TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNİR AĞI OPERATÖRLERİNİN TOPLANABİLİRLİĞİNİN İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Can TÜRKÜN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

ARALIK 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Can Türkün

ÖZET

Doktora Tezi

SİNİR AĞI OPERATÖRLERİNİN TOPLANABİLİRLİĞİNİN İNCELENMESİ

Can Türkün

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay Duman

Tarih: Aralık 2020

Bu doktora tezinde sinir ağı operatörlerinin yaklaşım özellikleri tüm yönleriyle ele alınmıştır. Mühendislikten tıpa, finanstan bilgisayar teknolojilerine kadar geniş bir yelpazede uygulama alanına sahip olan yapay sinir ağları, yaklaşımlar teorisinde ilk kez 1989 yılında Cybenko tarafından ele alınmış ve daha sonra 1997 yılında Cardaliaguet, Euvrard ve Anastassiou tarafından geliştirilmiştir. Sinir ağı operatörleri yardımıyla düzgün sürekli fonksiyonlara tüm reel eksen üzerinde noktasal olarak yaklaşılabileceği bilinmektedir. Fakat, sinir ağı operatörlerinin test fonksiyonlarındaki değerlerini analitik olarak hesaplamak genellikle oldukça güç olduğundan buradaki yaklaşımı elde edebilmek için klasik Korovkin Teoremi uygulamak da çoğu zaman kullanışlı değildir. Tez çalışmamızda ilk olarak çan tipindeki aktivasyon fonksiyonları yardımıyla tanımlanan lineer yapıdaki sinir ağı operatörlerini modifiye ederek düzgün sürekli fonksiyonlara düzgün olarak yaklaşmasını sağladık. Daha sonra da klasik yaklaşımın gerçeklenmediği durumlar için negatif olmayan regüler toplanabilme metotlarından yararlandık. Bilindiği üzere matematiksel analizde bir toplanabilme metodu, klasik anlamda yakınsak olmayan bir dizinin (veya bir serinin) yakınsamasını sağlamanın alternatif bir yöntemidir. Elde ettiğimiz yaklaşım sonuçlarını desteklemek üzere çeşitli matematiksel yazılım programlarından yararlanarak grafiksel gösterimler elde ettik. Daha sonra çalışmalarımızı çok değişkenli fonksiyonlar teorisi üzerine genişlettik. Tezin ikinci kısmında ise maksimum-çarpım işlemleri yardımıyla lineer olmayan yapıdaki sinir ağı operatörlerini ele aldık. Benzer yaklaşım sonuçlarının lineer olmayan durum için de geçerli olduğunu kanıtladık. Literatürde toplanabilme teorisi teknikleri yaklaşımlar teorisinde sıklıkla kullanılmış olmasına rağmen sinir ağı

operatörlerinin yaklaşımında bildiğimiz kadarıyla henüz bu yönde bir çalışma yapılmamış olması tez çalışmamıza özgünlük katmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sinir ağı operatörleri, Çan biçimli fonksiyonlar, Düzgün yakınsaklık, Regüler toplanabilme metodları, Süreklilik modülü.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

INVESTIGATION OF SUMMABILITY OF NEURAL NETWORK OPERATORS

Can Türkün

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Oktay Duman

Date: December 2020

In this Ph.D. thesis, the approximation properties of neural network operators are examined in all aspects. Artificial neural networks, which have a wide range of applications from engineering to medical and finance to computer technologies, were first addressed in the approximation theory in 1989 by Cybenko and then developed by Cardaliaguet, Euvrard and Anastassiou in 1997. It is known that uniform continuous functions on the whole real axis can be pointwise approximated by means of neural network operators. However, since it is very difficult to calculate the values of neural network operators in test functions analytically, the classical Korovkin Theorem is often not useful. In our thesis, we have firstly modified the neural network operators having linear structure defined with the help of bell-type activation functions in order to obtain uniform approximation to uniform continuous functions. Later, we have used non-negative regular summability methods for situations where the classical approximation fails. As it is known, a summability method is an alternative formulation of convergence of a sequence (or a series) which is divergent in the conventional sense. We have also obtained graphical illustrations by using various mathematical software programs to support our results. We have also expanded our work on the theory of multivariable functions. In the second part of the thesis, we discussed the nonlinear neural network operators with the help of maximum-product operations. We have showed that similar approximation results are also valid for the nonlinear case. As far as we know, the approximation by neural network operators has not been conducted in this direction although the techniques of

summability theory have been frequently used in the approximation theory, which gains the originality to our thesis.

Keywords: Neural network operators, Bell-shaped functions, Uniform convergence, Regular summability methods, Modulus of continuity.

TEŞEKKÜR

Günümüz teknolojisi yapay zeka ve makine öğrenmesinin yapı taşları olan konulara daha önce hiç denenmemiş bir *matematiksel yaklaşımla* bana bu alanda çalışma fırsatı veren ve bu süreçte hem isabetli öngörüleri hem de yardımlarıyla beni yönlendiren değerli tez hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a;

En sıkışık zamanlarında bile tez izleme kurulu sunumlarıma gelerek eleştirel görüşlerini paylaşan ve sunuma yetiştiremediğim yeni sonuçlarım için "*arkası yarın bekler gibi sabırsızlıkla bekliyorum*" diyerek hoş sohbetiyle her zaman motive eden değerli hocam Prof. Dr. Ogün DOĞRU'ya;

Matematiksel bilgilerin bir düzen ve uyum içinde yazıya dökülerek takdiminin aslında ne kadar meşakkatli oludğunu bizzat kendisi ile çalışarak tecrübe ettiğim, matematiğin ve matematik eğitiminin hem kendi içinde hem diğer bilimlerle bir bütün olarak görülmesi üzerine yaptığımız sayısız sohbetlerle ufkumu açıp kavrayışımı güçlendiren değerli hocam Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR'a;

Özellikle makine öğrenmesi ve Python programalamadaki büyük katkıları sebebiyle Örsan Kılıçer ve Mehmet Varol ile birlikte tez boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen Güngör Güneş, Deniz Gök, Mahmut Bozkurt ve Faruk Yıldırım'a;

Koronavirüs yayılmadan önce asistan odamızda neşeli sohbetlerin ve matematiksel atmosferin hiç kaybolmamasını sağlayan tüm çalışma arkadaşlarıma;

Salgın zamanı sokağa çıkma yasaklarında evlerindeki misafirliğimi büyük bir anlayış içinde uzatarak beni aileden biri yapan hatta bu tez çalışmasından üretilen makalemin son düzeltilme sürecinde de büyük yardımları dokunan Burak Aydın, Büsra Aydın ve birlikte oyunlar oynayıp zoom görüşmelerine katılıp her türlü yaramazlığı yapmaktan zevk aldığımız sevimli kızları Defnecik'e;

Yaptığım her işte olduğu gibi bu çalışmam boyunca da fedakarca beni destekleyip cesaretlendiren babam Mustafa Türkün'e, büyük bir titizlik ve özenle benimle ilgilenen ablam Deniz Türkün'e, bir gün olsun en iyi dileklerini ve uzun dualarını eksik etmeyen annem Melahat Türkün'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca doktora eğitimimde sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış olan kısaltmalar aşağıda sunulmuştur.

lim : Limit
max : Maksimum
sup : Supremum

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$UC(\mathbb{R})$	Tüm reel eksende tanımlı düzgün sürekli fonksiyonların uzayı
$\omega(f,\delta)$	Fonksiyonun süreklilik modülü
$L^1(\mathbb{R})$	Tüm reel eksende Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$\lfloor\cdot\rfloor$	Taban fonksiyonu
H_n	(Lineer) Sinir ağı operatörleri
M_n	(Lineer olmayan) Maksimum-çarpım sinir ağı operatörleri
$\rightrightarrows$	Düzgün yakınsaklık
$\Vert\cdot\Vert$	İlgili uzaydaki norm
$\bigvee$	Maksimum operatörü

1. GİRİŞ

Yapay sinir ağları, biyolojik sinir sistemlerinden esinlenerek tasarlanmış olan ve nöron adı verilen basit ama birbirleriyle oldukça bağlantılı işlemcilerden oluşan hesaplamaya dayalı yapılardır. Bu tip yapılar konuşmayı tanıma, görüntü işleme, kontrol, tahmin, optimizasyon gibi pek çok uygulamada kullanılmaktadır. Ayrıca finans, tıp, işletme, veri madenciliği, biyoloji, bilgisayar ve mühendislik alanındaki gerçek dünya uygulamalarında yerini günden güne sağlamlaştırmaktadır. Yapay sinir ağları ile ilişkilerini ortaya koymak için son yıllarda sinir ağı operatörlerinin yaklaşım sürecindeki uygulamaları da incelenmiştir. Literatürde yaklaşımlar teorisi ile yapay sinir ağları arasında yakın bir bağ olduğunu gösteren birçok çalışma yapılmıştır.

Yapay sinir ağları ve aktivasyon fonksiyonu adı verilen yardımcı araçlarla uygun koşullar altında herhangi bir sürekli fonksiyonun değerini yaklaşık olarak tahmin etmek mümkündür. Bu, basit sinir ağlarının, uygun parametreler verildiğinde çok çeşitli fonksiyonları temsil edebileceği anlamına gelir. Bu nedenle, belirli bir fonksiyonun değerlerine yaklaşmak için bir sinir ağı operatörleri ailesi oluşturmak oldukça doğaldır. Bu fikrin ilk versiyonlarından biri Cybenko tarafından 1989 yılında sigmoidal aktivasyon fonksiyonları yardımıyla tanımlandı (bkz. [1]). Yaklaşımlar teorisindeki terminolojiye dayalı olarak ifade edilen sinir ağı operatörlerinin matematiksel formülasyonları, esas olarak 1997 yılında Cardaliaguet ve Euvrard [2] tarafından başlatılmış ve 1997 yılında ise Anastassiou [3] tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra literatürde sinir ağı operatürlerinin yaklaşımıyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır [4–21]. Literatürde bilinen mevcut sinir ağı operatörleri pozitif ve lineerdir. Aslında pozitif lineer operatörler için genel bir yaklaşım teoremi 1950'li yıllarda Korovkin tarafından verilmiştir [22]. Fakat sinir ağı operatörlerinin Korovkin Teorisinde geçen test fonksiyonlarındaki değerlerini analitik olarak hesaplamak çoğu zaman oldukça güçtür. Bu nedenle Korovkin Teorisi, sinir ağı operatörleriyle yaklaşımda kullanışlı değildir; bunun yerine aktivasyon fonksiyonu gibi farklı bazı araçlara ve yeni ispat tekniklerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu doktora tezinde, daha sonra tanımını vereceğimiz üzere çan tipindeki aktivasyon fonksiyonları yardımıyla tanımlanmış lineer ve lineer olmayan yapıdaki sinir ağı operatörlerinin yaklaşımını çeşitli toplanabilme metotları yardımıyla inceleyeceğiz. Bilindiği üzere, matematiksel analizde bir toplanabilme metodu, bilinen anlamda yakınsak olmayan bir dizinin (veya bir serinin) yakınsamasını sağlamanın alternatif bir yoludur. Bu nedenle toplanabilme teorisindeki yakınsaklık metotları, yaklaşımlar teorisinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu alandaki en önemli çalışma 1900'lü yılların başında Fejér tarafından geliştirilmiştir. [23]. Fejér'in sonucuna göre sürekli ve periyodik bir fonksiyona, Fourier serisi ile her zaman yaklaşılamazken onun aritmetik ortalamasıyla yaklaşım mümkün olabilmektedir. Aslında buradaki aritmetik ortalama yakınsaklık kavramı, literatürde en iyi bilinen ve ilk kez Cesàro tarafından tanımlanan bir toplanabilme metodudur. Bu ve diğer toplanabilme metotlarının yaklaşımlar teorisindeki kullanımı ve çeştili uygulamaları için okuyucuya [24–34] kaynaklarını öneriyoruz. Bildiğimiz kadarıyla sinir ağı operatörlerinin yaklaşımında toplanabilme metotlarının kullanımı ilk kez bu tez çalışmasında ele alınacaktır.

Bu doktora tezi beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tez boyunca ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve teoremlere yer vereceğiz. Tezin üçüncü bölümünde lineer sinir ağı operatörlerinin yaklaşım özellikleri çeşitli toplanabilme metotları ile geliştirilecektir. Dördüncü bölümde maksimum-çarpım işlemleri yardımıyla lineer olmayan sinir ağı operatörlerinin yaklaşımı ele alınacaktır. Hem lineer hem de lineer olmayan durumlar için örnekler inşa edilecek ve elde edilen yaklaşımlar çeşitli matematiksel yazılım programları yardımıyla grafiksel olarak gösterilecektir. Tezin son bölümünde ise bulunan sonuçlar ve gelecekte konuyla ilgili yapılacak çalışmalar tartışılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu başlıkta, tez çalışmamız için ihtiyaç duyacağımız matematiksel altyapı ve tanımlar ile birlikte daha sonra detaylıca inceleyeceğimiz sinir ağı operatörleri sunulacaktır. Öncelikle sıkça kullanacağımız bazı gösterimleri ve tanımları verelim. Reel sayılardan reel sayılara giden düzgün sürekli fonksiyonlar uzayını $UC(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz; yani

$$UC(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ düzgün sürekli}\}$$

olacaktır. Yaklaşımlar teorisindeki önemli kavramlardan biri de *süreklilik modülü*dür.

Tanım 2.1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun süreklilik modülü, $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega(f,\delta) := \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)| \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

(2.1) ifadesi yalnızca düzgün sürekli fonksiyonlar için iyi tanımlı olup bu tanımla yakından ilişkili bir diğer kavram ise *Hölder sürekli* fonksiyonlardır.

Tanım 2.2. *$0 < \gamma \leq 1$ ve $K > 0$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^{\gamma} \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlara Hölder süreklidir denir ve $\gamma = 1$ özel durumunda bu fonksiyonlara Lipschitz sürekli adı verilir.

Örneğin $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$, $e_2(t) = t^2$ ve $k(t) = \sqrt{|t|}$ için $e_0, e_1, k \in UC(\mathbb{R})$ fakat $e_2 \notin UC(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca $\omega(e_0,\delta) = 0$, $\omega(e_1,\delta) = \delta$, $\omega(k,\delta) = \sqrt{\delta}$ ve $\omega(e_2,\delta) = \infty$ dur. Üstelik e_0 ve e_1 Lipschitz sürekli; k ise $\gamma = 1/2$ ve $K = 1$ için Hölder süreklidir.

2.1 Tek Değişkenli Lineer Sinir Ağı Operatörleri

İnceleyeceğimiz sinir ağı operatörlerini vermeden önce bu operatörlerin çekirdeğini oluşturan özel bir fonksiyon çeşidinden bahsetmemiz gerekmektedir.

Tanım 2.3. *Bir $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,*

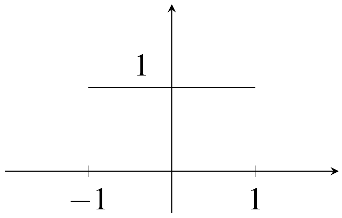
- *$b \in L^1(\mathbb{R})$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} b(x)\,dx \neq 0$*
- *Bir $a \in \mathbb{R}$ için $(-\infty, a)$ aralığında azalmayan ve $[a, \infty)$ aralığında artmayan*

koşullarını sağlıyorsa, çan biçimindedir denir. Ayrıca eğer $a = 0$ ise, b ye merkezî çan biçimli (şekilli) fonksiyon adı verilir.

Herhangi bir çan biçmindeki fonksiyon üzerinde işlem yapmak mümkün olsa da bundan sonra matematiksel işlemlerde kolaylık sağlayabilmek için $[-T,T]$ kompakt desteğine sahip, pozitif ve merkezî çan biçimli b fonksiyonlarını dikkate alacağız.

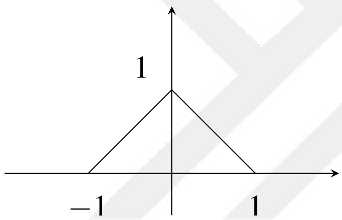
Örnek 2.1.

i) $[-1,1]$ *aralığının karakteristik fonksiyonu* $\chi_{[-1,1]}$



ve

ii) $[-1,1]$ *aralığında* şapka fonksiyonu $b(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$



grafiklerinden kolaylıkla anlaşılacağı üzere bu tarz fonksiyonlardır.

Tanım 2.4. *b keyfi fakat sabit bir çan biçiminde fonksiyon ve* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *herhangi bir fonksiyon olmak üzere sinir ağı operatörleri*

$$H_n(f;x) := \frac{\sum_{k=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\sum_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} \tag{2.3}$$

ile tanımlanır. Burada $0<\alpha<1$, $x\in\mathbb{R}$ *ve* $n\in\mathbb{N}$ *olarak verilmiştir. [2, 3, 7].*

Uyarı 2.1. (2.3) *operatörleri her* $x\in\mathbb{R}$ *ve her* $n\in\mathbb{N}$ *için tanımlı değildir. Yine de tanımlı oldukları yerlerde pozitif ve lineer olmakla birlikte sabit fonksiyonları korurlar.*

Uyarı 2.2. $n \geq \max\left(T+|x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ *olduğu sürece* $H_n(f;x)$ *tanımlıdır [3, 7].*

2.2 Toplanabilme Metotları

Sinir ağı operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelediğimizde klasik yakınsamanın her zaman sağlanamadığı durumlarla karşılaşacağız. Özellikle böyle durumlarda (bir anlamda) yaklaşım elde edebilmek için çeşitli toplanabilme metotlarına başvuracağız. Tez çalışmamızın özünde de bu fikir yatmaktadır. Bu yüzden, ihtiyaç duyacağımız toplanabilme kavramlarını genel hatlarıyla burada vereceğiz. Önceliğimiz belki de en çok bilinen yöntem olan Cesàro metodu olacaktır.

Tanım 2.5. (x_n) *bir sayı dizisi olmak üzere*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{n=1}^{j} x_n = \lim_{j\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_j}{j} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_n) *dizisi L'ye* "Cesàro yakınsaktır"*veya açıkça görüldüğü üzere* "aritmetik ortalama yakınsaktır"*denir [35, 36].*

Bu tanıma göre aşağıdaki teorem iyi bilinmektedir.

Teorem 2.1. *Yakınsak her dizi, aynı değere Cesàro yakınsaktır [35, 36].*

Fakat bu teoremin tersi her zaman doğru değildir; yani Cesàro yakınsak olan bir dizi klasik anlamda yakınsamayabilir. Bu durumu aşağıdaki örnekte görmek mümkündür.

Örnek 2.2. (x_n) dizisinin genel terimi

$$x_n = \begin{cases} 2, & n \text{ tek ise} \\ 0, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (x_n) dizisi klasik anlamda yakınsak değildir. Ancak kolaylıkla görüleceği üzere

$$\frac{1}{j} \sum_{n=1}^{j} x_n = \begin{cases} \frac{j+1}{j}, & j \text{ tek ise} \\ 1, & j \text{ çift ise} \end{cases}$$

olduğundan, (x_n) dizisi 1 sayısına Cesàro yakınsaktır.

Bu metot fonksiyon dizileri için de uygulanabilir.

Örnek 2.3. (β_n) fonksiyon dizisinin genel terimi

$$\beta_n(x) = \begin{cases} x+1, & n = m^2 \text{ ise} \\ x, & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $(\beta_n(x))$ dizisinin klasik anlamda yakınsak olmadığı açıktır. Buna rağmen

$$\frac{1}{j} \sum_{n=1}^{j} \beta_n(x) = \frac{\lfloor \sqrt{j} \rfloor (x+1) + (j - \lfloor \sqrt{j} \rfloor)x}{j} = x + \frac{\lfloor \sqrt{j} \rfloor}{j}$$

olduğundan $(\beta_n(x))$ dizisi x fonksiyonuna düzgün Cesàro yakınsaktır. Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ sembolü taban (aşağı yuvarlama) fonksiyonunu göstermektedir.

Şimdi, çalışmamızda esas aldığımız daha genel bir toplanabilme metodu olan matris metodunu vereceğiz.

Tanım 2.6. *$j,n \in \mathbb{N}$ için $A = [a_{jn}]$ terimleri reel veya kompleks sonsuz bir matris olsun. Bu takdirde verilen bir $x = (x_n)$ dizisi için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}x_n \text{ serisi her bir } j \text{ için yakınsak ve } \lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}x_n = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_n) dizisi L ye "A-toplanabilirdir"denir. Bu yakınsama

$$A - \lim x = L \text{ veya } x_n \xrightarrow{A} L$$

ile gösterilir [36].

Burada dikkat edilmelidir ki önce verilen bir $x = (x_n)$ dizisi, sonsuz bir sütun vektörü olarak düşünülerek A matrisi ile çarpılır ve $Ax = \left((Ax)_j\right)$ sonsuz sütun vektörüne dönüştürülür; daha sonra da elde edilen Ax dönüşüm dizisinin klasik anlamda yakınsaklığı incelenir. Matris metotları pek çok toplanabilme metodunu içermektedir. Örneğin,

- I birim matrisi alınırsa I-toplanabilirlik klasik anlamda yakınsaklığa indirgenir.
- $C = [c_{jn}]$ Cesàro matrisi seçilirse; yani

$$c_{jn} = \begin{cases} 1/j, & n = 1,2,\ldots,j \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.4}$$

  alınırsa, C-toplanabilirlik Cesàro yakınsaklığa dönüşür.

Bir matris yerine matris dizisi alarak da toplanabilme metodu inşa etmek mümkündür. Bunlardan belki en önemlisi Lorentz tarafından verilen *hemen hemen yakınsaklık* kavramıdır [37]. Bu kavram daha sonra Bell tarafından genelleştirilmiştir [38]. Fakat bu çalışmada tek bir matris ile verilen toplanabilme metotlarına odaklanacağız.

Şimdi regülerlik kavramını hatırlatalım.

Tanım 2.7. *$A = [a_{jn}]$ bir toplanabilme metodu olmak üzere L sayısına yakınsak bir x dizisi verildiğinde $A - \lim x = L$ oluyorsa, A metoduna "regülerdir" denir [39].*

Bir toplanabilme metodunun regüler olması, klasik yakınsak dizileri limit değerleri ile koruduğu anlamına gelir. Bu çok önemli bir özelliktir çünkü klasik yakınsamanın gerçekleşmediği durumları iyileştirmek isterken halihazırda yakınsaklığın olduğu durumları da kapsayabilmemizi sağlayacaktır. O yüzden hangi matrislerin regüler olduğunu bilmek hayli faydalı olacaktır. Bu sebeple regüler matrisleri karakterize eden meşhur Silverman-Toeplitz teoreminden tez boyunca sıklıkla istifade edeceğiz.

Teorem 2.2. *$A = [a_{jn}]$ metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul*

$$(i)\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{j\to\infty} a_{jn} = 0 \quad \text{(her sütun dizisi 0 a yakınsar)}$$

$$(ii)\ \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1 \quad \text{(satır toplamları 1 e yakınsar)}$$

$$(iii)\ \sup_{j} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}| < \infty \quad \text{(mutlak satır toplamları sınırlıdır)}$$

şartlarının sağlanmasıdır [35, 36].

Sonuçlarımızda negatif olmayan regüler metotları dikkate alacağız. Bir metodun negatif olmamasından kastımız ise matrisin tüm terimlerinin negatif olmaması anlamındadır. Buna göre Cesàro metodu negatif olmayan regüler bir metottur.

İhtiyaç duyacağımız bir diğer kavram, *kuvvetli toplanabilirlik* olup tanımı şöyledir:

Tanım 2.8. *(x_n) bir dizi ve $A = [a_{jn}]$ bir regüler toplanabilme metodu olmak üzere*

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |x_n - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_n) dizisi L ye "A-kuvvetli toplanabilir" denir ve

$$|A| - \lim x = L \text{ veya } x_n \overset{|A|}{\to} L$$

ile gösterilir [40].

Bu tanımın neredeyse bir sonucu olarak görülebilecek ve ilerde kullanacağımız bir teoremi hemen verelim.

Teorem 2.3. *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olmak üzere $x_n \overset{|A|}{\to} L$ ise $x_n \overset{A}{\to} L$ dir; yani A-kuvvetli toplanabilen bir dizi aynı değere A-toplanabilir.*

İspat. *Üçgen eşitsizliğinden yararlanırsak,*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} x_n - L \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}(x_n - L) + L \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - L \right| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |x_n - L|}_{a_{jn}\geq 0 \text{ ve hipotez}} + |L| \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1 \right|}_{\text{Teorem 2.2 (ii)}}$$

olup $j \to \infty$ alınarak ispat tamamlanır.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekten rahatça görüleceği üzere negatif olmayan regüler metotlar için kuvvetli toplayabilme özelliği kelimenin tam manasıyla normal toplanabilme kavramına göre daha *kuvvetli* bir kavramdır.

Örnek 2.4. (x_n) dizisi

$$x_n = \begin{cases} 2, & n \text{ tek ise} \\ 0, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa 1 sayısına Cesàro toplanabildiğini biliyoruz. Acaba bu dizi 1 sayısına Cesàro kuvvetli toplanabilir mi diye inceleyelim:

$$|x_n - 1| = \begin{cases} |2-1|, & j \text{ tek ise} \\ |0-1|, & j \text{ çift ise} \end{cases}$$

yani $|x_n - 1|$ dizisi sabit 1 dizisi olup $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{jn} |x_n - 1| = 1 \neq 0$ olduğundan (x_n) dizisi 1'e Cesàro kuvvetli toplanamaz.

Örnek 2.5. (β_n) fonksiyon dizisininin genel terimi

$$\beta_n(x) = \begin{cases} x+1, & n = m^2 \text{ ise} \\ x, & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

alınırsa, x fonksiyonuna (düzgün) Cesàro yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu dizinin x fonksiyonuna Cesàro kuvvetli yakınsak olup olmadığını inceleyelim:

$$|\beta_n(x) - x| = \begin{cases} 1, & n = m^2 \text{ ise} \\ 0, & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olup $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{j} c_{jn} |\beta_n(x) - x| = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{\lfloor \sqrt{j} \rfloor}{j} = 0$ sağlandığından $(\beta_n(x))$ dizisi x fonksiyonuna Cesàro kuvvetli yakınsaktır; hatta bu yakınsama $\mathbb{R}$ üzerinde düzgündür.

3. LİNEER SİNİR AĞI OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM

Bu bölümde önceden tanımladığımız sinir ağı operatörlerimizin yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Matematiksel anlamda daha güçlü ve esnek sonuçlar elde edebileceğimizi önceden gözlemlediğimiz için yeri gelir gelmez operatörlerimizi uygun şekilde önce genişletip (modifiye edip) sonra genelleştireceğiz.

Şimdi b fonksiyonu, $T > 0$ için $[-T, T]$ kompakt desteğine sahip, negatif olmayan, merkezi çan biçimli bir fonksiyon olmak üzere (2.3) ile verilen $H_n(f;x)$ sinir ağı operatörlerini göz önüne alalım. Uyarı 2.2 den $n \geq \max\left(T + |x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ olduğu sürece $H_n(f;x)$ operatörlerinin iyi tanımlı olduğunu biliyoruz (bkz. [3, 7]).

Bu operatör dizisine ilişkin bilinen yaklaşım teoremi aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.1. *$n \geq \max\left(T + |x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ olacak şekildeki $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ göz önüne alındığında, reel sayılar üzerinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu için*

$$|H_n(f;x) - f(x)| \leq \omega\left(f, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir [3, 7].

Süreklilik modülünün bilinen özelliklerinden Teorem 3.1 in doğrudan bir sonucu olarak şunu yazabiliriz:

Sonuç 3.1. *Her $f \in UC(\mathbb{R})$ için, $\mathbb{R}$ üzerinde $H_n(f;x) \to f(x)$ noktasal yakınsar.*

Hem operatörlerimizin iyi tanımlı olmadığı durumları ortadan kaldırmak hem de bu sonuçları koruyacak şekilde operatörlerimizin tanım kümesini tüm reel eksene genişletebiliriz. Bu küçük değişikliğin çok güçlü sonuçlarını anında gözlemleyeceğiz.

Tanım 3.1. *$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$H_n^*(f;x) := \begin{cases} H_n(f;x), & n \geq \max\left(T + |x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \text{ ise} \\ f(x), & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.1}$$

ile tanımlansın.

Uyarı 3.1. *$H_n^*(f;x)$ artık her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için iyi tanımlıdır. Ayrıca hala pozitif ve lineer olmakla birlikte sabit fonksiyonları korur.*

(3.1) operatörleri ile aşağıdaki yaklaşım sonuçlarına ulaşmak mümkündür.

Sonuç 3.2. *$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ keyfi olmak üzere reel sayılar üzerinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu için*

$$|H_n^*(f;x) - f(x)| \leq \omega\left(f, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) \tag{3.2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Sonuç 3.3. *Her $f \in UC(\mathbb{R})$ için, $\mathbb{R}$ üzerinde $H_n^*(f) \rightrightarrows f$ düzgün yaklaşımı elde edilir.*

Bu sonuçtan sonra operatörlerimizin daha genel halini verip daha esnek sonuçlar elde edeceğiz. Bu amaçla $\beta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon dizisi olmak üzere

$$L_n(f;x) := H_n^*(f;\beta_n(x)) \tag{3.3}$$

modifiye edilmiş operatörleri dikkate alacağız. Bu operatörlerimizin halen pozitiflik, lineerlik ve sabit fonksiyonları koruma özelliklerini kaybetmediğini görebiliriz. Artık (3.3) eşitliği ile verilen genel sinir ağı operatörleri üzerine odaklanacağız.

Teorem 3.2. *$\mathbb{R}$ üzerinde $\beta_n(x) \to x$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R})$ için $L_n(f;x) \to f(x)$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. *(3.3) tanımını ve (3.2) eşitsizliği kullanarak*

$$\begin{aligned}
|L_n(f;x) - f(x)| &\leq |H_n^*(f;\beta_n(x)) - f(\beta_n(x))| + |f(\beta_n(x)) - f(x)| \\
&\leq \omega\left(f, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + |f(\beta_n(x)) - f(x)|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $n \to \infty$ için limit alınarak ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2. *Şayet f sabit bir fonksiyon ise $(\beta_n(x))$ fonksiyon dizisi yakınsak olmasa bile $L_n(f) \rightrightarrows f$ düzgün yakınsaması aşikardır çünkü operatörler sabit fonksiyonları korumaktadır. Benzer başka fonksiyonlar da vardır. Örneğin*

$$\beta_n(x) = \begin{cases} x+1, & n = m^2 \text{ ise} \\ x, & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

alınırsa (3.3)'teki operatörler

$$L_n(f;x) = \begin{cases} H_n(f;x+1), & n = m^2 \text{ ve } n \geq 1 + |x+1| \text{ ise} \\ f(x+1), & n = m^2 \text{ ve } n < 1 + |x+1| \text{ ise} \\ H_n(f;x), & n \neq m^2 \text{ ve } n \geq 1 + |x| \text{ ise} \\ f(x), & n \neq m^2 \text{ ve } n < 1 + |x| \text{ ise} \end{cases}$$

olup $f(x) = \cos(2\pi x)$ için

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n=m^2)}} L_n(f;x) = f(x+1)$$

ve

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\neq m^2)}} L_n(f;x) = f(x)$$

olduğu görülür ki bu da $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f;x) = f(x)$ demektir; çünkü f'nin periyodu 1'dir.

Operatörlerimiz pozitif ve lineer olduğundan yaklaşım için klasik Korovkin Teoreminin kullanılması fikri doğaldır; yani $\mathbb{R}$ üzerindeki tüm düzgün sürekli fonksiyonlara yakınsaklıklığı elde edebilmek için

$$e_0(t) := 1, e_1(t) := t \text{ ve } e_2(t) := t^2$$

gibi bazı test fonksiyonlarına olan yaklaşımını incelemek akla gelebilir. Fakat e_2 için hesaplamaların zorlaşması bir yana $e_2 \notin UC(\mathbb{R})$ olduğundan bizim için bir test fonksiyonu olamaz. Yine de aşağıdaki teoremin sonucu bize yalnızca e_1 in yeterli olacağını gösterecektir.

Teorem 3.3. *$\mathbb{R}$ üzerinde $L_n(e_1;x) \to e_1(x)$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise $\beta_n(x) \to x$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. *Yine* (3.3) *tanımını ve* (3.2) *eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki adımları izlersek*

$$\begin{aligned}
|\beta_n(x) - x| &\leq |\beta_n(x) - L_n(e_1;x)| + |L_n(e_1;x) - x| \\
&= |e_1(\beta_n(x)) - H_n^*(e_1;\beta_n(x))| + |L_n(e_1;x) - e_1(x)| \\
&\leq \omega\left(e_1, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + |L_n(e_1;x) - e_1(x)| \\
&= \frac{T}{n^{1-\alpha}} + |L_n(e_1;x) - e_1(x)|
\end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınarak ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4. *$\mathbb{R}$ üzerinde $L_n(e_1;x) \to e_1(x)$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R})$ için $L_n(f;x) \to f(x)$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

Yukarıdaki teoremin karşıt tersi (yani kontrapozitifi) bize şunu vermektedir:

"$\beta_n(x) \not\to x$ ise $L_n(f;x) \not\to f(x)$ olacak şekilde sabit olmayan bir $f \in UC(\mathbb{R})$ vardır."

Akla ilk gelen örnek $f = e_1$ olmakla birlikte başka fonksiyonlar da olabilir. Bu durum bizi toplanabilme metodu uygulamaya ve aşağıdaki soruyu sormaya yönlendirmiştir.

Soru. *$\beta_n(x) \not\to x$ olsa bile her $f \in UC(\mathbb{R})$ için $(L_n(f))$ dizisini f fonksiyonuna toplayabilecek bir metot bulmak mümkün müdür?*

Yukarıdaki soru, bu tez çalışmasının temelini teşkil etmektedir. Tez süreci boyunca yaptığımız tüm araştırmalar ve bu sayfadan sonra elde ettiğimiz tüm sonuçlar özünde bu soruya tatmin edici cevaplar verebilmek içindir.

3.1 Sinir Ağı Operatörlerinin Toplanabilmesi

Sinir ağı operatörlerimize herhangi bir toplanabilme metodu uygulamadan önce bazı gözlemler yapalım. Uyarı 3.2'yi göz önünde bulundurduğumuzda $\beta_n(x) \not\to x$ olsa bile $L_n(f;x) \to f(x)$ olan fonksiyonların varlığını biliyoruz. Bu yüzden, halihazırda klasik yakınsayan fonksiyonların bu özelliğini korumak mantıklı olacaktır. O halde regüler toplanabilme metotlarını dikkate almalıyız. Ayrıca Teorem 3.2'nin veya Sonuç 3.4'ün toplanabilme versiyonlarını elde edebilirsek sorumuza olumlu bir cevap verebiliriz. Bunun için ilk adım olarak Teorem 3.3'ün toplanabilme versiyonu ile başlıyoruz.

Teorem 3.4. *$\mathbb{R}$ üzerinde $L_n(e_1;x) \xrightarrow{A} e_1(x)$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün olacak şekilde negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler toplanabilme metodu var ise $\beta_n(x) \xrightarrow{A} x$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. *Öncelikle*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\left(\beta_n(x) - L_n(e_1;x)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x)$$

olarak yakınsak iki serinin toplamı şeklinde yazılabildiğinden anlamlıdır. Buradan (3.2) *eşitsizliği yardımıyla*

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n(x) - x\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x)\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x) - x\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\left|\beta_n(x) - L_n(e_1;x)\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x) - e_1(x)\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\left|e_1\left(\beta_n(x)\right) - H_n^*\left(e_1;\beta_n(x)\right)\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x) - e_1(x)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\omega\left(e_1, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x) - e_1(x)\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{T}{n^{1-\alpha}} + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x) - e_1(x)\right|
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $j \to \infty$ için limit alınırsa, ispat tamamlanır.

Toplanabilme sonuçları için daha derin analizlere başlmadan önce bu teoremin tersinin de doğru olduğunu belirterek aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 3.5. *$\mathbb{R}$ üzerinde $\beta_n(x) \xrightarrow{A} x$ sırasıyla noktasal ve düzgün olacak şekilde negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler toplanabilme metodu var ise $L_n(e_1;x) \xrightarrow{A} e_1(x)$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. (3.2) *eşitsizliğinden her $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x) - e_1(x)\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}L_n(e_1;x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}e_1(\beta_n(x))\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n(x) - x\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\left|L_n(e_1;x) - e_1(\beta_n(x))\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n(x) - x\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\omega\left(e_1, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n(x) - x\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{T}{n^{1-\alpha}} + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n(x) - x\right|
\end{aligned}$$

elde edilir ve $j \to \infty$ için limit alındığında hipotez uyarınca ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5. *Negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler matris metodu için $\mathbb{R}$ üzerinde $\beta_n(x) \xrightarrow{A} x$ yakınsamasının sırasıyla noktasal ve düzgün olması için gerek ve yeter koşul $L_n(e_1;x) \xrightarrow{A} e_1(x)$ yakınsamasının sırasıyla noktasal ve düzgün olmasıdır.*

Uyarı 3.3. *Henüz Teorem 3.2'nin toplanabilme karşılığını elde edebilmiş değiliz. Yine de operatörlerimizin lineer olmasının avantajıyla $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir metot olmak üzere, $\beta_n(x) \xrightarrow{A} x$ noktasal (düzgün) yakınsak ise $f(x) = cx + d$ doğrusal fonksiyonları için $L_n(f;x) \xrightarrow{A} f(x)$ noktasal (düzgün) yakınsaktır diyebiliriz.*

Şimdiye kadar teoremlerimiz negatif olmayan regüler matris metotları için verilmiştir. Ancak bu sonuçların hepsinin herhangi bir pozitif, regüler ve lineer toplanabilme metodu için de geçerli olduğu görülebilir. Üstelik, pozitiflik koşulu yalnızca düzgün yakınsama sonuçları için gereklidir.

Aşağıdaki örnek bazı $(\beta_n(x))$ dizileri için L_n sinir ağı operatörlerimizi her $f \in UC(\mathbb{R})$ için toplayabilecek lineer ve regüler metot bulamayabileceğimizi göstermektedir. Bu yüzden **Soru**'muza genel olarak olumsuz cevap vermektedir. Ancak aynı zamanda "$\beta_n(x) \xrightarrow{A} x$" şartının yeterli olmayacağını da gösterdiğinden, operatörlerimizi tüm $f \in UC(\mathbb{R})$ için toplanabilir kılmak adına daha *kuvvetli* bir şarta işaret etmektedir.

Örnek 3.1. (β_n) fonksiyon dizisinin genel terimi

$$\beta_n(x) = \begin{cases} 2x, & n \text{ tek ise} \\ 0, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde bir A regüler metodu için reel sayılar üzerinde $\beta_n(x) \xrightarrow{A} x$ noktasal (düzgün) gerçekleniyorsa, $f \in UC(\mathbb{R})$ için

$$f(\beta_n(x)) = \begin{cases} f(2x), & n \text{ tek ise} \\ f(0), & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacağından $f(\beta_n(x)) \xrightarrow{A} \frac{f(2x)+f(0)}{2}$ noktasal (düzgün) yakınsaklığı elde edilir. Ayırca

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} L_n(f;x) - f(x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} L_n(f;x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} f(\beta_n(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} f(\beta_n(x)) - f(x) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} [L_n(f;x) - f(\beta_n(x))] + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} f(\beta_n(x)) - f(x) \right| \end{aligned}$$

eşitliğinden $L_n(f;x) \xrightarrow{A} f(x)$ noktasal (düzgün) olması için $f(\beta_n(x)) \xrightarrow{A} f(x)$ noktasal (düzgün) olması gerektiğini görürüz. Bu da bize yalnızca

$$\frac{f(2x) + f(0)}{2} = f(x) \tag{3.4}$$

şartını sağlayan $f \in UC(\mathbb{R})$ için yaklaşımın mümkün olduğunu gösterir. (3.4) eşitiğini $f(x) = cx + d$ şeklindeki doğrusal fonksiyonlar açıkça sağlar; fakat sadece bunlardan ibaret değildir.

Örneğin

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\left(2\pi\log_2|x|\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

veya

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(2\pi\log_2|x|\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

gibi fonksiyonlar da (3.4) koşulunu gerçekler.

Soru'muza olumsuz bir cevap bulmuş olsak da durum her zaman bu kadar umutsuz değildir. Bazı durumlarda uygun bir toplama metodu bulunabilmektedir.

Örnek 3.2. Şimdi (β_n) fonksiyon dizisini

$$\beta_n(x)=\begin{cases} x+1, & n=m^2 \text{ ise}\\ x, & n\neq m^2 \text{ ise}\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım ve $C=[c_{jn}]$ Cesàro metodunu alalım. Bu durumda

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}\beta_n(x)-x\right| = \left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}\beta_n(x)-x\right| \leq \frac{1}{\sqrt{j}}$$

ve

$$f(\beta_n(x))=\begin{cases} f(x+1), & n=m^2 \text{ ise}\\ f(x), & n\neq m^2 \text{ ise}\end{cases}$$

olup

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}f(\beta_n(x))-f(x)\right| = \left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}f(\beta_n(x))-f(x)\right| \leq \frac{|f(x+1)-f(x)|}{\sqrt{j}} \leq \frac{\omega(f,1)}{\sqrt{j}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}L_n(f;x)-f(x)\right| &= \left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}L_n(f;x)-\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}f(\beta_n(x))+\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}f(\beta_n(x))-f(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}[L_n(f;x)-f(\beta_n(x))]+\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}f(\beta_n(x))-f(x)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}[L_n(f;x)-f(\beta_n(x))]\right|+\left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}f(\beta_n(x))-f(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}|L_n(f;x)-f(\beta_n(x))|+\left|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}f(\beta_n(x))-f(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}\omega\left(f,\frac{T}{n^{1-\alpha}}\right)+\frac{\omega(f,1)}{\sqrt{j}}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da her $f\in UC(\mathbb{R})$ için $L_n(f;x)\xrightarrow{C} f(x)$ düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

Yukarıdaki iki örnek arasındaki önemli fark, metotların $(\beta_n(x))$ fonksiyon dizisini x fonksiyonuna ne kadar "kuvvetli" toplayabildiği ile ilgilidir. Örnek 3.1 deki $(\beta_n(x))$ dizisi x'e kuvvetli toplanamaması operatörlerin de tüm düzgün sürekli fonksiyonlara toplanamamasına yol açmaktadır. Diğer yandan Örnek 3.2 deki $(\beta_n(x))$ dizisi x'e kuvvetli toplanmaktadır ve böylece operatörler de reel sayılar üzerindeki tüm düzgün sürekli fonksiyonlara toplanabilmektedir.

Örnek 3.2 için daha doğrudan ve basit bir metot olarak alt dizi metodu da alınabilirdi:

$$A = [a_{jn}] = \begin{cases} 1, & n = j \text{ ve } j \neq m^2 \\ 0, & \text{diğer yerlerde.} \end{cases}$$

Böylece hesaplamalar direkt klasik duruma indirgenir ve Teorem 3.2 kullanılabilirdi.

Teorem 3.2'nin toplanabilme karşılığını içeren iki teoremimizi takdim etmeden önce, Vanderbei [41] tarafından verilen, düzgün sürekliliğin "*neredeyse*" Lipschitz sürekli olduğu şeklinde ifade edilebilecek aşağıdaki karakterizasyon çok faydalı olacaktır.

Teorem 3.6. *$D \subseteq \mathbb{R}$ konveks olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $K_\varepsilon < \infty$ sayısı vardır öyle ki*

$$|f(x) - f(y)| \leq K_\varepsilon |x - y| + \varepsilon \tag{3.5}$$

eşitsizliği her $x, y \in D$ için gerçeklenir [41].

Artık operatörlerimizin hangi şartlar altında tüm düzgün sürekli fonksiyonlara toplanabileceğini gösteren teoremlerimizi verebiliriz.

Teorem 3.7. *Negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler matris metodu için $\mathbb{R}$ üzerinde*

$$|A| - \lim \beta_n = e_1 \text{ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün} \tag{3.6}$$

ise her $f \in UC(\mathbb{R})$ için

$$|A| - \lim L_n(f) = f \text{ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün}$$

olur. Bu son ifade

$$A - \lim L_n(f;x) = f(x) \text{ noktasal}$$

yaklaşımını da gerektirir.

İspat. *$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (3.2) ve (3.5) eşitsizlikleri kullanılarak*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |L_n(f;x) - f(x)| &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |H_n^*(f;\beta_n(x)) - f(\beta_n(x)) + f(\beta_n(x)) - f(x)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |H_n^*(f;\beta_n(x)) - f(\beta_n(x))| + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |f(\beta_n(x)) - f(x)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \omega\left(f, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + K_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |\beta_n(x) - x| + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki yanında $j \to \infty$ için limit alırsak ve (3.6) hipotezini kullanırsak ispat tamamlanır.

(3.6) eşitliğinin sağ tarafında x fonksiyonu yerine e_1 yazmayı tercih ettik. Çünkü operatörlerimizi ve sonuçlarımızı çok boyuta taşırken $\mathbb{R}^d$ deki birim fonksiyonla örtüştüğü daha kolay anlaşılacaktır.

Teorem 3.8. *Negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler matris metodu için $\mathbb{R}$ üzerinde*

$$|A| - \lim \beta_n = e_1 \text{ düzgün yakınsak}$$

ve

$$f \in UC(\mathbb{R}) \text{ sınırlı veya her } j \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$$

ise

$$A - \lim L_n(f) = f \text{ düzgün yakınsaktır.}$$

İspat. $\varepsilon > 0$ *verilmiş olsun.*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} L_n(f;x) - f(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |L_n(f;x) - f(x)| + |f(x)| \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right| \tag{3.7}$$

olacağı kolayca görülebilir. Burada f sınırlı ise öyle bir $M > 0$ vardır ki

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} L_n(f;x) - f(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |L_n(f;x) - f(x)| + M \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} - 1\right|$$

olup Teorem 3.7 ve A nın regülerliğinden ispat tamamlanır. Eğer her $j \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$ ise (3.7) eşitsizliğinden

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} L_n(f;x) - f(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} |L_n(f;x) - f(x)|$$

olup ispat yine Teorem 3.7 kullanılarak elde edilir.

Uyarı 3.4. *γ-Hölder sürekli fonksiyonlar için yukarıdaki iki teoremin de şartlarında ufak değişiklikler yapılabilir. Örneğin (3.6) şartı yerine*

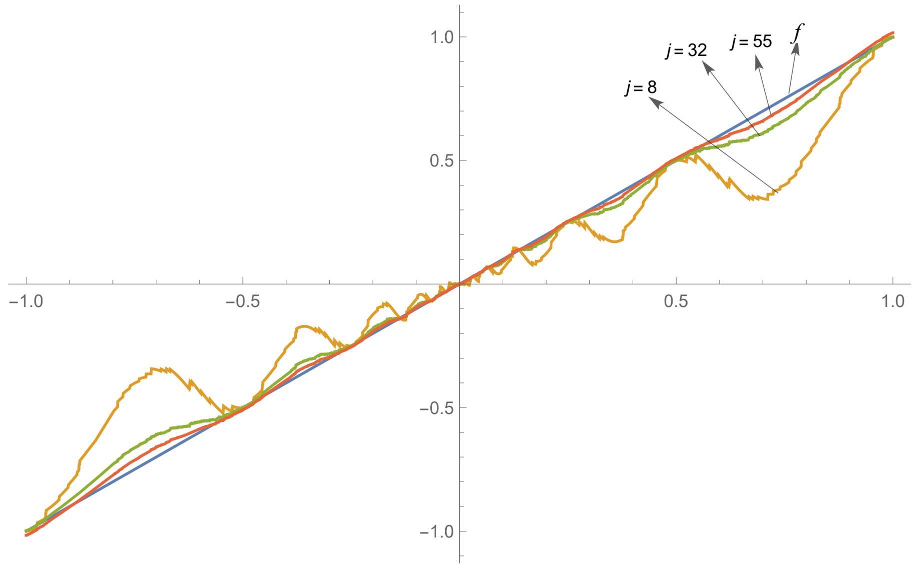
$$|A| - \lim |\beta_n - e_1|^{\gamma} = 0 \text{ sırasıyla noktasal ve düzgün yakınsak}$$

şartı alınabilir. İspatlar çok benzer olduğu için vermiyoruz.

Sonuç 3.4'ün toplanabilmedeki karşılığını verebilmek için kuvvetli toplanabilmeye ihtiyacımızın olduğunu Örnek 3.1'de görmüştük. Bunun için Sonuç 3.5'in kuvvetli toplanabilmedeki karşılığını, benzer adımlar içerdiği için ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 3.9. *Negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler matris metodu için $\mathbb{R}$ üzerinde $\beta_n(x) \overset{|A|}{\to} x$ yakınsamasının sırasıyla noktasal ve düzgün olması için gerek ve yeter koşul $L_n(e_1;x) \overset{|A|}{\to} e_1(x)$ yakınsamasının sırasıyla noktasal ve düzgün olmasıdır.*

Sonuç 3.6. $L_n(e_1;x) \overset{|A|}{\to} e_1(x)$ *sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R})$ için $L_n(f;x) \overset{|A|}{\to} f(x)$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*



Şekil 3.1: $L_n(e_1)$ ile e_1 fonksiyonuna Cesàro yaklaşım

3.2 Uygulamalar ve Grafiksel Gösterimler

Bu bölümde, bazı özel durumları da dikkate alarak sinir ağı operatörlerimizle belirli fonksiyonlara Cesàro yaklaşımları grafik olarak sunacağız.

İlk olarak, Örnek 3.1'deki β_n fonksiyon dizisini ve $C = [c_{jn}]$ Cesàro metodunu göz önüne alalım. Ayrıca çekirdek fonksiyonumuzu $[-1,1]$ aralığının karakteristik fonksiyonu seçelim; yani

$$b(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.8}$$

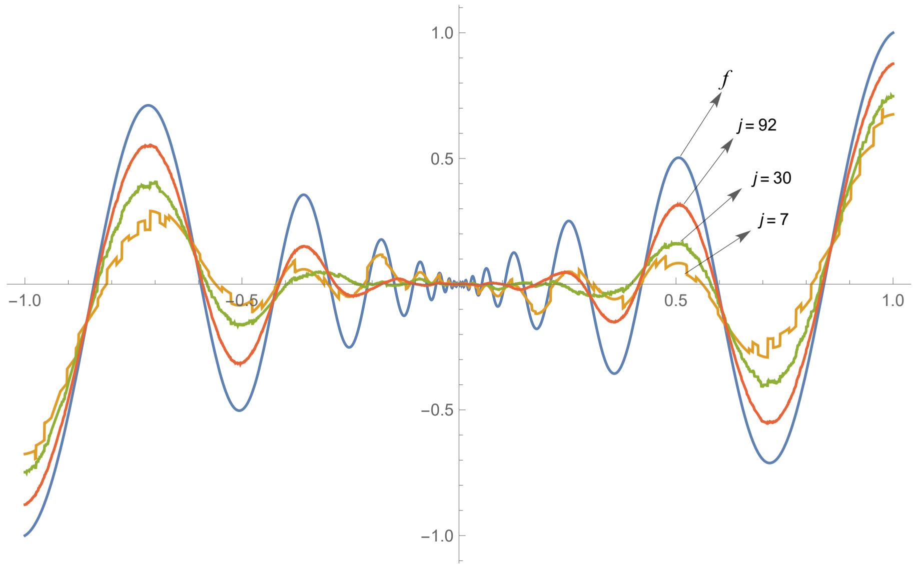
olsun. Bu durumda, $\alpha = \frac{1}{2}$ için sinir ağı operatörlerimiz aşağıdaki gibi olur:

$$L_n(f;x) = \begin{cases} H_n(f;2x), & n \text{ tek ve } n \geq 1+2|x| \text{ ise} \\ f(2x), & n \text{ tek ve } n < 1+2|x| \text{ ise} \\ H_n(f;0), & n \text{ çift ise.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Burada $e_1(x) = x$ test fonksiyonu için Sonuç 3.5'ten düzgün Cesàro yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşım

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{L_1(e_1) + L_2(e_1) + \cdots + L_j(e_1)}{j} \right) = e_1$$

gibi de verilebilir. Şekil 3.1'de $j = 8$, 32 ve 55 için bu yaklaşımlar gösterilmektedir. Bunula birlikte Teorem 3.3 uyarınca klasik yakınsamanın mümkün olamayacağını biliyoruz çünkü (β_n) dizisi klasik anlamda e_1 fonksiyonuna yakınsak değildir.



Şekil 3.2: $L_n(f)$ ile (3.10) eşitliğindeki f fonksiyonuna Cesàro yaklaşım

Diğer taraftan, aynı şartlar altında aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alırsak

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(2\pi \log_2 |x|\right), & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

(3.4) koşulunu sağladığı için düzgün Cesàro yaklaşımın mümkün olduğunu biliyoruz:

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{L_1(f) + L_2(f) + \cdots L_j(f)}{j} \right) = f \tag{3.11}$$

gerçeklenir. Şekil 3.2'de $j = 7$, 30 ve 92 değerleri için bu yaklaşımlar gösterilmektedir. Fakat, $f(0) = 0$ ve $f(2x) = 2f(x)$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} L_{2n-1}(f;x) = 2f(x)$$
$$\lim_{n\to\infty} L_{2n}(f;x) = 0$$

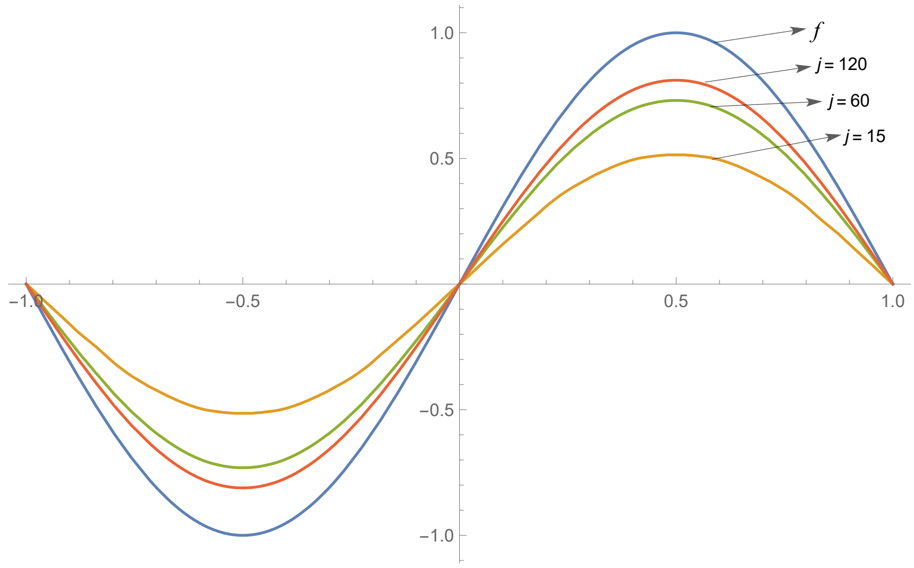
olup bu fonksiyona $x = 0$ noktası dışında klasik anlamda yaklaşılamaz.

Şimdi de Örnek 3.2'deki (β_n) fonksiyon dizisini göz önüne alalım ve çekirdek fonksiyonumuzu $[-1, 1]$ aralığındaki şapka fonksiyonu olarak seçelim; yani

$$b(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0 \text{ ise} \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. Yine $\alpha = \frac{1}{2}$ için sinir ağı operatörlerimiz aşağıdaki gibi olur:

$$L_n(f;x) = \begin{cases} H_n(f;x+1), & n = m^2 \text{ ve } n \geq 1 + |x+1| \text{ ise} \\ f(x+1), & n = m^2 \text{ ve } n < 1 + |x+1| \text{ ise} \\ H_n(f;x), & n \neq m^2 \text{ ve } n \geq 1 + |x| \text{ ise} \\ f(x), & n \neq m^2 \text{ ve } n < 1 + |x| \text{ ise.} \end{cases}$$



Şekil 3.3: $L_n(f)$ ile $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonuna Cesàro kuvvetli yaklaşım

Burada $f(x) = \sin(\pi x)$ için Teorem 3.8 uyarınca düzgün Cesàro kuvvetli yakınsaklık gerçeklenir. Bu yaklaşım aşağıdaki gibi de verilebilir:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|L_1(f) - f| + |L_2(f) - f| + \cdots + \left|L_j(f) - f\right|}{j} = 0. \tag{3.12}$$

Şekil 3.3'te $j = 15$, 60 ve 120 için bu yaklaşımlar gösterilmektedir. Fakat, fonksiyonun periyodu 1 olmadığından $x \in \mathbb{Z}$ haricinde klasik anlamda yaklaşım elde edilemez.

3.3 Çok Değişkenli Lineer Sinir Ağı Operatörleri

Buraya kadar olan çalışmalarımız ve sonuçlarımız reel eksen üzerinde yani tek boyuttaydı. Bunların çok boyuttaki karşılıkları da çok doğal bir şekilde verilebilir. Bunun için aşağıdakilere ihtiyaç duyacağız:

- $d \in \mathbb{N}$ keyfi olmak üzere herhangi bir $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vektörü göstersin.
- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için süreklilik modülü, $\delta > 0$ olmak üzere şöyledir:

$$\omega(f, \delta) := \sup_{||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \leq \delta} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|$$

- $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^d$ üzerinde sıfırdan farklı bir integrale sahip ve her $i = 1, 2, \ldots, d$ için $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_i(t) = b(x_1, x_2, \ldots, t, \ldots, x_d)$ fonksiyonları merkezî çan biçimli fonksiyonlar ise b ye "*d-boyutlu çan biçiminde*" fonksiyon adı verilir. Bundan sonra $\prod_{i=1}^{d}[-T_i, T_i]$ kompakt desteğine sahip, d-boyutlu, pozitif ve merkezî çan biçimindeki d-değişkenli reel-değerli b fonksiyonlarını dikkate alacağız.
- $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)}(\mathbf{x}) = (\beta_{1,n}(\mathbf{x}), \beta_{2,n}(\mathbf{x}), \ldots, \beta_{d,n}(\mathbf{x}))$ olacak şekilde $(\boldsymbol{\beta}_n^{(d)})$ vektör-değerli fonksiyon dizisini göz önüne alalım. Burada her $i = 1, 2, \ldots, d$ için $\beta_{i,n} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ olacak şekilde d-değişkenli ve reel-değerli fonksiyonlardır.

- $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ ve her $i = 1, 2, \ldots, d$ için $-n^2 \le k_i \le n^2$ olsun.
- d-boyutlu birim fonksiyon olarak

$$\mathbf{I}_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \mathbf{I}_d(\mathbf{x}) = (e_1(\mathbf{x}), e_2(\mathbf{x}), \ldots, e_d(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

  fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada her $i = 1, 2, \ldots, d$ için $e_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, i-yinci koordinat izdüşümüdür; yani $e_i(\mathbf{x}) = x_i$ olur.
- $\mathbb{R}^d$ üzerinde düzgün sürekli tüm fonksiyonların kümesini $UC(\mathbb{R}^d)$ ile gösterelim.

Bu terminoloji ile birlikte Anastassiou (bkz: [4, 8]) aşağıdaki çok değişkenli sinir ağı operatörlerini tanımlayarak

$$H_n(f;\mathbf{x}) := \frac{\sum\limits_{k_1=-n^2}^{n^2} \sum\limits_{k_2=-n^2}^{n^2} \cdots \sum\limits_{k_d=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{k}}{n}\right)\right)}{\sum\limits_{k_1=-n^2}^{n^2} \sum\limits_{k_2=-n^2}^{n^2} \cdots \sum\limits_{k_d=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{k}}{n}\right)\right)} \tag{3.13}$$

tek boyutta elde ettiği noktasal yaklaşımı, (3.13) operatörleri için de göstermiştir. Şimdi biz de aşağıdaki modifiye edilmiş operatörleri göz önüne alıyoruz:

$$H_n^*(f;\mathbf{x}) = \begin{cases} H_n\left(f; \boldsymbol{\beta}_n^{(d)}(\mathbf{x})\right), & n \ge \max\limits_{i=1,2,\ldots,d} \left\{T_i + |\beta_{i,n}(\mathbf{x})|, T_i^{-1/\alpha}\right\} \\ f\left(\boldsymbol{\beta}_n^{(d)}(\mathbf{x})\right), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{3.14}$$

Böylelikle, tek boyuttaki ispat tekniklerinin aynılarını kullanarak; elde ettiğimiz tüm tek değişkenli yaklaşım sonuçlarının çok değişkenli durum için de geçerli olduğunu gözlemledik. Aşağıdaki teorem bunların kısa bir özetidir.

Teorem 3.10. *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun. Bu durumda (3.14) ile tanımlanan H_n^* operatörleri için aşağıdakiler gerçeklenir:*

(a) *$\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \to \mathbf{I}_d$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R}^d)$ için $H_n^*(f) \to f$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

(b) *Her $i = 1, 2, \ldots, d$ için $H_n^*(e_i) \to e_i$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \to \mathbf{I}_d$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

(c) *$\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \xrightarrow{A} \mathbf{I}_d$ yaklaşımının sırasıyla noktasal ve düzgün olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, 2, \ldots, d$ için $H_n^*(e_i) \xrightarrow{A} e_i$ yaklaşımlarının sırasıyla noktasal ve düzgün olmasıdır.*

(d) *$\boldsymbol{\beta}_n \xrightarrow{|A|} \mathbf{I}_d$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R}^d)$ için $H_n^*(f) \xrightarrow{|A|} f$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

(e) *f, γ-Hölder sürekli ve her $i = 1, 2, \ldots, d$ için $|\beta_{i,n} - e_i|^\gamma \xrightarrow{|A|} 0$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise $H_n^*(f) \xrightarrow{|A|} f$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

Bu teorem için bazı küçük hatırlatmalar daha iyi kavramamız için yardımcı olacaktır:

- $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \to \mathbf{I}_d$ demek her $i = 1,2,\ldots,d$ ve her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ için $\beta_{i,n}(\mathbf{x}) \to e_i(\mathbf{x})$ olmasıdır.
- $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \xrightarrow{A} \mathbf{I}_d$ ile her $i = 1,2,\ldots,d$ ve her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ için $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_{i,n}(\mathbf{x}) = e_i(\mathbf{x})$ olmasını kastediyoruz.
- $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \xrightarrow{|A|} \mathbf{I}_d$ ise her $i = 1,2,\ldots,d$ ve her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ için $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{jn}|\beta_{i,n}(\mathbf{x}) - e_i(\mathbf{x})| = 0$ olmasına denktir.

İspat. *Yukarıdaki hatırlatmalar ışığında aşağıdaki ispat özetleri kolaylıkla verilebilir.*

(a) *Teorem 3.2'nin ispatında olduğu gibi*

$$\begin{aligned}|H_n^*(f;\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| &\leq |H_n^*(f;\mathbf{x}) - f(\boldsymbol{\beta}_n(\mathbf{x}))| + |f(\boldsymbol{\beta}_n(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})| \\ &\leq \omega\left(f, \frac{T^*}{n^{1-\alpha}}\right) + |f(\boldsymbol{\beta}_n(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})|\end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ alınarak ispat tamamlanır. Burada $T^* := \max\{T_1, T_2, \ldots, T_d\}$ dir.

(b) *Her $i = 1,2,\ldots,d$ için $H_n^*(e_i) \to e_i$ noktasal (düzgün) yakınsak olsun. O halde $\left(\boldsymbol{\beta}_n^{(d)}(\mathbf{x})\right)$ vektör-değerli fonksiyon dizisinin tanımından her $1 \leq i \leq d$ için*

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_{i,n}(\mathbf{x}) - e_i(\mathbf{x})\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_{i,n}(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}H_n^*(e_i;\mathbf{x})\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}H_n^*(e_i;\mathbf{x}) - e_i(\mathbf{x})\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\left|\beta_{i,n}(\mathbf{x}) - H_n^*(e_i;\mathbf{x})\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}H_n^*(e_i;\mathbf{x}) - e_i(\mathbf{x})\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\omega\left(e_i, \frac{T^*}{n^{1-\alpha}}\right) + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}H_n^*(e_i;\mathbf{x}) - e_i(\mathbf{x})\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{T}{n^{1-\alpha}} + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}H_n^*(e_i;\mathbf{x}) - e_i(\mathbf{x})\right|\end{aligned}$$

olup $j \to \infty$ limiti alınarak her $1 \leq i \leq d$ için $\beta_{i,n}(\mathbf{x}) \to e_i(\mathbf{x})$ noktasal (düzgün) yakınsak olduğu kolayca görülür. Bu da $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \to \mathbf{I}_d$ noktasal (düzgün) demektir.

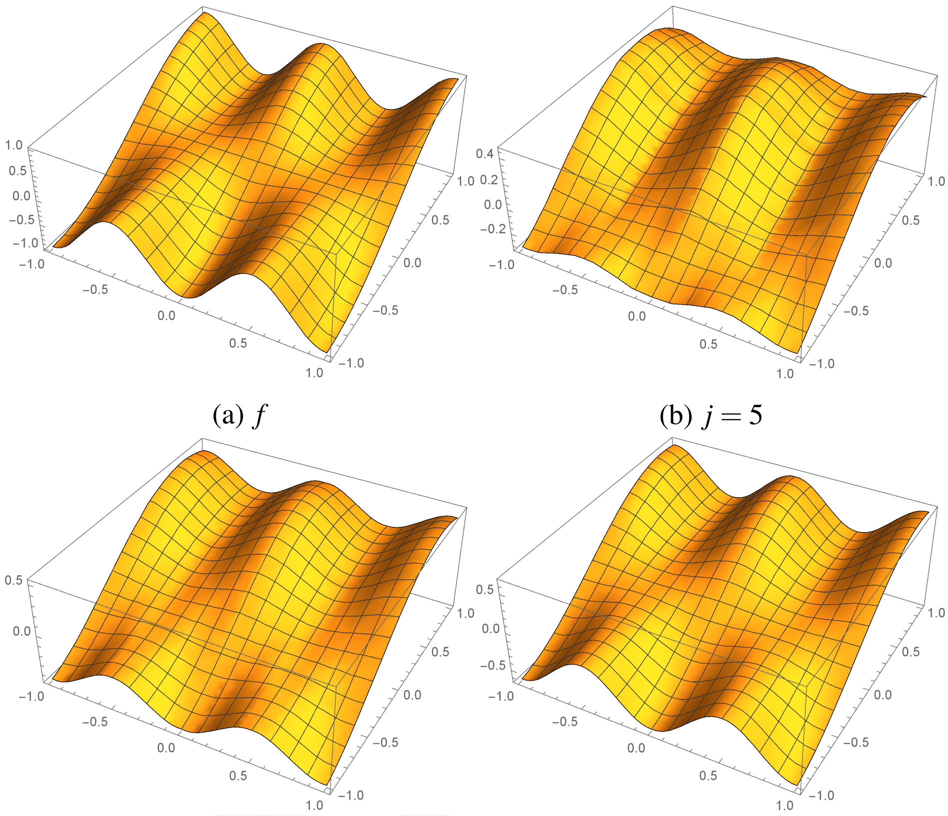
(c) *Her $1 \leq i \leq d$ için yukarıdaki iki ispatta izlenen adımlar takip edilirse sonuç doğrudan elde edilir.*

(d) (3.5) *eşitsizliğinin çok boyuttaki karşılığının*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq K_\varepsilon||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| + \varepsilon$$

olduğu dikkate alınırsa Teorem 3.7 *ispatının adımları izlenerek sonuç elde edilir.*

(e) *Bu sonuç (d) şıkkından açıktır.*



(a) f (b) $j=5$

(c) $j=10$ (d) $j=25$

Şekil 3.4: $H_n^*(f)$ ile $f(x,y)=\cos^2(\pi x)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ fonksiyonuna Cesàro yaklaşım

Son olarak iki değişkenli durum için bir örnek ve grafikler vererek teoremimizi görsel olarak destekleyeceğiz.

Örnek 3.3. $\boldsymbol{\beta}_n^2(x,y)=\begin{cases}(x+1,y+1), & n=m^2 \text{ ise}\\ (x,y), & n\neq m^2 \text{ ise}\end{cases}$ şeklinde tanımlansın ve çan biçimli iki değişkenli reel-değerli b fonksiyonunu ise

$$b(x,y)=\begin{cases}1-|x|, & |y|\leq|x|\leq 1 \text{ ise}\\ 1-|y|, & |x|\leq|y|\leq 1 \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak seçelim. Bu durumda

$$f(x,y)=\cos^2(\pi x)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

fonksiyonu için Cesàro toplanabilme metodunu kullanırsak Teorem 3.10 uyarınca $|C|-\lim H_n^*(f)=f$ düzgün ve $H_n^*(f)\xrightarrow{C}f$ düzgün toplanabilirdir. Şekil 3.4, farklı parametre değerleri için bu yaklaşımları göstermektedir. Diğer taraftan

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\(n=m^2)}} H_n^*(f;x,y)=f(x+1,y+1) \;\text{ ve }\; \lim_{\substack{n\to\infty\\(n\neq m^2)}} H_n^*(f;x,y)=f(x,y)$$

olduğundan $\mathbb{R}^2$ üzerinde bu f fonksiyonuna klasik yaklaşım mümkün değidir.

4. LİNEER OLMAYAN SİNİR AĞI OPERATÖRLERİYLE YAKLAŞIM

Tez çalışmamızın bu son bölümünde lineer sinir ağı operatörlerimizi Anastassiou ve arkadaşlarının [42] çalışmasındaki gibi “ $\sum$ *toplam işlemi* ” yerine “ $\bigvee$ *maksimum işlemi* ” kullanarak **lineer olmayan** bir yapıya dönüştüreceğiz ve aynı kaynakta bahsedildiği gibi “ *Maksimum-çarpım sinir ağı operatörleri* ” olarak adlandıracağız.

Maksimum-çarpım sinir ağı operatörleri için elde edilen sonuçlar, lineer karşılıkları ile tamamen benzerdir. Yalnızca lineerliğin bozulması sebebiyle şartlarımızda ufak bazı değişiklikler olacaktır.

4.1 Tek Değişkenli Fonksiyonlara Yaklaşım

Daha önceden yaptığımız gibi bu bölümde de $[-T,T]$ kompakt desteğine sahip, merkezi ve çan biçimli b çekirdek fonksiyonlarını göz önüne alacağız. Şimdi hızlıca operatörlerin tanımlarını verelim.

Tanım 4.1. *Maksimum-çarpım sinir ağı operatörleri $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere*

$$M_n(f;x) := \frac{\bigvee\limits_{k=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee\limits_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} \tag{4.1}$$

ile tanımlanır; burada $0<\alpha<1$, $x\in\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{N}$ dir [42].

Uyarı 4.1. (4.1) *operatörleri her $x\in\mathbb{R}$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için tanımlı değildir. Yine de tanımlı oldukları yerlerde pozitif olmakla birlikte sabit fonksiyonları korurlar.*

Uyarı 4.2. $n \geq \max\left(T+|x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ *olduğu sürece $M_n(f;x)$ iyi tanımlıdır [42].*

Uyarı 4.3. (4.1) *ile verilen maksimum-çarpım sinir ağı operatörleri klasik anlamda lineer değildir. Bunun yerine “zayıf lineer (pseudo linear) ”olarak bilinen aşağıdaki koşulu gerçekler:*

$$M_n\left((\alpha\cdot f)\bigvee(\beta\cdot g)\right) = (\alpha\cdot M_n(f))\bigvee(\beta\cdot M_n(g)).$$

Burada f,g negatif olmayan fonksiyonlar ve $\alpha,\beta\geq 0$ dır [43].

Şimdiki amacımız lineer durum için oldukça kullanışlı olan Teorem 3.1’in lineer olmayan durum için bir benzerini elde etmek üzerine olacaktır.

[42] nolu çalışmada aslında maksimum-çarpım sinir ağı operatörlerinin süreklilik ve "*şekil koruma*" gibi özelliklerini de incelemek adına çekirdek fonksiyonuna bazı ek şartlar getirerek Teorem 3.1'in çok benzer bir hali verilmiştir. Ancak biz burada daha çok yaklaşım üzerine odaklandığımız için daha az şart altında aynı sonuca ulaşmamız mümkün olacaktır. Bunu vermeden önce lineer olmayan durumlar için oldukça kullanışlı olan aşağıdaki lemmayı hatırlayarak başlayalım.

Lemma 4.1. *$k=-n^2,\dots,-1,0,1,\dots,n^2$ için $a_k, b_k \geq 0$ olmak üzere*

$$\left| \bigvee_{k=-n^2}^{n^2} a_k - \bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b_k \right| \leq \bigvee_{k=-n^2}^{n^2} |a_k - b_k|$$

eşitsizliği sağlanır [43].

$\mathbb{R}$ üzerinde negatif olmayan tüm düzgün sürekli fonksiyonların kümesini $UC_+(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Artık arzu ettiğimiz teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1. *$n \geq \max\left(T+|x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ olacak şekildeki $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ göz önüne alındığında, her $f \in UC_+(\mathbb{R})$ için*

$$|M_n(f;x) - f(x)| \leq \omega\left(f, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. *Öncelikle*

$$|M_n(f;x) - f(x)| = \left| \frac{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} - f(x) \right| =: \Delta$$

diyelim. Doğrudan bir hesaplamayla Lemma 4.1'den yararlanarak

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \frac{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) - \bigvee_{k=-n^2}^{n^2} f(x) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} \right| \\ &\leq \frac{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi de süreklilik modülünün bilinen özelliklerinden yararlanıp gerekli *düzenlemeleri yaparsak*

$$
\begin{aligned}
\Delta &\leq \frac{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} \omega\left(f,\left|\frac{k}{n}-x\right|\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} \\
&\leq \frac{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} \omega\left(f,\frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} \\
&= \omega\left(f,\frac{T}{n^{1-\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece (4.2) *eşitsizliği bulunur.*

Sonuç 4.1. *Her $f \in UC_+(\mathbb{R})$ için $\mathbb{R}$ üzerinde $M_n(f;x) \to f(x)$ noktasal yakınsaktır.*

İspatta fonksiyonun negatif olmaması bazı adımlarda kilit bir rol oynamaktadır. Ancak bu durum, fonksiyon negatif olduğunda inceleme yapmayacağımız anlamına gelmez. Örneğin, $e_1(x) = x$ test fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $x < 0$ için

$$
\begin{aligned}
-n^2 \leq k \leq -1 \text{ için } \ \frac{k}{n} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) \leq 0, \\
0 \leq k \leq n^2 \text{ için } \ \frac{k}{n} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

olacağından yalnızca $\frac{k}{n} \geq 0$ şartını sağlayan k indisleri üzerinden maksimum almak yeterlidir. Buradan

$$
M_n(e_1;x) = \frac{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} \frac{k}{n} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)} = \frac{\bigvee_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}{\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)}
$$

olur. Şimdi geçici olarak

$$
\left(\frac{k}{n}\right)^+ := \begin{cases} \frac{k}{n}, & \frac{k}{n} \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & \frac{k}{n} < 0 \text{ ise} \end{cases}
$$

dersek

$$
\bigvee_{k=-n^2}^{n^2} \frac{k}{n} b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) = \bigvee_{k=-n^2}^{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)^+ b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)
$$

yazılabilir. Öyleyse

$$
e_1^+(x) := \max\{e_1(x), 0\}
$$

için

$$
M_n(e_1;x) = M_n(e_1^+;x)
$$

ve $e_1^+ \in UC_+(\mathbb{R})$ olduğundan Teorem 4.1 kullanılarak $M_n(e_1;x) \to e_1^+(x)$ yaklaşımı elde edilir. Buradan $x<0$ için $M_n(e_1;x) \to 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Son olarak, şayet her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x)<0$ ise

$$f\left(\frac{k}{n}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) \leq 0$$

olacaktır ve b çekirdek fonksiyonunun kompakt desteğe sahip olması yüzünden bir k için mutlaka sıfır değerine ulaşacaktır. Bu sebeple de bu terimlerin maksimumu her zaman 0 olacağından $M_n(f;x)=0$ bulunur. Yaptığımız bu incelemeler ışığında

$$f^+(x) := \max\{f(x),0\} \text{ ve } f^-(x) := \max\{-f(x),0\}$$

şeklinde tanımlandığında aşağıdaki teoremi ve sonuçlarını rahatlıkla verebiliriz.

Teorem 4.2. $n \geq \max\left(T+|x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ *olacak şekildeki* $x \in \mathbb{R}$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *göz önüne alındığında, her* $f \in UC(\mathbb{R})$ *için*

$$\left|M_n(f;x)-f^+(x)\right| \leq \omega\left(f^+, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) \tag{4.3}$$

gerçeklenir.

İspat. $M_n(f;x)=M_n(f^+;x)$ *olduğundan Teorem* 4.1 *uyarınca durum açıktır.*

Sonuç 4.2. *Her* $f \in UC(\mathbb{R})$ *için,* $\mathbb{R}$ *üzerinde* $M_n(f;x) \to f^+(x)$ *noktasal yakınsaktır.*

Sonuç 4.3. *Her* $f \in UC(\mathbb{R})$ *için*

$$M_n(f^+;x)-M_n(f^-;x) \to f^+(x)-f^-(x)=f(x)$$

noktasal yakınsaklığı elde edilir.

Sonuç 4.4. $f \in UC(\mathbb{R})$ *ve* $\mathbb{R}$ *üzerinde* $f<0$ *ise* $-M_n(-f;x) \to f(x)$ *noktasaldır.*

Şimdiye kadarki gözlemlerimize ve elde ettiğimiz sonuçlara dayanarak (4.1) operatörlerininin tanım kümesini aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

Tanım 4.2. $x \in \mathbb{R}$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere*

$$M_n^*(f;x) := \begin{cases} M_n(f;x), & n \geq \max\left(T+|x|, T^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \text{ ise} \\ f^+(x), & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.4}$$

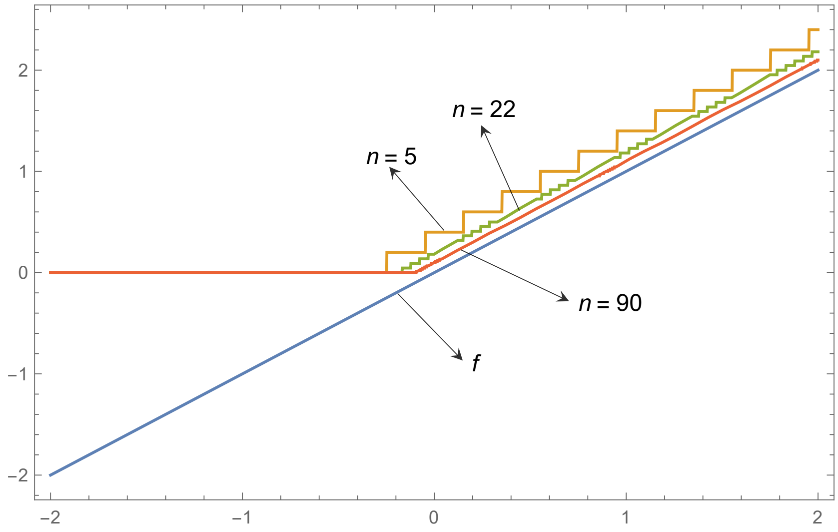
ile tanımlansın.

Bu durumda aşağıdaki sonuçlar doğrudan elde edilir.

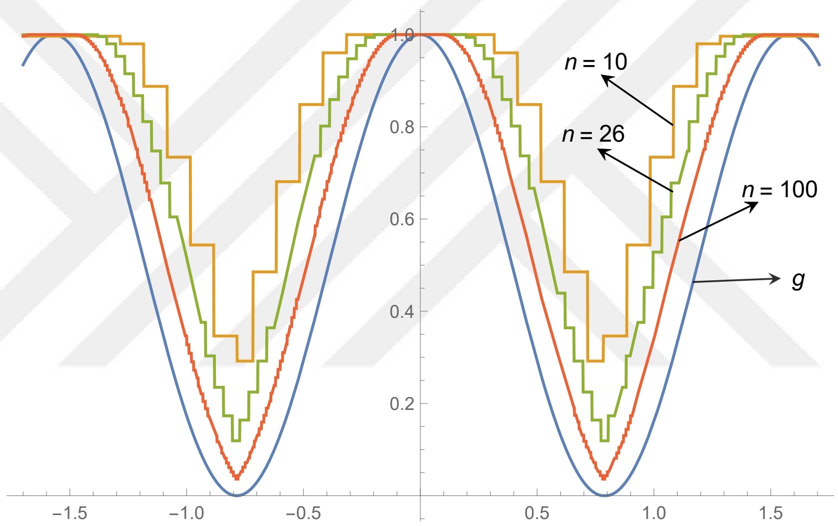
Sonuç 4.5. $f \in UC(\mathbb{R})$ *olmak üzere*

$$\left|M_n^*(f;x)-f^+(x)\right| \leq \omega\left(f^+, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) \tag{4.5}$$

eşitsizliği her $x \in \mathbb{R}$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için gerçeklenir.*



Şekil 4.1: $f = e_1$ olmak üzere $M_n^*(e_1)$ ile e_1^+ fonksiyonuna yaklaşım



Şekil 4.2: $g(x) = \cos^2(2x)$ olmak üzere $M_n^*(g)$ ile $g = g^+$ fonksiyonuna yaklaşım

Sonuç 4.6. *Her $f \in UC(\mathbb{R})$ için $\mathbb{R}$ üzerinde $M_n^*(f) \rightrightarrows f^+$ düzgün yakınsaktır.*

Sonuç 4.6'daki yaklaşımda, örneğin $f = e_1$ test fonksiyonunu ve (3.8) ile verilen b karakteristik fonksiyonunu göz önüne alırsak $(M_n^*(e_1))$ dizisiyle sadece e_1 fonksiyonunun negatif olmayan parçası olan e_1^+ fonksiyonuna yaklaşabiliriz. Bu yaklaşım Şekil 4.1'de farklı parametre değerleri için gösterilmektedir. Eğer e_1 fonksiyonun tüm değerlerine yaklaşmak isteniyorsa, bu durumda daha önce de bahsedildiği üzere yaklaşım için $(M_n^*(e_1^+) - M_n^*(e_1^-))$ dizisi seçilebilir.

Bununla birlikte şayet reel eksen üzerinde negatif olmayan $g(x) = \cos^2(2x)$ fonksiyonunu dikkate alırsak, bu kez $(M_n^*(g))$ dizisiyle g fonksiyonunun tüm değerlerine yaklaşmak mümkündür. Bunu Şekil 4.2'den gözlemleyebiliriz.

Şimdi daha önce yaptığımız gibi $\beta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon dizisini kullanarak (4.4) operatörlerini aşağıdaki şekilde genelleştireceğiz:

$$S_n(f;x) := M_n^*(f;\beta_n(x)). \tag{4.6}$$

Lineer olmayan bu sinir ağı operatörleri için Bölüm 3 içinde verdiğimiz teoremlerin karşılıkları, gerekli durumlarda e_1 yerine e_1^+ ve f yerine f^+ alarak geçerli kalacaktır. Buna, çok boyutlu hallerde elde ettiğimiz sonuçlar da dahildir. Aşağıdaki sonuçlar bu ifadelerimizi desteklemektedir.

Teorem 4.3. *$\mathbb{R}$ üzerinde $\beta_n(x) \to x$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R})$ için $S_n(f;x) \to f^+(x)$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. (4.6) *tanımından ve* (4.5) *eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned}\left|S_n(f;x) - f^+(x)\right| &\le \left|M_n^*(f;\beta_n(x)) - f^+(\beta_n(x))\right| + \left|f^+(\beta_n(x)) - f^+(x)\right| \\ &\le \omega\left(f^+, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + \left|f^+(\beta_n(x)) - f^+(x)\right|\end{aligned}$$

bulunur. Burada $n \to \infty$ için limiti alındığında ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. *$\mathbb{R}$ üzerinde $S_n(e_1^+;x) \to e_1^+(x)$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise $\beta_n^+(x) \to e_1^+(x)$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. *Yine* (4.5) *eşitsizliği sayesinde*

$$\begin{aligned}\left|\beta_n^+(x) - e_1^+(x)\right| &\le \left|\beta_n^+(x) - S_n(e_1^+;x)\right| + \left|S_n(e_1^+;x) - e_1^+\right| \\ &= \left|e_1^+(\beta_n(x)) - M_n^*\left(e_1^+;\beta_n(x)\right)\right| + \left|S_n(e_1^+;x) - e_1^+(x)\right| \\ &\le \omega\left(e_1^+, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + \left|S_n(e_1^+;x) - e_1^+(x)\right| \\ &= \frac{T}{n^{1-\alpha}} + \left|S_n(e_1^+;x) - e_1^+(x)\right|\end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınarak sonuç elde edilir.

Benzer yolla aşağıdaki teorem de kolayca ispatlanabilir.

Teorem 4.5. *$\mathbb{R}$ üzerinde $S_n(e_1^-;x) \to e_1^-(x)$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün ise $\beta_n^-(x) \to e_1^-(x)$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

Buradan da şöyle bir sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.7. *$\mathbb{R}$ üzerinde $S_n(e_1^+;x) \to e_1^+(x)$ ve $S_n(e_1^-;x) \to e_1^-(x)$ yaklaşımları sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R})$ için $S_n(f;x) \to f^+(x)$ yaklaşımı da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. *Teorem* 4.3, 4.4 *ve* 4.5*'ten durum açıktır.*

Klasik yaklaşım sonuçlarımızdan sonra artık (4.6) ile tanımlanan S_n maximum-çarpım sinir ağı operatörlerinin toplanabilirliğine ilişkin sonuçları verebiliriz.

Teorem 4.6. *$\mathbb{R}$ üzerinde $S_n(e_1^+) \xrightarrow{A} e_1^+$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün olacak şekilde negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler metodu var ise $\beta_n^+ \xrightarrow{A} e_1^+$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

İspat. (4.6) *tanımını ve* (4.5) *eşitsizliği kullanırsak ve de toplanabilme metodunun regülerliğini dikkate alırsak*

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n^+(x) - e_1^+(x)\right| &\le \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\beta_n^+(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}S_n(e_1^+;x)\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}S_n(e_1^+;x) - e_1^+\right| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\left|\beta_n^+(x) - M_n^*(e_1^+;\beta_n(x))\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}S_n(e_1^+;x) - e_1^+(x)\right| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\omega\left(e_1^+, \frac{T}{n^{1-\alpha}}\right) + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}S_n(e_1^+;x) - e_1^+(x)\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\frac{T}{n^{1-\alpha}} + \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}S_n(e_1^+;x) - e_1^+(x)\right|
\end{aligned}$$

bulunur ve hiptezden kullanılarak ispat tamamlanır.

Görüldüğü gibi lineer olmayan maksimum-çarpım sinir ağı operatörlerinin yaklaşım sonuçlarına ilişkin ispatlar lineer duruma oldukça paralellik göstermektedir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verebiliriz.

Teorem 4.7. *$\mathbb{R}$ üzerinde $\beta_n^+ \xrightarrow{A} e_1^+$ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün olacak şekilde negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler metodu var ise $S_n(e_1^+) \xrightarrow{A} e_1^+$ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

Sonuç 4.8. *Negatif olmayan bir $A = [a_{jn}]$ regüler metodu için $\mathbb{R}$ üzerinde $\beta_n \xrightarrow{A} e_1$ yaklaşımının sırasıyla noktasal ve düzgün olması için gerek ve yeter koşul $S_n(e_1^+) \xrightarrow{A} e_1^+$ ve $S_n(e_1^-) \xrightarrow{A} e_1^-$ yaklaşımlarının da sırasıyla noktasal ve düzgün olmasıdır.*

Şimdi Bölüm 3'te lineer durum için ele aldığımız **Soru**'yu lineer olmayan durum için güncelleyelim.

Soru. *$\beta_n(x) \not\to x$ olsa bile her $f \in UC_+(\mathbb{R})$ için $(S_n(f))$ dizisini f fonksiyonuna toplayabilecek bir metot bulmak mümkün müdür?*

Cevap. *Hayır, her zaman mümkün değildir! Örnek* 3.1 *aynı şekilde maksimum-çarpım sinir ağı operatörlerimiz için uyarlandığı takdirde aynı gerekçelerden dolayı olumsuz yanıt alacağımız görülebilir.*

Bu olumsuz yanıta karşın durumun her zaman çok da ümitsiz olmayacağı ve bazen uygun toplanabilme metodunun bulunabileceği yine Örnek 3.2 uyarlanarak görülebilir.

Yine Teorem 3.7 ve 3.8'nin ispatlarındaki adımları takip ederek aşağıdaki kuvvetli toplanabilme sonuçlarına ulaşırız.

Teorem 4.8. *Negatif olmayan bir $A=[a_{jn}]$ regüler matris metodu için $\mathbb{R}$ üzerinde*

$$|A|-\lim \beta_n = e_1 \text{ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün} \tag{4.7}$$

ise her $f \in UC(\mathbb{R})$ için

$$|A|-\lim S_n(f) = f^+ \text{ yakınsaması da sırasıyla noktasal ve düzgün}$$

olur. Bu son ifade

$$A-\lim M_n^*(f;\beta_n(x)) = f^+(x) \text{ noktasal}$$

yaklaşımını da gerektirir.

Teorem 4.9. *Negatif olmayan bir $A=[a_{jn}]$ regüler matris metodu için $\mathbb{R}$ üzerinde*

$$|A|-\lim \beta_n = e_1 \text{ düzgün yakınsak}$$

ve

$$f \in UC(\mathbb{R}) \text{ sınırlı veya her } j \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$$

ise

$$A-\lim S_n(f) = f^+ \text{ düzgün yakınsaktır.}$$

Uyarı 4.4. *γ-Hölder sürekli fonksiyonlar için yukarıdaki iki teoremin de şartlarında ufak değişiklikler yapılabilir. Örneğin* 4.7 *şartı yerine aşağıdaki alınabilir:*

$$|A|-\lim |\beta_n - e_1|^{\gamma} = 0 \text{ yakınsaması sırasıyla noktasal ve düzgün.}$$

4.2 Çok Değişkenli Fonksiyonlara Yaklaşım

Maksimum-çarpım sinir ağı operatörleri için tek boyutta elde edilen sonuçlardan sonra yine Bölüm 3'te verdiğimiz terminolojiyi kullanarak, lineer olmayan operatörlerimizi çok boyuta genişletmek ve benzer yaklaşım sonuçlarına ulaşmak mümkündür. Bunun için öncelikle çok değişkenli maksimum-çarpım sinir ağı operatörlerini

$$M_n(f;\mathbf{x}) := \frac{\bigvee\limits_{k_1=-n^2}^{n^2} \bigvee\limits_{k_2=-n^2}^{n^2} \cdots \bigvee\limits_{k_d=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) b\left(n^{1-\alpha}\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{k}}{n}\right)\right)}{\bigvee\limits_{k_1=-n^2}^{n^2} \bigvee\limits_{k_2=-n^2}^{n^2} \cdots \bigvee\limits_{k_d=-n^2}^{n^2} b\left(n^{1-\alpha}\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{k}}{n}\right)\right)}$$

şeklinde tanımlayalım ve çok değişkenli fonksiyonların $\left(\boldsymbol{\beta}_n^{(d)}(\mathbf{x})\right)$ dizisini kullanarak

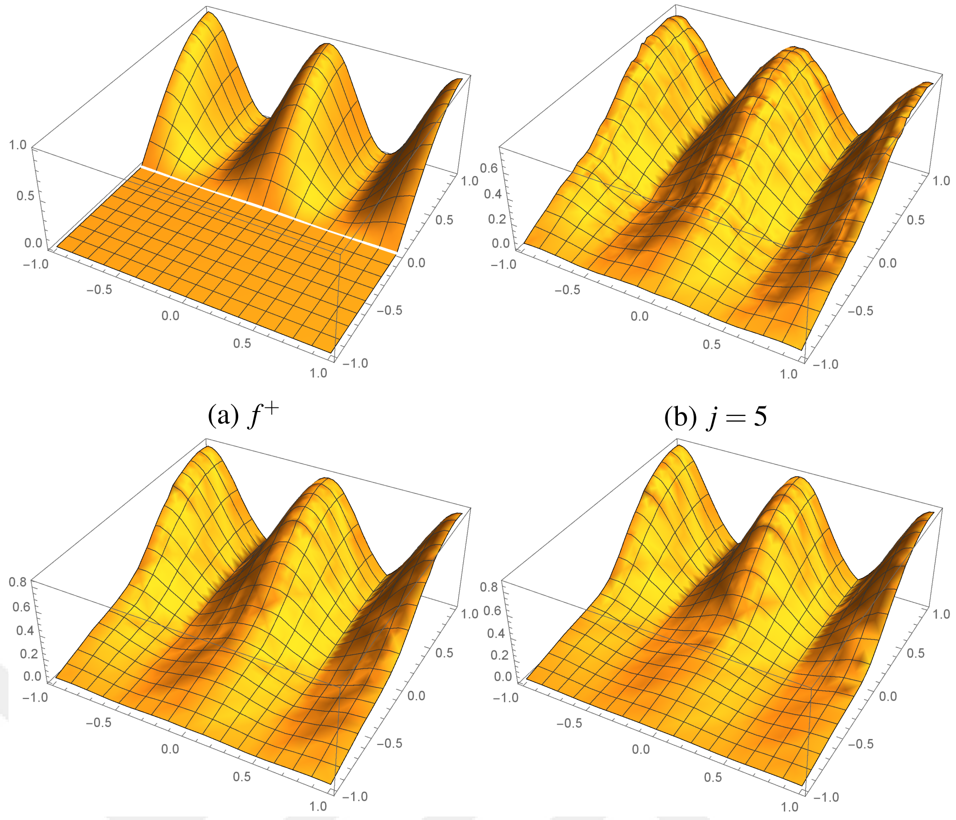
$$M_n^*(f;\mathbf{x}) = \begin{cases} M_n\left(f;\boldsymbol{\beta}_n^{(d)}(\mathbf{x})\right), & n \geq \max\limits_{i=1,2,\ldots,d}\left\{T_i + |\beta_{i,n}(\mathbf{x})|, T_i^{-1/\alpha}\right\} \text{ ise} \\ f^+\left(\boldsymbol{\beta}_n^{(d)}(\mathbf{x})\right), & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.8}$$

olarak genelleştirelim. Ayrıca her $i=1,2,\ldots,d$ ve her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ için

$$e_i^+(\mathbf{x}) := \max\{e_i(\mathbf{x}),0\} \text{ ve } \beta_{i,n}^+(\mathbf{x}) := \max\{\beta_{i,n}(\mathbf{x}),0\},$$

$$\mathbf{I}_d^+ := \left(e_1^+, e_2^+, \ldots, e_d^+\right) \text{ ve } \boldsymbol{\beta}_n^{(d)+}(\mathbf{x}) := \left(\beta_{1,n}^+(\mathbf{x}), \beta_{2,n}^+(\mathbf{x}), \ldots, \beta_{d,n}^+(\mathbf{x})\right)$$

şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki yaklaşım sonucunu elde ederiz.



(a) f^+ (b) $j = 5$

(c) $j = 25$ (d) $j = 50$

Şekil 4.3: $f(x,y) = \cos^2(\pi x)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ olmak üzere $M_n^*(f)$ ile f^+ fonksiyonuna Cesàro kuvvetli yaklaşım

Teorem 4.10. *$A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun. Bu durumda* (4.8) *ile tanımlanan M_n^* operatörleri için aşağıdakiler gerçeklenir:*

(a) *$\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \to \mathbf{I}_d$ yaklaşımı sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R}^d)$ için $M_n^*(f) \to f^+$ yaklaşımı da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

(b) *Her $i = 1,2,\ldots,d$ için $M_n^*(e_i^+) \to e_i^+$ yaklaşımları sırasıyla noktasal ve düzgün ise $\boldsymbol{\beta}_n^{(d)+} \to \mathbf{I}_d^+$ yaklaşımı da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

(c) *$\boldsymbol{\beta}_n^{(d)+} \xrightarrow{A} \mathbf{I}_d^+$ yaklaşımı sırasıyla noktasal ve düzgündür $\Leftrightarrow$ Her $i = 1,2,\ldots,d$ için $M_n^*(e_i^+) \xrightarrow{A} e_i^+$ yaklaşımları sırasıyla noktasal ve düzgündür.*

(d) *$\boldsymbol{\beta}_n^{(d)} \xrightarrow{|A|} \mathbf{I}_d$ yaklaşımı sırasıyla noktasal ve düzgün ise her $f \in UC(\mathbb{R}^d)$ için $M_n^*(f) \xrightarrow{|A|} f^+$ yaklaşımı da sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

(e) *f, γ-Hölder sürekli ve her $i = 1,2,\ldots,d$ için $|\beta_{i,n} - e_i|^\gamma \xrightarrow{|A|} 0$ yaklaşımı sırasıyla noktasal ve düzgün ise $M_n^*(f) \xrightarrow{|A|} f^+$ yaklaşımı sırasıyla noktasal ve düzgün olur.*

Son olarak, Teorem 4.10'daki yaklaşımı grafiksel olarak gözlemleyeceğiz. Bunun için $d = 2$ seçerek Örnek 3.3 uyarlanırsa (4.8)'deki $(M_n^*(f))$ dizisi, f^+ ya Cesàro kuvvetli toplanabilirdir. Bu yaklaşım Şekil 4.3'te farklı parametre değerleri için görülmektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu doktora tezinde tüm reel eksende veya tüm d-boyutlu reel uzayda tanımlı düzgün sürekli fonksiyonlara lineer ve lineer olmayan yapıdaki sinir ağı operatörleri ile yaklaşım sonuçları sunulmuştur. Elde edilen bu teorik sonuçlar, özenle seçilmiş örnek uygulamalar ile desteklenmeye çalışılmıştır. Burada amacımız klasik yakınsamanın sağlanamadığı durumlarda tatmin edici bir yaklaşım elde edilebilirliğini toplanabilme metotları kullanarak sergilemektir. Bu sayede klasik anlamdaki yaklaşımlardan çok daha genel, kullanışlı ve bazen daha güçlü sonuçlara ulaşılabileceği de görülmüştür. Lineer ve lineer olmayan sinir ağı operatörlerinin toplanabilirliğine ilişkin elde ettiğimiz yaklaşım sonuçları bildiğimiz kadarıyla ilk kez bu tez çalışmasında ele alınmıştır. Dolayısıyla bu öncü sonuçların başka yapılardaki sinir ağı operatörleri için de aydınlık bir kapı araladığını umuyoruz.

Daha çok matematiksel analiz ve yaklaşım özelliklerini incelediğimiz operatörlerin, yapay zeka ve makine öğrenmesi gibi kendi esas alanlarında nasıl sonuçlar vereceği çalışma önerilerimizin başında yer almaktadır. İstenen düzeyde ve hızda öğrenebilme sayesinde teknolojiye doğrudan bir katkı sağlanabilir. Bir diğer önerimiz, kendi önceliğimiz olan maksimum-minimum sinir ağı operatörlerinin yaklaşım özellikleri ve toplanabilirliğinin araştırılmasıdır. Ayrıca integrallenebilen fonksiyonlara da yaklaşabilmek için çalışılan bu sinir ağı operatörlerinin integral tipindeki versiyonları geliştirilebilir. Bu tipte olan operatörler literatürde Kantorovich operatörleri olarak bilinmekte olup görüntü ve sinyal işleme alanlarında önemli uygulamalara sahiptir. Son olarak, bu tezde üzerinde durulan matris toplanabilme metotları yerine hemen hemen yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık veya lineer olmayan metotlar ile hangi sonuçların elde edilebileceği incelenebilir.

Bu değerlendirmeler ve öneriler göz önünde bulundurulduğunda gelecekte bu tez çalışmasının ışığında yeni projelerin hazırlanması ve bilimsel çalışmaların yapılması potansiyelinin yüksek olacağını düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

[1] **Cybenko, G.** (1989). Approximations by superpositions of sigmoidal functions. *Math. Control Signals Systems* 2 (4), 303–314.

[2] **Cardaliaguet, P., Euvrard, G.** (1992). Approximation of a function and its derivative with a neural network. *Neural Networks* 5 (2), 207–220.

[3] **Anastassiou, G. A.** (1997). Rate of convergence of some neural network operators to the unit-univariate case. *J. Math. Anal. Appl.* 212, 237–262.

[4] **Anastassiou, G. A.** (2000). Rate of convergence of some multivariate neural network operators to the unit. *Comput. Math. Appl.* 40 (1), 1–19.

[5] **Anastassiou, G. A.** (2011). Multivariate sigmoidal neural network approximation. *Neural Networks* 24 (4), 378–386.

[6] **Anastassiou, G. A.** (2011). Multivariate hyperbolic tangent neural network approximation. *Comput. Math. Appl.* 61 (4), 809–821.

[7] **Anastassiou, G. A.** (2013). Rate of convergence of some neural network operators to the unit-univariate case, revisited. *Mat. Vesnik* 65 (4), 511-518.

[8] **Anastassiou, G. A.** (2013). Rate of convergence of some multivariate neural network operators to the unit, revisited. *J. Comput. Anal. Appl.* 15 (7), 1300–1309.

[9] **Anastassiou, G. A.** (2015). Approximation by interpolating neural network operators. *Neural Parallel Sci. Comput.* 23 (1), 1–62.

[10] **Cao, F., Zhang, Y., He, Z.-R.** (2009). Interpolation and rates of convergence for a class of neural networks. *Appl. Math. Model.* 33 (3), 1441–1456.

[11] **Chen, Z., Cao, F.** (2009). The approximation operators with sigmoidal functions. *Comput. Math. Appl.* 58 (4), 758–765.

[12] **Chen, Z., Cao, F.** (2013). The construction and approximation of neural networks operators with Gaussian activation function. *Math. Commun.* 18 (1), 185–207.

[13] **Costarelli, D., Spigler, R.** (2013). Multivariate neural network operators with sigmoidal activation functions. *Neural Networks* 48, 72–77.

[14] **Costarelli, D., Spigler, R.** (2013). Approximation results for neural network operators activated by sigmoidal functions. *Neural Networks* 44, 101–106.

[15] **Costarelli, D., Spigler, R.** (2014). Convergence of a family of neural network operators of the Kantorovich type.*J.Approx.Theory,*185,80-90.

[16] **Costarelli, D., Vinti, G.** (2016). Max-product neural network and quasi-interpolation operators activated by sigmoidal functions. *J. Approx. Theory* 209, 1–22.

[17] **Costarelli, D., Vinti, G.** (2017). Convergence for a family of neural network operators in Orlicz spaces. *Math. Nachr.* 290 (2-3), 226–235.

[18] **Makovoz, Y.** (1998). Uniform approximation by neural networks.*J. Approx. Theory* 95 (2), 21–228.

[19] **Mhaskar, H. N.** (2001). Approximation theory and neural networks. Wavelets and Allied Topics, 247–289, Narosa, New Delhi.

[20] **Mhaskar, H. N., Micchelli, C. A.** (1995). Degree of approximation by neural and translation networks with a single hidden layer. *Adv. Appl. Math.* 16, 151–183.

[21] **Yu, D. S.** (2013). Approximation by neural networks with sigmoidal functions. *Acta Math. Sin.* (*Engl. Ser.*) 29 (10), 2013–2026.

[22] **Korovkin, P. P.** (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publ. Co., Delhi.

[23] **Fejér, L.** (1900). Sur les fonctions intégrables et bornées. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 984–987.

[24] **Anastassiou, G. A., Duman, O.** (2011). *Towards Intelligent Modeling: Statistical Approximation Theory* (Vol. 14). Springer, Berlin.

[25] **Aslan, I., Duman, O.** (2019). Summability on Mellin-type nonlinear integral operators. *Integral Transforms Spec. Funct.* 30 (6), 492–511.

[26] **Aslan, I., Duman, O.** (2020). Approximation by nonlinear integral operators via summability process. *Math. Nachr.* 293 (3), 430–448.

[27] **Atlihan, O. G., Orhan, C.** (2007). Matrix summability and positive linear operators. *Positivity* 11 (3), 387–398.

[28] **Atlihan, O. G., Orhan, C.** (2008). Summation process of positive linear operators. *Comput. Math. Appl.* 56 (5), 1188–1195.

[29] **Atlihan, O. G., Gul Ince, H., Orhan, C.** (2009). Some variations of the Bohman-Korovkin theorem. *Math. Comput. Modelling* 50 (7-8), 1205–1210.

[30] **Duman, O.** Summability process by Mastroianni operators and their generalizations. *Mediterr. J. Math.* 12 (1), 21–35.

[31] **Gokcer, T. Y., Duman, O.** (2020). Approximation by max-min operators: A general theory and its applications. *Fuzzy Sets Syst.* 394, 146-161.

[32] **Mohapatra, R. N.** (1997). Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators. *J. Approx. Theory* 20, 239–250.

[33] **Sakaoğlu, I., Orhan, C.** (2013). Strong summation process in L_p-spaces. *Nonlinear Anal.* 86, 89–94.

[34] **Swetits, J. J.** On summability and positive linear operators. *J. Approx. Theory* 25, 186–188.

[35] **Hardy, G. H.** (1949). *Divergent Series*. Clarendon Press, Oxford.

[36] **Boos, J.** (2000). *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford University Press, Oxford.

[37] **Lorentz, G. G.** (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica* 80, 167–190.

[38] **Bell, H. T.** (1973). Order summability and almost convergence. *Proc. Amer. Math. Soc.* 38 (3), 548–552.

[39] **Toeplitz, O.** (1911). Über allgemeine lineare Mittelbildungen. *Prace Matematyczno-Fizyczne,* 22 (1) 113–118.

[40] **Lorentz, G. G., Zeller, K.** (1963). Strong and ordinary summability. *Tohoku Math. J.* Second Series 15 (4), 315–321.

[41] **Vanderbei, R. J.** (1991). *Uniform continuity is almost Lipschitz continuity*. Technical Report SOR-91 11, Statistics and Operations Research Series, Princeton University.

[42] **Anastassiou, G. A., Coroianu, L., Gal, S. G.** (2010). Approximation by a nonlinear Cardaliaguet-Euvrard neural network operator of max-product kind. *J. Comp. Anal. Appl.* 12 (2), 396–406.

[43] **Bede, B., Nobuhara, H., Dankova, M., Di Nola, A.** (2008). Approximation by pseudo-linear operators. *Fuzzy Sets Syst.* 159 (7), 804–820.

EKLER

EK 1: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

Türkçe terim	**İngilizce Terim**
Aritmetik Ortalama Yakınsaklık	Arithmetic Mean Convergence
Çan Biçimli Fonksiyon	Bell-Shaped Function
Çekirdek Fonksiyonu	Kernel Function
Düzgün Yakınsaklık	Uniform Convergence
Klasik Yakınsaklık	Classical Convergence
Noktasal Yakınsaklık	Pointwise Convergence
Normlu Uzay	Normed Space
Regüler Toplanabilme Metodu	Regular Summability Method
Sinir Ağı Operatörü	Neural Network Operator
Süreklilik Modülü	Modulus of Continuity
Yaklaşımlar Teorisi	Approximation Theory
Zayıf-Lineer Operatör	Pseudo-Linear Operator

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Can Türkün

Uyruğu : T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri : 07.02.1988, Ankara

E-posta : can1492@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2014, Bilkent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
- **Doktora** : 2020, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011-2014	Bilkent Üniversitesi	Tam Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2014-2020	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Doktora Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Turkun, C.**, Duman, O. (2017). Neural network approximation in summation process, *The International Society for Analysis, its Applications and Computation – ISAAC 2017,* Linnaeus University, Växjö, Sweden, August 14-18.

- **Turkun, C.**, Duman, O. (2020). Modified neural network operators and their convergence properties with summability methods. *Rev. R. Acd. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM,*Vol. 114, Issue 3, article no. 132, 18pp.