42

SAGE: -1/(42*12)

-1/504

Baz elemanının 6 ağırlıklı Eisenstein serisi olacağını bildiğimizden, bu serinin bizim daha önce anlattığımız özelliklerle tutup tutmadığına bakalım.

SAGE: E6 = eisenstein_series_qexp(6); E6

$$-1/504 + q + 33 * q^2 + 244 * q^3 + 1057 * q^4 + 3126 * q^5 + 8052 * q^6 + 16808 * q^7 + 33825 * q^8 + 59293 * q^9 + O(q^{10})$$

SAGE de bazı yazdırmanın başka bir şekli ise modüler formlar uzayını tanımlayıp bazını istemek olabilir ki bu durumda genelde elde edilenden farklı bir baz ortaya çıkacaktır, bunun nedeni ise SAGE in elde ettiği bazı (3.2.4.7) teoreminin fikriyle kanonik baz haline getirmesidir.

SAGE: MF6 = ModularForms(Gamma0(1),6); MF6.basis()

$$[1 - 504 * q - 16632 * q^2 - 122976 * q^3 - 532728 * q^4 - 1575504 * q^5 + O(q^6)]$$

SAGE in bize verdiği sonuçların daha önce (3.2.4.1) teoreminden ve Miyake'nin sonuçlarından alınan sonuçlarla örtüşüğünü buradan görebiliriz.

Şimdi $\mathcal{M}_26(\Gamma)$ için bir baz yazmaya çalışalım. Bu sefer modüler formlar uzayının boyutunun (3.2.4.6) dan 2 olduğunu biliyoruz, yani dahası (3.2.4.5) teoreminde verildiği şekliyle Δ cusp formu ile eşlemenin bu uzayda bir adet cusp formun varlığını garanti ettiğini biliyoruz. Modüler Semboller uzayını oluşturup bazını incelemeden önce (5.4.0.35) sonucu bize her cusp form için modüler semboller uzayında o formla alakalı iki cuspsal modüler sembolün bulunduğu bilgisini verdiğinden, bu uzayın 3 boyutlu olmasını bekleriz.

SAGE: MS26 = ModularSymbols(Gamma0(1),26); MS26

Modular Symbols space of dimension 3 for Gamma_0(1) of weight 26 with sign 0 over Rational Field

SAGE: MS26.basis()

$([X^{22} * Y^2, (0, 0)], [X^{23} * Y, (0, 0)], [X^{24}, (0, 0)])$

Önceden öngördüğümüz gibi modüler sembol uzayı bu konumda 3 boyutlu bir uzaydır. Şimdi sınır eşlemesine bakalım;

SAGE: MS26.boundary_map()

Hecke module morphism boundary map defined by the matrix

[0]

[0]

[-1]

Domain: Modular Symbols space of dimension 3 for Gamma_0(1) of weight ...

Codomain: Space of Boundary Modular Symbols for Congruence Subgroup Gamma0(1) ...

Bu eşlemeden görüldüğü gibi baz elemanlarının ilk iki tanesi cuspsal modüler semboldür. O zaman bu sembollerin özdeğerlerine bakarak bir cusp özform baz elemanı yazabiliriz.

Prosedürü resmi olarak bir defa daha anlatalım. Cuspsal modüler semboller ile cusp form-

lar Hecke operatörü eşdeğişmeli olarak eşlenebildiğinden, özform olan bir cusp formla aynı özdeğer için özsembol olan iki adet cuspsal modüler sembol bulunmalıdır. Bu düşünce ile cuspsal bir özsembol, q katsayısı 1 olacak bir cusp özforma karşılık gelmek zorundadır ve bu sembole n . Hecke operatörü uygulanması ve özdeğerine bakılması ile diğer q^n terimlerinin katsayıları da bulunur. Merel'in [17] makalesinde motivasyonu bu olmuştur.

Şimdi bu fikri SAGE ile işlemler yaparak gösterelim. $\mathbb{M}_{26}(\Gamma)$ nın bazına Hecke operatörleri uygulayıp özdeğerleri bulmak için karakteristik polinomları çarpanlara ayırarak bulalım.

SAGE: T2 = MS26.T(2).matrix(); T2

[-48 0 0]

[0 -48 0]

[20174427000/43 0 33554433]

SAGE: T3 = MS26.T(3).matrix(); T3

[-195804 0 0]

[0 -195804 0]

[509427225216000/43 0 847288609444]

SAGE: T4 = MS26.T(4).matrix(); T4

[-33552128 0 0]

[0 -33552128 0]

[676940490712395000/43 0 1125899940397057]

SAGE: T5 = MS26.T(5).matrix(); T5

[-741989850 0 0]

[0 -741989850 0]

[179184645692462592000/43 0 298023223876953126]

Karakteristik polinomlarda hangi özdeğerin bir cusp özforma denk geldiğini anlamak kolay değildir, iki farklı şekilde aradığımız öz değerleri bulabiliriz. Birinci yöntem rastlantısal olarak yukardaki matrislerde olduğu gibi özdeğerlerin sınır eşlemesi altında sıfır olan elemanlara karşılık gelen matris satırında köşegen dışında, ve burada köşegende bulunan değer özdeğer olur, hiçbir değer bulunmaması sayesinde, ikinci yöntem ise bir cusp forma karşılık iki cuspsal sembol yani aynı özdeğerli iki sembol olduğu için, karakteristik polinomun çarpanlara ayrılışında derecesi çift olan elemanların incelenmesi ile olur; çünkü Eisenstein serilerine denk gelen elemanların farklı Hecke operatörleri altında birbirlerinden farklı değerler alacağı aşikardır. Daha teknik ancak uygulamaya yatkın olmayan başka bir bakış açısı ise [22] da bulunabilecek olan v^* kıvrıma (involution) fonksiyonudur.

SAGE: T2.fcp()

$$(x - 33554433) * (x + 48)^2$$

SAGE: T3.fcp()

$$(x - 847288609444) * (x + 195804)^2$$

SAGE: T4.fcp()

$$(x - 1125899940397057) * (x + 33552128)^2$$

SAGE: T5.fcp()

$$(x - 298023223876953126) * (x + 741989850)^2$$

Yukarıda anlattığımız şekilde burada 2, 3, 4 ve 5. Hecke operatörleri için cuspsal özsembolün özdeğerleri sırasıyla -48, -195804, -33552128 ve -741989850 olacaktır. Buradan ise $\mathcal{M}_{26}(\Gamma)$ nın cusp formlar altuzayının bir bazını $q - 48q^2 - 195804q^3 - 33552129q^4 - 741989850q^5 + O(q^6)$ şeklinde q^6 netliğine kadar elde etmiş oluruz.

SAGE ile bu baz elemanını kontrol edelim. $\mathcal{M}_{26}(\Gamma)$ modüler formlar uzayını tanımlayalım

ve bazını SAGE e yazdıralım.

SAGE: MF26 = ModularForms(Gamma0(1),26); MF26

Modular Forms space of dimension 2 for Congruence Subgroup Gamma0(1) of weight 26 over Rational Field

SAGE: MF26.basis()

[

$$q - 48 * q^2 - 195804 * q^3 - 33552128 * q^4 - 741989850 * q^5 + O(q^6),$$

$$1 - 24/657931 * q - 805306392/657931 * q^2 - 20334926626656/657931 * q^3 - 27021598569529368/657931 * q^4 - 7152557373046875024/657931 * q^5 + O(q^6)$$

]

Görüldüğü gibi ilk eleman bizim elimizle yaptığımız cusp forma eşittir, ikinci baz elemanı ise bir önceki örnekte olduğu gibi Miyake'nin çalışmasından elde edilen normalize edilmiş Eisenstein serisidir.

Şimdi $\Gamma(51)$, Γ elemanlarını 51 modundaki görüntüleriyle eşlemesinin çekirdeğini temsil etsin. Bu grubu içeren ve Γ altında aynı endekse sahip olan herhangi bir Γ_{51} denklik altgrubu için koset temsilcileri sayısı fazla olacağından alacağımız modüler formlar uzaylarının, k , ağırlıklarını ne yazık ki küçük tutmak zorunda kalıyoruz; çünkü apırlığın büyük olması durumunda olası Manin sembollerinin sayısı, "*koset temsilcileri sayısı* $\times X^i Y^{k-i-2}$ şeklindeki elemanlar sayısı ($k-2$)" olur ve bu kadar elemana (4.6.0.23) da verilen eşitliklerin bulunup, modüler semboller uzayı için baz elemanlarını bulmak basit bir bilgisayar için imkansızlaşır.

Bu durum ile karşılaşmaması için SAGE in üreticileri, internet üzerinden erişilebilecek bir sunucu açmışlardır ve "<http://www.sagenb.org>" sitesinden bu sunucuya ulaşım büyük hesaplamalar yapabilirler.

Günlük hayatta kullanılan 1 gigabyte hafızalı bir bilgisayar ancak $\mathbb{M}_4(\Gamma_0(4))$ için sonuçlar verebilmektedir. Burada vereceğimiz $\mathbb{M}_{10}(\Gamma_0(51))$ için bazı sonuçlar, modüler sembol uzayını oluşturma ve bazlarını bulma, bu sunucu tarafından çözülebilmektedir; ancak $\mathcal{M}_{10}(\Gamma_0(51))$

için bir baz verememektedir. Şimdi işlemleri göstermek için $\mathcal{M}_6(\Gamma_0)$ uzayının bazını modüler semboller kullanarak yazmaya çalışacağız. $\mathbb{M}_6(\Gamma_0(51))$ i tanımlayıp bazını yazarak başlayalım.

SAGE: MS6_51 = ModularSymbols(Gamma0(51),6); MS6_51

Modular Symbols space of dimension 60 for Gamma_0(51) of weight 6 with sign 0 over Rational Field

SAGE: MS6_51.basis()

$[X^4, (0, 1)], [X^4, (1, 8)], [X^4, (1, 9)], [X^4, (1, 13)], [X^4, (1, 14)], [X^4, (1, 15)],$
 $[X^4, (1, 16)], [X^4, (1, 17)], [X^4, (1, 18)], [X^4, (1, 19)], [X^4, (1, 21)], [X^4, (1, 22)],$
 $[X^4, (1, 23)], [X^4, (1, 24)], [X^4, (1, 25)], [X^4, (1, 26)], [X^4, (1, 27)], [X^4, (1, 28)],$
 $[X^4, (1, 29)], [X^4, (1, 30)], [X^4, (1, 31)], [X^4, (1, 32)], [X^4, (1, 33)], [X^4, (1, 34)],$
 $[X^4, (1, 35)], [X^4, (1, 36)], [X^4, (1, 37)], [X^4, (1, 38)], [X^4, (1, 39)], [X^4, (1, 40)],$
 $[X^4, (1, 41)], [X^4, (1, 42)], [X^4, (1, 43)], [X^4, (1, 44)], [X^4, (1, 45)], [X^4, (1, 46)],$
 $[X^4, (1, 47)], [X^4, (1, 48)], [X^4, (1, 49)], [X^4, (1, 50)], [X^4, (3, 1)], [X^4, (3, 2)],$
 $[X^4, (3, 4)], [X^4, (3, 5)], [X^4, (3, 7)], [X^4, (3, 8)], [X^4, (3, 10)], [X^4, (3, 11)],$
 $[X^4, (3, 13)], [X^4, (3, 14)], [X^4, (3, 16)], [X^4, (3, 17)], [X^4, (3, 20)], [X^4, (3, 23)],$
 $[X^4, (3, 26)], [X^4, (3, 29)], [X^4, (3, 32)], [X^4, (17, 1)], [X^4, (17, 2)], [X^4, (17, 3)]$

Hecke operatör matrisinin çarpanlarına ayrılmış durumunu incelersek;

SAGE: ModularSymbols(Gamma0(51),6).T(2).matrix().fcp()

$$(x - 33)^4 * (x - 1)^4 * (x + 6)^8 * (x^2 + 7 * x - 24)^2 * (x^3 - 5 * x^2 - 54 * x + 256)^2 * (x^4 - 5 * x^3 - 108 * x^2 + 526 * x + 612)^2 * (x^4 - 3 * x^3 - 94 * x^2 + 284 * x + 968)^4 * (x^5 - x^4 - 138 * x^3 + 122 * x^2 + 2304 * x + 2520)^2$$

Bu çarpanlardan bazı özdeğerlerin reel sayılar bile olmadığı ortaya çıkmaktadır ki cuspsal modüler semboller için çift katlı özdeğerlerin düşünülmesini bu noktada olanaksızlaştırır. Bunun nedeni modüler semboller üretilirken (4.6.0.23) teoreminin kullanılmasıdır, doğal bir irdelemeyle boyut arttıkça modüler semboller ile özformların birbiriyle alakalı seçilme olasılığında azalır.

Hecke operatör matrisini genede istenirse, modüler sembollerden bir baz elemanının operatör altındaki görüntüsünü anlamak için SAGE den öğrenebiliriz. 7. Hecke operatörünü uygulayıp, matrisini isteyelim.

SAGE: MS6_51.T(7)

Hecke operator T_7 on Modular Symbols space of dimension 60 for Gamma_0(51) of weight 6 with sign 0 over Rational Field

SAGE: MS6_51.T(7).matrix()

60 x 60 dense matrix over Rational Field

Görüldüğü gibi SAGE bu noktada matrisi basmaktan boyutları dolayısıyla kaçınmaktadır ancak .list() kullanılarak özel olarak istenen bir matris bastırılabilir ve dahası büyük boyutlar için referans olması açısından SAGE matrisin bir kopyasını text dosyası olarak kaydettiğini ve nereden ulaşılabileceğini açıklar.

Modüler semboller uzayı bir denklik altgrubuyla çalıştığı için denklik altgrubunun özelliklerini merak edildiğinde bu uzaydan öğrenebiliriz. Mesela konuya dahil edilmemesine karşın cusp noktalarında açılan Eisenstein serisi görüntülerinin (5.2.0.29) ile elde edilen baz ile aynı olup olmadığı merak edilirse cusp noktalarının bilinmesine ihtiyaç olacaktır ve bunlar herhangi bir noktada modüler semboller uzayına sorulabilir.

SAGE: MS6_51.cusps()

[Infinity, 0, 1/3, 1/17]

Bu verilen cusp noktalarının denklik altgrubunun cusp noktaları olduğunu pekiştirmek için denklik altgrubunu tanımlayıp cusp noktalarını isteyelim.

SAGE: G0_51 = Gamma0(51); G0_51

Congruence Subgroup Gamma0(51)

SAGE: G0_51.cusps()

[0, 1/17, 1/3, Infinity]

Şimdi tekrar cusp formlar altuzayı için baz yazılması sorusuna geri dönelim ve sınır eşlemesini öğrenelim. Burada modüler semboller bazı bize daha önce görmediğimiz karışık bir matris verecektir hatta matriste herhangi bir sıfır satır çıkmayabilir ancak bu matrisi echelon formuna çevirmek baz elemanlarının lineer kombinasyonlarının sınır eşlemesini sormakla aynı olduğundan bu matrisi echelon formuna sokturabilir ve bu uzayda cuspsal modüler sembol altuzayının boyutunu bulabiliriz; ancak daha öncede belirttiğimiz gibi bu sınır eşlemesinin daha önceki örneklerde olduğu gibi 0 satırlara sahip olmaması bize modüler semboller uzayının baz elemanlarının direk cuspsal elemanlar olmadığını göstermektedir bu durum hem Hecke operatörünün uygulanmasını hemde matrisin çarpanlara ayrılmasını zorlaştırmaktadır.

Burada farklı olarak karşılaşacağımız bir başka nokta ise sınır eşlemesi matrisinin artık tek sütun değil dört sütunlu bir matris olmasıdır ki bunun sebebi sınır eşlemesinin modüler sembollerini denklik altgrubunun cuspları ile alakalı bir eşleme yapmasıdır, yani herhangi bir modüler sembol uzayı için sınır eşlemesi matrisi '*baz elemanı sayısı* × *denklik altgrubunun cusp sayısı*' boyutlarında olacaktır.

SAGE: MS6_51.boundary_map().matrix().echelon_form().list()

[1, 0, 0, 0,

0, 1, 0, 0,

0, 0, 1, 0,

0, 0, 0, 1,

0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0,

...

0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0]

Bu eşlemeden bu uzayda Eisenstein serileri ile alakalı semboller altuzayının 4 ve cuspsal altuzayın 56 boyutlu olduğunu hemen görebiliriz; çünkü sınır eşlemesi altında 0 olan satırların sayısı bize cuspsal modüler semboller altuzayının boyutunu vermektedir. Bu bilgilerimizi doğrulayalım ve bu uzaylara birer isim verelim,

SAGE: E6_51 = MS6_51.eisenstein_subspace(); E6_51

Modular Symbols subspace of dimension 4 of Modular Symbols space of dimension 60 for Gamma_0(51) of weight 6 with sign 0 over Rational Field

SAGE: C6_51 = MS6_51.cuspidal_subspace(); C6_51

Modular Symbols subspace of dimension 56 of Modular Symbols space of dimension 60 for Gamma_0(51) of weight 6 with sign 0 over Rational Field

$\mathcal{M}_6(51)$ için Eisenstein altuzayının bazını nasıl yazabileceğimizi biliyoruz; ancak önceki örneklerde olduğu gibi burada cusp formlar altuzayının bir bazını sadece cuspsal modüler sembollere bakarak, Hecke matrisi çarpanlarına ayırışmadığından, bulamayız. Bundan dolayı Akin-Lehner-Li teorisi fikrine döneceğiz.

(5.4.0.37) teoremini gözönünde bulundurursak, bazını bulmak istediğimiz cusp formlar uzayı,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_6(\Gamma_0(51)) &= \bigoplus_{M|51} \bigoplus_{t|51/M} \alpha_t(\mathcal{S}_6(\Gamma_0(M))_{yeni}) \\ &= \bigoplus_{t|51} \alpha_t(\mathcal{S}_6(\Gamma_0(1))_{yeni}) \\ &\quad + \bigoplus_{t|17} \alpha_t(\mathcal{S}_6(\Gamma_0(3))_{yeni}) + \bigoplus_{t|3} \alpha_t(\mathcal{S}_6(\Gamma_0(17))_{yeni}) + \alpha_1(\mathcal{S}_6(\Gamma_0(51))_{yeni})\end{aligned}$$

şeklinde sınıflandırılır.

Burada SAGE den yeni cusp formları bulmasını daha β_t dejenere olma eşlemeleriyle bakmasını isteyerek bu uzayların bazlarını elde ederiz. Sonrasında bulguları α_t dejenere olma eşlemesini kullanarak istediğimiz cusp formlar uzayının bazını üretebiliriz.

Bir örnek vermek adına yukarıdaki sınıflandırmanın ikinci elemanı, $\bigoplus_{t|17} \alpha_t(\mathcal{S}_6(\Gamma_0(3))_{yeni})$ 1 ele alalım. Burada herhangi bir dejenere olma eşlemesinden gelmeyen baz elemanlarını bulmamız gereken cusp formlar altuzayı $\mathcal{S}_6(\Gamma_0(3))$ dür.

SAGE: CF6_G0_3 = ModularForms(Gamma0(3),6).cuspidal_subspace(); CF6_G0_3

Cuspidal subspace of dimension 1 of Modular Forms space of dimension 3 for Congruence Subgroup Gamma0(3) of weight 6 over Rational Field

Aldığımız bu uzayda yeni formları, dejenere olma eşlemesinin görüntüsü olarak bu uzaya gelmemiş formları, bulmak için .newforms() komutunu kullanırız.

SAGE: CF6_G0_3.newforms()

$$[q - 6 * q^2 + 9 * q^3 + 4 * q^4 + 6 * q^5 + O(q^6)]$$

Burada aldığımız bu yeni form $\mathcal{S}_6(\Gamma_0(3))_{yeni}$ uzayının bir bazını oluşturmaktadır ve artık bu elemanı dejenere olma eşlemesi ile $\mathcal{S}_6(\Gamma_0(51))$ uzayının bazındaki görüntülerine götürebiliriz. 17 yi bölen t değerleri için bu görüntüler sırasıyla,

$$\begin{aligned} \alpha_1(q - 6 * q^2 + 9 * q^3 + 4 * q^4 + 6 * q^5 + O(q^6)) \\ &= q - 6 * q^2 + 9 * q^3 + 4 * q^4 + 6 * q^5 + O(q^6) \\ \alpha_{17}(q - 6 * q^2 + 9 * q^3 + 4 * q^4 + 6 * q^5 + O(q^6)) \\ &= q^{17} - 6 * (q^{17})^2 + 9 * (q^{17})^3 + 4 * (q^{17})^4 + 6 * (q^{17})^5 + O(q^{102}) \\ &= q - 6 * q^{34} + 9 * q^{51} + 4 * q^{68} + 6 * q^{85} + O(q^{102}) \end{aligned}$$

şeklindedirler ve $\mathcal{S}_6(\Gamma_0(51))$ uzayının baz elemanlarında bulunurlar. Özel olarak ikinci elemanın katsayılarının tuttuğunu göstermek adına şimdi SAGE e cusp formlar altuzayının bazını yüksek bir netlik ile hesaplatalım.

SAGE: MF6_51 =ModularForms(Gamma0(51),6); MF6_51

Modular Forms space of dimension 32 for Congruence Subgroup Gamma0(51) of weight 6 over Rational Field

SAGE: MF6_51.set_precision(30);

SAGE: MF6_51.cuspidal_subspace().basis()

[

$$q + 10 * q^{28} + 6 * q^{30} + 10 * q^{31} - 3 * q^{32} + 13 * q^{33} - 15 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^2 + 8 * q^{28} - 6 * q^{30} - 4 * q^{31} + 7 * q^{32} + 8 * q^{33} + O(q^{35}),$$

$$q^3 + 3 * q^{28} + 7 * q^{30} + 3 * q^{31} + 12 * q^{32} - 7 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^4 - 2 * q^{28} + 4 * q^{30} - 4 * q^{31} + 10 * q^{32} + 4 * q^{33} - 2 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^5 + 10 * q^{28} - 4 * q^{30} + 4 * q^{31} + 8 * q^{32} - 16 * q^{33} + 10 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^6 + 3 * q^{28} - q^{30} + 3 * q^{31} - 4 * q^{32} - 16 * q^{33} + 9 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^7 + 9 * q^{28} - 11 * q^{30} + 12 * q^{31} + 10 * q^{32} - 12 * q^{33} + 11 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^8 - 2 * q^{28} + 6 * q^{30} - 2 * q^{31} + 2 * q^{32} + 4 * q^{33} - 8 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^9 + 10 * q^{28} - 13 * q^{30} + 10 * q^{31} + 6 * q^{32} - 14 * q^{33} + 14 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{10} + 5 * q^{28} - 8 * q^{30} + 2 * q^{31} - 2 * q^{32} - 14 * q^{33} + 16 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{11} + 3 * q^{28} + 2 * q^{30} - 3 * q^{31} - 2 * q^{33} + q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{12} - 3 * q^{28} + 7 * q^{30} - 3 * q^{31} - 2 * q^{32} + 14 * q^{33} - 13 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{13} + 5 * q^{30} - 4 * q^{31} - q^{32} + 2 * q^{33} - 3 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{14} - 2 * q^{28} - 2 * q^{30} + 4 * q^{31} - 2 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{15} - q^{30} + 2 * q^{32} - q^{33} + O(q^{35}),$$

$$q^{16} - 2 * q^{28} + q^{30} - 2 * q^{31} - 2 * q^{32} + 6 * q^{33} - 3 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{17} - 6 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{18} - 2 * q^{28} - q^{30} - 2 * q^{31} - 2 * q^{33} + 2 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{19} - 2 * q^{28} + q^{30} - 2 * q^{32} - q^{33} + O(q^{35}),$$

$$q^{20} - q^{28} - q^{30} - q^{31} - 2 * q^{32} + q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{21} - q^{30} - 2 * q^{32} - q^{33} + O(q^{35}),$$

$$q^{22} - 2 * q^{28} + q^{30} - q^{31} - 2 * q^{32} + 2 * q^{33} - 2 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{23} - q^{28} - q^{31} + 2 * q^{33} - q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{24} - 2 * q^{28} + 2 * q^{30} - 2 * q^{31} - 2 * q^{32} + 2 * q^{33} - 2 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{25} - q^{30} - q^{32} - q^{33} + q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{26} - 2 * q^{28} + 2 * q^{30} - 2 * q^{31} - q^{32} + 2 * q^{33} - 2 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{27} - q^{28} + q^{30} - q^{31} + 2 * q^{33} - 3 * q^{34} + O(q^{35}),$$

$$q^{29} - q^{30} - 2 * q^{33} + 2 * q^{34} + O(q^{35})$$

]

Bu bazdan görüldüğü gibi yazdığımız elemanlar cusp formlar uzayı $\mathcal{S}_6(\Gamma_0(51))$ in içinde bulunmaktadır. Bu noktada akla gelebilecek bir soru Modüler semboller neden çalıştığımız olacaktır; ancak hatırlatma yapmak gerekirse Modüler sembol uzayları baz yazımında Hecke operatör matrisinin karakteristik polinomu tam olarak çarpanlara ayrıldığı takdirde Atkin-Lehner-Li teorisinden kat kat daha hızlı baz oluşturabilir ve oluşturduğu cusp formları öz-form olur. Bununla aynı sıra baz oluşturulmasında sorun yaşansa bile özel bir modüler forma karşılık gelen modüler sembol, Hecke operatör altındaki görüntüleri eşlenerek, bulunursa eğer bu form için bütün işlemlerin modüler sembol ile çok daha hızlı yapılabilecek olmasıdır.

Daha önceden bahsettiğimiz bilgisayar ve hesaplama konusunu SAGE den datalara bakarak kontrol edelim. Burada yapılan işlemlerin yarısı 1 gigabyte hafızaya sahip herhangi bir makinede

yapılmayan hesaplardır, ondan dolayı bu işlemleri daha fazla data almak adına SAGE in internetten erişilen sunucusu ile yapmayı doğru buluyorum. Burada birkaç modüler sembol uzayının oluşturulması zamanını inceleyelim;

SAGE: time MS2_G0_51 = ModularSymbols(Gamma0(51),2); MS2_G0_51

Time: CPU 0.03 s, Wall: 0.03 s

Modular Symbols space of dimension 13 for Gamma_0(51) of weight 2 with sign 0 over Rational Field

SAGE: time MS4_G0_51 = ModularSymbols(Gamma0(51),4); MS4_G0_51

Time: CPU 0.14 s, Wall: 0.14 s

Modular Symbols space of dimension 36 for Gamma_0(51) of weight 4 with sign 0 over Rational Field

SAGE: time MS6_G0_51 = ModularSymbols(Gamma0(51),6); MS6_G0_51

Time: CPU 1.27 s, Wall: 1.27 s

Modular Symbols space of dimension 60 for Gamma_0(51) of weight 6 with sign 0 over Rational Field

SAGE: time MS8_G0_51 = ModularSymbols(Gamma0(51),8); MS8_G0_51

Time: CPU 3.35 s, Wall: 3.36 s

Modular Symbols space of dimension 84 for Gamma_0(51) of weight 8 with sign 0 over Rational Field

SAGE: time MS10_G0_51 = ModularSymbols(Gamma0(51),10); MS10_G0_51

Time: CPU 5.92 s, Wall: 5.93 s

Modular Symbols space of dimension 108 for Gamma_0(51) of weight 10 with sign 0 over

Rational Field

SAGE: time MS12_G0_51 = ModularSymbols(Gamma0(51),12); MS12_G0_51

Time: CPU 9.19 s, Wall: 9.19 s

Modular Symbols space of dimension 132 for Gamma_0(51) of weight 12 with sign 0 over Rational Field

Görüldüğü gibi $\Gamma_0(51)$ için koset temsilcisi sayısı az olduğundan dolayı işlemlerin süreleri, ağırlıklar 2 şer artarken, ortalama 2 katına çıkmaktadır; ancak $\Gamma_1(51)$, $\Gamma_0(51)$ in alt grubudur, için koset temsilcileri sayısı artacağından işlemler üstel şekilde artmakta ve SAGE sunucusunun çözemeyeceği bir hal almaktadır. Boyutların artmasında bakılarak grupların küçük olmasının, modüler semboller uzaylarının ne kadar arttırıldığı gözle görülebilir.

SAGE: time MS2_G1_51 = ModularSymbols(Gamma1(51),2); MS2_G1_51

Time: CPU 2.74 s, Wall: 2.74 s

Modular Symbols space of dimension 193 for Gamma_1(51) of weight 2 with sign 0 and over Rational Field

SAGE: time MS4_G1_51 = ModularSymbols(Gamma1(51),4); MS4_G1_51

Time: CPU 117.36 s, Wall: 117.37 s

Modular Symbols space of dimension 576 for Gamma_1(51) of weight 4 with sign 0 and over Rational Field

SAGE: MS6_G1_51 = ModularSymbols(Gamma1(51),6); MS6_G1_51

Traceback (most recent call last):

...

MemoryError: out of memory allocating a matrix

Bilindiği gibi Modüler formlar sayıların gösterim problemlerinde odak noktası olmuşlardır. Bu noktada sayıların kuadratik toplam şeklinde yazılması konusunda bilgi edinmek için [1] makalesine veya [13] kitabından elde edilebilir.

BÖLÜM 7

7. L Fonksiyonlarının Özel Değerlerinin Bulunması

L -fonksiyonları modüler fonksiyonlar gibi analitik sayılar teorisinin temel odak noktalarından bir tanesidir. En ünlü örneği, $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere, Riemann zeta fonksiyonu, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dir.

Bu fonksiyonlar ve özel noktalardaki değerleri hakkında bir çok açık problem bulunmaktadır ve bu bu açık problemlerden iki tanesi Clay Matematik Enstitüsünün milyon dolarlık kabul ettiği, biri çözülmüş, yedi problemendir. Açık problemlerin ilki (Genelleştirilmiş) Riemann hipotezidir ve Riemann zeta fonksiyonunun (veya genelleştirilmiş halinde bir L -fonksiyonunun) 0 değerlerini ancak $Re(s) = 1/2$ de alabildiği söylemektedir. İkinci açık problem ise Birch, Swinnerton ve Dyer hipotezidir ki bu hipotezde verilen K cismi üzerinde bir E eliptik eğrisi için üretilen L fonksiyonunun 1 noktasında ki kökünün derecesinin eliptik eğrinin rasyonel noktaları değişmeli grubu, $E(K)$ nın rankı olduğudur.

L fonksiyonlarının özel değerlerinde şuan iki çok önemli açık sorunun, veya daha paraseverler için iki milyon dolar, bulunması bu fonksiyonların çalışılmasında büyük bir motivasyon. Dirichlet L fonksiyonlarını tanımlayalım.

Tanım 7.0.0.38 (Dirichlet L Fonksiyonları). χ bir Dirichlet karakter ve $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

fonksiyonuna bir *Dirichlet L fonksiyonu* adı verilir.

Bundan daha genel bir L fonksiyonunun tanımı,

Tanım 7.0.0.39. $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$L(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

fonksiyonuna *L fonksiyonu* adı verilir.

şeklinde yapılabilir.

L fonksiyonlarının özellikleri ve Modüler formlar ile alakaları hakkında bilgi almak için sırasıyla [21], [9] bakılabilir.

Bu fonksiyonların özel durumlar haricinde verilen s değeri için tam sonucunun bulunması neredeyse imkansızdır ondan dolayı daha önceki bölümlerde yaptığımız işlemlerin aksine ilk defa yaklaşım yapacağız.

Şimdi [7] makalesinde Dokchitser'in L fonksiyonlarının özel değerlerini bulmak için yaptığı çalışmadan bahsedeceğiz. (7.0.0.39) tanımındaki L fonksiyolarını düşünerek başlayalım. Bu fonksiyonlar için üç varsayım yazacağız.

Varsayım 7.0.0.40. $L(s)$ fonksiyonu, yeterince büyük $Re(s)$ değerleri için yakınsasın.

Varsayım 7.0.0.41. $L(s)$ fonksiyonunun kompleks düzlemin tamamına meromorfik devamı olsun. O zaman $\exists w \geq 0$, işaret $\varepsilon = \pm 1$, pozitif bir üst A ve $d \geq 1$ boyutlu ve Hodge sayıları $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ olan Γ -faktör

$$\gamma(s) = \Gamma\left(\frac{s + \lambda_1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{s + \lambda_d}{2}\right)$$

olsun ve $L^*(s) = A^s \gamma(s) L(s)$ olmak üzere fonksiyonel eşitlik

$$L^* := \varepsilon L^*(w - s)$$

sağlansın.

Burada fonksiyonel eşitlikte illa iki tarafta aynı fonksiyonun bulunması gerekmediğini dip not olarak düşelim.

Varsayım 7.0.0.42. L^* fonksiyonu sonlu tane p_i basit kutup noktasına sahip olsun ve bu noktadaki rezidüleri r_i ile gösterilsin.

Dokchitser'in çalışmasının amaçladığı iki nokta, varsayımlar sağlandığı şartta, verilen $L(s)$, L fonksiyonu için fonksiyonel eşitliğin sağlandığını test etmek ve verilen bir s_0 kompleks sayısı için $L(s_0)$ değerine istenen netliğe kadar bir yaklaşım yapmaktır.

$\phi(t)$, $\varphi(s)$ nin Mellin dönüşümünün tersi olsun, yani

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} \phi(t) t^s \frac{dt}{t}$$

sağlansın. Burada t pozitif reel (s değişkeninin imajinel kısmına gerek yok) ve s kompleks sayı alınırsa $\phi(t)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu ve dahası hızla azalan olduğu bilinmektedir. Bu fonksiyonu kullanarak,

$$\Theta(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi\left(\frac{nt}{A}\right)$$

şeklinde tanımlanırsa, bu fonksiyonun $L^*(s)$ in ters Mellin dönüşümü olduğu integrali alınarak görülür.

Burada $\Theta(t)$ fonksiyonunun $\Theta(t) = \varepsilon t^w \Theta(t) - \sum_i r_i t^{p_i}$ şeklinde bir eşitlik sağladığı ve dahası bu eşitliğin sağlanmasının fonksiyonel eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli olduğu ispatlanmıştır.

Artık asıl sorumuz olan özel bir değerde L fonksiyonunun değerine yaklaşım yapmak için bir tanıma daha ihtiyaç duymaktayız;

$$G_s(t) := t^{-2} \int_t^{\infty} \phi x^s \frac{dx}{d}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona bakarsak, $t^s G_s(t)$, $\phi(t)$ nin tamamlanmamış ters Mellin dönüşümüdür. Dahası L fonksiyonunun varsayımlarda bahsettiğimiz orjinal Gamma faktörü, $\gamma(s) = \lim_{t \rightarrow 0} t^s G_s(t)$ şeklinde elde edilir. Başka bir özellik olarak $G_s(t)$ fonksiyonu hızla azalan bir fonksiyondur ve bu da nümerik çalışmalar için iyi bir tercih olduğunu söyler.

L^* fonksiyonunun Mellin dönüşümünde biraz oynama yaparsak;

$$\begin{aligned} L^* &= \int_0^{\infty} \Theta(t) t^s \frac{dt}{t} = \int_0^1 \dots + \int_1^{\infty} \dots \\ &= \int_1^{\infty} \Theta(t) t^s \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} \Theta(1/t) t^{-s} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

ortaya çıkar ve burada $\Theta(t)$, $G_s(t)$ fonksiyonlarının tanımları kullanılarak;

$$L^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_s(n/A) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_{w-s}(n/A) + \sum_i \frac{r_i}{p_i - s}$$

eşitliği elde edilir. Burada önemli olan nokta $G_s(t)$ nin hesaplanmasını başarabilirsek L fonksiyonunun değerini veya fonksiyonun herhangi bir türevini bu eşitlikten hemen bulabileceğizdir.

Daha önce fonksiyonel eşitlikte iki tarafın aynı L fonksiyonu olması gerekmediğini belirtmiştik, farklı fonksiyonlar L^* ve \hat{L}^* olarak gösterilsin,

$$L^*(s) = \varepsilon \hat{L}^*(w - s)$$

şeklindeki denklem göz önüne alınırsa;

$$\Theta(1/t) = \varepsilon t^w \hat{\Theta}(t) - \sum_i \hat{r}_i t^{p_i}$$

ve

$$L^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_s(n/A) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \hat{G}_{w-s}(n/\hat{A}) + \sum_i \frac{\hat{r}_i}{\hat{p}_i - s}$$

değişlikleri ortaya çıkar ve gene istenen özel bir noktada L fonksiyonunun değeri daha meşakatlî olsa dahi çözülebilir.

Bu noktadan sonra Dokchitser hesaplamaların t nin değerleri ile alakalı olarak nasıl yapılabileceğini anlatmıştır. t nin yeterince küçük olması durumundaki sonuçları vererek başlayalım.

Hodge sayıları λ_i ve λ_j , $2|(\lambda_i - \lambda_j)|$ durumunu sağlıyor ise denktir diyelim ve denklik alt-sınıflarını Λ_i ile gösterelim. Bu notasyon ile $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$ denklik alt-sınıfları, $l_i = |\Lambda_i|$, $\hat{\lambda}_j = \inf_{\lambda \in \Lambda_j} \text{Re}(\lambda)$ ve

$$c_j^{(n)} = c_{j(s)}^{(n-1)} / \prod_{k=1}^d ((s + \lambda_k + m_j)/2 - n)$$

olmak üzere,

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^N t^{\hat{\lambda}_j} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{l_j-1} \frac{(-\ln t)^k}{k!} c_{j,k+1}^{(n)} \right) t^{2n}$$

sağlanır.

Burada karşımıza çıkan serileri sonlu seri toplamı olarak alırsak hızla azalan ϕ fonksiyonu için bir yaklaşım bulmuş oluruz; ancak formülünde karışıklığından kolayca anlaşılabilceği gibi bu hiç efektif bir yöntem değildir.

Geriye kalan hesaplamaları formül olarak vermek yerine bir kaç L fonksiyonu için hesaplama yapmayı tercih ediyoruz; ancak atlanılan bölümler [7] da bulunmaktadır. Son bir not olarak L fonksiyonunun değerlerini ters Mellin dönüşümlerinden hesaplarken Dokchitser yeterince küçük ve yeterince büyük t ler diye iki şekilde inceleme yapmıştır ancak 'yeterince' tabiri bu makalede sezgisel olduğu için L donksiyonunun hesabında beklentiden büyük hata çıkabilir. Bunu önlemek için fonksiyonun hesaplamada nasıl alt aralıklara bölünüp hesaplama yapıldığına bakmak yararlı olacaktır.

Bir L fonksiyonunu SAGE de iki şekilde üretebiliriz; özel tanımlı bir L fonksiyonu istiyorsak fonksiyonun ileticisini, Gama faktörünü, w ağırlığını, işaretini, özel olarak $Rez > w/2$ olan kutup noktası istiyor isek kutup noktalarını ve bu kutuplardaki rezidülerini ve son olarak çıkacak değer için ne kadar netlikte olmasını istediğimizi ya da bir eliptik fonksiyonu alakalı L fonksiyonunu bulmak için SAGE de ki fonksiyona girdi olarak vermeliyiz.

[9] ta modüler formlar ile L fonksiyonlarının eşlenebildiği koşullar ve özellikleri açıklanmıştır; lakin SAGE daha bir modüler formdan şartlar uygun ise L fonksiyonu üretememektedir.

Klasik bir örnek de olsa Riemann zeta örneği ile başlayalım, bu fonksiyonun bilindiği üzere gama faktörü yoktur (birdir), işaretini, ileticisi ve ağırlığı 1 dir ve reel kısmı 2 den büyük bir kutup noktası bulunmaz. Bu bilgileri kullanarak Riemann zeta fonksiyonuna SAGE de Dock-ister yaklaşımını tanımlayalım.

```
SAGE: L = Dokchitser(conductor=1, gammaV=[0], weight=1, eps=1, poles=[1], residues=[-1], init='1'); L
```

Dokchitser L-series of conductor 1 and weight 1

Riemann zeta fonksiyonunun 1 noktasında kutup noktasına sahip olduğunu biliyoruz bunu SAGE de denersek SAGE bize o noktada kutup noktası olduğunu verecektir.

SAGE: L(1)

Traceback (most recent call last):

...

ArithmeticError: ### user error: L*(s) has a pole at s=1.00000000000000000000

Riemann hipotezini doğrulayan en küçük aşikar olmayan köke bir yaklaşımı fonksiyonda yerine koyarsak Dokchitser yaklaşımının çok iyi bir sonuç verdiğini görmekteyiz.

SAGE: L(1/2+14.1347251417346937904*sqrt(-1))

-7.81569799043726e-16 + 4.90939641704327e-15*I

Bunların dışında başka bir ünlü zeta değerini deneyelim, $\zeta(2) = \pi^2/6$ olduğunubiliyoruz nümerik açıdan Dockhitser'in yaklaşımıyla bu değeri karşılaştıralım.

SAGE: L(2)

1.64493406684823

SAGE: (pi^2)/6

(pi^2)/6

Bu noktada SAGE in özel olarak irrasyonel sayılarla yaklaşımlar yaparak çalışmamak için sembolik işlemleri geliştirdiğini görmüş oluyoruz ancak nümerik bir yaklaşım SAGE den istenebilmekte.

SAGE: numerical_approx((pi^2)/6)

1.64493406684823

Bu örnekten gördüğümüz gibi Dockhitser'in L fonksiyonuna yaptığı yaklaşım ile normal bir reel sayıya yapılan yaklaşım birbirini birebir örtüyor.

Bunların dışında herhangi bir noktayı denersek, gene bu fonksiyon bize yaklaşımlar vermektedir ve burada özel olarak belirtmediğimizden 53 bit netlikte çalışmaktadır.

SAGE: L(3.7)

1.10628824146468

Benzer şekilde $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_s(t)$ yi formülize ederek Riemann zetanının türevlerinin değerlerini de bulabilmekte ve bunlara yaklaşımlar yapılabilmektedir.

SAGE: L.derivative(3.7)

-0.0922063233533904

SAGE: L.derivative(3.7,2)

0.0921773819068274

Şimdi bir Eliptik eğri tanımlayıp bu eliptik eğri ile alakalı L fonksiyonuna Dockister yaklaşması ile bakalım.

Bir eliptik eğri $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$. formatında olmak üzere SAGE de bu eliptik formu "EllipticCurve([a1,a2,a3,a4,a6])" veya normalizasyonu yapılmış $y^2 = x^3 + ax + b$ formatındaki bir Eliptik eğriyi "EllipticCurve([a,b])" şeklinde tanımlarız.

SAGE: E2 = EllipticCurve([1,2,3,4,6]); E2

Elliptic Curve defined by $y^2 + x * y + 3 * y = x^3 + 2 * x^2 + 4 * x + 6$ over Rational Field

Yukarıda tanımladığımız Eliptik eğriden Dockhitser L fonksiyonunu yani alakalı olduğu L fonksiyonuna Dockhitser yaklaşmasını yapabiliriz. Bunun üstünede artık Birch, Swinnerton, Dyer hipotezini deneyebiliriz.

SAGE: L_elliptic = E2.lseries().dokchitser(); L_elliptic

Dokchitser L-function associated to Elliptic Curve defined by $y^2 + x * y + 3 * y = x^3 + 2 * x^2 + 4 * x + 6$ over Rational Field

SAGE: L_elliptic(0)

0

Aynı örneği başka bir eliptik eğri ile tekrarlayalım.

SAGE: E = EllipticCurve([2,3]); E

Elliptic Curve defined by $y^2 = x^3 + 2 * x + 3$ over Rational Field

SAGE: L_n_elliptic = E.lseries().dokchitser(); L_n_elliptic

Dokchitser L-function associated to Elliptic Curve defined by $y^2 = x^3 + 2 * x + 3$ over Rational Field

SAGE: L_n_elliptic(1)

0

L fonksiyonlarının özel değerleri için serilerle uğraşıldığından günümüzün teknikleri ile çok özel durumlar haricinde ((3.2.2) bölümünde bir örneği mevcut) verilen L fonksiyonların tam sonucunu elde etmek mümkün değildir. Bu bölümde kısaca göz gezdirdiğimiz işlemlerin aslında analitik sayılar teorisinde değeri çok büyüktür. Bu tip algoritmalara sahip olmak sayılar teorisi çalışanlara L fonksiyonlarının gereken noktalarında, netliği yüksek, yaklaşık cevaplar verdiğiinden yapılan gözlemleri doğrulamak adına kullanılmaktadır.

Referanslar

- [1] Andrianov, A. N. *Action of Hecke Operator $T(p)$ on Theta Series*, Math. Ann. **247**, 1980, pp 245-254
- [2] Atkin, A. O. L. Lehner, J. *Hecke operators on $\Gamma_0(m)$* , Math. Ann. **185**, 1970, pp 134-160.
- [3] Apostol T. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, No. 41, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] Cremona J. E. *Algorithms for Modular Elliptic Curves*, second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] Cremona J. E. *Modular Symbols for $\Gamma_1(N)$ and Elliptic Curves over Complex Quadratic Fields*, Composito Math. **51** no. 3, 1984, pp 275-324.
- [6] Diamond, F. Shurman J., *A First Course in Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 228, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [7] Dokchitser, T. *Computing Special Values of Motivic L Functions*, Experiment. Math. **13** no. 2, pp 137-149.
- [8] Fropuff, Fundamental domain for the modular group on the upper half plane, 'http://en.wikipedia.org/wiki/File:ModularGroup-FundamentalDomain-01.png', from en wikipedia (08/04/2010)
- [9] Gelbart, S. S., Miller, S. D., *Riemann Zeta Function and Beyond*, Bulletin of the AMS **41** no. 1, 2003, pp 59-112.
- [10] Gunning, R. C., Notes by Brumer, A. *Lectures on Modular Forms*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962.
- [11] Iwaniec, H. *Topics in Classical Automorphic Forms*, Graduate studies in Mathematics, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [12] Katsurada, H. *Special Values of the Standard Zeta Functions for Elliptic Modular Forms*, Experiment. Math. **14** no. 1, 2005, pp 27-45.

- [13] Kilford, L. J. P. *A Classical and Computational Introduction to Modular Forms*, Imperial College Press, London, 2008.
- [14] Knuth, D. E. *Seminumerical Algorithms*, Art of Computer Programming Vol. 1,2,3, Addison-Wesley Professional, 1997.
- [15] Lang, S. *Introduction to Modular Forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [16] Miyake, T. Translated by Maeda Y. *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1989.
- [17] Merel, L. *Universal Fourier expansions of Modular Forms*, On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations, Springer, 1994, pp 59-94.
- [18] The SAGE Group. SAGE Mathematics Software (Version 4.3). 'http://www.sagemath.org/'.
'http://www.sagemath.org/' .
- [19] Serre, J. P. *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, No. 7, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [20] Shokurov V. V. *A Study of Homology of Kuga Varieties*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **44** no. 2, 1980, pp 443-464.
- [21] Steuding, J. *An Introduction to the Theory of L-Functions*, Course Notes, 'http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jsteudin/files/seminario0.pdf', 2005.
- [22] Stein, W. *Modular Forms, a Computational Approach*, Graduate studies in Mathematics, Vol. 79, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,Adı : Uncu, Ali Kemal
Uyruđu : Türkiye Cumhuriyeti
Dođum tarihi ve yeri : 06.05.1987 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 490 54 76
e-mail : akuncu@etu.edu.tr

Eđitim

Derece	Eđitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Bilkent Üniversitesi	2008

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008-2010	TOBB ETÜ	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce