

KESİKLİ STOKASTİK POPÜLASYON MODELLERİ VE
GECİKME ETKİSİ

ERDEM EMİN ÖZBAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2013

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

ERDEM EMİN ÖZBAN tarafından hazırlanan KESİKLİ STOKASTİK POPÜLASYON MODELLERİ VE GECİKME ETKİSİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR
1. Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hüseyin MERDAN
2. Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Tahir HANALIOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Harun KÜRKÇÜ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Erdem Emin ÖZBAN

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik Bölümü
1. Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ceren VARDAR ACAR
2. Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Temmuz 2013

Erdem Emin ÖZBAN

KESİKLİ STOKASTİK POPÜLASYON MODELLERİ VE GECİKME ETKİSİ

ÖZET

Popülasyon dinamiğinde, tek-türler için popülasyonları matematiksel olarak modellemede fark denklemleri sıklıkla kullanılmaktadır. Kullanılan bu deterministik modellere rastgeleliği dahil etmek, son yıllarda üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Rastgeleliği dahil ederek modellerin gerçek yaşam problemlerine daha iyi bir yaklaşım yapabilmesi amaçlanmıştır. Bu çalışmada doğada sıklıkla rastlanan ve etkisi göz ardı edilemez olan gecikme etkisi, literatürde var olan stokastik popülasyon modellerine dahil edilerek daha gerçekçi yaklaşımlar ve daha iyi sonuçlar elde etmek hedeflenmiştir. Yapılan tez çalışmasında çeşitli teorik ve sayısal sonuçlar elde edilmiş ve bulunan sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tek-Türler, Stokastik Popülasyon Modelleri, Gecikme Etkisi, Fark Denklemleri.

University : TOBB University of Economics and Technology
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Department of Mathematics
Supervisor 1 : Asst. Prof. Ceren VARDAR ACAR
Supervisor 2 : Assoc. Prof. Hüseyin MERDAN
Degree Awarded and Date : M.Sc. – July 2013

Erdem Emin ÖZBAN

**DISCRETE STOCHASTIC POPULATION MODELS AND DELAY
EFFECT**

ABSTRACT

In population dynamics, difference equations are frequently used in mathematical modelling of the single-species populations. Incorporating stochasticity into these deterministic models has been attracted too much attention in recent years. The aim including stochasticity into the deterministic models is to provide a better approach to the real-life problems. In this thesis, the delay effect, which is frequently encountered in the nature and which can not be ignored, was included in stochastic population models existing in the literature, aiming to obtain a more realistic approach and better results. Finally, various theoretical and numerical results have been obtained and the results were compared with those in the literature.

Keywords: Single-Species, Stochastic Population Models, Delay Effect, Difference Equations.

TEŞEKKÜR

Bu tez alıőmasının ortaya ıkmasında benden yardımlarını esirgemeyen, bana ok değerli bilgileriyle yol gösteren baőta danıőman hocalarım Yrd. Do. Dr. Ceren VARDAR ACAR ve Doç. Dr. Hüseyin MERDAN olmak üzere tüm TOBB ET Matematik Bölümü đretim üyelerine, bir çok konuda karőılaőtıđım sorunlarda yardım eden sevgili asistan arkadaőlarım ve maddi, manevi manada her zaman yanımda olan, beni bugünlere getiren ve her zaman destekleyen aileme teşekkür ederim.

Son olarak yüksek lisans eğitimim boyunca maddi desteğinden dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji niversitesi'ne teőekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

TEZ BİLDİRİMİ	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGE LİSTESİ	xii
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Bazı Olasılık Kavramları	4
2.1.1 Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri ve Koşullu Bek- lenen Değeri	4
2.1.2 Bir Rastgele Değişkenin Varyansı	5

2.1.3	İki Rastgele Değişken Arasındaki Kovaryans ve Korelasyon Katsayısı	6
2.2	Fark Denklemlerine Genel Bakış	7
2.2.1	Literatürde Bilinen Bazı Popülasyon Modelleri	9
2.3	Demografik ve Çevresel Rastgelelik	10
3	TEK TÜRLER İÇİN DETERMİNİSTİK POPÜLASYON MODELLERİNE STOKASTİK YAKLAŞIMLAR	14
3.1	Stokastik Popülasyon Modellerine Genel Bakış	14
3.1.1	Neden Stokastik Modeller?	15
3.2	Stokastik Popülasyon Modelleri	15
3.2.1	Demografik Varyans	16
3.2.2	Çevresel Varyans	17
3.3	Modellerin Test Edilmesi	18
3.3.1	Demografik Gürültü	20
3.3.2	Çevresel Gürültü	22
4	GECİKME ETKİSİ ALTINDA TEK TÜRLER İÇİN STOKASTİK POPÜLASYON MODELLERİ	23
4.1	Gecikme Etkisi	23
4.2	Bireysel Tabanlı Modelde Gecikme Etkisi	25
4.2.1	Demografik Varyans	26
4.2.2	Çevresel Varyans	27

5	SAYISAL SİMÜLASYONLAR VE KARŞILAŞTIRMALAR	29
6	TARTIŞMA VE SONUÇ	37
	KAYNAKLAR	39
	EKLER	42
	A Normal ve Lognormal Dağılım	43
	B Verileri Tahmin Etmede Kullanılan Maksimum Olabilirlik Metodu	44
	C Parametreleri Tahmin Etmede Kullanılan Olabilirlik Fonksiyonları	46
	D Tablo 1'deki Modellerin Varyansları	48
	E Terim Sözlüğü	49
	ÖZGEÇMİŞ	50

Şekil Listesi

2.1	Kelebeklerin yaşam döngüsü	8
2.2	Soğuk hava koşullarında kümeleşen bıldırcın grubu	11
3.1	Çevresel gürültü terimi yokluğunda $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri	19
3.2	Çevresel rastgelelik yokluğunda bireysel tabanlı modelde $n = 500$ iken elde edilen zaman serilerinde 100-üncü nesilden sonraki 20 neslin kullanılmasıyla tahmin edilen b^* değeri ile verileri üretmede kullanılan yavru sayısı (b) arasındaki fark	20
3.3	Çevresel rastgelelik yokluğunda Tablo 1'deki modeller için bireysel tabanlı modelde $b = 10$, $n = 500$ alınarak tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla hesaplanan popülasyon büyüklüğünün fonksiyonu olarak varyans grafiği	21
5.1	Çevresel gürültü terimi yokluğunda %30 gecikme etkisi altında, $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri	30
5.2	Çevresel gürültü terimi yokluğunda %50 gecikme etkisi altında, $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri	31

5.3	Çevresel gürültü terimi yokluğunda %75 gecikme etkisi altında, $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri	32
5.4	D1-D2-E1-E2 modelleri için farklı gecikme etkileri altında yavru sayısının (b) değerlerine göre elde edilen $b^* - b$ farkı	33
5.5	DW-N1-T1 modelleri için farklı gecikme etkileri altında yavru sayısının (b) değerlerine göre elde edilen $b^* - b$ farkı	34
5.6	%30 gecikme etkisi altında $b = 10$, $n = 500$ için tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla elde edilen varyans grafiği	35
5.7	%50 gecikme etkisi altında $b = 10$, $n = 500$ için tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla elde edilen varyans grafiği	35
5.8	%75 gecikme etkisi altında $b = 10$, $n = 500$ için tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla elde edilen varyans grafiği	36

SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan semboller açıklamalarıyla birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
\mathbb{R}	Reel sayılar cümlesi
$P\{X = a\}$	X rastgele değişkeni için a olayının olma olasılığı
$p_{X Y}(x y)$	X rastgele değişkeninin koşullu olasılık kütle fonksiyonu
$\mu = E(X)$	X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E(X Y = y)$	X rastgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$\sigma^2 = Var(X)$	X rastgele değişkeninin varyansı
$Cov(X, Y)$	X ve Y rastgele değişkeninin kovaryansı
$\rho = Corr(X, Y)$	X ve Y rastgele değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı
$X \sim B(n, p)$	Binom dağılımı gösteren X rastgele değişkeni
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	Normal dağılım gösteren X rastgele değişkeni
$\sigma_d^2(a_t)$	Demografik varyans
$\sigma_e^2(a_t)$	Çevresel varyans
$\tau(a_t)$	Demografik kovaryans
T	Gecikme terimi

1. GİRİŞ

Popülasyon dinamiğinin matematiksel modellenmesi, uygulamalı matematiğin önemli alanlarından birisi olup, ilk model Thomas Malthus tarafından 1798'de geliştirilmiştir. Malthus "*An Essay on the Principle of Population*" adlı çalışmasında, besin kaynakları lineer olarak büyürken, insan popülasyonunun üstel büyüme gösterdiğini ve bunun sonucunda da besin için rekabetin ortaya çıkacağını söylemiştir. Devamında eğer popülasyon savaş, hastalık ve kıtlık gibi felaketlerle kontrol altında tutulmazsa, büyük çapta yoksullukların ve savaşların kaçınılmaz son olacağını ileri sürmüştür. Daha sonra ise François Verhulst tarafından 1838 yılında günümüzde lojistik denklem olarak da adlandırılan popülasyon büyüklüğünün taşıma kapasitesi ile sınırlandığı popülasyon büyüme modeli oluşturulmuştur.

Kısaca popülasyonu tanımlamak gerekirse, popülasyon; aynı zamanda ve aynı alanda (yerde) bulunan, aynı tür organizmaların oluşturduğu bir topluluk olarak ifade edilebilir [31]. Popülasyon büyüklüğündeki ve bileşimindeki değişimler, aynı türün bireyleri arasındaki etkileşimden, farklı türlerin bireyleri arasındaki etkileşimden ve hastalık, besin sağlama gibi çevreyle olan etkileşimden kaynaklanmaktadır. Etkileşimler tek taraflı, kooperatif, mutualistik ve eşit biçimlerde olabilir. Bu değişimler doğum-ölüm oranına ve göç etme-göç alma oranına göre ifade edilirler [32].

Popülasyon dinamiği ise, bir ya da daha fazla tür için popülasyon büyüklüğü ve yoğunluğunun zaman içindeki değişimleri ile ilgilenen ekolojinin bir dalı olarak tanımlanabilir [18]. Popülasyon dinamiğinin amacı da; çevresel kuvvetlerin

etkileşiminden ve doğuştan gelen rastgelelikten kaynaklanan popülasyondaki değişimin nasıl ortaya çıktığını ve bunun sonuçlarını anlamaktır [31]. Popülasyonlar, yoğunluğa bağlı ve yoğunluğa bağlı olmayan faktörler tarafından etkilenirler. Yoğunluğa bağlı olmayan faktörlerde, ölüm ve doğum oranları popülasyon yoğunluğundan etkilenmezken, yoğunluğa bağlı olan faktörler hava olayları, doğal felaketler, besin imkanı, kirlilik vb. içermektedir [32].

Popülasyon dinamiği, kullanılan modellere göre kesikli zaman modelleri ($t = 0, 1, 2, \dots$) ve sürekli zaman modelleri ($t \in \mathbb{R}$) olmak üzere ikiye ayrılır. Yine her biri de kendi içinde deterministik ve stokastik modeller olmak üzere ikiye ayrılır.

Bir popülasyonun davranışı, popülasyonu oluşturan bireylerin davranışlarının sonucu olduğundan, bir popülasyon modeli oluştururken ilk önce bireylerin davranışlarının tanımlanması ve bundan yararlanarak popülasyon modelinin denkleminin elde edilmesi gerekir [15]. Popülasyon modellerinin oluşturulmasında kullanılan iki tip denklem vardır: diferensiyel denklemler ve fark denklemleri. Diferensiyel denklem modelleri; örneğin balina popülasyonunun modellenmesi gibi ardışık nesilleri kesişen türler için uygunken, fark denklemleri; örneğin kelebek popülasyonunun modellenmesi gibi ardışık nesilleri kesişmeyen türler için uygundur.

Tek türler için deterministik fark denklemleri, popülasyon dinamiğinin modellenmesinde uzun süredir kullanılmasına rağmen rastgeleliğin var olan modellere nasıl ekleneceği ve modeller üzerindeki etkisi çok az çalışılmıştır. Bu alandaki önemli makalelerden biri, Brännström ve Sumpter tarafından yapılan "*Stochastic analogues of deterministic single-species population models*" başlıklı çalışmadır [8]. Brannström ve Sumpter bu çalışmada, eklenen gürültü teriminin demografik ya da çevresel olma duruma göre çeşitli modellerin maksimum olabilirlik metodu kullanılarak parametre tahmini, varyans analizi gibi çeşitli karşılaştırmalar yaparak, modellerin uygunluğunu incelemiştir. Çalışmamızda ise, popülasyon dinamiğinde önemli bir yeri olan gecikme terimi, [1] nolu çalışmada var olan modellere dahil edilerek daha gerçekçi bir yaklaşım hedeflenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve yorumlanmıştır.

Bu tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır. Giriş kısmı olan 1. bölümde kısaca popülasyon dinamiği ve tezin amacından bahsedilmiştir. 2. bölümde teze hazırlık olması açısından bazı temel kavramlar verilmiştir. Brannström ve Sumpter'in yukarıda bahsedilen çalışması 3. bölümde incelenmiştir. 4. bölümde popülasyon dinamiğinde önemli bir yeri olan gecikme etkisi ele alınmış ve yukarıda adı geçen [8] nolu makaledeki modellere dahil ettiğimiz gecikme teriminin etkisinden bahsedilmiştir. 5. bölümde, elde ettiğimiz sayısal simülasyonlara ve karşılaştırmalara yer verilmiştir. Son bölüm olan 6. bölüm ise tartışma ve sonuç kısmıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bazı Olasılık Kavramları

2.1.1 Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri ve Koşullu Beklenen Değeri

Tanım 2.1.1. X kesikli rastgele değişkeni için, olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(a)$

$$p(a) = P\{X = a\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [24].

Tanım 2.1.2. X , $p(x)$ olasılık kütle fonksiyonuna sahip, kesikli bir rastgele değişken olmak üzere X 'in beklenen değeri $E[X]$

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir başka deyişle X 'in beklenen değeri, X rastgele değişkeninin alabileceği muhtemel değerlerin ortalamasıdır. Ayrıca X rastgele değişkeninin beklenen değeri μ ile gösterilmektedir [24].

Özellik 2.1.1. $X, Y \geq 0$ veya $E[X], E[Y] < \infty$ olmak üzere

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$,

- Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ için $E[aX + b] = aE[X] + b$,
- Eğer $X \geq Y$ ise $E[X] \geq E[Y]$ 'dir [13].

Tanım 2.1.3. X ve Y kesikli rastgele değişkenleri için $Y = y$ verildiğinde X 'in koşullu olasılık kütle fonksiyonu $\forall y$ için $P\{Y = y\} > 0$ sağlayan

$$p_{X|Y}(x|y) = P\{X = x|Y = y\} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

denklemleri ile tanımlanmıştır [24].

Buradan hareketle koşullu beklenen değer aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.4. X ve Y rastgele değişkenler olmak üzere $Y = y$ verildiğinde X 'in koşullu beklenen değeri

$$\begin{aligned} E[X|Y = y] &= \sum_x xP\{X = x|Y = y\} \\ &= \sum_x xp_{X|Y}(x|y) \end{aligned}$$

ile verilir [24].

Özellik 2.1.2. $E[X|Y] = E[X|Y = y]$ olmak üzere $E[X] = E[E[X|Y]]$ 'dir [24].

2.1.2 Bir Rastgele Değişkenin Varyansı

Tanım 2.1.5. X rastgele değişkeninin beklenen değeri μ olmak üzere, varyansı

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2] - \mu^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır [24].

Özellik 2.1.3. X rastgele bir değişken olmak üzere herhangi a, b sabiti için

$$\text{Var}[aX + b] = a^2\text{Var}[X]$$

dir [24].

Özellik 2.1.4. X ve Y rastgele değişkenleri için

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$

dir.

2.1.3 İki Rastgele Değişken Arasındaki Kovaryans ve Korelasyon Katsayısı

İki rastgele değişken arasındaki kovaryansı vermeden önce iki rastgele değişkenin aralarında bağımsız olması şartını tanımlamak gerekirse, eğer Reel Sayılar'ın herhangi iki A, B alt kümesi için

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$$

sağlanıyorsa X, Y rastgele değişkenlerine aralarında bağımsızdır denir [24].

Tanım 2.1.6. X, Y rastgele değişkenleri arasındaki ilişki hakkında bilgi veren kovaryans

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

şeklinde tanımlanır [24].

Eğer X, Y rastgele değişkenleri aralarında bağımsız ise $E[XY] = E[X]E[Y]$ olacağından $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 'dır.

Özellik 2.1.5. X, Y rastgele değişkenler ve a herhangi bir sabit olmak üzere

- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$,
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}[X]$,
- $\text{Cov}(aX, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$

dır [24]. Ayrıca iki bağımsız değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve büyüklüğünü belirten korelasyon katsayısı da aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.7. X, Y rastgele değişkenleri için korelasyon katsayısı ρ

$$\rho = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}}$$

ile verilir ve $-1 \leq \rho \leq 1$ dir [24].

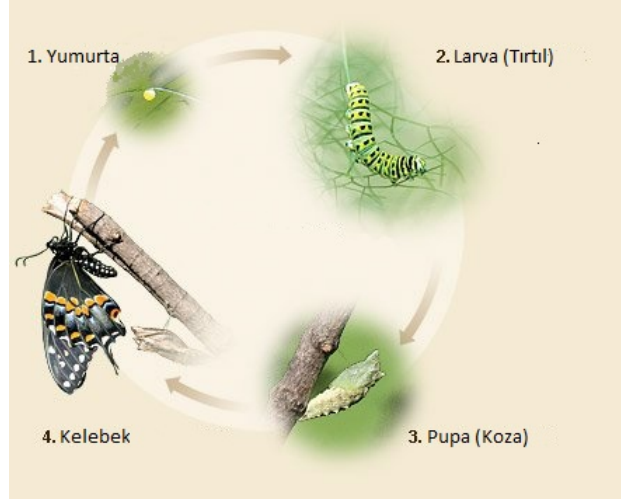
2.2 Fark Denklemlerine Genel Bakış

Popülasyon dinamiğinde, diferensiyel denklem modelleri nesiller için sürekli bir süreç tanımlar. Dolayısıyla nesiller arasında önceki nesillerden gelmiş bireyler olabilir [9]. Bir başka ifade ile ardışık nesiller örtüşebilirler. Fark denklemlerinde ise popülasyonlar özel, sonlu zaman aralıkları kullanılarak modellenir. Doğada ardışık nesilleri arasında bireyleri tekrar etmeyen bir çok tür vardır. Yani t -inci zamanındaki nesilde, $(t - 1)$ -inci zamandaki nesilden gelmiş hiçbir birey yer almaz. Örneğin kelebeklerin belirli bir yaşam periyodu vardır. Yetişkin kelebekler ilkbahar yada yaz aylarında yumurtalarını bırakırlar ve bir sonraki nesli oluşturacak olan tırtıllar oluşmadan önce yaşam periyodunu tamamlayıp ölürlür. Tırtıllar, olgunlaşmak için gereken uykuda bekleme ve metamorfoz evresini koza olarak geçirirler. Daha sonra ise kozalardan yeni bir kelebek olarak ortaya çıkarlar. Böylece bir sonraki nesil oluşmuş olur.

Bu tip popülasyonların büyümesi kesikli adımlarla olur. Dolayısıyla bu türler için fark denklemleri kullanmak daha uygundur. Ayrıca popülasyon türlerine bağlı olarak zaman aralıkları çeşitlilik gösterebilir. Örneğin bu süre, meyve sineğinin larvadaki çıkması için bir gün olurken, bir hücre için bir kaç saat ve bir bakteri, virüs için daha da az bir süre olabilmektedir. Sonuç olarak $(t + 1)$ -inci zamandaki N_{t+1} popülasyonu, t -inci zamandaki N_t popülasyonunun bir fonksiyonu olacağından karşılık gelen fark denklemi ise

$$N_{t+1} = f(N_t) \tag{2.1}$$

biçiminde ifade edilir.



Şekil 2.1: Kelebeklerin yaşam döngüsü

Tanım 2.2.1. f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere k . mertebeden en genel fark denklemi

$$f(x_{t+k}, x_{t+k-1}, \dots, x_{t+1}, x_t, t) = 0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

biçimindedir. Eğer f fonksiyonu t 'ye bağlı değilse (2.2) denklemi **otonom fark denklemi**, eğer t 'ye bağlı ise (2.2) denklemi **otonom olmayan fark denklemi** adını alır [2].

Fark denkleminin en sık kullanılan gösterimlerinden birisi de

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \dots + a_{k-1} x_{t+1} + a_k x_t = b_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

biçimindedir. $a_k \neq 0$ olduğu sürece (2.3) denkleminin mertebesi k 'dir. Genelde katsayıların reel ve fonksiyonun reel değerli olduğu kabul edilir. a_j katsayıları $j = 1, \dots, k$ için t 'nin ve $i = t, \dots, t + k - 1$ için x_i 'nin bir fonksiyonu olabilirler. Denklemin sağ tarafındaki b_t fonksiyonu ise t 'ye bağlı olabilir.

Tanım 2.2.2. Eğer (2.3) denklemindeki $j = 1, \dots, k$ için a_j katsayıları, sabit ya da t 'ye bağlı fakat $i = t, \dots, t + k - 1$ için x_i değişkenlerine bağlı değilse, (2.3) denkleminde **lineer (doğrusal) fark denklemi**, aksi halde **lineer olmayan fark denklemi** denir. Ayrıca eğer (2.3) denklemi lineer ve $\forall t$ için $b_t = 0$ ise denklem **homojen**, aksi durumda **homojen olmayan fark denklemi** adını alır [2].

Örnek 2.2.1.

$$x_{t+1} = atx_t + bt^2x_{t-1} + \sin(t)$$

fark denklemi, $(t + 1)$ -inci zamandaki neslin, t -inci ve $(t - 1)$ -inci zamandaki neslin lineer kombinasyonu, t -inci zamandaki sinüs fonksiyonun toplamını göstermektedir. Yukarıdaki fark denklemi $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere 2. mertebeden bir lineer fark denklemdir. Ayrıca hem otonom olmayan hem de homojen olmayan bir fark denklemdir.

Örnek 2.2.2.

$$x_{t+1} = ax_t^2 + bx_{t-1}$$

ile verilen fark denklemi $a, b \neq 0$ sabitler olmak üzere, 2. mertebeden, lineer olmayan ve otonom bir denklemdir.

Örnek 2.2.3. t -inci nesildeki popülasyon büyüklüğü x_t ile gösterilmek üzere kabul edelim ki popülasyondaki her birey her bir nesilde a tane birey (yavru) üretip daha sonra ölüyor. Bu taktirde popülasyon

$$x_{t+1} = ax_t \tag{2.4}$$

denklemi ile modellenir. (2.4) ile verilen fark denklemi, 1. mertebeden lineer ve homojendir. (2.4) denkleminin çözümü rekürsif olarak bulunabilir.

$$x_1 = ax_0, x_2 = ax_1 = a^2x_0 \tag{2.5}$$

şeklinde devam edilirse (2.4) denkleminin genel çözümü $x_t = a^t x_0$ biçiminde olur.

Tanım 2.2.3. (2.2) fark denkleminin çözümü, $t = 0, 1, 2, \dots$ için denkleme yerine konulduğunda ifadeyi doğru yapan x_t fonksiyonudur.

Eğer (2.4) denkleminde x_0 bilinirse çözüm tektir ve $a^t x_0$ çözümü başlangıç şartı x_0 verildiğinde t -inci nesildeki popülasyonun davranışını tek bir biçimde belirler.

2.2.1 Literatürde Bilinen Bazı Popülasyon Modelleri

Literatürde üstel büyüme modeli olarak ta adlandırılan Malthusian modeli, en basit popülasyonu modelidir. Fakat üstel büyüme modeli, popülasyon büyüklüğünü sınırlandırmaz. Popülasyon büyüklüğünün sınırlandığı en çok bilinen

iki model vardır. Bunlar Beverton-Holt [7] modeli ve Ricker [22] modelidir. Bu modeller isimlerini modelleri geliştiren ve balık popülasyonları üzerinde uygulayan araştırmacılarından alır. Bu modellerin bir başka elde edilişi [30] tarafından sunulmuştur. Burada Ricker ve Beverton-Holt denklemleri, yavruların yetişkinlerin besini olduğu varsayımından elde edilmiştir [2].

Beverton-Holt modeli aşağıdaki biçimdedir.

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{\lambda K N_t}{K + (\lambda - 1)N_t}, \quad \lambda > 1, K > 0, N_0 > 0$$

Yukarıdaki denklemde K , taşıma kapasitesi, r içsel büyüme oranı olmak üzere $\lambda = e^r$ 'dir [2].

Ricker modeli ise şu şekildedir:

$$N_{t+1} = N_t \exp \left[r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right] = f(N_t), \quad r, K > 0$$

Burada r parametresi içsel büyüme oranı ve K taşıma kapasitesidir [2].

2.3 Demografik ve Çevresel Rastgelelik

Her popülasyon dinamiği, birbirleriyle eş zamanlı işleyen deterministik ve stokastik unsurlara sahiptir. Kendi taşıma kapasitesinin altındaki ya da ortalama popülasyon büyüklüğüne ulaşmış popülasyonlar artma eğilimindeyken, kendi taşıma kapasitesinin üstündeki veya negatif artış oranına sahip popülasyonlar ise azalma eğilimindedir [19].

Gerçek biyolojiksel modellerle ilgilenen araştırmacılar bütün klasik modellerde yer alan şu varsayımı karşı karşıyadır: Bir önceki nesildeki popülasyonun durumuna bağlı olarak her bir bireyin gelecek nesile katkısının bağımsız olması varsayımıdır. Sıklıkla gözlemlenmiştir ki çok büyük popülasyonlar bile önemli ölçüde stokastik dalgalanmalar gösterebilirler [14]. Küçük popülasyonlar için bu dalgalanmalar bazen, popülasyondaki değişimin ve popülasyonun yok olmasına neden olmanın ana belirleyicisidir [32]. Bu yüzden deterministik modellere rastgeleliği dahil etmek önemlidir. İster kesikli ister sürekli modeller kullanılsın,

var olan deterministik modellere rastgeleliği eklemenin bir yolu gürültü (noise) teriminin eklenmesidir [20].

Popülasyon dinamiğinde, verilerde gürültü yani rastgelelik temel olarak üç biçimde ortaya çıkmaktadır. Bunlar demografik rastgelelik, çevresel rastgelelik ve gözlemsel hatalardır. Rastgeleliğin denklemlere nasıl dahil edileceği ise modellemeyle ilgilidir.

Demografik rastgelelik genellikle bireyler arasında bağımsız olarak tasarlanmış bireysel ölüm ve üreme gibi olayların rastgeleliklerini ifade eder. Herhangi bir zaman periyodunda popülasyondaki bireyler belirli bir olasılıkla ya öürler ya da hayatta kalırlar ve bireyler birim zamanda üretilen yavru sayısının olasılık dağılımına sahip olurlar. Demografik rastgelelik bireyler arasında bağımsız şekilde işleyeceğinden, küçük popülasyonlarda gelecek popülasyon büyüklüğü demografik rastgelelikten daha güçlü bir şekilde etkilenir [19]. Yani demografik rastgelelik daha çok küçük popülasyonlar üzerinde etkilidir. Örneğin soğuk hava koşullarında kümeleşen bıldırcınlar için grup küçüldükçe soğuk havayla temas eden bıldırcın yüzeyi artar ve böylece ölüm oranı yükselir [12].



Şekil 2.2: Soğuk hava koşullarında kümeleşen bıldırcın grubu

Popülasyon büyümesi üzerinde bir başka önemli etki de çevresel rastgeleliktir. Büyük popülasyonlardaki stokastik dalgalanmalar genellikle, popülasyonun fiziksel ve biyolojik çevresindeki stokastik varyasyonların etkisi olarak düşünülür. Klasik modellerde parametreler, modellere farklı parametre değerleri veren çevrenin, farklı çevresel koşullarının bir karakterizasyonu olarak düşünülebilir. Buna göre bu tip bir gürültü, modellerin parametrelerinin bir yıldan bir sonraki yıla rastgele olarak değiştiği kabul edilerek modellenabilir. Dolayısıyla bu varyasyonlardan kaynaklanan rastgelelik çevresel rastgelelik olarak adlandırılır ve büyük popülasyonlar için büyüme oranındaki belirsizliğin ana kaynağıdır [14].

Çevresel rastgelelik, genellikle fiziksel çevreye bağlı olarak ortaya çıkan kuraklık, fırtına, yangın gibi doğa olayları ve aynı zamanda çevrede ortaya çıkan hastalıklar gibi beklenmedik olaylardan kaynaklanan popülasyondaki geçici değişimlerdir. Çevresel rastgeleliğin etkisi hem büyük hem küçük popülasyonlar üzerinde benzerdir [23]. Bu yüzden çevresel rastgelelik verilen bir bölgedeki popülasyondaki birey sayısının çokluğuna rağmen popülasyonun birey sayısının azalmasında önemli bir risk oluşturur.

Popülasyon büyüklüğünün veya yoğunluğunun tahminindeki gözlemsel hata ise örnekleme prosedürüne dayanmaktadır. Tam ve eksiksiz ölçümlerin verildiği popülasyonlar için gözlemsel hata ihmal edilebilir. Bu da popülasyon zaman serilerindeki ölçme ya da gözlemsel hata ile başa çıkmak için gereken karmaşık istatistiksel yöntemlerden kaçınmamıza izin vermektedir [19].

Kesikli, deterministik tek türler için 1. mertebeden en basit popülasyon modeli

$$a_{t+1} = f(a_t) = a_t g(a_t) \quad (2.6)$$

şeklinde verilebilir. Burada a_t , t -inci nesildeki popülasyon ve $g(a_t)$ ise popülasyonda birey başına düşen net üreme oranıdır.

Gürültü teriminin modele dahil edilebilecek hali ya "*toplamsal normal dağılımlı gürültü*"

$$a_{t+1} = f(a_t) + \sigma \varepsilon_t \quad (2.7)$$

ya da "*çarpımsal lognormal dağılımlı gürültü*"

$$a_{t+1} = f(a_t) \exp\left(\sigma\varepsilon_t - \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2.8)$$

biçimidir [9]. Ayrıca σ , standart sapma olup, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ normal dağılıma sahip rastgele bir değişkendir.

3. TEK TÜRLER İÇİN DETERMINİSTİK POPÜLASYON MODELLERİNE STOKASTİK YAKLAŞIMLAR

3.1 Stokastik Popülasyon Modellerine Genel Bakış

Tek türler için popülasyon modelleri genellikle deterministik olmasına rağmen, modelleri verilere uyarlama ve türün yok olma olasılığını tahmin etme gibi birçok durumda stokastik popülasyon modelleri kullanmak daha uygundur [9].

Popülasyon modellerinde, popülasyon büyüklüğünün yeterince büyük olması halinde deterministik formülasyon daha sık kullanılmaktadır. Fakat popülasyon büyüklüğü küçük olduğunda türün belirli zaman sonra yok olma ihtimali olabileceği için, popülasyon büyüklüğündeki çeşitliliği stokastik formülasyonlarla modellemek daha gerçekçi olacaktır [3]. Doğum-ölüm süreci, av-avcı sistemleri, rekabet sistemleri ve epidemiolojik modeller gibi çeşitli stokastik popülasyon modelleri Bartlett [6] tarafından detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

3.1.1 Neden Stokastik Modeller?

Üreme, hayatta kalma gibi temel olaylar, bireysel seviyede tahmin edilemeyeceği için popülasyon büyüklüğünde yıllık değişimler stokastik olarak ortaya çıkmaktadır. Deterministik modeller ise, modellerin parametrelerine bağlı kesin sonuçlara yol açan koşullarını belirler ve doğal sistemlerin deterministikten ziyade daha çok stokastik olması muhtemeldir [7]. Deterministik ve stokastik modeller arasındaki önemli farklardan birisi de; deterministik modeller, sonucu mutlak kesinlikle tahmin ederken, stokastik modeller sonucu kesin tahmin etmez, sonucun tahmini için olasılık verir [3].

3.2 Stokastik Popülasyon Modelleri

Bireyleri kesikli ve nesilleri örtüşmeyen A_t tane bireye sahip bir popülasyon için, R_1, R_2, \dots, R_{A_t} 'ler popülasyondaki bireylerin bir sonraki nesile bireysel katkıları ve Z_t ise çeşitli çevresel faktörleri tanımlayan bir rastgele vektör olsun [4]. R_i 'ler, beklenen değeri $\mu(A_t)$ ve varyansı $\sigma^2(A_t)$ olan özdeş dağılımlı rastgele değişkenler olmak üzere, genelliği bozmaksızın $E[Z_t] = 0$ olsun. Eğer $A_t = a_t$ olursa bir sonraki nesil için beklenen popülasyon

$$\begin{aligned} E[A_{t+1}|A_t = a_t] &= E[R_1 + R_2 + \dots + R_{A_t}] \\ &= E[R_1] + E[R_2] + \dots + E[R_{A_t}] \\ &= a_t \mu(a_t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

olacaktır. Çevresel ve demografik rastgelelikle başa çıkmak için [14] nolu çalışmadan, $R_i = E[R_i] + W_e + W_d^i$ yazılabilir. Burada W_e ve W_d^i rastgele değişkenleri için $E[W_e] = 0$, $E[W_d^i] = 0$ ve $Cov(W_e, W_d^i) = 0$ dır.

$$R_i = E[R_i] + (E[R_i|Z_t] - E[R_i]) + (R_i - E[R_i|Z_t])$$

olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
Var[A_{t+1}] &= Var \left[\sum_{i=1}^{a_t} R_i \right] \\
&= Var \left[\sum_{i=1}^{a_t} E[R_i] + W_e + W_d^i \right] \\
&= Var \left[\sum_{i=1}^{a_t} E[R_i] + \sum_{i=1}^{a_t} W_e + W_d^i \right] \\
&= Var \left[a_t \mu(a_t) + a_t W_e + \sum_{i=1}^{a_t} W_d^i \right] \\
&= Var \left[a_t W_e + \sum_{i=1}^{a_t} W_d^i \right] \\
&= Var[a_t W_e] + Var \left[\sum_{i=1}^{a_t} W_d^i \right] \\
&= a_t^2 Var[W_e] + a_t Var[W_d^i] + 2 \binom{a_t}{2} Cov(W_d^i, W_d^j) \\
&= a_t^2 \sigma_e^2(a_t) + a_t \sigma_d^2(a_t) + a_t(a_t - 1) \tau(a_t) \\
&= a_t (\sigma_d^2(a_t) - \tau(a_t)) + a_t^2 (\sigma_e^2(a_t) + \tau(a_t)) \tag{3.2}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\sigma_d^2(a_t) = Var[W_d^i]$ demografik varyans, $\sigma_e^2(a_t) = Var[W_e]$ çevresel varyans ve $\tau(a_t) = cov(W_d^i, W_d^j)$ demografik kovaryanstır. Aşağıda varyansın durumlarına göre (3.2) denklemi incelenmiştir.

3.2.1 Demografik Varyans

Sabit bir çevrede $\sigma_e^2(a_t) = 0$ olacağından (3.2) denklemi

$$Var[A_{t+1}] = Var \left[\sum_{i=1}^{a_t} R_i \right] = a_t \sigma_d^2(a_t) + a_t(a_t - 1) \tau(a_t) \tag{3.3}$$

şeklini alacaktır. $0 < p < 1$ olmak üzere kabul edelim ki popülasyondaki her birey, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$E[R_i] = pb \quad \text{ve} \quad Var[R_i] = bp(1 - p) \tag{3.4}$$

olacak şekilde, hayatta kalanlarının sayısı binom dağılımı gösteren yavrular üretsinsin. Burada b bireyin sahip olabileceği hayatta kalan maksimum yavru sayısıdır. $Corr[R_i, R_j] = \frac{C_\rho}{(a_t-1)}$ alınırsa demografik kovaryans $\tau(a_t) = C_\rho \frac{bp(1-p)}{a_t-1}$ olur. $b = \frac{g(a_t)}{p}$ olarak (2.6), (3.3) ve (3.4) denklemlerinden

$$E[A_{t+1}] = f(a_t) \text{ ve } Var[A_{t+1}] = Cf(a_t) \quad (3.5)$$

elde edilir ve $C = (1-p)(1+C_\rho)$ olur. Sonuç olarak, varyans bir sonraki neslin beklenen değeriyle orantılıdır.

3.2.2 Çevresel Varyans

Sabit çevre varsayımı kaldırılırsa ve $E[Z_t] = 0$ ve $E[R_i] = g(a_t)$ olursa çevresel varyans

$$\sigma_e^2(a_t) = Var[E[R_i|Z_t] - E[R_i]] = Var[E[R_i|Z_t]]$$

olur. $E[R_i|Z_t] = (1+Z_t)g(a_t)$ ve $\sigma_e^2(a_t) = Cg(a_t)^2$ kabulleri altında demografik varyans $\sigma_d^2(a_t) = 0$ ve dolayısıyla demografik kovaryans $\tau(a_t) = 0$ kabul edilebileceğinden (3.2) denklemi, $C = Var[Z_t]$ olmak üzere

$$Var[A_{t+1}] = Cf(a_t)^2 \quad (3.6)$$

denklemine dönüşecektir. Sonuç olarak varyans bir sonraki neslin beklenen değerinin karesiyle orantılı olacaktır.

TABLO 1

Sembol	Stokastik popülasyon modeli	Gürültü	Referans	Denklem
D1	$f(a_t) + s\sqrt{f(a_t)}\varepsilon_t$	Demg.	[8]	(3.5)
D2	$f(a_t) \exp\left(\sqrt{\frac{s^2}{f(a_t)}}\varepsilon_t - \frac{1}{2}\frac{s^2}{f(a_t)}\right)$	Demg.	[8]	
DW	$f(a_t) \exp\left(\sqrt{\frac{s^2}{a_t}}\varepsilon_t - \frac{1}{2}\frac{s^2}{a_t}\right)$	Demg.	[26]	
E1	$f(a_t) + sf(a_t)\varepsilon_t$	Çevr.	[8]	(3.6)
E2	$f(a_t) \exp(s\varepsilon_t - s^2/2)$	Çevr.	[16], [25]	(2.8)
N1	$f(a_t) + s\varepsilon_t$	Gözlems.	[16]	(2.7)
T1	$bna_t \exp(-a_t/n) + s\sqrt{nv(a_t/n)}\varepsilon_t$			(3.8)

Tablo 1 test edilen modelleri özetlemektedir. Tablodaki D1 ve E1 modelleri normal dağılımlı, D2 ve E2 modelleri lognormal dağılımlı modellerdir. DW ve N1 modeli ise daha önce literatürde var olan modellerdir. Model DW, sürekli popülasyon dinamiklerinin difüzyon yaklaşımından gelmekte, N1 modeli ise varyansın sabit, popülasyon büyüklüğünden bağımsız olduğu normal dağılımlı modeldir ve varyansı popülasyon büyüklüğünden bağımsız olduğundan ne çevresel ne de demografik olarak sınıflandırılmaz. Fakat gözlemsel hatanın uygun bir modeli olarak kabul edilir.

3.3 Modellerin Test Edilmesi

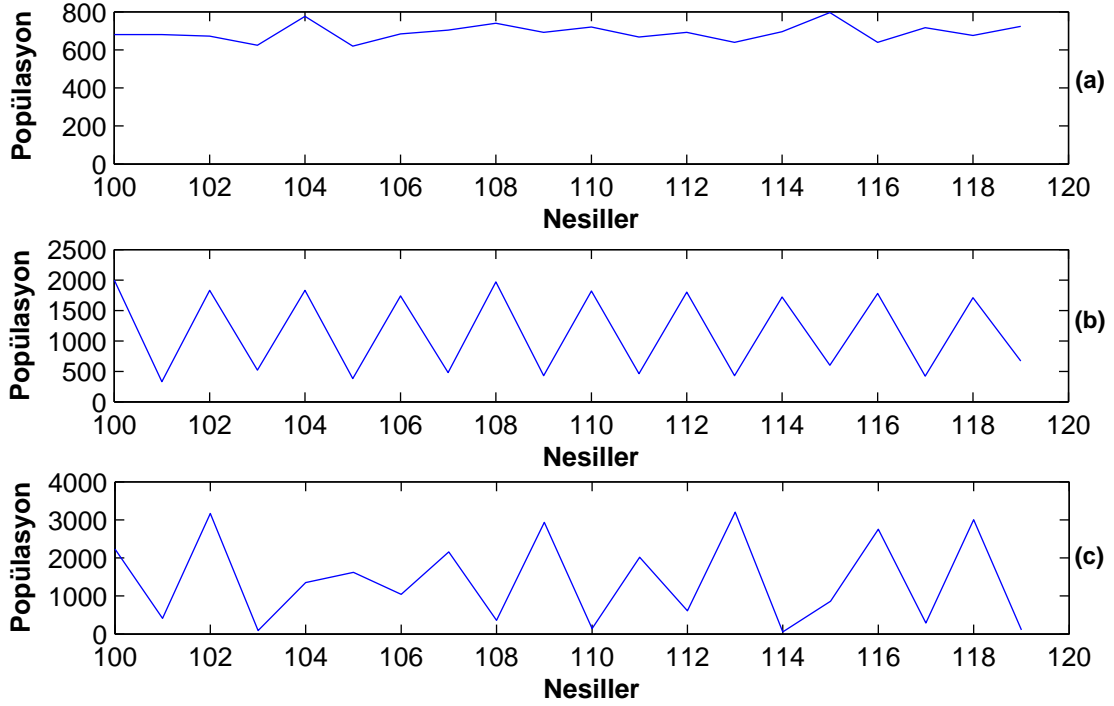
Tablo 1'deki modeller, Sumpter ve Broomhead'in bireysel tabanlı modelinden [27] elde edilen zaman-serilerine uyarlanmıştır. Adı geçen [27] nolu çalışmada kullanılan bireysel tabanlı modelde A_t tane birey düzgün dağılımla n tane bölgeye rastgele olarak dağıtılır ve üreme her bir bölgede bağımsız bir şekilde gerçekleşir öyle ki dağılımdan sonra ($i = 1, 2, \dots, n$) için i -nci bölgedeki birey sayısı C_i rastgele değişkeni ile belirlenirse

$$\phi(C_i) = \begin{cases} b_{\min} + Z_t & , C_i = 1 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.7)$$

fonksiyonu bir sonraki nesile geçen birey sayısını verecektir. Dolayısıyla

$$A_{t+1} = \sum_{i=1}^n \phi(C_i)$$

olacaktır. Burada $Z_t \sim Bin(b_r, p)$ çevresel gürültü terimi, rekabet yokluğunda her bir bölgede üretilen birey sayısını belirleyen bir rastgele değişken, b_{\min} üretilen minimum sayıdaki birey sayısı ve p hayatta kalma olasılığı olmak üzere her bir bölgede beklenen birey sayısı $b = b_{\min} + pb_r$ ile tanımlanmaktadır. Bu modelde demografik gürültü bütünüyle C_i rastgele değişkeninin dağılımından ortaya çıkacaktır.



Şekil 3.1: Çevresel gürültü terimi yokluğunda $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri

Şekil 3.1 çevresel gürültü yokluğunda b 'nin farklı değerleri için bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serilerini göstermektedir. b arttıkça popülasyon dinamiği

- kararlı durumdan ($b < 8$)
- periyodik duruma ($8 < b < 15$) ve
- periyodik durumdan kaotik duruma ($b > 15$)

doğru bir değişim göstermektedir. Johansson ve Sumpter (2003) [17] çevresel gürültü olmadığı durumda, modelin popülasyon dinamiğine

$$A_{t+1} = n\Phi\left(\frac{A_t}{n}\right) + \sqrt{nv\left(\frac{A_t}{n}\right)}\varepsilon_t \quad (3.8)$$

stokastik dinamik sisteminin iyi bir yaklaşım verdiğini göstermiştir. Burada $\Phi(x) = bx \exp(-x)$ literatürde bilinen Ricker fonksiyonu, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ rastgele

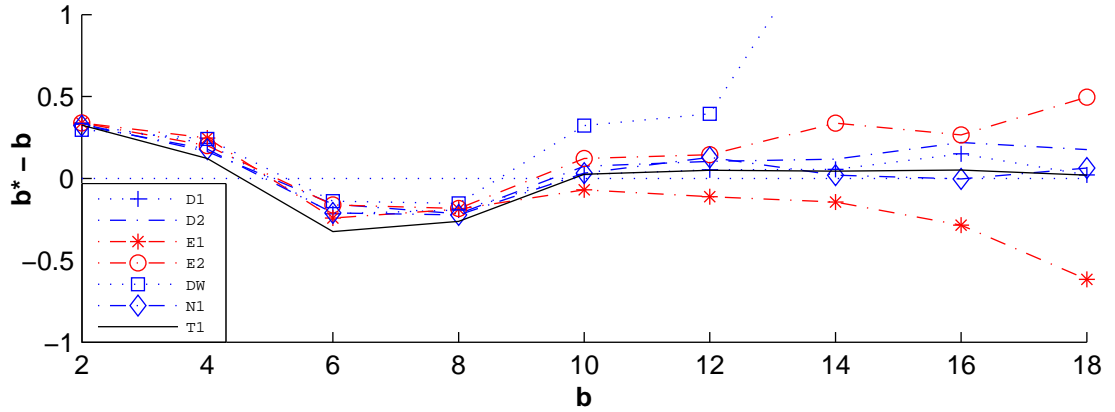
değişken ve $v(x)$

$$v(x) = b\Phi(x)(1 - e^{-x}) + \Phi(x)^2(1 - x) \quad (3.9)$$

olarak tanımlanmıştır. $v(x)$ fonksiyonu Tablo 1'deki T1 Modelini tanımlamak için kullanılmıştır. T1 Modeli, çevresel gürültü yokluğunda diğer modellerin performanslarının ölçülebildiği bir ölçüt ya da karşılaştırma modeli olarak kullanılacaktır.

3.3.1 Demografik Gürültü

Tablo 1'deki modellerin herbirinde $f(a_t) = ba_t \exp(\frac{-a_t}{n})$ alınarak ve bireysel tabanlı modelde $n = 500$ için elde edilen veriler kullanılarak maksimum olabilirlik metoduyla b, n ve s parametreleri tahmin edilir. Verileri üretirken $p = 1$ alınarak ortaya çıkan rastgeleliğin demografik olması garanti edilmiş olunur.

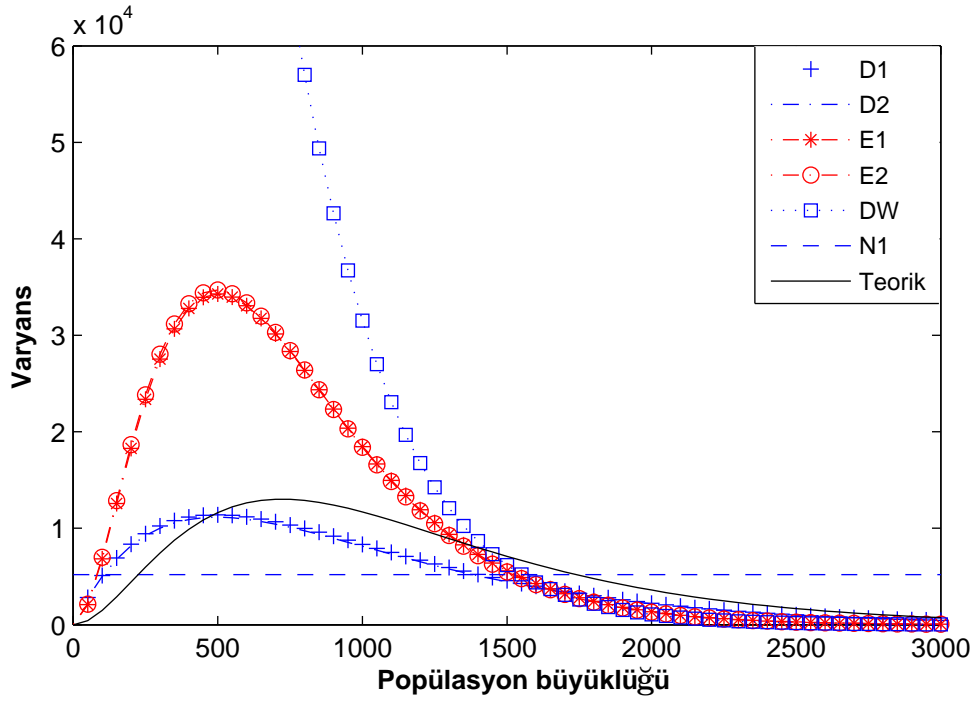


Şekil 3.2: Çevresel rastgelelik yokluğunda bireysel tabanlı modelde $n = 500$ iken elde edilen zaman serilerinde 100-üncü nesilden sonraki 20 neslin kullanılmasıyla tahmin edilen b^* değeri ile verileri üretmede kullanılan yavru sayısı (b) arasındaki fark

Şekil 3.2, tahmin edilen b^* değerleri ile simülasyonda kullanılan gerçek b değerleri arasındaki farkı göstermektedir. Şekil 3.2'ye göre, D1 ve D2 demografik modelleri b 'yi, E1 ve E2 çevresel modellerinden daha iyi tahmin etmektedir. E1 ve E2 modellerinin eğilimleri benzerken işaretleri farklıdır. DW modelinin, $b > 8$ için doğru olmayan tahminler verdiği ve tutarlı bir şekilde aşırı tahminlerde bulunduğu görülmektedir. T1 modeline en yakın tahmini N1 modeli vermektedir. Açıkça

görülmektedir ki periyodik ve kaotik durumlarda çevresel gürültü yokluğunda parametreleri açıklamada, demografik modeller çevresel modellerden daha iyidir.

Tablo 1'deki modeller aynı deterministik kısma sahip olduğundan elde edilen varyansları, teorik olarak elde edilen $nv(\frac{at}{n})$ varyansı ile karşılaştırılabilir. Varyansları karşılaştırırken de bireysel tabanlı modelde $b = 10$ ve $n = 500$ iken elde edilen veriler ve maksimum olabilirlik metodu kullanarak tahmin edilen parametreler kullanılır.



Şekil 3.3: Çevresel rastgelelik yokluğunda Tablo 1'deki modeller için bireysel tabanlı modelde $b = 10$, $n = 500$ alınarak tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla hesaplanan popülasyon büyüklüğünün fonksiyonu olarak varyans grafiği

Şekil 3.3 göstermektedir ki: Model D1 ve D2 varyansları benzerdir ve teorik varyansa en iyi yaklaşımdır. DW modelinin varyansı ise popülasyon büyüklüğü azaldıkça sonsuza doğru gitmektedir ve teorik varyansa en kötü yaklaşımdır. Bu da aslında $b^* - b$ farkındaki büyüklükten açıklanabilir.

3.3.2 Çevresel Gürültü

Bireysel tabanlı modelde $p < 1$ alınrsa zaman serilerinde çevresel gürültü ortaya çıkacaktır. Sabit bir a_t popülasyonu için bireysel tabanlı modelde demografik varyans n ile orantılıyken, çevresel varyans n^2 ile orantılıdır. Bu yüzden n arttıkça, çevresel gürültü daha hızlı artacaktır. Fakat gecikme etkisi bireylerde ortaya çıkacağından bu kısım incelenmeyip, bu tez çalışmasında sadece demografik gürültü kısmında gecikme etkisini dikkate alınmıştır.

4. GECİKME ETKİSİ ALTINDA TEK TÜRLER İÇİN STOKASTİK POPÜLASYON MODELLERİ

Bu bölümdeki amacımız, [8] nolu çalışmada kullanılan modellere gecikme terimi ekleyerek, sayısal sonuçları elde etmeden önce, teorik olarak gecikme teriminin etkisini incelemektir. Böylece gecikme etkisiyle daha gerçekçi bir yaklaşım elde etmek hedeflenmektedir.

4.1 Gecikme Etkisi

Gecikme etkisinin dahil edildiği denklemler ve denklem sistemleri, biyolojik alanlarda önemli bir konuma sahiptir. Gecikme etkisi içeren modellerin davranışlarını inceleme; matematiksel biyolojide, tıpta, ekolojide, ekonomide vb. alanlarda oldukça dikkat çeken bir konu olmuştur. Son yıllarda bir çok araştırmacı, biyolojik ve fiziksel anlamı olan gecikmeli fark denklemleri ve diferensiyel denklemleri üzerinde çalışmaktadır. Biyolojik sistemlerin belirli bir girdi ya da tepkiye cevabı genellikle hemen olmamakta, biraz gecikmeli olmaktadır. Örneğin farmakokinetik modellerde, vucüda verilen ilacın kana karışmasından önce bir gecikme olabilir [11]. Popülasyon modellerinde ise, bir türün üreme yapabilmesi için belirli bir süre geçmesi gerekebilir.

Gecikme etkisi verilmedikçe, bir popülasyonda belli bir türün t anındaki bütün

bireylerinin, $(t+1)$ anındaki popülasyona katkı yaptığı kabul edilir. Fakat bu durum doğadaki her popülasyon için geçerli değildir. Çeşitli popülasyonlarda, bireylerin bir sonraki nesile katkı yapması için belirli bir biyolojik (örneğin cinsel) olgunluğa erişmiş olmaları veya belirli şartların oluşmuş olması gerekebilir. Bazı popülasyonları oluşturan bireyler dünyaya geldikleri andan itibaren bir sonraki nesile katkıda bulunabilirler. Bu tip popülasyonlara örnek olarak bazı böcekler, kelebekler ve bakteriler verilebilir. Bazı popülasyonlarda ise dünyaya gelen yeni bir bireyin bir sonraki nesile katkı yapması için belirli bir süre geçmesi gerekir. Bu duruma sürekli zaman modellerinde yani ardışık nesilleri kesişen türler için balinalar, insanlar örnek verilebilir. Balinaların doğum yapacak olgunluğa ulaşmaları 5-10 yıl sürmektedir. Kesikli zaman modellerinde yani ardışık nesilleri kesişmeyen türler için ise kelebekler, bazı alabalık türleri, bazı bitki türleri verilebilir.

Bir türün yaşam öyküsü, gecikme etkisine neden olan dışsal ve içsel faktörlerin önemini büyük ölçüde belirleyebilir. Bazı böcek türleri gibi yaşam süresi kısa olan, yüksek büyüme oranına sahip türler için gecikme etkisi bir nesilden fazla sürerken yani her nesilde ortaya çıkabilirken, büyük omurgalı hayvanlar gibi yaşam süresi uzun fakat büyüme oranı düşük türler için gecikme etkisi, bireylerin üreme çağına ulaşması için gereken belirli bir süreden dolayı çoğunlukla bir nesilde ortaya çıkmaktadır [19]. Dolayısıyla popülasyon modellerinin gerçek yaşamı daha iyi modelleyebilmeleri için gecikme terimi içermeleri beklenendir.

Buna göre bir sonraki neslin önceki nesillerden etkilendiğini göstermek için modele gecikme terimi eklenmelidir. Eğer bir nesil, önceki iki nesilden etkileniyorsa bu taktirde model aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$x_{t+1} = f(x_t, x_{t-T}). \quad (4.1)$$

Yukarıdaki denklemde $(t - T)$ -inci nesilin, şimdiki $(t + 1)$ -inci nesil üzerine etkisi gecikme etkisi olarak düşünülebilir ve denklemin mertebesi $T + 1$ dir [2]. Benzer şekilde eğer gecikme, olgunlaşma süresi (T) olarak ifade edilirse, kullanılacak gecikmeli fark denklemi yine (4.1) denklemi ile ifade edilebilir [21].

Dolayısıyla (2.6) denkleminde gecikme terimi

$$a_{t+1} = a_t g(a_{t-T}) = f(a_t, a_{t-T}) \quad (4.2)$$

biçiminde alınmıştır.

Örnek 4.1.1.

$$(1) x_{t+1} = g(x_t)x_t \quad \text{ve} \quad (2) x_{t+1} = g(x_{t-1})x_t$$

fark denklemleri için ilk modelde, kişi başına düşen büyüme oranı g , yalnızca bir önceki nesile bağılıyken, ikinci modelde geçmişteki iki nesile bağlıdır, yani $T = 1$ gecikmesi vardır [2].

4.2 Bireysel Tabanlı Modelde Gecikme Etkisi

Bir önceki bölümde olduğu gibi benzer şekilde gecikme etkisinden dolayı A_t tane bireye sahip popülasyon için A_α ($\alpha \leq t$) tanesinin bir sonraki nesile katkı yaptığı kabul edilir, $R_1, R_2, \dots, R_{A_\alpha}$ 'lar popülasyondaki bireylerin bir sonraki nesile bireysel katkıları, Z_t çeşitli çevresel faktörleri tanımlayan bir rastgele vektör olmak üzere, kabul edelim ki R_i 'ler beklenen değeri $\mu(A_\alpha)$ ve varyansı $\sigma^2(A_t)$ olan özdeş dağılımlı rastgele değişkenler olsun ve genelliği bozmaksızın yine $E[Z_t] = 0$ olsun. Eğer $A_\alpha = a_\alpha$ olursa bir sonraki nesil için beklenen popülasyon değeri

$$E[A_{t+1}|A_\alpha = a_\alpha] = E[R_1 + R_2 + \dots + R_{A_\alpha}] = a_\alpha \mu(a_\alpha) \quad (4.3)$$

olacaktır. Benzer biçimde $R_i = E[R_i] + W_e + W_d^i$ yazılır. Burada W_e ve W_d^i ortalamaları $E[W_e] = E[W_d^i] = 0$ ve kovaryansları $cov(W_e, W_d^i) = 0$ olan rastgele değişkenlerdir.

$$R_i = E[R_i] + (E[R_i|Z_t] - E[R_i]) + (R_i - E[R_i|Z_t])$$

olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
Var[A_{t+1}] &= Var \left[\sum_{i=1}^{a_\alpha} R_i \right] \\
&= Var \left[\sum_{i=1}^{a_\alpha} E[R_i] + W_e + W_d^i \right] \\
&= Var \left[\sum_{i=1}^{a_\alpha} E[R_i] + \sum_{i=1}^{a_\alpha} W_e + W_d^i \right] \\
&= Var \left[a_\alpha \mu(a_\alpha) + a_\alpha W_e + \sum_{i=1}^{a_\alpha} W_d^i \right] \\
&= Var \left[a_\alpha W_e + \sum_{i=1}^{a_\alpha} W_d^i \right] \\
&= Var[a_\alpha W_e] + Var \left[\sum_{i=1}^{a_\alpha} W_d^i \right] \\
&= a_\alpha^2 Var[W_e] + a_\alpha Var[W_d^i] + 2 \binom{a_\alpha}{2} Cov(W_d^i, W_d^j) \\
&= a_\alpha^2 \sigma_e^2(a_\alpha) + a_\alpha \sigma_d^2(a_\alpha) + a_\alpha(a_\alpha - 1)\tau(a_\alpha) \\
&= a_\alpha (\sigma_d^2(a_\alpha) - \tau(a_\alpha)) + a_\alpha^2 (\sigma_e^2(a_\alpha) + \tau(a_\alpha)) \tag{4.4}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\sigma_d^2(a_\alpha) = Var[W_d^i]$ demografik varyans, $\sigma_e^2(a_\alpha) = Var[W_e]$ çevresel varyans ve $\tau(a_\alpha) = cov(W_d^i, W_d^j)$ demografik kovaryanstır. Aşağıda (4.4) denklemi varyansın durumlarına göre incelenmiştir.

4.2.1 Demografik Varyans

Benzer şekilde sabit bir çevrede $\sigma_e^2(a_\alpha) = 0$ olacağından (4.4) denklemi

$$Var[A_{t+1}] = Var \left[\sum_{i=1}^{a_\alpha} R_i \right] = a_\alpha \sigma_d^2(a_\alpha) + a_\alpha(a_\alpha - 1)\tau(a_\alpha) \tag{4.5}$$

şeklini alacaktır. Yine $0 < p < 1$ olmak üzere kabul edelim ki popülasyondaki her birey, beklenen değeri ve varyansı (3.4) denklemi ile verilen, hayatta kalan yavrularının sayısı binom dağılımı gösteren yavrular üretsinsin. Burada b bireyin sahip olabileceği hayatta kalan maksimum yavru sayısıdır. $Corr[R_i, R_j] = \frac{C_\rho}{(a_\alpha - 1)}$

alınırsa demografik kovaryans $\tau(a_\alpha) = C_\rho \frac{bp(1-p)}{a_\alpha-1}$ olur. $b = \frac{g(a_{t-T})}{p}$ alınarak (4.2), (4.5) ve (3.4) denklemlerinden ve $a_\alpha \leq a_t$ olacağından

$$\begin{aligned}
E[A_{t+1}] &= E \left[\sum_{i=1}^{a_\alpha} R_i \right] \\
&= E[R_1] + E[R_2] + \dots + E[R_{a_t}] \\
&= a_\alpha \cdot E[R_i] \\
&= a_\alpha g(a_{t-T}) \\
&\leq a_{t+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da göstermektedir ki, gecikme etkisinin olmadığı durum gecikmeli durum için bir üst sınır olacaktır.

$$\begin{aligned}
Var[A_{t+1}] &= Var \left[\sum_{i=1}^{a_\alpha} R_i \right] \\
&= Var[R_1] + Var[R_2] + \dots + Var[R_{a_\alpha}] + 2 \binom{a_\alpha}{2} cov(R_i, R_j) \\
&= a_\alpha Var[R_i] + a_\alpha(a_\alpha - 1)\tau(a_\alpha) \\
&= a_\alpha bp(1-p) + a_\alpha(a_\alpha - 1)C_\rho \frac{bp(1-p)}{a_\alpha - 1} \\
&= a_\alpha g(a_{t-T})(1-p) + a_\alpha C_\rho g(a_{t-T})(1-p) \\
&= a_\alpha g(a_{t-T})C \\
&= CE[A_{t+1}] \\
&\leq Ca_{t+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede $C = (1-p)(1+C_\rho)$ 'dur. Sonuç olarak varyans bir sonraki neslin beklenen değeriyle orantılıdır ve gecikme etkisinin olmadığı durum bir üst sınırdır.

4.2.2 Çevresel Varyans

Sabit çevre varsayımı kaldırılımsın ve $E[Z_t] = 0$ ve $E[R_i] = g(a_{t-T})$ olsun.

$W_e = E[R_i|Z_t] - E[R_i]$ olduğundan çevresel varyans

$$\sigma_e^2(a_\alpha) = Var[E[R_i|Z_t] - E[R_i]] = Var[E[R_i|Z_t]]$$

olur. $E[R_i|Z_t] = (1 + Z_t) g(a_{t-T})$ ve $C = Var[Z_t]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sigma_e^2(a_\alpha) &= Var[E[R_i|Z_t]] \\ &= Var[(1 + Z_t) g(a_{t-T})] \\ &= g(a_{t-T})^2 Var[Z_t] \\ &= Cg(a_{t-T})^2\end{aligned}$$

kabulleri altında demografik varyansın ihmal edilebilir olduğu varsayılırsa $\sigma_d^2(a_\alpha) = 0$ ve dolayısıyla demografik kovaryans $\tau(a_\alpha) = 0$ olacağından (4.5) denklemi

$$\begin{aligned}Var[A_{t+1}] &= a_\alpha^2 \sigma_e^2(a_\alpha) \\ &= a_\alpha^2 Cg(a_{t-T})^2 \\ &= C(a_\alpha g(a_{t-T}))^2 \\ &\leq Ca_{t+1}^2\end{aligned}$$

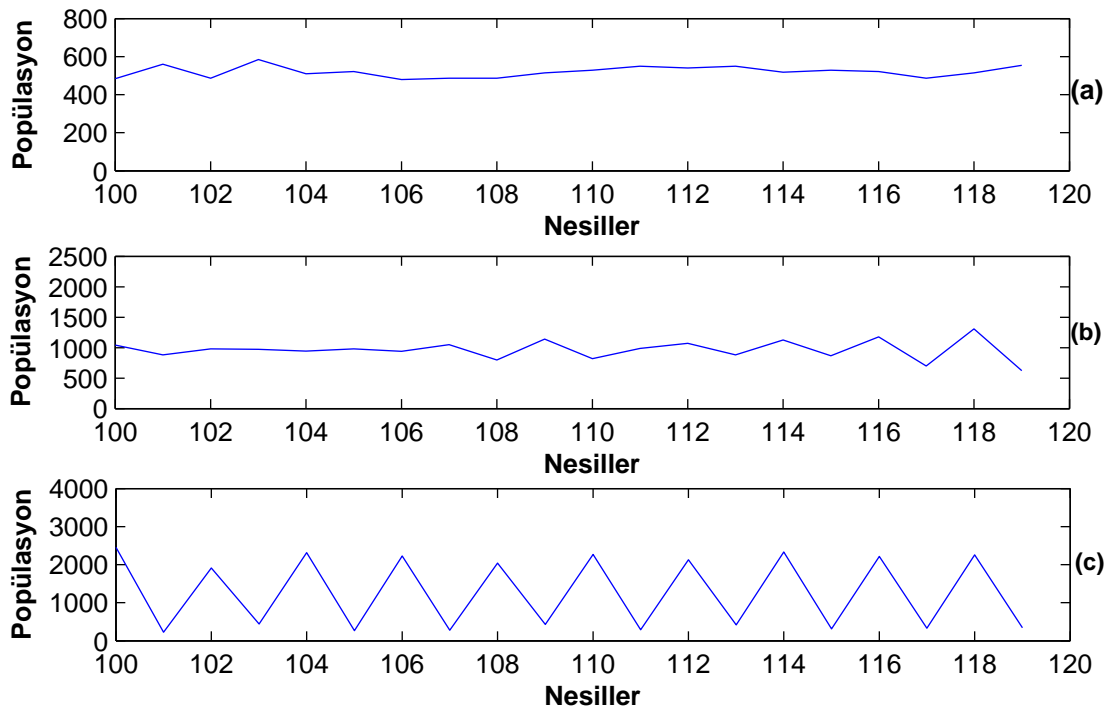
olur. Sonuç olarak varyans bir sonraki neslin beklenen değerinin karesiyle orantılı olacaktır.

5. SAYISAL SİMÜLASYONLAR VE KARŞILAŞTIRMALAR

Bu bölümdeki amacımız, farklı gecikme etkileri altında Tablo 1'deki modeller için elde ettiğimiz sayısal sonuçları birbirleriyle ve gecikme etkisinin olmadığı duruma karşılaştırarak, modeller üzerinde gecikme etkisini incelemektir. Doğaya daha iyi bir yaklaşım veren gecikmeli denklem ile daha gerçekçi sonuçlar elde etmek hedeflenmiştir. Ayrıca gecikme etkisi değiştikçe sistemin kararlılık yapısındaki değişimden de bahsedilmiştir. Bunun için sırasıyla %30, %50, %75 gecikme etkisi altında elde edilen popülasyon zaman serileri, modellerin parametre tahminleri ve varyansları, birbirleriyle ve [8] nolu çalışmada elde edilen gecikme etkisinin olmadığı durumlarla karşılaştırılmıştır. Sayısal sonuçlar elde edilirken Matlab programı kullanılmıştır. Modellerin parametreleri tahmin etmede kullanılan Maksimum Olabilirlik Metodu'nda olabilirlik fonksiyonlarını maksimize etmek için logaritmalarının negatifi minimize edilmiştir. Bunu yaparken de "*Nelder-Mead Simplex*" algoritmasının Matlab uyarlaması olan "*fminsearch*" kullanılmıştır. Maksimum Olabilirlik Metodu ile ilgili detaylı bilgiler "Ekler" bölümünde verilmiştir.

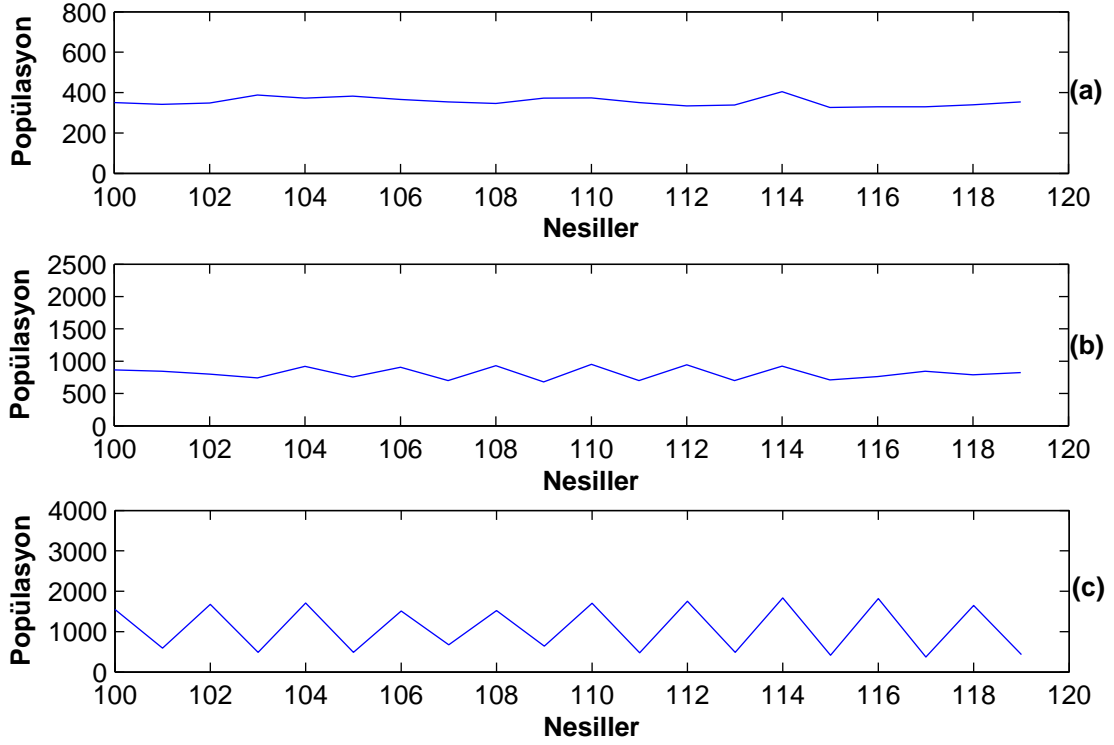
Sayısal sonuçları elde ederken gecikme terimi, algoritmada popülasyon verilerini üretme aşamasında bireyler üzerinden dikkate alınmıştır. Öyle ki bireysel tabanlı modelde A_t tane birey n tane bölgeye düzgün dağılırken, her bir bölgede olan birey sayısının önce %70'ini, daha sonra %50'sini ve son olarak %25'ini alacak şekilde düzenlenmiştir. Yani yüzdeleri alınarak elde edilen birey sayıları A_α 'lar olacaktır. Dolayısıyla gecikme etkisiyle popülasyondaki bütün bireylerin, bir

sonraki nesile katkı yapamadığını düşünülmektedir. Bireylerin verilen gecikme etkilerinden dolayı yavru üretecek fiziksel veya biyolojik olgunluğa ulaşamadığını kabul edilmiştir ve algoritmada bir sonraki popülasyon bir öncekinden etkilenecek şekilde düzenlenmiştir. Elde edilen bu yeni gecikme etkili popülasyon verileri kullanılarak, önce Maksimum Olabilirlik Metodu ile parametre tahmini daha sonra ise tahmin edilen parametrelerle modellerin varyansı hesaplanmıştır ve bu sayısal sonuçlar aşağıda sırasıyla verilmektedir.



Şekil 5.1: Çevresel gürültü terimi yokluğunda %30 gecikme etkisi altında, $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri

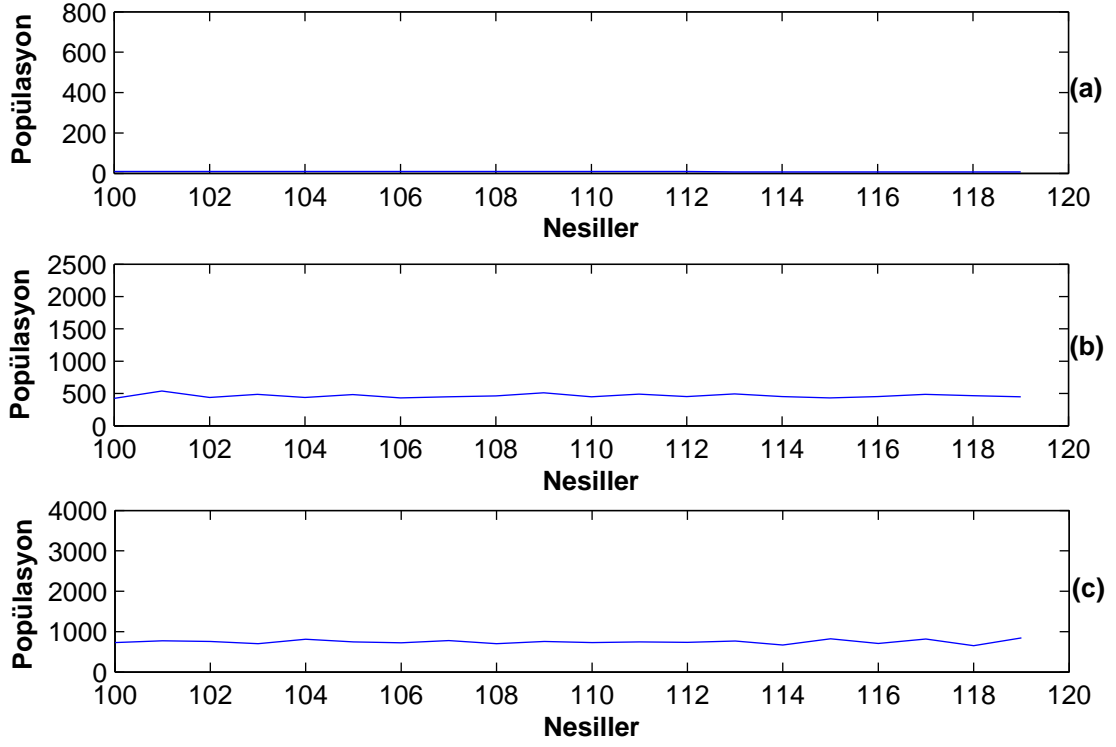
Şekil 5.1, %30 gecikme etkisi altında elde edilen popülasyon zaman serileri göstermektedir. [8] nolu çalışmada elde edilen şekil 3.1 ile kıyaslandığında, $b = 18$ iken kaotik olan durum %30 gecikme etkisi altında periyodik duruma dönüşmekte, $b = 10$ için periyodik olan durum kararlı duruma ve $b = 4$ için kararlı olan durum ise daha da kararlı bir duruma dönüşmektedir. Yani gecikme etkisi salınımlığı azaltmaktadır ve sistemin kararlılık durumunda değişikliğe yol açmaktadır.



Şekil 5.2: Çevresel gürültü terimi yokluğunda %50 gecikme etkisi altında, $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri

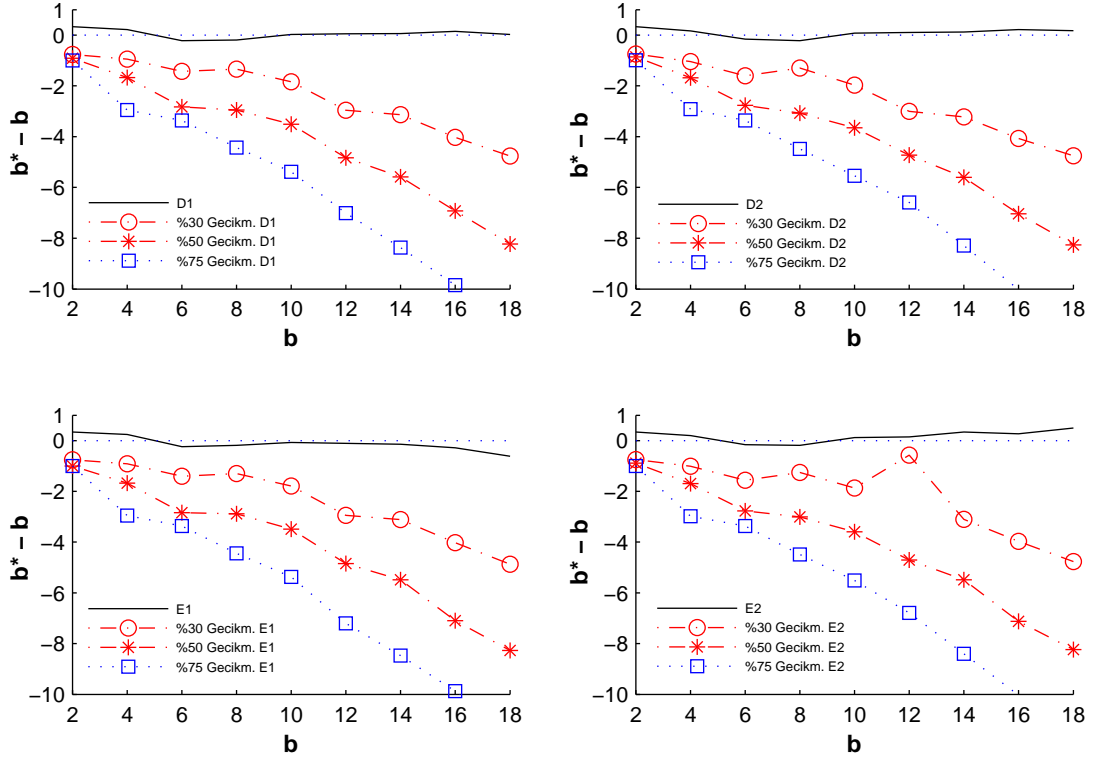
Şekil 5.2 göstermektedir ki, %50 gecikme etkisi altında $b = 4, 10, 18$ için elde edilen popülasyon verileri, %30 gecikme etkisiyle üretilen popülasyon verilerine göre daha kararlı durumdadır. $b = 4, 10, 18$ değerleri için elde edilen popülasyon değişim aralığı daha küçüktür ve az salınımlılık göstermektedir. Ayrıca Şekil 3.1 ile karşılaştırıldığında ise $b = 18$ iken kaotik olan durum periyodik duruma dönüşmüştür.

Şekil 5.3'te ise %75 gecikme etkisi altında elde edilen popülasyon verileri gösterilmiştir. $b = 18$ için Şekil 3.1'de kaotik olan durum, Şekil 5.2-5.1'de periyodik duruma dönüşürken, gecikme etkisi %75'e çıktığında kararlı duruma dönüşmüştür. Yani gecikme etkisi öyle etkilidir ki, sistemin kararlılık yapısında önemli rol oynamaktadır. Ayrıca $b = 4$ kararlı durumunda elde edilen popülasyon değerleri neredeyse sabittir ve 0'a çok yakındır.



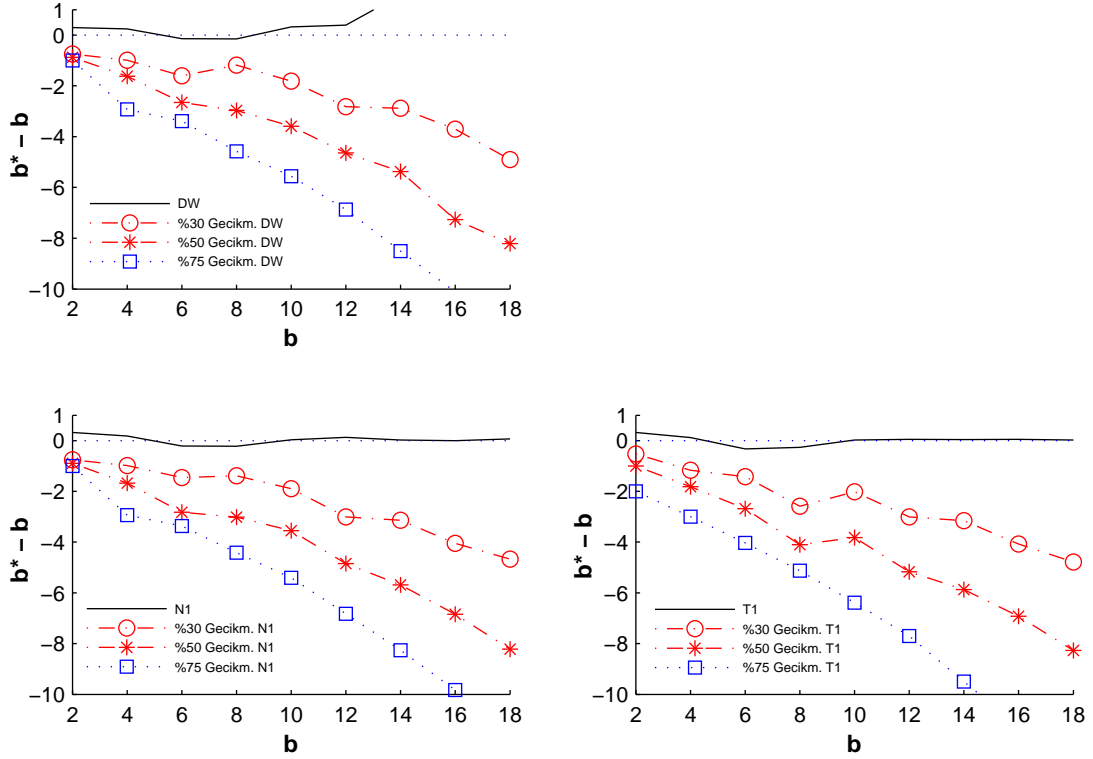
Şekil 5.3: Çevresel gürültü terimi yokluğunda %75 gecikme etkisi altında, $n = 500$ ve (a) $b = 4$, (b) $b = 10$, (c) $b = 18$ iken bireysel tabanlı modelden elde edilen zaman serileri

Bundan sonraki aşamada elde edilen gecikmeli popülasyon verileri kullanılarak, Maksimum Olabilirlik Metodu'yla parametre tahmini yapılmıştır. Tahmin edilen b, n, s parametreleri sırasıyla b^*, n^*, s^* ile gösterilmiştir.



Şekil 5.4: D1-D2-E1-E2 modelleri için farklı gecikme etkileri altında yavru sayısının (b) değerlerine göre elde edilen $b^* - b$ farkı

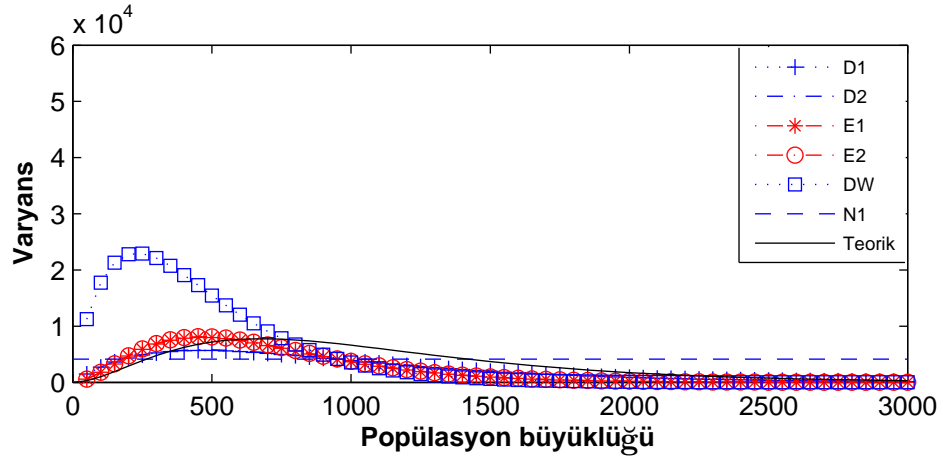
Şekil 5.4 ve 5.5'te; D1, D2, E1, E2, DW, N1 ve T1 modellerinin gecikme etkisinin olmadığı durum ve farklı gecikme etkileri için b değıştikçe elde edilen $b^* - b$ farkı gösterilmektedir. Her bir model için gecikme etkisinin olmadığı durum ve farklı gecikme etkileri bir arada verilmiştir. Gecikme etkisi arttıkça tahmin edilen b^* değeri azaldığı için $b^* - b$ farkı artmaktadır. Bu da gecikme etkisinin daha gerçekçi bir yaklaşım yakaladığının göstergesidir. Gecikme etkisi ile tahmin edilen yavru sayısı (b^*) azalmıştır. Yani bir sonraki nesile geçen birey sayısı azalacaktır ve doğal olarak tahmin edilen parametrelerde bir azalma söz konusu olacaktır. Gecikme etkisi ile elde edilen değerler gecikme etkisi olmadığı durumda elde edilen değerlerin altında kalacaktır. Sonuç olarak hiç gecikme etkisi olmadığı durum bir üst sınır olacaktır.



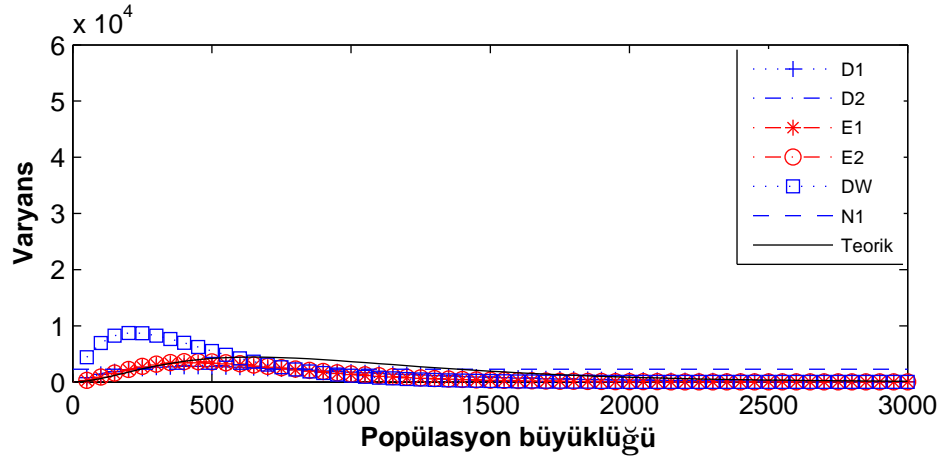
Şekil 5.5: DW-N1-T1 modelleri için farklı gecikme etkileri altında yavru sayısının (b) değerlerine göre elde edilen $b^* - b$ farkı

Son olarak Tablo 1'deki modellerin farklı gecikme etkileri altında varyansları karşılaştırılmıştır. Varyanslar hesaplanırken tahmin edilen b^* , n^* , s^* parametreleri kullanılmıştır. Ayrıca Tablo 1'deki modellerin varyansları "Ekler" bölümünde verilmiştir.

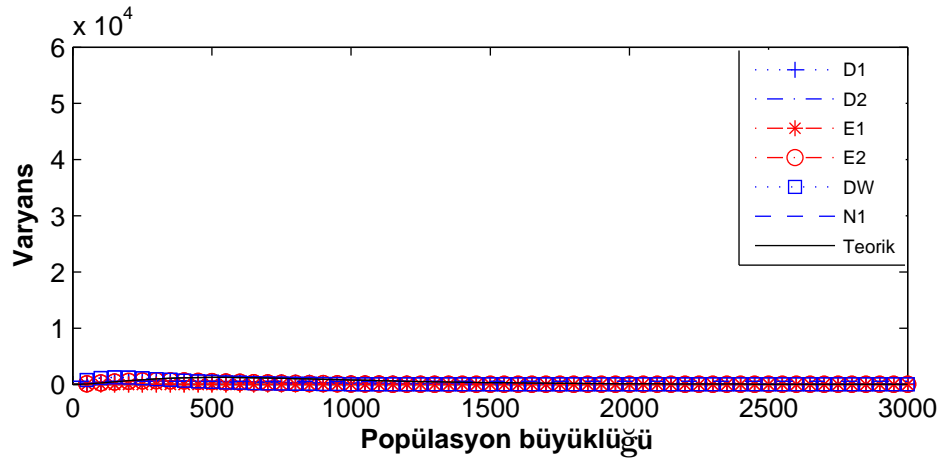
Sırasıyla Şekil 5.6, 5.7 ve 5.8'e bakıldığında modellerin varyansları gecikme etkisi arttıkça düşmektedir. Ve tıpkı Şekil 3.3'teki gibi çevresel olan E1 ve E2 modellerinin varyansları daha yüksek çıkmaktadır. Şekil 5.8'den görülebileceği gibi gecikme etkisi % 75'e çıktığında varyans değerleri birbirine çok yakın gelmektedir. Varyansın azalması, istatistiki anlamda değişimin ve sapmanın küçülmesi demektir.



Şekil 5.6: %30 gecikme etkisi altında $b = 10$, $n = 500$ için tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla elde edilen varyans grafiği



Şekil 5.7: %50 gecikme etkisi altında $b = 10$, $n = 500$ için tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla elde edilen varyans grafiği



Şekil 5.8: %75 gecikme etkisi altında $b = 10$, $n = 500$ için tahmin edilen parametrelerin kullanılmasıyla elde edilen varyans grafiği

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Brännström ve Sumpter tarafından yapılan "*Stochastic analogues of deterministic single-species population models*" adlı çalışmada tek türler için deterministik fark denklemleri kullanılarak oluşturulan çeşitli modellere rastgelelik dahil edilerek, rastgeleliğin modeller üzerindeki etkisi incelenmişti. Rastgeleliği dahil ederken de, gürültü terimi kullanılmış ve gürültü teriminin demografik ya da çevresel olma duruma göre modellerin maksimum olabilirlik metodu ile parametre tahmini, varyans analizi gibi çeşitli karşılaştırmalar yapılarak modellerin uygunluğu incelenmişti. Bu tez çalışmasında bir adım daha öteye giderek yukarıdaki çalışmada kullanılan stokastik popülasyon modellerine popülasyon verilerini (zaman serileri) üretme aşamasında gecikme etkisini dahil ederek benzer sayısal simülasyonları gerçekleştirdik. Gecikme etkisi ile elde ettiğimiz değerler, [8] nolu çalışmadaki değerlerin altında kalarak, beklediğimiz gibi daha gerçekçi sonuçlar elde edildi. Yani düşündüğümüz gibi, b^* belirli bir b değeri civarında tahmin edilirken, gecikme etkisiyle tahmin edilen değer anlamlı fark göstermektedir. Çünkü gecikme etkisi altında parametre tahmini ile elde edilen değerler ve varyans sonuçları, gecikme etkisinin olmadığı durumdakilerin altında kalmıştır. Dolayısıyla gecikme etkisinin olmadığı durum bizim için bir üst sınır olarak kabul edilebilir. Sayısal sonuçlar, gecikme etkisi dahil edilerek kullanılan modellerin biyolojik olarak daha gerçekçi olduğunu göstermektedir.

Doğada popülasyonlarda gecikme etkisi sıklıkla gözlemlendiğinden, daha gerçekçi modellerin oluşturulması için gecikme etkisinin dikkate alınması gerekmektedir. Örneğin bireyleri arasında gecikme etkisi gösteren ve ekinlere zarar veren bir böcek türü popülasyonunun matematiksel modellemesini yaparken gecikme

etkisinin modele dahil edilmesi gerekir. Çünkü bu türle başa çıkmak için belirli miktarda ilaç, mali kaynak, iş gücü ve zaman gerekmektedir. Dolayısıyla gecikme etkisi dikkate alınarak daha gerçekçi modelleme yapıldığında, bu türün hangi zaman aralıklarında büyümesinin nasıl davranacağı kestirilebilir ve bu türle mücadele etmek için ona göre ilaç, iş gücü ve zaman gibi maliyetler hesaplanabilir. Bunun ise daha iyi bir yaklaşım vereceği açıktır. Böylece ekonomik yönden önemli ölçüde para, iş gücü ve zaman kaybı önlenmiş olur.

Gecikme etkisinin kararlılık analizinde önemli bir role sahip olduğu bilinmektedir. Bu bağlamda, elde ettiğimiz sayısal sonuçlara göre, gecikme etkisi sistemin kararlılık yapısında değişikliğe yol açmıştır ve gecikme etkisi arttıkça sistem daha kararlı hale gelmiştir.

Bu tez çalışmasında verilen matematiksel model için yapılan analiz ve simülasyonlara ilaveten aşağıdaki açık problemler gelecekte çalışılabilir.

- Modelde $a_{t+1} = f(a_t, a_{t+1}, \dots, a_{t-T})$ alınarak gecikme etkisinin arttırılması, böylece modellemenin gerçeğe daha da yakın hale getirilmesi,
- T parametresinin tahmini: Gecikme terimi parametresi T 'nin istatistiksel yöntemlerle tahmin edilmesi,
- Modelin sisteme çevrilmesi: Modelde denklem sistemlerine geçilerek (örneğin av-avcı modeline benzer) daha kapsamlı modellemelerin yapılması,
- Analitik veya sayısal metotlar ile çözümlerin varlığının tartışılması.

Kaynakça

- [1] Allen, E., *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*, Springer, 2007.
- [2] Allen, L.J.S., *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson-Prentice Hall, 2007.
- [3] Allen, L.J.S., *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*, Pearson-Prentice Hall, 2003.
- [4] Athreya, K.B., Karlin, S., On Branching Processes with Random Environments: Extinction Probabilities, *Ann. Math. Stat.*, **42**: 1499-1520, 1971.
- [5] Bacaër, N., *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer-Verlag, 2010.
- [6] Bartlett, M.S., *Stochastic population models in ecology and epidemiology*, London: Methuen, 1960.
- [7] Beverton, R.J.H., Holt, S.J., On the Dynamics of Exploited Fish Populations, *Fishery Investigations Series 2: Sea Fisheries*, **19**, 1957.
- [8] Brännström, A., Sumpter, D.J.T., Stochastic Analogues of Deterministic Single-Species Population Models, *Theor. Popul. Biol.*, **69**: 442-451, 2006.
- [9] Brännström, A., Modelling Animal Populations Tools and Techniques, Doctoral thesis comprehensive summary, Umea University, 2004.
- [10] Casella, G., Berger, R.L., *Statistical Inference*, Duxbury Press, 2001.

- [11] Celik, C., Merdan, H., Hopf Bifurcation Analysis of a System of Coupled Delayed-Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, **219**: 6605–6617, 2013.
- [12] Courchamp, F., Berec, L., Gascoigne, J., *Allee Effects in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, New York, 2008.
- [13] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press, 1996.
- [14] Engen, S., Bakke, O., Islam, A., Demographic and Environmental Stochasticity-Concepts and Definitions, *Biometrics*, **54** (3): 840-846, 1998.
- [15] Geritz, S., www.wiki.helsinki.fi/download/attachments/63734499/SPM+Intro.pdf
- [16] Hilborn, R., Mangel, M., *The Ecological Detective*, Princeton University Press, 1997.
- [17] Johansson, A., Sumpter, D.J.T., From Local Interactions to Population Dynamics in Site-Based Models of Ecology, *Theor. Popul. Biol.*, **64**: 497-517, 2003.
- [18] Juliano, S.A., Population Dynamics, *J Am Mosq Control Assoc.*, **23** (2): 265-275, 2007.
- [19] Lande, R., Engen, S., *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, 2003.
- [20] Logan, J.D., Wolesensky, W.R., *Mathematical Methods in Biology*, Wiley, 2009.
- [21] Murray, J.D., *Mathematical Biology*, Springer, 2002.
- [22] Ricker, W.E., Stock and recruitment, *Journal of the Fisheries Board of Canada*, **11** (5): 559-623, 1954.
- [23] Rockwood, L.L., *Introduction to Population Ecology*, Blackwell Publishing, 2006.

- [24] Ross, S., *A First Course In Probability*, Pearson-Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2009.
- [25] Royama, T., *Analytical Population Dynamics*, Chapman & Hall, 1992.
- [26] Saether, B.E., Tufto, J., Engen, S., Jerstad, K., Rostad, O.W., Skatan, J.E., Population Dynamical Consequences of Climate Change For A Small Temperate Songbird, *Science*, **287**: 854-856, 2000.
- [27] Sumpter, D.J.T., Broomhead, D.S., Relating Individual Behaviour to Population Dynamics, *Proc. R. Soc. London B*, **268**: 925-932, 2001.
- [28] Svirezhev, Y.M., Elizarov, E.Y., *Mathematical modeling of biological systems*, NASA Publication, 1974.
- [29] Svirezhev, Y.M., *Mathematical Models in Ecology and Genetics*, Nauka, 1980.
- [30] Thieme, H.R., *Mathematics in Population Biology*, Princeton University Press, 2003.
- [31] http://en.wikipedia.org/wiki/Population_dynamics
- [32] <http://www.math.epn.edu.ec/omalca2010/files/material/Biomatematica/CUP101310.pdf>

EKLER

A. Normal ve Lognormal Dağılım

- Normal dağılım gösteren X rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı

$$E[X] = \mu \text{ ve } Var[X] = \sigma^2$$

olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

ile verilir. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir [10].

- Lognormal dağılım ise logaritması normal dağılım gösteren dağılımdır. $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$ lognormal dağılımı X rastgele değişkenin $N \sim (\mu, \sigma^2)$ normal dağılım gösterdiği e^X 'in dağılımıdır. Lognormal dağılım gösteren Y rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı

$$E[Y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \text{ ve } Var[Y] = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad 0 \leq x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

ile verilir [10].

B. Verileri Tahmin Etmede Kullanılan Maksimum Olabilirlik Metodu

Bu bölümün anlatılmasında [1] nolu referanstan yararlanılmıştır.

$$dX(t) = f(t, X(t); \theta)dt + g(t, X(t); \theta)dW(t)$$

stokastik diferensiyel denklemi için $\theta \in \mathbb{R}^m$ bilinmeyen parametreler vektörü ve $\Delta t = T/N$ iken $i = 0, 1, \dots, N$ için $t_i = i\Delta t$ düzgün dağılımlı zamanlarına göre $X(t)$ gözlenen değerleri

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$$

olmak üzere $N+1$ tane veri verildiğinde θ vektörünü tahmin etmek için kullanılan yöntemlerden birisi Maksimum Olabilirlik Metodudur.

$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$, θ vektörü verildiğinde (t_k, x_k) 'nin (t_{k-1}, x_{k-1}) 'den başlayan olasılık geçiş yoğunluğu olmak üzere kabul edelim ki başlangıç durumunun yoğunluğu $p_0(x_0 | \theta)$ olsun. Maksimum olabilirlik tahmininde θ parametresinin ortak olasılığı

$$D(\theta) = p_0(x_0 | \theta) \prod_{k=1}^N p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$$

$\theta \in \mathbb{R}^m$ üzerinden maksimize edilir. θ^* , $D(\theta)$ 'yı maksimize eden θ parametresini

gösterebilirsin. Fakat

$$L(\theta) = -\ln p_0(x_0|\theta) - \sum_{k=1}^N \ln p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)$$

formundaki $L(\theta) = -\ln D(\theta)$ fonksiyonunu minimize etmek daha uygundur. θ^* optimal değerini bulurken karşılaşılan zorluklardan birisi de olasılık geçiş yoğunluğunun genellikle bilinmemesidir. Fakat yukarıdaki stokastik diferensiyel denkleminde Euler yaklaşımını kullanarak yani $t = t_{k-1}$ noktasında $X(t_{k-1}) = x_{k-1}$ alırsak o zaman $\eta \sim N(0, 1)$ olmak üzere

$$X(t_k) \approx x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}\eta_k$$

olur. Buradan da $\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\Delta t$ ve $\sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta)\sqrt{\Delta t}$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

şeklinde elde edilir. Bulduğumuz olasılık yoğunluk fonksiyonunu $L(\theta)$ için verilen denklemde yerine koyarak fonksiyonu minimize eden θ^* parametresi bulunur.

C. Parametreleri Tahmin Etmede Kullanılan Olabilirlik Fonksiyonları

- **D1:** $a_{t+1} = f(a_t) + s\sqrt{f(a_t)}\varepsilon_t$

$$L(a_1, \dots, a_{20} | b, n, s) = \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi s^2 f(a_t)) + \frac{1}{2} \frac{(a_{t+1} - f(a_t))^2}{s^2 f(a_t)} \right)$$

- **D2:** $a_{t+1} = f(a_t) \exp\left(\sqrt{\frac{s^2}{f(a_t)}}\varepsilon_t - \frac{1}{2} \frac{s^2}{f(a_t)}\right)$

$$L(a_1, \dots, a_{20} | b, n, s) = \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi s^2}{f(a_t)}\right) + \frac{1}{2} \frac{\left(\log(a_{t+1}) - \log(f(a_t)) + \frac{1}{2} \frac{s^2}{f(a_t)}\right)^2}{\frac{s^2}{f(a_t)}} \right)$$

- **DW:** $a_{t+1} = f(a_t) \exp\left(\sqrt{\frac{s^2}{a_t}}\varepsilon_t - \frac{1}{2} \frac{s^2}{a_t}\right)$

$$L(a_1, \dots, a_{20} | b, n, s) = \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi s^2}{a_t}\right) + \frac{1}{2} \frac{\left(\log(a_{t+1}) - \log(f(a_t)) + \frac{1}{2} \frac{s^2}{a_t}\right)^2}{\frac{s^2}{a_t}} \right)$$

- **E1:** $a_{t+1} = f(a_t) + sf(a_t)\varepsilon_t$

$$L(a_1, \dots, a_{20} | b, n, s) = \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi s^2 f(a_t)^2) + \frac{1}{2} \frac{(a_{t+1} - f(a_t))^2}{s^2 f(a_t)^2} \right)$$

- **E2:** $a_{t+1} = f(a_t) \exp(s\varepsilon_t - s^2/2)$

$$L(a_1, \dots, a_{20} | b, n, s) = \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi s^2) + \frac{1}{2} \frac{\left(\log(a_{t+1}) - \log(f(a_t)) + \frac{1}{2} s^2\right)^2}{s^2} \right)$$

- **N1:** $a_{t+1} = f(a_t) + s\varepsilon_t$

$$L(a_1, \dots, a_{20} \mid b, n, s) = \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi s^2) + \frac{1}{2} \frac{(a_{t+1} - f(a_t))^2}{s^2} \right)$$

- **T1:** $a_{t+1} = n\phi\left(\frac{a_t}{n}\right) + \sqrt{nv\left(\frac{a_t}{n}\right)}\varepsilon_t$

$$L(a_1, \dots, a_{20} \mid b, n) = \sum_{t=1}^{20} \left(\frac{1}{2} \ln\left(2\pi nv\left(\frac{a_t}{n}\right)\right) + \frac{1}{2} \frac{\left(a_{t+1} - n\phi\left(\frac{a_t}{n}\right)\right)^2}{nv\left(\frac{a_t}{n}\right)} \right)$$

D. Tablo 1'deki Modellerin Varyansları

- **D1:** $a_{t+1} = f(a_t) + s\sqrt{f(a_t)}\varepsilon_t$

$$Var(a_{t+1}) = s^2 f(a_t)$$

- **D2:** $a_{t+1} = f(a_t) \exp\left(\sqrt{\frac{s^2}{f(a_t)}}\varepsilon_t - \frac{1}{2}\frac{s^2}{f(a_t)}\right)$

$$Var(a_{t+1}) = f(a_t)^2 \left(\exp\left(\frac{s^2}{f(a_t)}\right) - 1 \right)$$

- **DW:** $a_{t+1} = f(a_t) \exp\left(\sqrt{\frac{s^2}{a_t}}\varepsilon_t - \frac{1}{2}\frac{s^2}{a_t}\right)$

$$Var(a_{t+1}) = f(a_t)^2 \left(\exp\left(\frac{s^2}{a_t}\right) - 1 \right)$$

- **E1:** $a_{t+1} = f(a_t) + sf(a_t)\varepsilon_t$

$$Var(a_{t+1}) = s^2 f(a_t)^2$$

- **E2:** $a_{t+1} = f(a_t) \exp(s\varepsilon_t - s^2/2)$

$$Var(a_{t+1}) = f(a_t)^2 (\exp(s^2) - 1)$$

- **N1:** $a_{t+1} = f(a_t) + s\varepsilon_t$

$$Var(a_{t+1}) = s^2$$

- **T1:** $a_{t+1} = n\phi\left(\frac{a_t}{n}\right) + \sqrt{nv\left(\frac{a_t}{n}\right)}\varepsilon_t$

$$Var(a_{t+1}) = bf(a_t) \left(1 - \exp\left(-\frac{a_t}{n}\right)\right) + \left(\frac{f(a_t)}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{a_t}{n}\right)$$

E. Terim Sözlüğü

Türkçe terim	İngilizce Terim
kesikli	discrete
sürekli	continuous
lineer	linear
üstel	exponential
gürültü terimi	noise
gecikme	delay
gecikme etkisi	delay effect
rastgelelik	stochasticity
kararlılık	stability
uyarlama	fitting
içsel	intrinsic
dışsal	extrinsic
yoğunluğa bağlı	density dependent
yoğunluğa bağlı olmayan	density independent
rekabet	competition
taşıma kapasitesi	carrying capacity
ardışık nesilleri kesişen	overlapping
ardışık nesilleri kesişmeyen	non-overlapping

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ÖZBAN, Erdem Emin
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 24.03.1989 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0312 292 43 28
Faks : 0312 292 40 76
e-mail : eozban@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Selçuk Üniversitesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-2013	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (İyi)

Yayımlar

Özban, A.Y., Özban, E.E., Some new seventh order methods for solving nonlinear equations. (incelemede)

Ulusal ve Uluslararası Bildiriler

1. "Delay effect for the single-species stochastic population models", 6th International Workshop on Differential Equations and Applications, İzmir Ekonomi Üniversitesi, İzmir, Türkiye, 2013 Eylül.
2. "Lineer olmayan denklemlerin sayısal çözümü için 7.mertebeden yeni yöntemler", 26. Ulusal Matematik Sempozyumu, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır, Türkiye, 2013 Eylül.