

GECİKMELİ REAKSİYON-DİFÜZYON LENGYEL-EPSTEIN
MODELİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

ŞEYMA BİLZEROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2012

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Ünver KAYNAK
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa Bayraktar
Anabilim Dalı Başkanı

ŞEYMA BİLZEROĞLU tarafından hazırlanan GECİKMELİ REAKSİYON-DİFÜZYON LENGYEL-EPSTEIN MODELİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Hüseyin MERDAN
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU _____

Üye : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN _____

Üye : Yrd. Doç. Dr. Harun KÜRKCÜ _____

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Şeyma BİLAZEROĞLU

Üniversitesi : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Enstitüsü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik Bölümü
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hüseyin MERDAN
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Eylül 2012

Şeyma BİLZEROĞLU

GECİKMELİ REAKSİYON-DİFÜZYON LENGYEL-EPSTEIN
MODELİNİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

ÖZET

Bu tezde, Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemlerinde gecikme terimi olan τ çatallanma parametresi seçilerek Hopf çatallanma analizinin nasıl yapılacağını öngören yeni bir algoritma oluşturulmuştur. Bu algoritma, [14]'te verilen Gecikmeli Diferensiyel Denklem Sistemleri için Hopf çatallanma analizi algoritması ile [15]'te Reaksiyon-Difüzyon Sistemleri için verilen Hopf çatallanma analizi algoritmasının birleştirilmesi ile elde edilmiştir. Bu algoritma, gecikme terimi ve konum değişkeni eklenerek daha gerçekçi hale getirilen Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Lengyel-Epstein Modeline uygulanmış ve sistemde hangi şartlarda Hopf çatallanmanın mevcut olduğu, bu şartlar altında oluşacak Hopf çatallanmanın yönünün ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapısının ne olacağı ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hopf Çatallanması, Lengyel-Epstein Modeli, Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemleri, Zaman Gecikmesi, Kararlılık, Periyodik Çözümler.

University : TOBB University of Economics and Technology
Institute : Institute of Natural and Applied Sciences
Science Programme : Department of Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Hüseyin MERDAN
Degree Awarded and Date : M.Sc. – SEPTEMBER 2012

Şeyma BİLZEROĞLU

HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF LENGYEL-EPSTEIN
REACTION-DIFFUSION MODEL WITH DELAY

ABSTRACT

In this thesis, a new algorithm for Hopf Bifurcation analysis of a Delayed Reaction-Diffusion System is introduced with taking delay term τ as a bifurcation parameter. This algorithm is obtained by combining algorithms which are given in [14] for Delayed Differential Systems and [15] for Reaction-Diffusion Systems. This algorithm is applied to Delayed Reaction-Diffusion Lengyel-Epstein Model which is made more realistic by adding the delay and diffusion terms. Also, the conditions which Hopf Bifurcation will occur in this system, what would be the direction of the Hopf Bifurcation which occurs under this conditions and what would be the stability structure of periodic solutions which occur due from Hopf Bifurcation are expressed.

Keywords: Hopf Bifurcation, Lengyel-Epstein Model, System of Reaction-Diffusion Equations, Time Delay, Stability, Periodic Solutions.

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya ıkmasında maddi ve manevi anlamda hiçbir emeğini esirgemedен her adımda ve her anlamda bana rehber olan çok değerli danıőman hocam Doç. Dr. Hüseyin Merdan'a, değerli tecrübelerinden faydalandığım TOBB ET Matematik Bölümü đretim üyelerine, her zaman yanımda olup karőılaőtıđım her zorlukta çalışma sürecimi kolaylaőtıran sevgili TOBB ET Matematik Bölümü asistan arkadaşlarıma ve bugünlere gelmem için çokça fedakarlık yapmıő biricik aileme, niőanlım Ahmet Kayan'a teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGE LİSTESİ	x
1 GİRİŞ	1
1.1 Tez Çalışmasının Amacı	1
1.2 Çalışılan Problem	5
2 HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ	7
2.1 Hopf Çatallanma Nedir?	7

2.2	Adi Diferensiyel Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma	8
2.3	Gecikmeli Diferensiyel Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma Analizi	10
2.4	Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma Analizi	15
2.5	Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma Analizi	24
3	GEÇİKMELİ REAKSİYON-DİFÜZYON LENGYEL-EPSTEIN MODELİ'NİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ	32
3.1	Genel Hopf Çatallanma Analizi	32
3.2	$n = 0$ iken Hopf Çatallanma Analizi	60
4	SONUÇ	64
	KAYNAKLAR	66
	EKLER	69
	A Terim Sözlüğü	70
	ÖZGEÇMİŞ	71

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

1.1	Desen ve Şekil Oluşumu: Kelebek Kanadı	2
1.2	Desen ve Şekil Oluşumu: Kaplan Derisi	3
1.3	Difüzyon	3

SİMGE LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\lambda(\mu)$	Özdeğer
$\alpha(\mu)$	Özdeğerin reel kısmı
$\omega(\mu)$	Özdeğerin sanal kısmı
v_c	Çatallanma değeri
$c_1(0)$	Lypunov katsayısı
$Rec_1(0)$	Lypunov katsayısının reel kısmı
L_μ	Bir parametrelili lineer operatörlerin ailesi
$\sigma(\mu)$	L_μ operatörünün spektrumu
$A(\mu)$	Sistemin çatallanma parametresine karşılık gelen Jacobian matrisi
$C_k[-r, 0]$	$[-r, 0]$ üzerinde tanımlı n-boyutlu reel vektör değerli k-kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı
$A^*(\mu)$	$A(\mu)$ matrisinin adjointi
q	λ özdeğerine karşılık gelen özvektör
YMT	Yüksek mertebeden terimler
C_0	Center manifold
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
(z, ω)	Center manifold koordinatları
$\beta(\lambda)$	Özdeğer
$iz_n(\tau)$	$L_n(\tau)$ operatörünün izi
$D_n(\tau)$	$L_n(\tau)$ operatörünün determinantı

1. GİRİŞ

1.1 Tez Çalışmasının Amacı

Etrafımızdaki dünyayı daha iyi anlayabilmek ve teknik sorunlara çözüm üretebilmek için, olayları matematiksel terimlerle temsil etmeye matematiksel modelleme denir. Bu şekilde matematik, gerçek dünya problemlerine modelleme yoluyla çözüm üreten sistematik bir düşünme yolu haline gelir [1].

Model başlangıçta olabildiğince basit tutulur. Yeni terimler ve değişkenler modele daha sonra aşama aşama eklenebilir. Böylece, model daha gerçekçi hale getirilir. Modeli daha gerçekçi hale getirmek için pek çok şey yapılabilir. Örneğin, model birden fazla bağımsız değişkene bağlanabilir, modeldeki bağımlı değişken sayısı artırılabilir veya modele gecikme terimi eklenebilir.

Bu tezde çalışılan modeli daha gerçekçi hale getirmek için hem modelin bağımsız değişken sayısı artırılmış hem de modele gecikme terimi eklenmiştir.

Peki neden bağımsız değişken sayısının artırılması, modelleri daha gerçekçi hale getirir? Gerçek yaşamdaki bazı problemler zamana bağlı olduğu gibi konum ve yaş gibi farklı değişkenlere de bağlı olabilir. Bu nedenle iyileştirilmek istenen bir model birden fazla bağımsız değişkene bağlanabilir. Bunu aşağıdaki birkaç örnekle ifade edelim.

Problemimiz bir popülasyon problemi ise nüfus miktarındaki değişim için zaman bağımsız değişkeni ile birlikte yaş bağımsız değişkeni de dikkate alınmalıdır. Çünkü bir popülasyondaki bireylerin yaş ortalaması nüfus artışı üzerinde etkilidir. Yaşlı nüfusun fazla olduğu bir popülasyonda nüfus artış hızı az olacakken genç nüfusun fazla olduğu bir popülasyonda nüfus artış hızı fazla olacaktır. Bu konudaki ilk çalışma Sharpe ve Lotka [2] tarafından yapılmıştır. Bu problem birinci mertebeden bir kısmi türevli denklem ile tanımlanır [5].

Problemimiz bir popülasyonun yaşamını devam ettirmesi için gerekli olan minimum alan problemi ise zaman bağımsız değişkeni ile birlikte konum bağımsız değişkeni de dikkate alınmalıdır. Çünkü çok geniş bir alana bırakılan bir popülasyonda eşlerin birbirleri bulup üremeyi sağlama ihtimalleri az olacağı için popülasyon nüfusunun artış hızı azalabilecekken çok dar alana bırakılan bir popülasyonda da besin sıkıntısı yaşanabileceği için popülasyon yok olma ihtimali ile karşı karşıya kalabilecektir. Bu konu ilk defa Kierstead ve Slobodkin [3] ve Skellam [4] tarafından çalışılmıştır. Bu problem ikinci mertebeden bir kısmi türevli denklem ile tanımlanır [5].



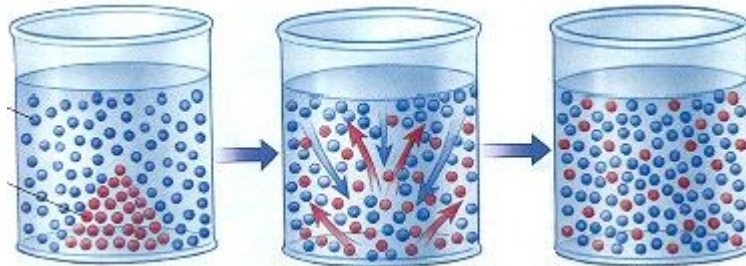
Şekil 1.1: Desen ve Şekil Oluşumu: Kelebek Kanadı



Şekil 1.2: Desen ve Şekil Oluşumu: Kaplan Derisi

Problemimiz, fotoğraflarda görüldüğü gibi birçok biyolojik sistemde karşılaşılan desen ve şekillerin nasıl oluştuğu ise yine zaman bağımsız değişkeni ile birlikte konum bağımsız değişkeni de dikkate alınmalıdır. Bu konu ile ilgili ilk çalışma Turing [6] tarafından yapılmış olup bu çalışmadan ileride bahsedilecektir. Burada rastgele dağılım ele alınır ve bu problemler ikinci mertebeden bir kısmi türevli denklem sistemi ile verilir.

Problemimiz maddelerin yayılmasını içeren bir problem ise yine zaman bağımsız değişkeni ile birlikte konum bağımsız değişkeni de dikkate alınmalıdır. Hücreler, bakteriler, kimyasal maddeler, hayvanlar gibi partikül/tanecik topluluklarında her parçacık genelde rastgele bir şekilde hareket eder. Tanecikler bu düzensiz bireysel hareketleri ile etrafa dağılırlar. Bu rastgele konumsal harekete "difüzyon" denir.



Şekil 1.3: Difüzyon

Maddelerin yayılmasını içeren problemlerde genellikle rastgele dağılım ele alınır ve bu problemler ikinci mertebeden bir kısmı türevli denklem sistemi ile tanımlanır. Bu problemlere Reaksiyon-Difüzyon Sistemleri denir [5].

Peki modelleri daha gerçekçi hale getirmek için, modellere neden gecikme terimi eklenmelidir? Gerçek yaşamdaki problemlerin bir kısmı anlık olarak gerçekleşirken bir kısmı ise geçmişten etkilenip geleceği etkilerler. Matematiksel modellemelerde geçmişteki bir t_0 anının şimdiki t_1 veya gelecekteki t_2 anına etkilerini incelemek için modellere gecikme terimi eklenir. Bu şekilde problemlerin geçmişe olan bağımlılıkları modele dahil edilmiş olur. Bunu birkaç örnekle açıklayalım.

Problemimiz bir popülasyon problemi ise nüfus artışı popülasyonu oluşturan bireylerin cinsel olgunluğa ulaşmaları ile ilişkilidir. Bazı popülasyonları oluşturan bireyler dünyaya geldikleri andan itibaren nüfus artışına katkıda bulunabilirlerken (örneğin bakteriler, bazı böcekler), bazı popülasyonlarda birey incelenen türe bağlı olarak dünyaya geldikten ancak τ birim zaman sonra birey sayısının artmasına katkı sağlayabilir (örneğin balinalar, insanlar). Bu süre türe göre değişir, örneğin, balinaların doğum yapacak olgunluğa ulaşmaları 5-10 yıl sürerken, Hindistan Filinin 8-12 yıl, kedinin ise sadece 10-12 ay sürmektedir.

Problemimiz kanser hücrelerinin çoğalması ise bu çoğalma, gecikmeli diferensiyel denklem kullanılarak Villasana ve Radunskaya [7] tarafından yapılan çalışmada hücre devri olarak adlandırılan hücrelerin ikiye bölünmesi için gerekli süre ile ilişkili olduğu ifade edilmiştir. Hücre devri farklı evrelerden oluşur, bu evrelerden herhangi birinde alınan ilaç veya bağışıklık sistemi etkisi ile kanser hücrelerinin sayısında değişiklik olabileceği için her bir evre kendisinden bir önceki evreden etkilenirken kendisinden bir sonrakini de etkiler. Dolayısı ile hücre devri sonunda beklenenden farklı miktarda hücre oluşabilir. Sonuç olarak kanser hücrelerindeki artış miktarı geçmişe bağımlıdır [8].

Problemimiz geri beslemeli kontrol sistemi ise bu sistemlerin birçoğunda gecikme zamanı bulunur. Gecikmeli diferensiyel denklem kullanılarak bir kontrol sisteminin modellenmesine ilk örneklerden biri Minorsky'in II. Dünya Savaşı sırasında gemilerin dalgalardan dolayı sağa sola yalpalanmasını önleyebilmek için yaptığı

çalışmadır. Bu çalışmaya göre geminin denge durumunda kalabilmesi için ağırlık sağlaması amacıyla suyu bir tanktan diğerine boşaltabilen bir mekanizma ile doldurulup boşaltılabilen tanklar içermesi gerekir. Bu mekanizmanın çalışması anlık bir olay değildir ve suyun bir tanktan diğerine boşaltılması için belirli bir süre geçmesi gerekir [8].

1.2 Çalışılan Problem

Uzun yıllar boyunca modellere konum değişkeni eklenerek difüzyonun varlığının sisteme dahil edilmesinin, kararsız bir denge noktasının difüzyonun varlığında kararlı hale gelmesi gibi, sadece karmaşık yapıdaki sistemleri düzenli hale getirdiğine inanılmıştır. Fakat 1952 yılında Turing [6] yaptığı çalışmada bunun aksinin de mümkün olduğunu göstermiştir. Kararlı bir denge noktasının difüzyonun varlığında kararsız hale gelebileceğini, biyolojik sistemlerde sık sık karşılaşılan düzgün olmayan desen ve şekillerin oluşumunun kararsızlık yapısında meydana gelen bu değişikliklerle açıklanabileceğini ifade etmiştir. Bu kararsızlığa "Turing Tipi Kararsızlık" veya "Difüzyon Odaklı Kararsızlık" denir.

Bu anlayış biyoloji, kimya, fizik, ekonomi gibi birçok bilimsel çalışma sahasında teorik anlamda kabul görmüş ve bu alanlardaki çalışmalarda kullanılmıştır [10]. Fakat doğruluğu uzun yıllar boyunca deneysel olarak gösterilememiştir. 1990'ların başında De Kepper, CIMA Reaksiyonu [9] ile Turing'in çalışmalarının basılmasından yaklaşık 40 yıl sonra ilk deneysel kanıtı ortaya koymuştur. CIMA reaksiyonu 5 farklı reaktanttan oluşur. Bu nedenle de matematiksel anlamda analizler yapmak için çok karmaşıktır. Bu karmaşık modeli Lengyel ve Epstein ([11], [12]) iki boyutlu bir sisteme indirgenmeyi başarmışlardır, bu model Lengyel-Epstein Modeli olarak adlandırılır. CIMA Reaksiyon Modeli hakkında daha fazla bilgi için [10]'a başvurulabilir.

Önemi buradan gelen bu iki boyutlu modele, kimyasal tepkimelerin belirli bir süre içerisinde gerçekleşeceği gerçeğini dahil etmek amacı ile τ gecikme terimi ve kimyasal tepkimelerde maddelerin rastgele dağıldığı gerçeğini dahil etmek içinse

herhangi bir yön kısıtlaması yapılmadan konum değişkeni eklenmiş, böylece model daha gerçekçi hale getirilerek Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Lengyel-Epstein Modeli, yani tez problemi elde edilmiştir. Bu şekilde, bu modelin kararlılık ve Hopf Çatallanma analizi çalışılarak, gecikme terimi $\tau = 0$ iken [11], [12], [15], [17]-[22] ve [28]'de yapılan çalışmalar genişletilmiştir.

2. HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

2.1 Hopf Çatallanma Nedir?

$X \in \mathbb{R}^n$ konum değişkeni ve $\mu \in \mathbb{R}$ parametre olmak üzere, çatallanma

$$X' = F(X, \mu) \quad X \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

gibi bir sistemde " μ parametresi değişirken sistemin çözümler ailesinin niteliksel veya topolojik yapısı nasıl değişir?" sorusuna aranan cevaptır. Matematiksel olarak ise aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.1 *Parametrelerin değişmesi ile topolojik olarak birbirine denk olmayan faz portrelerinin ortaya çıkmasına çatallanma denir [13].*

Çatallanmadan bahsedebilmemiz için sistemin parametre değerinin değişmesi ve değişirken de sistemin niteliksel veya topolojik yapısında farklılıkların ortaya çıkması gerekir.

Tanım 2.1.2 *Denge noktasının kararlılık yapısının değiştiği parametre değerine çatallanma değeri denir [5].*

Çatallanma, çatallanma değerinde sistemin lineer operatörünün sahip olduğu özdeğerlerin türüne göre değişik tiplerde ortaya çıkar. Bu tezin konusu olan

Hopf veya Poincaré-Andronov-Hopf Çatallanma olarak adlandırılan çatallanma, iki veya daha fazla birinci mertebeden diferensiyel denklem içeren sistemlerde ortaya çıkar ve [13]'de şu şekilde tanımlanır:

Tanım 2.1.3 *Çatallanma değerinde $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ özdeğerinin varlığı ile ilişkili olan çatallanmaya Hopf çatallanma denir.*

Bu bölümün kalan kısmında, farklı türdeki diferensiyel denklem sistemlerine ait Hopf çatallanma analizi algoritmaları verilecektir.

2.2 Adi Diferensiyel Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma

Bu bölümde, adi diferensiyel denklemlerde oluşan periyodik çözümlerin çatallanması için E. Hopf Teoremi verilecektir. $x \in \mathbb{R}^n$ konum değişkeni ve $v \in \mathbb{R}^+$ sistemin parametresi olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v) \quad (2.2)$$

sistemi ele alalım. $x = x^*(v)$, (2.2) sisteminin ayrık denge noktası ve

$$A(v) = D_x(f(x^*(v), v)) = \left\{ \frac{\partial f_i(x^*(v), v)}{\partial x_j} : i, j = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.3)$$

sistemin Jacobian matrisi, $v = v_c$ için

$$\omega(v_c) = \omega_0 > 0, \quad \alpha(v_c) = 0 \text{ ve } \alpha'(v_c) \neq 0 \quad (2.4)$$

koşullarını sağlayan $\lambda_1(v) = \bar{\lambda}_2(v) = \alpha(v) + i\omega(v)$ kompleks eşlenik özdeğerler mevcut olsun. Burada, v_c değerine v parametre değerleri için kritik değer denir. Ayrıca, (2.4) koşulu sistemin parametresi değişirken denge noktasının kararlılık yapısının değiştiğini söylemektedir.

$$X = x - x^* \text{ ve } \mu = v - v_c \quad (2.5)$$

değişken değiştirmeleri ile (2.2) sisteminin denge noktası orijine ve çatallanma parametresi sıfıra taşınarak elde edilen ve bir öncekine topolojik olarak denk olan sistem

$$F(X, \mu) = f(X + x^*(v_c + \mu), v_c + \mu) \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu) \quad (2.7)$$

ile verilen diferensiyel denklem sistemine dönüşür.

Teorem 2.2.1 *Eğer*

1. 0 noktasını içeren bir açık aralıkta μ ve $F(0, \mu) = 0$ için $X = 0 \in \mathbb{R}^n$ noktası F fonksiyonunun bir izole denge noktası,
2. $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ noktasının bir komşuluğunda, F fonksiyonu X ve μ ye göre analitik,
- 3.

$$\omega(v_c) = \omega_0 > 0, \quad \alpha(v_c) = 0, \quad \alpha'(v_c) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \quad (2.8)$$

olmak üzere $A(\mu) = D_x(0, \mu)$ matrisi λ ve $\bar{\lambda}$ kompleks eşlenik özdeğerlere sahip,

4. $A(0)$ matrisinin geriye kalan $n - 2$ özdeğerinin reel kısmı sıfırdan farklı ise

(2.7) sisteminde $\mu = 0$ 'da Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

5. Ayrıca, $c_1(0)$ Lyapunov katsayısı olmak üzere

(a) $\frac{1}{\alpha'(0)} \text{Re}(c_1)(0) < 0$ ise çatallanmanın yönü süperkritiktir,

(b) $\frac{1}{\alpha'(0)} \text{Re}(c_1)(0) > 0$ ise çatallanmanın yönü subkritiktir.

6. $A(0)$ matrisinin geriye kalan tüm özdeğerinin reel kısımları negatif ve

(a) $\text{Re}(c_1)(0) < 0$ ise periyodik çözümler kararlı,

(b) $Re(c_1)(0) > 0$ ise periyodik çözümler kararsızdır.

Bu teorem, (2.7) gibi bir sistemde Hopf çatallanmanın mevcut olup olmadığı, mevcut ise yönünün ne olduğu ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılığı hakkında bilgi vermektedir. Adi diferensiyel denklem sistemlerinde bu teoremin hangi algoritmaya bağlı kalınarak uygulanabileceği [14] 'te sayfa 80'de verilmiştir. Bu tezde gecikmeli diferensiyel denklem sistemleri, reaksiyon-difüzyon denklem sistemleri ve gecikmeli reaksiyon-difüzyon denklem sistemleri için Hopf çatallanma analizi algoritmaları verilecektir.

2.3 Gecikmeli Diferensiyel Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma Analizi

Bu bölümde daha önceki bölümde verilen teorem, gecikmeli diferensiyel denklem sistemine uygulanacaktır. Bunun için ele alınan sistemi, center manifold üzerinde kompleks değişkenli tek bir diferensiyel denkleme dönüştürmek için Center Manifold Teoremi kullanılacaktır. Ele alınan sistem sonsuz boyutlu fonksiyonel diferensiyel denklem olduğu için öncelikle bu sistem iki boyutlu sisteme indirgenecek, ardından çatallanmanın yönü ve denge noktasından çatallanan periyodik çözümlerin kararlılığı için gerekli formüller elde edilecektir.

$C^k[-r, 0]$, $[-r, 0]$ üzerinde tanımlı n -boyutlu reel vektör değerli k -kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı; $x : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ olarak tanımlanan vektör değerli bir fonksiyon ve $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = L_\mu x_t + f(x_t, \mu), \quad t > 0, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

otonom sistemini ele alalım. Burada, $L_\mu : C[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir parametrelili sürekli lineer operatörlerin ailesi ve $f(\cdot, \mu) : C[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ en az ikinci dereceden terimler içeren ve $f(0, \mu) = 0$, $D_x f(0, \mu) = 0$ özelliklerini sağlayan bir operatördür.

Teorem 2.2.1'in şartlarının sağlanması amacıyla çok küçük $|\mu|$ değerleri için $f(\cdot, \mu)$

ve L_μ operatörlerinin μ çatallanma parametresine bağlı olarak analitik olduğunu kabul edelim.

L_μ operatörünün

$$\sigma(\mu) = \{\lambda \mid \det(\lambda I - L_\mu e^{\lambda \theta t}) = 0\} \quad (2.10)$$

spektrumunda Hopf çatallanma varsayımları aşağıdaki gibidir:

1. $\sigma(\mu)$ 'de, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$ koşullarını sağlayan ve $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ olacak şekilde tek katlı (basit) $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu) \in \sigma(\mu)$ vardır.
2. $\sigma(0)$ kümesinin $\lambda(0)$ ve $\bar{\lambda}(0)$ haricindeki diğer tüm elemanlarının reel kısımları sıfırdan farklıdır.

Bu kabuller altında sistem (2.9)'da Teorem 2.2.1 gereğince $\mu = 0$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

Bu varsayımlar, bir sistemde Hopf çatallanmasının hangi koşullar altında ortaya çıkacağını ifade etmektedir. Fakat çatallanmanın yönü ve periyodik çözümlerin kararlılığı hakkında bilgi vermemektedir. Bu konularda bilgi sahibi olmak için aşağıdaki algoritma izlenir.

Sistem (2.9), $x(t)$ ve x_t ile gösterilen iki farklı bilinmeyen içermektedir. Bu noktada yapılması gereken ilk şey (2.9) sistemini matematiksel açıdan uygun olacak şekilde tek bilinmeyi x_t olan

$$x_t' = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t \quad (2.11)$$

sistemine dönüştürmektir. Bunun için, (2.9) sisteminin $\frac{dx(t)}{dt} = L_\mu x_t$ lineer kısmı Riesz Temsil Teoremi kullanılarak yeniden ifade edilir. Bu teorem gereğince $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ için $\eta_{ij} : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere bileşenleri $[-r, 0]$ üzerinde sınırlı değişimlere sahip olan ve $\phi \in C[-r, 0]$ için

$$L_\mu(\phi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta) \quad (2.12)$$

özelliğine sahip $\eta(\cdot, \mu) : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dönüşümü vardır. $\eta(\cdot, \mu)$ seçimi çalışılan diferensiyel denkleme bağlıdır. Bu fonksiyon yardımı ile, $\phi \in C^1[-r, 0]$ olmak üzere

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta} & , \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ \int_{-r}^0 d\eta(s, \mu)\phi(s) = L_\mu(\phi) & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.13)$$

operatörü tanımlanır ve böylece (2.9) sisteminin lineer kısmı olan $\frac{dx(t)}{dt} = L_\mu x_t$ ifadesi, (2.11) sisteminin lineer kısmı olan $x'_t = A(\mu)x_t$ 'ye dönüştürülür. Yine,

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0 & , \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ f(\phi, \mu) & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.14)$$

ile de (2.9) sistemi, istenilen (2.11) sistemine tamamen dönüştürülmüş olur.

Yön analizi yapabilmek için $\mu = 0$ 'da $A(0)$ operatörünün $\lambda(0)$ özdeğerine karşılık gelen $q(\theta)$ özvektörü ve $\bar{A}(0)$ operatörünün $\bar{\lambda}(0)$ özdeğerine karşılık gelen $q^*(s)$ özvektörü hesaplanmalıdır. η^T , η 'nin transpozu olmak üzere $A(0)$ operatörünün adjoint (ek) operatörü

$$A^*(\mu)\phi(s) = \begin{cases} -\frac{d\phi(s)}{ds} & , s \in (0, r] \text{ ise} \\ \int_{-r}^0 d\eta^T(s, \mu)\phi(-s) & , s = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.15)$$

ile tanımlanır. $q(\theta)$ ve $q^*(s)$ özvektörleri

$$\begin{aligned} A(0)q(\theta) &= i\omega_0 q(\theta) \\ A^*(0)q^*(s) &= -i\omega_0 q^*(s) \end{aligned} \quad (2.16)$$

eşitliklerinden yararlanılarak hesaplanır.

n -boyutlu sistemleri incelemek iki boyutlu sistemleri incelemekten daha zordur. Bu sistemleri incelemek için boyut indirgeme yöntemleri kullanılır. Boyut indirmek için ise Center Manifold Teoremi kullanılır.

Sıfır denge noktası civarında C_0 center manifoldunu tanımlamak için ilk önce manifoldun koordinatlarının belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bunun için ise özel bir iççarpıma gereksinim duyulmaktadır. $\psi \in C[0, r]$ ve $\phi \in C[0, r]$ olmak üzere iççarpım

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0) \cdot \phi(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta, \mu) \phi(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlansın. A ve A^* adjoint operatörler oldukları için $(\psi, \phi) \in D(A) \times D(A^*)$ için $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^*\psi, \phi \rangle$ sağlar. Yukarıda verilen q ve q^* bu iç çarpım altında normalleştirilir, yani bu özvektörler $\langle q^*, q \rangle = 1$ ve $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ koşullarını sağlamalıdır. Her bir $x \in D(A)$ için center manifoldun koordinatlarını veren (z, w) ikilisinin oluşturulması gerekmektedir. Burada

$$z(t) = \langle q^*(\theta), x \rangle \quad (2.18)$$

ve

$$w = x(\theta) - z(t)q(\theta) - \overline{z(t)q(\theta)} = x(\theta) - 2Re(z(t)q(\theta)) \quad (2.19)$$

eşitlikleri ile verilir. $\mu = 0$ iken (2.11) sisteminin x_t çözümleri için (2.18)

$$z(t) = \langle q^*(\theta), x_t(\theta) \rangle \quad (2.20)$$

ve (2.19)

$$w = x_t(\theta) - z(t)q(\theta) - \overline{z(t)q(\theta)} = x_t(\theta) - 2Re(z(t)q(\theta)) \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır. C_0 manifoldu üzerinde

$$w(z, \bar{z}, \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.22)$$

olmak üzere $w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ 'dır. z ve \bar{z} sırasıyla q ve q^* vektörleri yönündeki C_0 manifoldunun yerel koordinatlarıdır. Buradan $\langle q^*, w \rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. (2.11) sisteminin $x_t \in C_0$ çözümleri için

$$z' = \langle q^*, x_t' \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \quad (2.23)$$

ya da $\mu = 0$ olduğunda

$$\begin{aligned} z' &= i\omega_0 z + \overline{q^*(0)} f(w(z, \bar{z}, \theta) + 2Re(z(t)q(\theta))) \\ &= i\omega_0 z + \overline{q^*(0)} f_0(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu kısaca

$$z' = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}) \quad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir. (2.24) ve (2.25) denklemlerine dikkatli bakıldığında f , θ değişkeninin bir fonksiyonu olarak alınan bir operatör iken g fonksiyonunun ise θ değişkenine olan bağıllığı kaldırılmıştır.

Bir sonraki hedef g fonksiyonunu z ve \bar{z} değişkenlerinin kuvvetleri cinsinden açmak ve çatallanmanın yön analizi için gerekli olan Lyapunov katsayısını hesaplamaktır. Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretini tespit edebilmek için g fonksiyonunun $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ 'da Taylor açılımındaki g_{ij} katsayılarının bulunması gerekmektedir. (2.24) ve (2.25)'den

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \quad (2.26)$$

olduğu ve g_{ij} katsayılarının w_{ij} katsayılarına bağlı olduğu bilinmektedir. Bu nedenle $w_{ij}(\theta)$ katsayılarının hesaplanması gerekmektedir. Bunun için öncelikle $w_{ij}(\theta)$ katsayılarını verecek denklem oluşturulur. (2.19) denkleminde t değişkenine göre türev alınır

$$w' = x_t - z'q - \bar{z}'\bar{q} \quad (2.27)$$

ve bu denklemde (2.11) ve (2.25) ifadeleri kullanılırsa

$$w' = \begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0(\theta)q(\theta)\} & , \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0(0)q(0)\} + f_0 & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.28)$$

elde edilir. Bu ifade ise

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.29)$$

olmak üzere

$$w' = Aw + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (2.30)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan orijin civarında C_0 manifoldu üzerinde

$$w' = w_z z' + w_{\bar{z}} \bar{z}' \quad (2.31)$$

elde edilir. (2.22) ve (2.25) ifadelerinden faydalanarak w_z , $w_{\bar{z}}$, z' ve \bar{z}' ifadeleri yerine yazılırsa w' için yeni bir eşitlik elde edilmiş olur. Elde edilen bu ifade ile

(2.30) denkleminin sağ tarafı eşitlenirse

$$\begin{aligned} (2i\omega_0 I - A(0))w_{20}(\theta) &= H_{20}(\theta) \\ -A(0)w_{11}(\theta) &= H_{11}(\theta) \\ w_{02}(\theta) &= \bar{w}_{20}(\theta) \end{aligned} \quad (2.32)$$

eşitlikleri bulunur. w_{ij} katsayıları hesaplandıktan sonra (2.25) diferensiyel denklemi

$$z' = i\omega_0 z + g_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + g_{11}(\theta) z \bar{z} + g_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}(\theta) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (2.33)$$

şeklinde yazılabilir. $i + j \leq 3$ için g_{ij} katsayıları

$$\bar{q}^*(0) f_0 \left(zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) + w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z \bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) \quad (2.34)$$

ifadesinin açılımından elde edilir. Poincaré Normal Form'da geçen, çatallanmanın yönünün belirlenmesinde kullanılan ve g_{ij} katsayılarından oluşan Lyapunov katsayısı $c_1(0)$

$$c_1(0) = \frac{i}{\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21} \quad (2.35)$$

formülü ile hesaplanır. Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretinden yararlanılarak Teorem 2.2.1'in 5. maddesine göre çatallanmanın yönüne karar verilir. Ayrıca, L_0 operatörünün $\lambda(0)$ ve $\bar{\lambda}(0)$ özdeğerleri haricinde geriye kalan tüm özdeğerlerinin reel kısımlarının negatif olduğu gösterilebilirse yine Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretinden yararlanılarak Teorem 2.2.1'in 6. maddesine göre oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapısı belirlenir.

2.4 Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma Analizi

Bu bölümde, iki denklemden oluşan Neuman sınır değer koşullu Reaksiyon-Difüzyon Denklemlerinde Hopf çatallanmanın yönünü ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapısını tespit etmeyi sağlayacak [14] ve [15]'ten yararlanılarak elde

edilen bir algoritma verilecektir. Burada verilecek algoritma 1-boyutlu konum değişkeni için olsa da, aynı hesaplamalar n -boyutlu uzaylara genişletilebilir. Bir önceki bölümde olduğu gibi ele alınan sistemi center manifold üzerinde kompleks değişkenli tek bir diferensiyel denkleme dönüştürmek için Center Manifold Teoremi kullanılacaktır.

Bu bölümde, $\Omega = (0, \ell\pi)$, $\ell \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} = f(\lambda, u, v) & , x \in (0, \ell\pi), t > 0 \\ v_t - d_2 v_{xx} = g(\lambda, u, v) & , x \in (0, \ell\pi), t > 0 \\ u_x(0, t) = v_x(0, t) = 0 \text{ ve } u_x(\ell\pi, t) = v_x(\ell\pi, t) = 0 & , t > 0 \\ u(x, 0) = u_0 \text{ ve } v(x, 0) = v_0 & , x \in (0, \ell\pi) \end{cases} \quad (2.36)$$

Neuman sınır değerli genel Reaksiyon-Difüzyon sistemi ele alınacaktır. Burada, $d_1, d_2, \lambda \in \mathbb{R}^+$; $f, g \in C^k$ ($k \geq 5$): $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(\lambda, 0, 0) = g(\lambda, 0, 0) = 0$ olup $(0, 0)$ ise sistemin denge noktasıdır.

Reel değerli Sobolev uzayı

$$X := \{(u, v) \in H^2(0, \ell\pi) \times H^2(0, \ell\pi) | (u_x, v_x)|_{x=0, \ell\pi} = 0\} \quad (2.37)$$

olarak tanımlansın ve

$$X_C := X \oplus iX = \{x_1 + ix_2 | x_1, x_2 \in X\} \quad (2.38)$$

olsun.

D tanım kümesini gösterebiliriz. $D_{L(\lambda)} = X_C$, $A(\lambda) = f_u(\lambda, 0, 0)$, $B(\lambda) = f_v(\lambda, 0, 0)$, $C(\lambda) = g_u(\lambda, 0, 0)$ ve $E(\lambda) = g_v(\lambda, 0, 0)$ olmak üzere

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & E(\lambda) \end{pmatrix} \text{ ve } G = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

olarak tanımlandığında

$$L(\lambda) = G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + J(\lambda) \quad (2.40)$$

(2.36) sisteminin $(\lambda, 0, 0)$ 'da hesaplanan lineer operatörüdür.

Teorem 2.2.1'in şartlarının sağlanması amacıyla çok küçük $|\lambda|$ değerleri için $f(\lambda, \cdot, \cdot)$, $g(\lambda, \cdot, \cdot)$ ve $L(\lambda)$ operatörlerinin λ çatallanma parametresine bağlı olarak

analitik olduğunu kabul edelim. O , λ_0 'ın bir komşuluğu olmak üzere, sistem (2.36) için Hopf çatallanma varsayımları aşağıdaki gibidir:

1. $\omega(\lambda_0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(\lambda_0) = 0$, $\alpha'(\lambda_0) \neq 0$ ve $\beta(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\omega(\lambda)$ olacak şekilde $L(\lambda)$ operatörünün tek katlı (basit), kompleks eşlenik ve λ 'ya göre sürekli türevlenebilen $\beta(\lambda)$ ve $\bar{\beta}(\lambda)$ özdeğerleri vardır.
2. $L(\lambda_0)$ operatörünün $\beta(\lambda_0)$ ve $\bar{\beta}(\lambda_0)$ haricindeki diğer özdeğerlerinin reel kısımları sıfırdan farklıdır.

Bu kabuller altında sistem (2.36)'da Teorem 2.2.1 gereğince $\lambda = \lambda_0$ 'da Hopf çatallanma meydana gelir ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar. Fakat bu bilgiler çatallanmanın yönü ve periyodik çözümlerin kararlılığı hakkında bilgi edinmek için yeterli değildir. Bu konularda bilgi sahibi olmak için aşağıdaki algoritma izlenir.

Bilindiği gibi,

$$-\varphi'' = \mu\varphi, \quad x \in (0, \ell\pi) \text{ ve } \varphi'(0) = \varphi'(\ell\pi) = 0 \quad (2.41)$$

özdeğer problemi $\varphi_n = \cos(\frac{n}{\ell}x)$ özvektörüne karşılık gelen $\mu_n = \frac{n^2}{\ell^2}$ özdeğerlerine sahiptir.

Bu bilgi ışığında, kabul edelim ki

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n}{\ell}x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$L(\lambda)$ operatörünün $\beta(\lambda)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun.

Lemma 2.4.1 $L_n(\lambda) = \left(-G\frac{n^2}{\ell^2} + J(\lambda)\right)$ olmak üzere,

$\beta(\lambda)$ 'nın, $L(\lambda)$ operatörünün bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $\beta(\lambda)$ 'nın, $L_n(\lambda)$ operatörünün bir özdeğeri olmasıdır.

İspat 1

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n}{\ell}x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$L(\lambda)$ 'nin, $\beta(\lambda)$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Bu durumda,

$$L(\lambda) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \beta(\lambda) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

eşitliği sağlanır.

(2.43)'te tanımlanan özvektör, (2.44) eşitliğinin sol tarafında yerine konursa,

$$L(\lambda) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(G \left(-\frac{n^2}{\ell^2} \right) + J(\lambda) \right) \cos \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

eşitliği elde edilir.

(2.45)'te elde edilen son ifade, (2.44)'te yerine yazılıp (2.43) kullanılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(G \left(-\frac{n^2}{\ell^2} \right) + J(\lambda) \right) \cos \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta(\lambda) \cos \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Eşitlik (2.46)'dan

$$L_n(\lambda) \cos \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \beta(\lambda) \cos \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

elde edilir. Bu ifade ise ispatı tamamlar. \square

$iz_n(\lambda)$ ve $D_n(\lambda)$ sırasıyla $L_n(\lambda)$ operatörünün izini ve determinantını gösterebilir.

$$\begin{aligned} iz_n(\lambda) &= A(\lambda) + E(\lambda) - \frac{(d_1 + d_2)n^2}{\ell^2} \\ D_n(\lambda) &= \frac{d_1 d_2 n^4}{\ell^4} - \frac{n^2}{\ell^2} (d_2 A(\lambda) + d_1 E(\lambda)) + A(\lambda)E(\lambda) - B(\lambda)C(\lambda) \end{aligned} \quad (2.48)$$

olmak üzere, $L_n(\lambda)$ operatörünün karakteristik denklemi

$$\beta^2 - iz_n(\lambda)\beta + D_n(\lambda) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

olarak ifade edilir. $\beta(\lambda)$ özdeğerleri

$$\beta(\lambda) = \frac{iz_n(\lambda) \pm \sqrt{iz_n^2(\lambda) - 4D_n(\lambda)}}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

eşitliği ile elde edilebilir. Hopf çatallanma varsayımlarını sağlamak için Lemma 2.4.1'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda = \lambda_n$ 'te $L_n(\lambda)$ tek katlı, sanal $i\omega_0$ özdeğerine sahiptir. [14] de izlenen yöntemle analize devam edelim. Öncelikle,

$$U := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \text{ ve } F(\lambda, U) := \begin{pmatrix} f(\lambda, u, v) - A(\lambda)u - B(\lambda)v \\ g(\lambda, u, v) - C(\lambda)u - E(\lambda)v \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

olmak üzere, (2.36) sistemi lineer ve lineer olmayan kısımlarını ayrı ayrı görebileceğimiz

$$\frac{dU}{dt} = L(\lambda) + F(\lambda, U) \quad (2.52)$$

şeklinde yazılır. $F_0(U) := F(\lambda, U)|_{\lambda=\lambda_0}$ olmak üzere, sistem (2.52) $\lambda = \lambda_0$ 'da

$$\frac{dU}{dt} = L(\lambda_0) + F_0(U) \quad (2.53)$$

sistemine dönüşür.

Sıfır denge noktası civarında C_0 center manifoldunu tanımlamak için ilk önce manifoldun koordinatlarının belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bunun için ise özel bir iççarpıma gereksinim duyulmaktadır. Hilbert uzayı X_C üzerinde tanımlı kompleks değerli L^2 iççarpımı

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^{\ell\pi} (\bar{u}_1 u_2 + \bar{v}_1 v_2) dx \quad (2.54)$$

tanımı ile verilir.

$$L^*(\lambda_0) := \begin{pmatrix} d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A(\lambda) & C(\lambda) \\ B(\lambda) & d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$L(\lambda_0)$ operatörünün adjoint operatörü olduğu için

$$\langle u, L(\lambda_0)v \rangle = \langle L^*(\lambda_0)u, v \rangle \quad (2.56)$$

eşitliği sağlanır. q , $L(\lambda_0)$ operatörünün $i\omega_0$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ve q^* , $L^*(\lambda_0)$ operatörünün $-i\omega_0$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun.

$$\begin{aligned} L(\lambda_0)q &= i\omega_0 q \\ L^*(\lambda_0)q^* &= -i\omega_0 q^* \end{aligned} \quad (2.57)$$

eşitliklerini sağlaması gereken q ve q^* özvektörleri, sistem (2.36) özdeğer problemi içerdiği için $q := \cos \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ ve $q^* := \cos \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} a_n^* \\ b_n^* \end{pmatrix}^T$ olarak seçilir. Bu özvektörler yukarıda tanımlanan iççarpım altında normalleştirilir, yani $\langle q^*, q \rangle = 1$ ve $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ koşulları sağlanmalıdır.

$X^c := \{zq + \bar{z}\bar{q} \mid z \in \mathbb{C}\}$ ve $X^s := \{u \in \mathbb{X} \mid \langle q^*, u \rangle = 0\}$ olmak üzere X bu iki kümenin direk toplamı yani, $X = X^c \oplus X^s$ olarak yazılabilir. Bu durumda her $u, v \in X$ için

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = zq + \bar{z}\bar{q} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{cases} u = za_n \cos \frac{n}{\ell} x + \bar{z}\bar{a}_n \cos \frac{n}{\ell} x + w_1 \\ v = zb_n \cos \frac{n}{\ell} x + \bar{z}\bar{b}_n \cos \frac{n}{\ell} x + w_2 \end{cases} \quad (2.58)$$

ifadesini sağlayacak $z \in \mathbb{C}$ ve $w = (w_1, w_2) \in X^s$ elemanları vardır.

$$H(z, \bar{z}, w) := F_0 - \langle q^*, F_0 \rangle q - \langle \bar{q}^*, F_0 \rangle \bar{q} \text{ ve } F_0 := F_0(zq + \bar{z}\bar{q} + w) \quad (2.59)$$

olmak üzere, Bölüm 2.3'te (2.18) ve (2.19) ile tanımlanan center manifold koordinatları (z, w) kullanılarak sistem (2.53)

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = i\omega_0 z + \langle q^*, F_0 \rangle \\ \frac{dw}{dt} = L(\lambda_0)w + H(z, \bar{z}, w) \end{cases} \quad (2.60)$$

sistemine dönüştürülür.

Hopf çatallanmanın yön analizi için gerekli olan Lyapunov katsayısını hesaplamak için [13]'teki yöntemle, $U = (u, v)$ olmak üzere $F_0(U)$ fonksiyonu ikinci ve üçüncü mertebeden terimleri ayrı ayrı bir araya toplayan

$$F_0(U) := \frac{1}{2}Q(U, U) + \frac{1}{6}C(U, U, U) + O(|U|^4) \quad (2.61)$$

formunda yazılır. Burada Q ve C simetrik, multilineer formlardır. Basitlik olması açısından $Q(X, Y) = Q_{XY}$ ve $C(X, Y, Z) = C_{XYZ}$ ile gösterilecektir.

Burada amaç $F_0(U) = F_0(\lambda_0, U) = F_0(\lambda_0, zq + \bar{z}\bar{q} + w)$ fonksiyonunu z ve \bar{z} 'in

kuvvetleri cinsinden yazmaktır.

$$\begin{aligned}
Q_{qq} &= \cos^2 \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}, \\
Q_{q\bar{q}} &= \cos^2 \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, \\
C_{qq\bar{q}} &= \cos^3 \frac{n}{\ell} x \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.62}$$

ve

$$\begin{aligned}
c_n &= f_{uu} a_n^2 + 2f_{uv} a_n b_n + f_{vv} b_n^2, \\
d_n &= g_{uu} a_n^2 + 2g_{uv} a_n b_n + g_{vv} b_n^2, \\
e_n &= f_{uu} |a_n|^2 + f_{uv} \left(a_n \bar{b}_n + \bar{a}_n b_n \right) + f_{vv} |b_n|^2, \\
f_n &= g_{uu} |a_n|^2 + g_{uv} \left(a_n \bar{b}_n + \bar{a}_n b_n \right) + g_{vv} |b_n|^2, \\
g_n &= f_{uuu} |a_n|^2 a_n + f_{uvv} \left(2|a_n|^2 b_n + a_n^2 \bar{b}_n \right) \\
&\quad + f_{uvv} \left(2|b_n|^2 a_n + b_n^2 \bar{a}_n \right) + f_{vvv} |b_n|^2 b_n, \\
h_n &= g_{uuu} |a_n|^2 a_n + g_{uvv} \left(2|a_n|^2 b_n + a_n^2 \bar{b}_n \right) \\
&\quad + g_{uvv} \left(2|b_n|^2 a_n + b_n^2 \bar{a}_n \right) + g_{vvv} |b_n|^2 b_n
\end{aligned} \tag{2.63}$$

olmak üzere F_0 istenen formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$F_0(\lambda_0, zq + \bar{z}\bar{q} + w) = Q_{qq} z^2 + Q_{q\bar{q}} z\bar{z} + Q_{\bar{q}q} \bar{z}^2 + C_{qqq} z^2 \bar{z} + \dots \tag{2.64}$$

Lyapunov katsayısının elde edilmesi için g_{ij} katsayılarına, g_{ij} katsayılarının elde edilmesi için de w_{ij} katsayılarının hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için $H(z, \bar{z}, w)$ fonksiyonu

$$H(z, \bar{z}, w) = \frac{H_{20}}{2} z^2 + H_{11} z\bar{z} + \frac{H_{02}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3) + o(|z| \cdot |w|) \tag{2.65}$$

şeklinde yazılır, (2.59) ve (2.61) kullanılarak

$$\begin{aligned}
H_{20} &= Q_{qq} - \langle q^*, Q_{qq} \rangle q - \langle \bar{q}^*, Q_{qq} \rangle \bar{q} \\
H_{11} &= Q_{q\bar{q}} - \langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle q - \langle \bar{q}^*, Q_{q\bar{q}} \rangle \bar{q} \\
H_{02} &= \bar{H}_{20}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

eşitlikleri elde edilir. w fonksiyonu $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ 'da Taylor polinomuna açılır

$$w(z, \bar{z}) = w_{20} \frac{z^2}{2} + w_{11} z \bar{z} + w_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + o(|z|^3) \quad (2.67)$$

(2.66) ve (2.67)

$$L(\lambda_0)w + H(z, \bar{z}, w) = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dt} \quad (2.68)$$

eşitliğinde yerine yazılarak w_{20} ve w_{11} 'i veren aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$\begin{aligned} w_{20} &= [2i\omega_0 I - L(\lambda_0)]^{-1} H_{20} \\ w_{11} &= -[L(\lambda_0)]^{-1} H_{11}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Yukarıdaki ifadelerde, $n \in \mathbb{N}^+$ ve $n = 0$ durumlarında farklı sonuçlar ortaya çıkar. Eğer $n \in \mathbb{N}^+$ ise kısmi integrasyon kullanıldığında

$$\int_0^{\ell\pi} \cos^3 \frac{n}{\ell} x dx = 0 \quad (2.70)$$

sonucuna ulaşılır. Bu integral değerinin 0'a eşit olmasından dolayı

$$\langle q^*, Q_{qq} \rangle = \langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle = \langle \bar{q}^*, Q_{q\bar{q}} \rangle = \langle \bar{q}^*, Q_{\bar{q}\bar{q}} \rangle = 0 \quad (2.71)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu değerlerin 0'a eşit olmasından dolayı (2.66), (2.69)'dan

$$w_{20} = \begin{cases} [2i\omega_0 I - L(\lambda_0)]^{-1} \left[\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} - \langle q^*, Q_{qq} \rangle \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \right], & n = 0 \text{ ise} \\ -[2i\omega_0 I - L(\lambda_0)]^{-1} \left[\langle \bar{q}^*, Q_{q\bar{q}} \rangle \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ - \\ b_0 \end{pmatrix} \right] \\ \frac{1}{2} [2i\omega_0 I - L(\lambda_0)]^{-1} \left[(\cos \frac{2n}{\ell} x + 1) \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \right] & , n \in \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases} \quad (2.72)$$

$$w_{11} = \begin{cases} -[L(\lambda_0)]^{-1} \left[\begin{pmatrix} e_0 \\ f_0 \end{pmatrix} - \langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \right], & n = 0 \text{ ise} \\ + [L(\lambda_0)]^{-1} \left[\langle \bar{q}^*, Q_{q\bar{q}} \rangle \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ - \\ b_0 \end{pmatrix} \right] \\ -\frac{1}{2} [L(\lambda_0)]^{-1} \left[(\cos \frac{2n}{\ell} x + 1) \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix} \right] & , n \in \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases} \quad (2.73)$$

formüllerine ulaşılır.

Bu şekilde, sistem (2.60) gerekli katsayıları

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle q^*, Q_{qq} \rangle, \quad g_{11} = \langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle, \quad g_{02} = \langle q^*, Q_{\bar{q}\bar{q}} \rangle \\ \text{ve } g_{21} &= 2 \langle q^*, Q_{w_{11}q} \rangle + \langle q^*, Q_{w_{20}\bar{q}} \rangle + \langle q^*, C_{qq\bar{q}} \rangle \end{aligned} \quad (2.74)$$

eşitlikleri ile hesaplanan

$$\frac{dz}{dt} = i\omega_0 z + \langle q^*, F_0 \rangle = i\omega_0 z + \sum_{2 \leq i+j \leq 3} \frac{g_{ij}}{i!j!} z^i \bar{z}^j + O(|z|^4) \quad (2.75)$$

center manifold ile sınırlandırılabilir ve (2.60) sisteminin dinamiği (2.74) sisteminin dinamiği ile aynıdır.

(2.52) sisteminin λ_0 civarındaki λ 'lar için, z kompleks değerli fonksiyon, $M \geq 1$ ve $c_j(\lambda)$ kompleks değerli katsayılar olmak üzere [14]'ün 28. sayfasında verilen Poincaré normal formu

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha(\lambda) + i\omega(\lambda)) z + z \sum_{j=1}^M c_j(\lambda) (z\bar{z})^j \quad (2.76)$$

şeklindedir. [14]'ün 47. sayfasında Lyapunov katsayısı

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) &= \frac{g_{20}g_{11}(3\alpha(\lambda) + i\omega(\lambda))}{2(\alpha^2(\lambda) + \omega^2(\lambda))} + \frac{|g_{11}|^2}{(\alpha(\lambda) + i\omega(\lambda))} \\ &\quad + \frac{|g_{02}|^2}{2(\alpha(\lambda) + 3i\omega(\lambda))} + \frac{g_{21}}{2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

şeklinde verilmiştir. $\lambda = \lambda_0$ 'da, (2.77)

$$\begin{aligned} c_1(\lambda_0) &= \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{i}{2\omega_0} \langle q^*, Q_{qq} \rangle + \langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle + \langle q^*, Q_{w_{11}q} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle q^*, Q_{w_{20}\bar{q}} \rangle + \frac{1}{2} \langle q^*, C_{qq\bar{q}} \rangle \end{aligned} \quad (2.78)$$

şekline dönüşür. Lyapunov katsayısının reel kısmı (2.78)'in işaretinden yararlanılarak Teorem 2.2.1'in 5. maddesine göre çatallanmanın yönüne karar verilir. Ayrıca, $L(\lambda_0)$ operatörünün $i\omega_0$ ve $-i\omega_0$ özdeğerleri haricinde geriye kalan tüm

özdeğerlerinin reel kısımlarının negatif olduğu gösterilebilirse yine Lyapunov katsayısının reel kısmı (2.78)'in işaretinden yararlanılarak Teorem 2.2.1'in 6. maddesine göre oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapısı hakkında bilgi sahibi olunur.

2.5 Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemlerinde Hopf Çatallanma Analizi

Bu bölümde, bir önceki bölümde incelenen iki denklemden oluşan Neuman sınır değer koşullu reaksiyon difüzyon denklemlerine gecikme terimi eklenmesi ile oluşan sistemlerde Hopf çatallanmanın yönünü ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapısını tespit etmeyi sağlayacak bir algoritma verilecektir. Bu bölümde ele alınacak sistem hem reaksiyon-difüzyon terimi hem de gecikme terimi içerdiği için, bir önceki iki bölümde verilen algoritmalar birleştirilerek yeni bir algoritma elde edilmiştir. Bir önceki bölümde olduğu gibi, verilecek algoritma 1-boyutlu konum değişkeni için geçerli olsa da aynı hesaplamalar n -boyutlu uzaylara genişletilebilir.

$\Omega = (0, \ell\pi)$, $\ell \in \mathbb{R}^+$, $x \in (0, \ell\pi)$, $t > 0$ ve $\tau \in \mathbb{R}^+$ gecikme terimi olmak üzere

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} = f(\tau, u(x, t), v(x, t), u(x, t - \tau), v(x, t - \tau)) \\ v_t - d_2 v_{xx} = g(\tau, u(x, t), v(x, t), u(x, t - \tau), v(x, t - \tau)) \end{cases} \quad (2.79)$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = v_x(0, t) = 0, & u_x(\ell\pi, t) = v_x(\ell\pi, t) = 0 & , t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & v(x, 0) = v_0 & , x \in (0, \ell\pi) \end{cases}$$

Neuman sınır değerli gecikmeli reaksiyon-difüzyon sistemini ele alalım. Burada, $d_1, d_2, \lambda \in \mathbb{R}^+$; $f, g \in C^k (k \geq 5) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(0, 0, 0, 0) = g(0, 0, 0, 0) = 0$.

Hopf çatallanma analizi yapabilmemiz için sistemin lineer operatörünü tespit etmek, ardından da bu operatörün özdeğerlerini bulmak gerekmektedir. Bunun için öncelikle (2.79) sisteminden difüzyon terimlerinin çıkarılması ile elde edilen

$$\begin{cases} u_t = f(\tau, u(x, t), v(x, t), u(x, t - \tau), v(x, t - \tau)) \\ v_t = g(\tau, u(x, t), v(x, t), u(x, t - \tau), v(x, t - \tau)) \end{cases} \quad (2.80)$$

Gecikmeli Diferensiyel Denklem sistemini ele alalım. $u(x, t - \tau) = u_\tau$ ve $v(x, t - \tau) = v_\tau$ ile gösterilsin.

$$\begin{aligned} A(\tau) &= f_u(\tau, 0, 0, 0, 0), & B(\tau) &= f_v(\tau, 0, 0, 0, 0) \\ C(\tau) &= g_u(\tau, 0, 0, 0, 0), & E(\tau) &= g_v(\tau, 0, 0, 0, 0) \\ P(\tau) &= f_{u_\tau}(\tau, 0, 0, 0, 0), & R(\tau) &= f_{v_\tau}(\tau, 0, 0, 0, 0) \\ S(\tau) &= g_{u_\tau}(\tau, 0, 0, 0, 0), & T(\tau) &= g_{v_\tau}(\tau, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.81)$$

olmak üzere (2.80) sisteminin Jacobian matrisini bulmak için $u(x, t) = U(x)e^{\lambda t}$ ve $v(x, t) = V(x)e^{\lambda t}$ çözüm adaylarının sistemde yerine konması ile

$$\begin{cases} \lambda U(x)e^{\lambda t} = (A(\tau) + P(\tau)e^{-\lambda\tau}) U(x)e^{\lambda t} + (B(\tau) + R(\tau)e^{-\lambda\tau}) V(x)e^{\lambda t} \\ \lambda V(x)e^{\lambda t} = (C(\tau) + S(\tau)e^{-\lambda\tau}) U(x)e^{\lambda t} + (E(\tau) + T(\tau)e^{-\lambda\tau}) V(x)e^{\lambda t} \end{cases} \quad (2.82)$$

elde edilir. Bu ifade

$$\begin{pmatrix} \lambda - (A(\tau) + P(\tau)e^{-\lambda\tau}) & -(B(\tau) + R(\tau)e^{-\lambda\tau}) \\ -(C(\tau) + S(\tau)e^{-\lambda\tau}) & \lambda - (E(\tau) + T(\tau)e^{-\lambda\tau}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(x)e^{\lambda t} \\ V(x)e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

şeklinde yazılırsa (2.80) sisteminin Jacobian matrisinin

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} A(\tau) + P(\tau)e^{-\lambda\tau} & B(\tau) + R(\tau)e^{-\lambda\tau} \\ C(\tau) + S(\tau)e^{-\lambda\tau} & E(\tau) + T(\tau)e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$G = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

olmak üzere

$$L(\tau) = G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + J(\tau) \quad (2.86)$$

(2.79) sisteminin $(\tau, 0, 0, 0, 0)$ 'da hesaplanan lineer operatörü elde edilir.

Teorem 2.2.1'in şartlarının sağlanması amacıyla çok küçük $|\tau|$ değerleri için $f(\tau, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, $g(\tau, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ve $L(\tau)$ operatörlerinin λ çatallanma parametresine bağlı olarak analitik olduğunu kabul edelim.

O , τ_0 'ın bir komşuluğu olmak üzere, sistem (2.79) için Hopf çatallanma varsayımları aşağıdaki gibidir:

1. $\omega(\tau_0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(\tau_0) = 0$, $\alpha'(\tau_0) \neq 0$ ve $\beta(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ olacak şekilde $L(\tau)$ operatörünün tek katlı (basit), kompleks eşlenik ve τ 'ya göre sürekli türevlenebilen $\beta(\tau)$, $\bar{\beta}(\tau)$ özdeğerleri vardır.
2. $L(\tau_0)$ operatörünün $\beta(\tau_0)$ ve $\bar{\beta}(\tau_0)$ haricindeki diğer özdeğerlerinin reel kısımları sıfırdan farklıdır.

Bu kabuller altında, sistem (2.36) Teorem 2.2.1 gereğince $\tau = \tau_0$ 'da Hopf çatallanmaya sahiptir ve bu sistemde reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar. Fakat bu bilgiler çatallanmanın yönü ve periyodik çözümlerin kararlılığı hakkında bilgi edinmek için yeterli değildir. Bu konularda bilgi sahibi olmak için aşağıdaki algoritma izlenir.

$L_n(\tau) = \left(-G\frac{n^2}{\ell^2} + J(\tau)\right)$ olmak üzere, Lemma 2.4.1'den $L(\tau)$ operatörünün özdeğerlerini bulmak için $L_n(\tau)$ operatörünün özdeğerlerine bakmak yeterli olacaktır. $L_n(\tau)$ operatörünün karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - iz_n(\tau)\lambda + D_n(\tau) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.87)$$

ile elde edilir. Burada, $iz_n(\tau)$ ve $D_n(\tau)$ sırasıyla $L_n(\tau)$ operatörünün izini ve determinantını göstermektedir. Karakteristik denklem gecikme terimi nedeni ile üstel bir polinom olacağı için, bir önceki bölümdeki aksine $\lambda(\tau)$ özdeğerlerini veren genel bir formül belirlemek mümkün değildir.

Hopf çatallanma hipotezlerini sağlamak için Lemma 2.4.1'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\tau = \tau_n$ 'de $L_n(\tau)$ tek katlı, sanal $i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ özdeğerine sahip olması gerekir.

Lineer operatörü ve özdeğerleri bulmak için Bölüm 2.4'te verilen algoritma kullanılmıştır. Hopf çatallanmanın yönünü bulmak ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılık analizini yapmak içinse Bölüm 2.3'te verilen algoritmayı temel alarak devam edelim. Öncelikle,

$$L_1(\tau) = \begin{pmatrix} A(\tau) & B(\tau) \\ C(\tau) & E(\tau) \end{pmatrix} \text{ ve } L_2(\tau) = \begin{pmatrix} P(\tau) & R(\tau) \\ S(\tau) & T(\tau) \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$\begin{cases} \tilde{f} = f - (A(\tau)u + B(\tau)v + P(\tau)u_\tau + R(\tau)v_\tau) \\ \tilde{g} = g - (C(\tau)u + E(\tau)v + S(\tau)u_\tau + T(\tau)v_\tau) \end{cases} \quad (2.89)$$

$$U := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \text{ ve } F := \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

olmak üzere, (2.90) sistemini lineer ve lineer olmayan kısımlarını ayrı ayrı görebileceğimiz

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left(-\frac{n^2}{\ell^2}G + L_1(\tau) \right) U + L_2(\tau)U_\tau + F(\tau, U) \quad (2.91)$$

şeklinde yazalım. Gecikme terimini skale etmek ve çatallanma değerini 0'a taşımak için $t = \tau s$ ve $\mu = \tau - \tau_n$ değişken değiştirmeleri yapılarak sistem

$$\frac{\partial U}{\partial s} = (\tau_n + \mu) \left[\left(-\frac{n^2}{\ell^2}G + L_1(\tau) \right) U + L_2(\tau)U_1 + F(\tau, U) \right] \quad (2.92)$$

sistemine dönüştürülür. İşlemlerin takibini kolaylaştırmak için buradan sonra $s = t$ ve $L(\tau) = L$ alınarak devam edilecektir.

$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) \\ \phi_2(\theta) \end{pmatrix} \in C^1[-r, 0]$ ve $L_{n_\mu} : C^1[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. L_{n_μ} operatörü

$$L_{n_\mu} = (\tau_n + \mu) \left(-\frac{n^2}{\ell^2}G + L_1 \right) \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} + (\tau_n + \mu) L_2 \begin{pmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

şeklinde tanımlanırsa sistem (2.91)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_{n_\mu}U_\tau + F(\tau, U) \quad (2.94)$$

sistemine dönüşür. (2.91) sistemi $U = U(x, t)$ ve $U_\tau = U(x, t - \tau)$ olmak üzere iki farklı bilinmeyen ihtiva eder. Analize devam edebilmek için öncelikle bu sistemin bilinmeyen sayısını bire düşürmemiz, bunun içinse yeni operatörler tanımlamamız gerekmektedir. Öncelikle, (2.91) sisteminin lineer kısmı olan $\frac{\partial U}{\partial t} = L_{n_\mu}U_\tau$ Riesz Temsil Teoremi kullanarak yeniden ifade edilir. Bu teorem gereğince $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ için $\eta_{ij} : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bileşenleri $[-r, 0]$ üzerinde sınırlı değişimlere sahip ve $\phi \in C[-r, 0]$ için

$$L_\mu(\phi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta) \quad (2.95)$$

özelliğine sahip $\eta(\cdot, \mu) : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dönüşümü vardır. $\eta(\cdot, \mu)$ seçimi çalışılan diferensiyel denkleme bağlıdır. Bu fonksiyon yardımı ile, $\phi \in C^1[-r, 0]$

olmak üzere

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta} & , \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ \int_{-r}^0 d\eta(s, \mu)\phi(s) = L_\mu(\phi) & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.96)$$

operatörü tanımlanır ve böylece (2.91) sisteminin lineer kısmı, $\frac{\partial U_\tau}{\partial t} = A(\mu)U_\tau$ lineer sistemine dönüştürülür.

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0 & , \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ F(\phi, \mu) & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.97)$$

olarak tanımlanması ile de (2.91) sistemi tek bir değişkeni olan

$$\frac{\partial U_\tau}{\partial t} = A(\mu)U_\tau + R(\mu)U_\tau \quad (2.98)$$

sistemine dönüştürülür.

Buradan sonraki analiz Bölüm 2.3'teki algoritmanın aynısıdır. Yön analizi yapabilmek için $\mu = 0$ 'da $A(0)$ operatörünün $\beta(0)$ özdeğerine karşılık gelen $q(\theta)$ özvektörü ve $A^*(0)$ operatörünün $\bar{\beta}(0)$ özdeğerine karşılık gelen $q^*(s)$ özvektörü hesaplanmalıdır. η^T , η 'nın transpozunu göstermek üzere $A(0)$ operatörünün adjoint (ek) operatörü

$$A^*(\mu)\phi(s) = \begin{cases} -\frac{d\phi(s)}{ds} & , s \in (0, r] \text{ ise} \\ \int_{-r}^0 d\eta^T(s, \mu)\phi(-s) & , s = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.99)$$

ile tanımlanır. $q(\theta)$ ve $q^*(s)$ özvektörleri

$$\begin{aligned} A(0)q(\theta) &= i\omega_0 q(\theta) \\ A^*(0)q^*(s) &= -i\omega_0 q^*(s) \end{aligned} \quad (2.100)$$

eşitliklerinden yararlanılarak hesaplanır.

n -boyutlu sistemleri incelemek iki boyutlu sistemleri incelemekten daha zordur. Bu sistemleri incelemek için boyut indirgeme yöntemleri kullanılır. Burada boyut indirgemek için Center Manifold Teoremi kullanılacaktır.

Sıfır denge noktası civarında C_0 center manifoldunu tanımlamak için ilk önce manifoldun koordinatlarının belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bunun için ise özel bir

iççarpımın tanımlanmasına gereksinim duyulmaktadır. $\psi \in C[0, r]$ ve $\phi \in C[0, r]$ için iççarpım

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0) \cdot \phi(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta, \mu) \phi(\xi) d\xi \quad (2.101)$$

şeklinde tanımlansın. A ve A^* adjoint operatörler oldukları için $(\psi, \phi) \in D(A) \times D(A^*)$ için $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A^*\psi, \phi \rangle$ sağlanır. Yukarıda verilen q ve q^* bu iççarpım altında normalleştirilir, yani bu özvektörler $\langle q^*, q \rangle = 1$ ve $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ koşullarını sağlamalıdır. Her bir $x \in D(A)$ için center manifoldun koordinatlarını veren (z, w) ikilisinin oluşturulması gerekmektedir. Burada

$$z(t) = \langle q^*(\theta), x \rangle \quad (2.102)$$

ve

$$w = x(\theta) - z(t)q(\theta) - \bar{z}(t)\bar{q}(\theta) = x(\theta) - 2\text{Re}z(t)q(\theta) \quad (2.103)$$

eşitlikleri ile verilir. $\mu = 0$ iken (2.98) sisteminin x_t çözümleri için (2.102)

$$z(t) = \langle q^*(\theta), x_t(\theta) \rangle \quad (2.104)$$

ve (2.103)

$$w = x_t(\theta) - z(t)q(\theta) - \bar{z}(t)\bar{q}(\theta) = x_t(\theta) - 2\text{Re}z(t)q(\theta) \quad (2.105)$$

olarak tanımlanır. C_0 manifoldu üzerinde

$$w(z, \bar{z}, \theta) = w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + w_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.106)$$

olmak üzere $w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ 'dır. z ve \bar{z} sırasıyla q ve \bar{q}^* vektörleri yönündeki C_0 manifoldunun yerel koordinatlarıdır. Buradan $\langle q^*, w \rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir. (2.98) sisteminin $x_t \in C_0$ çözümleri için

$$z' = \langle q^*, x_t' \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \quad (2.107)$$

ya da $\mu = 0$ olduğunda

$$\begin{aligned} z' &= i\omega_0 z + \bar{q}^*(0) f(w(z, \bar{z}, \theta) + 2\text{Re}z(t)q(\theta)) \\ &= i\omega_0 z + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (2.108)$$

elde edilir. Bu kısaca

$$z' = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}) \quad (2.109)$$

şeklinde yazılabilir. (2.108) ve (2.109) denklemlerine dikkatli bakıldığında f, θ değişkeninin bir fonksiyonu olarak alınan bir operatör iken g fonksiyonunun θ değişkenine olan bağıllığı kaldırılmıştır.

Bir sonraki adım g fonksiyonunu z ve \bar{z} değişkenlerinin kuvvetleri cinsinden açmak ve çatallanmanın yön analizi için gerekli olan Lyapunov katsayısını hesaplamaktır. Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretini tespit edebilmek için g fonksiyonunun $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ 'da Taylor açılımındaki g_{ij} katsayılarının bulunması gerekmektedir. (2.108) ve (2.109)'dan

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) \quad (2.110)$$

olduğu ve g_{ij} katsayılarının w_{ij} katsayılarına bağlı olduğu bilinmektedir. Bu nedenle $w_{ij}(\theta)$ katsayılarının hesaplanması gerekmektedir. Bunun için öncelikle $w_{ij}(\theta)$ katsayılarını verecek denklem oluşturulur. (2.103) denkleminde t değişkenine göre türev alınır

$$w' = x_t - z'q - \bar{z}'\bar{q} \quad (2.111)$$

ve bu denklemde (2.98) ve (2.109) ifadeleri kullanılarak

$$w' = \begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0\}q(\theta) & , \theta \in [-r, 0) \text{ ise} \\ Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0\}q(0) + f_0 & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.112)$$

elde edilir. Bu ifade ise

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (2.113)$$

olmak üzere

$$w' = Aw + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (2.114)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan orijin civarında C_0 manifoldu üzerinde

$$w' = w_z z' + w_{\bar{z}} \bar{z}' \quad (2.115)$$

elde edilir. (2.106) ve (2.109) ifadelerinden faydalanarak $w_z, w_{\bar{z}}, z'$ ve \bar{z}' ifadeleri yerine yazılırsa w' için yeni bir eşitlik elde edilmiş olur. Elde edilen bu ifade ile (2.114) denkleminin sağ tarafı eşitlenirse

$$\begin{aligned} (2i\omega_0 I - A(0))w_{20}(\theta) &= H_{20}(\theta) \\ -A(0)w_{11}(\theta) &= H_{11}(\theta) \\ w_{02}(\theta) &= \bar{w}_{20}(\theta) \end{aligned} \quad (2.116)$$

eşitlikleri bulunur. w_{ij} katsayıları hesaplandıktan sonra (2.109) diferensiyel denklemi

$$z' = i\omega_0 z + g_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}(\theta) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (2.117)$$

şeklinde yazılabilir. $i + j \leq 3$ için g_{ij} katsayıları

$$\bar{q}^*(0) f_0 \left(zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) + w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta) z\bar{z} + w_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) \quad (2.118)$$

ifadesinin açılımından elde edilir. Poincaré Normal Form'da geçen, çatallanmanın yönünün belirlenmesinde kullanılan ve g_{ij} katsayılarından oluşan Lyapunov katsayısı olan $c_1(0)$ ise

$$c_1(0) = \frac{i}{\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21} \quad (2.119)$$

formülü ile hesaplanır. Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretinden yararlanılarak Teorem 2.2.1'in 5. maddesine göre çatallanmanın yönüne karar verilir. Ayrıca, L_0 operatörünün $\beta(0)$ ve $\bar{\beta}(0)$ özdeğerleri haricinde geriye kalan tüm özdeğerlerinin reel kısımlarının negatif olduğu gösterilebilirse yine Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretinden yararlanılarak Teorem 2.2.1'in 6. maddesine göre oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapısı hakkında bilgi verilebilir.

3. GECİKMELİ REAKSİYON-DİFÜZYON LENGYEL-EPSTEIN MODELİ'NİN HOPF ÇATALLANMA ANALİZİ

3.1 Genel Hopf Çatallanma Analizi

Bu bölümde Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Lengyel-Epstein modelinin Hopf çatallanma analizi çalışılacaktır. Problem, $\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olup; Neuman sınır değeri ile birlikte gözönüne alınmıştır.

$u = u(x, t)$ ve $v = v(x, t)$, sırasıyla, $t > 0$ zamanındaki ve $x \in \Omega$ konumundaki aktivatör ve inhibitörün konsantrasyonunu göstermek üzere Gecikmeli Reaksiyon-Difüzyon Lengyel-Epstein modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - d_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = a - u(x,t) - 4 \frac{u(x,t)v(x,t-\tau)}{1+u^2(x,t)} \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \sigma b \left(u(x,t) - 4 \frac{u(x,t)v(x,t-\tau)}{1+u^2(x,t)} \right) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) & , x \in \Omega = (0, \pi) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0 & , x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases}$$

Burada, $a > 0$ and $b > 0$ konsantrasyonla ilgili parametreler, $\sigma > 0$ skala

parametresi, $\tau > 0$ gecikme terimi, $d_1 > 0$ ve $d_2 > 0$, sırasıyla, aktiviteörün ve inhibitörün difüzyon katsayılarıdır. Sistem (3.1)'in $\tau = 0$ iken Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır. ([17], [18], [19] ve buradaki referanslara bakınız).

$\alpha = \frac{a}{5}$ olmak üzere, $(u^*, v^*) = (\alpha, 1 + \alpha^2)$ (3.1) sisteminin tek pozitif denge noktasıdır. Matematiksel olarak işlemlerin daha kolay bir şekilde ilerlemesi için denge noktası (u^*, v^*) 'in orijine kaydırılması gerekir. $u = u - u^*$ ve $v = v - v^*$ değişken değiştirmeleri kullanılarak, denge noktası orijin olan aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right) u(x,t) + \left(\frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2} \right) v(x,t - \tau) + YMT \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) u(x,t) + \left(\frac{-\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} \right) v(x,t - \tau) + YMT. \end{cases} \quad (3.2)$$

Burada YMT yüksek mertebeden terimleri göstermektedir.

Bölüm 2.5'te anlatıldığı gibi Hopf çatallanma analizi sistemin lineer operatörünün özdeğerleri üzerine kurulmuş bir analizdir. Bu nedenle, sistem (3.2)'nin lineer operatörünün özdeğerlerini bulmak için sistemin karakteristik denkleminin bulunmasına ihtiyaç vardır. Bunun için (3.2) sisteminde difüzyon teriminin çıkarılması ile elde edilen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right) u(x,t) + \left(\frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2} \right) v(x,t - \tau) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= \left(\frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) u(x,t) + \left(\frac{-\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} \right) v(x,t - \tau) \end{aligned} \quad (3.3)$$

sistemini ele alalım. Bu sistemin Hopf çatallanma analizi Çelik C. ve Merdan H. tarafından [16]'da çalışılmıştır. Sistem (3.3)'ün Jacobian matrisini bulmak için $u(x,t) = A(x)e^{\lambda t}$ ve $v(x,t) = B(x)e^{\lambda t}$ çözüm adayları sistemde yerine yazılır ise

$$\begin{aligned} \lambda A(x)e^{\lambda t} &= \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right) A(x)e^{\lambda t} + \left(\frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2} \right) B(x)e^{\lambda t - \lambda \tau} \\ \lambda B(x)e^{\lambda t} &= \left(\frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) A(x)e^{\lambda t} + \left(\frac{-\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} \right) B(x)e^{\lambda t - \lambda \tau} \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitlikleri elde edilir. Son ifade,

$$\begin{pmatrix} \lambda - \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right) & \left(\frac{4\alpha}{1 + \alpha^2} \right) e^{-\lambda \tau} \\ - \left(\frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) & \lambda + \left(\frac{\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} \right) e^{-\lambda \tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x)e^{\lambda t} \\ B(x)e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılırsa (3.3) sisteminin Jacobian matrisi

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{3\alpha^2-5}{1+\alpha^2} & \frac{-4\alpha}{1+\alpha^2}e^{-\lambda\tau} \\ \frac{2\sigma b\alpha^2}{1+\alpha^2} & \frac{-\sigma b\alpha}{1+\alpha^2}e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. (3.3) sisteminin Jacobian matrisinden yararlanarak elde edilen (3.2) sisteminin $(\tau, 0, 0)$ 'da hesaplanan lineer operatörü

$$L(\tau) = \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + J(\tau) \right) \quad (3.6)$$

olup, D ve J sırasıyla,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad J(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{3\alpha^2-5}{1+\alpha^2} & \frac{-4\alpha}{1+\alpha^2}e^{-\lambda\tau} \\ \frac{2\sigma b\alpha^2}{1+\alpha^2} & \frac{-\sigma b\alpha}{1+\alpha^2}e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

dir.

Lemma 2.4.1'den dolayı sistem (3.2)'nin lineer operatörü olan $L(\tau)$ 'nin özdeğerlerini bulmak için, aşağıda verilen $L_n(\tau)$ lineer operatörün özdeğerlerini bulmamız yeterli olacaktır:

$$L_n(\tau) = \begin{pmatrix} \left(\frac{3\alpha^2-5}{1+\alpha^2} \right) - d_1 n^2 & \left(-\frac{4\alpha}{1+\alpha^2} \right) e^{-\lambda\tau} \\ \left(\frac{2\sigma b\alpha^2}{1+\alpha^2} \right) & \left(-\frac{\sigma b\alpha}{1+\alpha^2} \right) e^{-\lambda\tau} - d_2 n^2 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

$L_n(\tau)$ operatörünün karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - iz(L_n(\tau)) + \det(L_n(\tau)) = 0 \quad (3.9)$$

dır. $iz(L_n(\tau))$ ve $\det(L_n(\tau))$, (3.9)'da yerine yazılırsa

$$\begin{cases} A = (d_1 + d_2) n^2 - m \\ B = 5k + kd_1 n^2 \\ C = k \\ D = d_1 d_2 n^4 - m d_2 n^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

ve

$$m = \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right), \quad k = \left(\frac{\sigma b\alpha}{1 + \alpha^2} \right) \quad (3.11)$$

olmak üzere

$$\lambda^2 + A\lambda + B e^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} + D = 0 \quad (3.12)$$

denklemi elde edilir. Karakteristik denklem gecikme terimi nedeni ile üstel bir polinom olduğu için, $\lambda(\tau)$ özdeğerlerini veren genel bir formül belirlemek mümkün değildir.

Sonuç 3.1.1 $L(\tau)$ operatörünün sonsuz çoklukta özdeğeri vardır.

$L_n(\tau)$ operatörünün karakteristik denklemi olan (3.12), üstel bir polinom olduğu için $\forall n > 0$ için denklem sonsuz çoklukta köke sahiptir. Lemma 2.4.1'den $L(\tau)$ operatörünün sonsuz çoklukta özdeğeri vardır.

Şimdi de, (3.1) sisteminde hangi durumlarda Hopf çatallanmanın var olduğuna bakalım.

Teorem 3.1.1 *Sistem (3.1)'in (u^*, v^*) denge noktasında, çatallanma parametresi olan τ , kritik τ_n değerlerinden geçerken aşağıda verilen koşullardan birinin sağlanması durumunda, sistem (3.1)'de $\tau = \tau_n$ çatallanma değerinde Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.*

$X_n = (A^2 - C^2 - 2D)$, $Y_n = (D^2 - B^2)$ ve $X_n^2 - 4Y_n > 0$ olmak üzere:

1. $X_n = 0$ ve $Y_n < 0$ iken,
2. $X_n > 0$ ve $Y_n < 0$ ve $(d_1)^2 > (d_2)^2$ iken,
3. $X_n < 0$ ve $Y_n = 0$ iken,
4. $X_n < 0$ ve $Y_n < 0$ iken,
5. $X_n < 0$ ve $Y_n > 0$ ve
 - (a) $X_n^2 - (2 + 2\sqrt{5})Y_n > 0$ iken,
 - (b) $X_n B^2 C^2 + B^4 C^4 + Y_n < 0$ iken.

İspat 2 *Sistem (3.1)'de Hopf çatallanmanın ortaya çıkması için en az bir $\tau = \tau_n$ değerinin olması gereklidir ve τ_n 'in bir I komşuluğunda, $\tau \in I$ için lineer operatör $L(\tau)$ 'nin τ 'ya göre sürekli türevlenebilen tek katlı kompleks eşlenik özdeğerleri $\lambda_{1,2}(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$ vardır ve bu özdeğerler aşağıdaki koşulları sağlarlar:*

1. $\alpha(\tau_n) = 0$,
2. $\omega(\tau_n) = \omega_n > 0$,
3. $\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_n}\right) \neq 0$,
4. $L(\tau)$ 'nin $\lambda_{1,2}$ haricinde geriye kalan tüm özdeğerlerinin reel kısımları sıfırdan farklıdır.

(3.12) karakteristik denklemi üstel bir polinom olduğu için var olan sonsuz çokluktaki köklerinin herbirini bulmak mümkün değildir. Bu nedenle bu polinomun yukarıdaki şartları sağlayacak sanal bir özdeğerinin olup olmadığını belirlemek için $\lambda = i\omega_n$, $\omega_n > 0$ (3.12)'de yerine konur ise

$$-\omega_n^2 + Ai\omega_n + B(\cos \omega_n\tau - i \sin \omega_n\tau) + Ci\omega_n(\cos \omega_n\tau - i \sin \omega_n\tau) + D = 0 \quad (3.13)$$

denklemi elde edilir. (3.13)'ün reel ve sanal kısımları ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$-\omega_n^2 + B \cos \omega_n\tau + C\omega_n \sin \omega_n\tau + D = 0 \quad (3.14)$$

$$A\omega_n - B \sin \omega_n\tau + C\omega_n \cos \omega_n\tau = 0 \quad (3.15)$$

denklemlerine ulaşılır. Trigonometrik terimlerden kurtulmak için her iki tarafın karesi alınır ve taraf tarafa toplanır ise

$$\omega_n^4 + (A^2 - C^2 - 2D)\omega_n^2 + D^2 - B^2 = 0 \quad (3.16)$$

denklemi elde edilir.

Burada, $X_n = (A^2 - C^2 - 2D)$ ve $Y_n = (D^2 - B^2)$ olmak üzere, (3.16)'nın kökleri

$$\omega_n^2 = \frac{-X_n \pm \sqrt{X_n^2 - 4Y_n}}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

formundadır.

Sayfa 36'de verilen şartlardan (2)'nin sağlanması için (3.17) denkleminden hangi durumlarda pozitif bir ω_n kökünün elde edileceğinin tespit edilmesi gerekir. Öncelikle tüm ihtimalleri değerlendirerek kaç farklı şekilde kök bulabileceğimize bakalım.

1. Eğer $X_n^2 - 4Y_n < 0$ ise $\omega_n^2 \in \mathbb{C}$ 'dir. Bu durumda reel kök mevcut değildir.
2. Eğer $X_n^2 - 4Y_n = 0$ ise $\omega_n^2 = \frac{(-X_n)}{2}$ 'dir. Bu durumda
 - (a) $X_n > 0$ iken $\omega_{n1,2} \in \mathbb{C}$ 'dir. Sonuç olarak, reel kök mevcut değildir.
 - (b) $X_n = 0$ iken $\omega_{n1,2} = 0$ 'dır. O halde, pozitif reel kök mevcut değildir.
 - (c) $X_n < 0$ olması halinde ise tek bir pozitif reel kök vardır ve bu kök $\omega_n = \sqrt{\frac{(-X_n)}{2}}$ ile verilir.
3. Eğer $X_n^2 - 4Y_n > 0$ ise
 - (a) $X_n = 0$ ve $Y_n < 0$ iken tek bir pozitif reel kök vardır ve $\omega_n = \sqrt[4]{Y_n}$ ile verilir.
 - (b) $X_n > 0$ ve $Y_n > 0$ iken $X_n > \sqrt{X_n^2 - 4Y_n}$ olacağı için $\omega_n^2 < 0$ 'dır. Bu durumda, reel kök mevcut değildir.
 - (c) $X_n > 0$ ve $Y_n = 0$ iken $\omega_n^2 = \frac{-X_n \pm \sqrt{X_n^2}}{2}$ olacağı için $\omega_n^2 = -X_n$ veya $\omega_n^2 = 0$ 'dır. Sonuç olarak, pozitif reel kök yoktur.
 - (d) $X_n > 0$ ve $Y_n < 0$ iken tek bir pozitif reel kök vardır ve bu kök $\omega_n = \sqrt{\frac{-X_n + \sqrt{X_n^2 - 4Y_n}}{2}}$ ile verilir.
 - (e) $X_n < 0$ ve $Y_n < 0$ iken tek bir pozitif reel kök vardır ve bu kök $\omega_n = \sqrt{\frac{-X_n + \sqrt{X_n^2 - 4Y_n}}{2}}$ ile verilir.
 - (f) $X_n < 0$ ve $Y_n = 0$ iken $\omega_n^2 = \frac{-X_n \pm \sqrt{X_n^2}}{2}$ olacağı için $\omega_n^2 = -X_n$ veya $\omega_n^2 = 0$ 'dır. Dolayısıyla tek bir pozitif reel kök vardır ve $\omega_n = \sqrt{-X_n}$ ile verilir.
 - (g) $X_n < 0$ and $Y_n > 0$ olduğunda ise iki farklı pozitif reel kök vardır ve bu kökler $\omega_{n1} = \sqrt{\frac{-X_n + \sqrt{X_n^2 - 4Y_n}}{2}}$ ve $\omega_{n2} = \sqrt{\frac{-X_n - \sqrt{X_n^2 - 4Y_n}}{2}}$ formülleri ile verilir.

Sonuç olarak 2c, 3a, 3d, 3e ve 3f durumlarında tek bir pozitif reel kök mevcutken 3g durumunda iki farklı pozitif reel kök mevcuttur. Bu durumlarda sayfa 36'de verilen şartlardan (1) ve (2) sağlanır.

Şimdi, $\lambda = i\omega_n$, $\omega_n > 0$ pozitif reel köklerin herbiri için Hopf çatallanmanın gerçekleşme ihtimali olan parametre değerleri, yani τ_n 'leri bulalım. Öncelikle, (3.14)'ten $\cos \omega_n \tau_n$ çekilir

$$\cos \omega_n \tau_n = \frac{\omega_n^2 - C\omega_n \sin \omega_n \tau_n - D}{B} \quad (3.18)$$

ve (3.15)'te yerine yazılır ise

$$A\omega_n - B \sin \omega_n \tau_n + C\omega_n \frac{(\omega_n^2 - C\omega_n \sin \omega_n \tau_n - D)}{B} = 0 \quad (3.19)$$

denklemine ulaşılır ve buradan $\sin \omega_n \tau_n$ ise

$$\sin \omega_n \tau_n = \frac{C\omega_n^3 + (AB - CD)\omega_n}{B^2 + C^2\omega_n^2} \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. $\sin \omega_n \tau_n$ (3.18)'de yerine yazılırsa $\cos \omega_n \tau_n$

$$\cos \omega_n \tau_n = \frac{(B - AC)\omega_n^2 - BD}{B^2 + C^2\omega_n^2} \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\tan \omega_n \tau_n = \frac{C\omega_n^3 + (AB - CD)\omega_n}{(B - AC)\omega_n^2 - BD} \quad (3.22)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak

$$\tau_{n,k} = \frac{1}{\omega_n} \arctan \left(\frac{C\omega_n^3 + (AB - CD)\omega_n}{(B - AC)\omega_n^2 - BD} \right) + \frac{k\pi}{\omega_n}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

elde edilir. Bu tezde $k = 0$ durumu ele alınacaktır, o nedenle tezin tamamında $\tau_{n,0} = \tau_n$ olarak gösterilecektir. Bu şekilde yapılan analiz $\forall k > 0$ için genişletilebilir.

(3.23)'te görüldüğü üzere 2c, 3a, 3d, 3e ve 3g durumlarında ω_n 'ler tek olduğu için çatallanmanın gerçekleşme ihtimalinin olduğu çatallanma değerleri $\tau = \tau_n$ 'ler de $\forall n$ için tektir. Bu τ_n çatallanma değerlerinde $\forall n$ için karakteristik denklem (3.12)'nin tek bir tam sanal kökü vardır, o da sayfa 36'de verilen ω_n 'dir. Bu durumda (3.12)'nin diğer köklerinin reel kısımlarının $\tau = \tau_n$ 'deki değeri sıfırdan farklıdır. Sonuç olarak sayfa 36'de verilen (4) şartı da sağlanır.

Şimdi geriye kalan son şartımızı, sayfa 36'deki 3'ü kontrol edelim. Karakteristik denklemin τ 'ya göre türevi alınursa

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{B\lambda + C\lambda^2}{2\lambda e^{\lambda\tau} + Ae^{\lambda\tau} - B\tau + C - C\lambda\tau} \quad (3.24)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde τ yerine τ_n yazıldığında

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n} = \frac{Bi\omega_n + C(i\omega_n)^2}{2i\omega_n e^{i\omega_n\tau_n} + Ae^{i\omega_n\tau_n} - B\tau_n + C - Ci\omega_n\tau_n} \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir. Amacımız bu türevin reel kısmının $\tau = \tau_n$ 'deki değerinin sıfırdan farklı olduğunu göstermektir.

Lemma 3.1.1 $\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{a+ib}{c+id}$ sıfırdan farklı bir kompleks sayı olmak üzere

$Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \neq 0$ olmasıdır.

İspat 3 $\implies Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) \neq 0$ olsun.

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

ifadesinden

$$Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} \neq 0 \implies (ac+bd) \neq 0$$

dir. Şimdi $Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{c+id}{a+ib} = \frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{a^2+b^2}$$

olup, buradan ise

$$Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(ac+bd)}{a^2+b^2} \text{ ve } (ac+bd) \neq 0 \implies \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \neq 0$$

olarak elde edilir.

\Leftarrow Benzer şekilde gösterilir. \square

İşlem kolaylığı açısından Lemma 3.1.1'den dolayı $Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)$ yerine $Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}$ 'i incelememiz yeterli olacaktır.

Şimdi (3.25)'ten $\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}$ 'i bulalım.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} &= \frac{[(A \cos \omega_n \tau_n - 2\omega_n \sin \omega_n \tau_n - B\tau_n + C)](-C\omega_n^2 - iB\omega_n)}{(-C\omega_n)^2 + iB\omega_n} \frac{(-C(\omega_n)^2 - iB\omega_n)}{(-C(\omega_n)^2 - iB\omega_n)} \\ &+ \frac{[i(2\omega_n \cos \omega_n \tau_n + A \sin \omega_n \tau_n C\omega_n \tau_n)](-C(\omega_n)^2 - iB\omega_n)}{(-C(\omega_n)^2 + iB\omega_n) (-C\omega_n^2 - iB\omega_n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin reel kısmından $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n}$ ifadesi

$$\begin{aligned} Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} &= \frac{(C^4 + 2DC^2 - AC^2 + 2B^2)\omega_n^2}{(B^2 + C^2(\omega_n)^2)} \\ &+ \frac{2C^2(B^2 - D^2) + B^2(A^2 - C^2 - 2D)}{(B^2 + C^2\omega_n^2)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

olarak elde edilir. Sayfa 36'de incelenen her bir madde sonucu elde edilen ω_n 'ler (3.26)'da yerine konur ve sayfa 36'de verilen şartlardan (3)'ün sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir.

1. 2c **Durumu:** $X_n^2 - 4Y_n = 0$ ve $X_n < 0$ olması durumunda tek bir pozitif reel kök olduğunu hatırlayalım. Bu kök,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(-X_n)}{2}} = \sqrt{\frac{-(A^2 - C^2 - 2D)}{2}} \quad (3.27)$$

dir. (3.27), (3.26)'da yerine yazılır ise

$$\begin{aligned} Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} &= \frac{[(C^4 + 2DC^2 - AC^2 + 2B^2)(-(A^2 - C^2 - 2D))]}{2(B^2 + C^2\omega_n^2)} \\ &+ \frac{[2C^2(B^2 - D^2) + B^2(A^2 - C^2 - 2D)]}{(B^2 + C^2\omega_n^2)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir. $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} = 0$ olduğu için teoremin hipotezlerinin tamamı sağlanamadığından dolayı bu şart altında sistem (3.2)'de $\tau = \tau_n$ iken Hopf çatallanma oluşmaz.

2. 3a **Durumu:** $X_n^2 - 4Y_n > 0$ ve $X_n = 0$ ve $Y_n < 0$ olduğu durumda yine tek bir pozitif reel kök vardır ve bu kök

$$\omega_n^2 = \sqrt{-Y_n} = \sqrt{B^2 - D^2} \quad (3.29)$$

dir. (3.29), (3.26)'da yerine yazılır ve $X_n^2 - 4Y_n = 0$ olduğu gözönüne alınrsa

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} = \frac{[2B^2\sqrt{B^2 - D^2} + 2C^2(B^2 - D^2)]}{(B^2 + C^2\sqrt{B^2 - D^2})} \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir. $Y_n < 0$ olduğu için $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$ 'dır ve sonuç olarak sistem (3.2)'de $\tau = \tau_n$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

3. 3d **Durumu:** $X_n^2 - 4Y_n > 0$ ve $X_n > 0$ ve $Y_n < 0$ iken tek bir pozitif reel kök vardır. Bu kök

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 - 4Y}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(B^2 - D^2)}}{2}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

ile verilir. Burada (3.31)'i, (3.26)'da yerine yazmak işlem kalabalığına neden olacağı için daha basit bir analiz yapacağız.

(3.26)'dan $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n}$ ifadesi

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} &= \frac{(C^4 + 2DC^2 - AC^2 + 2B^2)(\omega_n)^2}{(B^2 + C^2\omega_n^2)} \\ &\quad + \frac{2C^2(D^2 - B^2) + B^2(A^2 - C^2 - 2D)}{(B^2 + C^2\omega_n^2)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} Y &= D^2 - B^2 < 0 \implies (B^2 - D^2) > 0 \implies 2C^2(B^2 - D^2) > 0 \\ X &= (A^2 - C^2 - 2D) > 0 \text{ ve } \omega_n^2 > 0 \end{aligned}$$

olup, eğer $(C^4 + 2DC^2 - AC^2 + 2B^2) > 0$ olursa $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$ olacaktır.

Diğer taraftan, (3.10)'dan

$$\begin{aligned} (C^4 + 2DC^2 - AC^2 + 2B^2) &= k^4 + (20 + 2m)k^2d_1n^2 \\ &\quad + (50 - m^2)k^2 + \left((d_1)^2 - (d_2)^2 \right) k^2n^4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

ve (3.11)'den ise

$$\begin{aligned} (50 - m^2) &= 50 - \frac{(3\alpha^2 - 5)^2}{(1 + \alpha^2)^2} \\ &= \frac{25 + 80\alpha^2 + 41\alpha^4}{(1 + \alpha^2)^2} > 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. Bu durumda (3.33) ve (3.34) kullanılarak

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0 \iff (d_1)^2 > (d_2)^2 \quad (3.35)$$

sonucuna ulaşılır. O halde, $(d_1)^2 > (d_2)^2$ ise $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$ 'dır ve sistem (3.2)'de $\tau = \tau_n$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

4. **3e Durumu:** $X_n^2 - 4Y_n > 0$ ve $X_n < 0$ ve $Y_n < 0$ iken yine tek bir pozitif reel kök vardır ve bu kök

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 - 4Y}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

ifadesi ile verilir. (3.36), (3.26)'de yerine yazılır ise

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau} &= \frac{2C^2(D^2 - B^2) + B^2(A^2 - C^2 - 2D)}{\left(B^2 + C^2 \left[\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2} \right] \right)} \\ &+ \frac{(C^4 + 2DC^2 - AC^2 + 2B^2) \left[\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2} \right]}{\left(B^2 + C^2 \left[\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2} \right] \right)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n}$ ifadesinin paydası pozitiftir, o nedenle $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n}$ 'ın işaretini payın işareti belirleyecektir. $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n}$ 'nın

payı

$$\frac{C^2}{2} (C^2 - A^2 + 2D)^2 + 2C^2 (B^2 - D^2) + \left[\frac{C^2}{2} (C^2 - A^2 + 2D) + B^2 \right] \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}$$

olup;

$$\begin{aligned} X &= (A^2 - C^2 - 2D) < 0 \implies (C^2 - A^2 + 2D) > 0 \\ Y &= (D^2 - B^2) < 0 \implies (B^2 - D^2) \end{aligned}$$

olduğu için $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$ 'dır ve sistem (3.2)'de $\tau = \tau_n$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

5. 3f **Durumu:** $X_n^2 - 4Y_n > 0$ ve $X_n < 0$ ve $Y_n = 0$ iken tek bir pozitif reel kök vardır ve bu kök

$$\omega_n = \sqrt{-X} = \sqrt{-(A^2 - C^2 - 2D)} \quad (3.37)$$

ile verilir. (3.37), (3.26)'da yerine yazılır ise

$$Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} = \frac{C^2 (C^2 - A^2 + 2D)^2 + B^2 (C^2 - A^2 + 2D)}{(B^2 + C^2 [-(A^2 - C^2 - 2D)])}$$

elde edilir. Burada $X = (A^2 - C^2 - 2D) < 0$ olduğu için $(C^2 - A^2 + 2D) > 0$ 'dır. Dolayısıyla $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$ 'dır ve sistem (3.2)'de $\tau = \tau_n$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

6. 3g **Durumu:** $X_n^2 - 4Y_n > 0$ ve $X_n < 0$ ve $Y_n > 0$ iken ise iki farklı pozitif reel kök vardır. Bu kökler

$$\begin{aligned} \omega_{n_1} &= \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 - 4Y}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2}} \\ \omega_{n_2} &= \sqrt{\frac{-X - \sqrt{X^2 - 4Y}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) - \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

ifadeleri ile verilir. Öncelikle (3.38), (3.26)'da yerine yazılır ise

$$\begin{aligned}
& \left. \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right|_{\tau=\tau_n} \\
& \frac{C^2 (C^2 - A^2 + 2D)^2}{\left(2B^2 + C^2 \left[-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \right] \right)} \\
& + \frac{2B^2 \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{\left(2B^2 + C^2 \left[-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \right] \right)} \\
& + \frac{C^2 (C^2 - A^2 + 2D) \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{\left(2B^2 + C^2 \left[-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \right] \right)} \\
& - \frac{4C^2 (D^2 - B^2)}{\left(2B^2 + C^2 \left[-(A^2 - C^2 - 2D) + \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \right] \right)}
\end{aligned}$$

olup, $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n}$ 'in paydası ve payındaki diğer terimler pozitif olduğu için

$$\left. \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right|_{\tau=\tau_n} > 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$(C^2 - A^2 + 2D) \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(B^2 - D^2)} - 4(D^2 - B^2) > 0$$

olmasıdır. Bu ifadenin ne zaman pozitif olacağına bakalım:

$$\begin{aligned}
& (C^2 - A^2 + 2D) \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} - 4(D^2 - B^2) > 0 \\
& \iff \\
& \left((C^2 - A^2 + 2D) \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \right)^2 > (4(D^2 - B^2))^2 \\
& \iff \\
& \left((C^2 - A^2 + 2D)^2 - 2(D^2 - B^2) \right)^2 > 20(D^2 - B^2)^2 \\
& \iff \\
& (C^2 - A^2 + 2D)^2 - (2 + 2\sqrt{5})(D^2 - B^2) > 0.
\end{aligned}$$

Bu durumda, $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(C^2 - A^2 + 2D)^2 - (2 + 2\sqrt{5}) (D^2 - B^2) > 0$$

olmasıdır. Sonuç olarak $(C^2 - A^2 + 2D)^2 - (2 + 2\sqrt{5}) (D^2 - B^2) > 0$ ise sistem (3.2)'de $\tau = \tau_n$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

Şimdi diğer kök için inceleme yapalım. (3.38), (3.26)'da yerine yazılır ise

$$\begin{aligned} Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} &= \frac{C^2 (C^2 - A^2 + 2D)^2 + 2B^2 \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2 \left(B^2 + C^2 \left[\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) - \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2} \right] \right)} \\ &+ \frac{C^2 \left((C^2 - A^2 + 2D) \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \right)}{2 \left(B^2 + C^2 \left[\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) - \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2} \right] \right)} \\ &- \frac{4C^2 (D^2 - B^2)}{2 \left(B^2 + C^2 \left[\frac{-(A^2 - C^2 - 2D) - \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)}}{2} \right] \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n}$ ifadesinin paydası ve payındaki diğer terimler pozitif olduğu için

$$Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\left[\begin{array}{l} (C^2 - A^2 + 2D)^2 - (C^2 - A^2 + 2D) \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \\ - 2B^2 C^2 \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} - 4(D^2 - B^2) \end{array} \right] > 0$$

olmasıdır. Bu ifadenin ne zaman pozitif olacağına bakalım:

$$\left[\begin{array}{l} (C^2 - A^2 + 2D)^2 - (C^2 - A^2 + 2D) \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} \\ - 2B^2 C^2 \sqrt{(A^2 - C^2 - 2D)^2 - 4(D^2 - B^2)} - 4(D^2 - B^2) \end{array} \right] > 0$$

\Updownarrow

$$(C^2 - A^2 + 2D)^2 - 4(D^2 - B^2) > [(C^2 - A^2 + 2D) - 2B^2 C^2]^2$$

\Updownarrow

$$(C^2 - A^2 + 2D) B^2 C^2 - B^4 C^4 - (D^2 - B^2) > 0.$$

Bu durumda, $Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_n} > 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(C^2 - A^2 + 2D) B^2 C^2 - B^4 C^4 - (D^2 - B^2) > 0$$

olmasıdır. Sonuç olarak $(C^2 - A^2 + 2D) B^2 C^2 - B^4 C^4 - (D^2 - B^2) > 0$ ise sistem (3.2)'de $\tau = \tau_n$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar. Bu ise ispatı tamamlar. \square

Bu teorem, (3.1) sisteminde hangi şartlarda Hopf çatallanmanın var olduğunu ifade etmektedir. Şimdi bu durumlarda meydana gelen Hopf çatallanmanın yönünü ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılık analizini yapalım.

Denge noktası orijin olan sistem

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{x^2} + \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right) u(x,t) + \left(\frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2} \right) v(x,t - \tau) + f(u,v,\tau) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{x^2} + \left(\frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) u(x,t) + \left(\frac{-\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} \right) v(x,t - \tau) + g(u,v,\tau) \end{cases} \quad (3.39)$$

olup, denklemlerdeki f ve g fonksiyonları ise

$$\begin{cases} f(u,v,\tau) = \frac{4\alpha(3-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2} u(x,t)^2 + \frac{4(\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^2} u(x,t)v(x,t-\tau) + YMT \\ g(u,v,\tau) = \frac{\sigma b}{4} f(u,v,\tau) \end{cases} \quad (3.40)$$

olarak tanımlıdırlar.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad J(\tau) = \begin{pmatrix} \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right) & \left(\frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2} \right) \\ \left(\frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) & \left(\frac{-\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} \right) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

ve $L_n(\tau) = (-n^2 D + J(\tau))$ olmak üzere sistem (3.39) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = L_n(\tau) \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t - \tau) \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t - \tau) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Gecikme terimini skale etmek ve çatallanma değerini 0'a taşımak için $t = \tau s$ ve $\mu = \tau - \tau_n$ değişken değiştirmeleri yapılarak sistem (3.41)'ye denk aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} u(x,s) \\ v(x,s) \end{pmatrix} = (\tau_n + \mu) \left(L_n(\tau) \begin{pmatrix} u(x,s) \\ v(x,s - 1) \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} u(x,s) \\ v(x,s - 1) \end{pmatrix} \right). \quad (3.42)$$

Buradan sonra hesaplamaları daha kolay takip edebilmek için $s = t$ ve $L_n(\tau) = L_n$ olarak devam edeceğiz.

$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \phi_1(\theta) \\ \phi_2(\theta) \end{pmatrix} \in C^1[-1, 0]$, $L_{n_\mu} : C^1[-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $f, g : C^1[-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. L_{n_μ} operatörünü, f ve g fonksiyonlarını sırasıyla,

$$\begin{aligned} L_{n_\mu}(\phi(\theta)) &= (\tau_n + \mu) \left(\begin{bmatrix} \frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} - d_1 n^2 & 0 \\ \frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + (\tau_n + \mu) \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2} \\ 0 & \frac{-\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} - d_2 n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$f(\phi(\theta)) = \frac{4\alpha(3 - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \phi_1(0)^2 + \frac{4(\alpha^2 - 1)}{(1 + \alpha^2)^2} \phi_1(0)\phi_2(-1) + YMT \quad (3.44)$$

$$g(\phi(\theta)) = \frac{\sigma b}{4} f(\phi(\theta))$$

şeklinde tanımlayalım.

$U(x, t) = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix}$ ve $U_t = U(x, t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$ olarak alınırsa sistem (3.41) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_{n_\mu} U_t + F(U, \mu) \quad (3.45)$$

Sistem (3.45)'da $U(x, t)$ ve $U_t = U(x, t + \theta)$ olmak üzere iki farklı bilinmeyeni vardır. Bilinmeyen sayısını ikiden bire düşürmek için bazı operatörler tanımlamamız gerekmektedir.

Riesz Temsil teoreminden, matris değerli $\eta(\cdot, \mu)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \eta(\cdot, \mu) : [-1, 0] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ve } \phi \in C^1[-1, 0] \\ L_{n_\mu}(\phi(\theta)) &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta). \end{aligned} \quad (3.46)$$

$\delta(\theta)$ dirac delta fonksiyonu olmak üzere $d\eta(\theta, \mu)$ ise aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$d\eta(\theta, \mu) = (\tau_n + \mu) \left(\begin{bmatrix} \frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} - d_1 n^2 & 0 \\ \frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2} & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta) \right) + (\tau_n + \mu) \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2} \\ 0 & \frac{-\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2} - d_2 n^2 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1) \right) d\theta. \quad (3.47)$$

Bu seçimler altında, $A(\mu)\phi$ ve $R(\mu)\phi$ operatörleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta} & , \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta) = L_{n\mu}(\phi) & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.48)$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0 & , \theta \in [-1, 0) \text{ ise} \\ F(\theta) & , \theta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.49)$$

ve iki bilinmeyenli sistem (3.45) tek bilinmeyenli aşağıdaki sisteme dönüştürülür:

$$\frac{\partial U_t}{\partial t} = A(\mu)U_t + R(\mu)U_t. \quad (3.50)$$

Center manifold koordinatlarını oluşturabilmemiz için ihtiyacımız olan iççarpımı şu şekilde tanımlayalım: $\psi, \phi \in C[-1, 0]$ olmak üzere

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0) \cdot \phi(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta, \mu)\phi(\xi) d\xi. \quad (3.51)$$

$q(\theta)$, $A(0)$ operatörünün $\lambda(0) = i\omega_n$ özdeğerine karşılık gelen; $q^*(s)$, $A^*(0)$ operatörünün $\bar{\lambda}(0) = -i\omega_n$ özdeğerine karşılık gelen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan özvektörler olsunlar:

$$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1 \text{ ve } \langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0. \quad (3.52)$$

Bu durumda,

$$A(0)q(\theta) = i\omega_n q(\theta) \quad (3.53)$$

$$A^*(0)q^*(s) = -i\omega_n q^*(s) \quad (3.54)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $A^*(\mu)$, $A(\mu)$ operatörünün adjointidir ve

$$A^*(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(s)}{ds} & s \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(s, \mu)\phi(-s) & s = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

olarak tanımlanır. Şimdi öncelikle $q(\theta)$ özvektörünü (3.53)'de verilen $A(0)q(\theta) = i\omega_n q(\theta)$ eşitliğini kullanarak bulalım.

Durum 1: Eğer $\theta \in [-1, 0)$ ise (3.48)'den

$$A(0)q(\theta) = \frac{dq(\theta)}{d\theta} = i\omega_n q(\theta) \quad (3.56)$$

olup, bu diferensiyel denklemin çözülmesi ile $q(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_n \theta}$ olarak elde edilir. Şimdi, c sabitini bulalım.

Durum 2: Eğer $\theta = 0$ ise (3.48)'den

$$\begin{aligned} A(0)q(\theta) &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)q(\theta) \\ &= \tau_n \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta) q(\theta) d\theta \\ &\quad + \tau_n \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1) q(\theta) d\theta \\ &= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta) q(\theta) d\theta \\ &\quad + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta + 1) q(\theta) d\theta \quad (3.57) \\ &= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} q(0) + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} q(-1) \\ &= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{-i\omega_n} \\ &= \begin{bmatrix} \tau_n (m - d_1 n^2) + \tau_n g e^{-i\omega_n} c \\ \tau_n f + \tau_n (-k - d_2 n^2) e^{-i\omega_n} c \end{bmatrix} \\ &= i\omega_n q(0) = i\omega_n \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_n 0} = \begin{pmatrix} i\omega_n \\ i\omega_n c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dır. Buradan c çekilirse

$$c = \left(\frac{i\omega_n - \tau_n (m - d_1 n^2)}{\tau_n g e^{-i\omega_n}} \right) \quad (3.58)$$

ifadesi elde edilir. Bu şekilde $q(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_n \theta}$ bulunur.

Şimdi de $q^*(s)$ özvektörünü verilen $A(0)q^*(s) = -i\omega_n q^*(s)$ eşitliğini kullanarak bulalım.

Durum 1: Eğer $\theta \in [-1, 0)$ ise (3.55)'den

$$A^*(0)q^*(s) = -\frac{dq^*(s)}{ds} = -i\omega_n q^*(s) \quad (3.59)$$

ifadesine ulaşılır. Bu diferensiyel denklemin çözülmesi ile özvektör $q^*(s) = E\begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_n s}$ olarak elde edilir. Şimdi, c^* sabitini bulalım.

Durum 2: Eğer $\theta = 0$ ise (3.55)'den

$$\begin{aligned} A^*(0)q^*(s) &= \int_{-1}^0 d\eta^T(s, \mu)\phi(-s) \\ &= \tau_n \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(s) q^*(-s) ds \\ &\quad + \tau_n \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \delta(s+1) q^*(-s) ds \\ &= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(s) q^*(-s) ds \\ &\quad + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(s+1) q^*(-s) ds \\ &= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q^*(0) + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} q^*(1) \\ &= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} E\begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix} + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} E\begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_n} \\ &= E \begin{bmatrix} \tau_n(m - d_1 n^2)c^* + \tau_n f \\ \tau_n e^{i\omega_n} g c^* + \tau_n e^{i\omega_n} (-k - d_2 n^2) \end{bmatrix} \\ &= -i\omega_n q^*(0) = -i\omega_n E\begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} -i\omega_n c^* \\ -i\omega_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

olup, buradan c^* çekilirse

$$c^* = \left(\frac{-\tau_n f}{\tau_n(m - d_1 n^2) + i\omega_n} \right) \quad (3.61)$$

olarak hesaplanır. Bu şekilde $q^*(s) = E\begin{pmatrix} c^* \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_n s}$ özvektörü bulunur.

Bulunan bu özvektörlerin (3.52)'de verilen özellikleri sağlamaları gerekir. $\lambda(\mu)$ basit bir özdeğer olduğu için $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ 'dır [14]. Şimdi $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ özelliğini sağlayacak E 'yi bulalım.

$$\begin{aligned}
\langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{q}^*(0) \cdot q(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{q}^{*T}(\xi - \theta) d\eta(\theta, \mu) q(\xi) d\xi \\
&= \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* & 1 \\ c & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* & 1 \\ c & \end{pmatrix} e^{-i\omega_n(\xi-\theta)} d\eta(\theta, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\omega_n\xi} d\xi \\
&= \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* + c \\ c \end{pmatrix} - \int_{-1}^0 \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* & 1 \\ c & \end{pmatrix} e^{i\omega_n\theta} d\eta(\theta, 0) \int_{\xi=0}^{\theta} e^{-i\omega_n\xi + i\omega_n\xi} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} d\xi \quad (3.62) \\
&= \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* + c \\ c \end{pmatrix} - \int_{-1}^0 \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* & 1 \\ c & \end{pmatrix} e^{i\omega_n\theta} d\eta(\theta, 0) \theta \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \\
&= \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* + c \\ c \end{pmatrix} - \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* & 1 \\ c & \end{pmatrix} \left(\int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) e^{i\omega_n\theta} \theta \right) \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Öncelikle, yukarıdaki ifadede yer alan integrali hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) e^{i\omega_n\theta} \theta \right) &= \int_{-1}^0 \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta) e^{i\omega_n\theta} \theta d\theta \\
&\quad + \int_{-1}^0 \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1) e^{i\omega_n\theta} \theta d\theta \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta) e^{i\omega_n\theta} \theta d\theta \quad (3.63) \\
&\quad + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta + 1) e^{i\omega_n\theta} \theta d\theta \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} e^0 0 + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} e^{-i\omega_n(-1)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\tau_n g e^{-i\omega_n} \\ 0 & \tau_n (k + d_2 n^2) e^{-i\omega_n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Elde ettiğimiz bu sonucu (3.62)'te yerine koyalım:

$$\begin{aligned}
\langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{E}(\bar{c}^* + c) - \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\tau_n g e^{-i\omega_n} \\ 0 & \tau_n(k + d_2 n^2) e^{-i\omega_n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \\
&= \bar{E}(\bar{c}^* + c) - \bar{E} \begin{pmatrix} \bar{c}^* & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_n g e^{-i\omega_n} c \\ \tau_n(k + d_2 n^2) e^{-i\omega_n} c \end{pmatrix} \\
&= \bar{E}(\bar{c}^* + c) - \bar{E} \left(-\tau_n g e^{-i\omega_n} \bar{c} \bar{c}^* + \tau_n(k + d_2 n^2) e^{-i\omega_n} c \right) \\
&= \bar{E} \left(\bar{c}^* + c + \tau_n g e^{-i\omega_n} \bar{c} \bar{c}^* - \tau_n(k + d_2 n^2) e^{-i\omega_n} c \right) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Buradan \bar{E} aşağıdaki ifadeye eşit çıkar:

$$\bar{E} = \frac{1}{\left(\bar{c}^* + c + \tau_n g e^{-i\omega_n} \bar{c} \bar{c}^* - \tau_n(k + d_2 n^2) e^{-i\omega_n} c \right)}. \tag{3.65}$$

Şimdi, bu özvektörlerin yardımı ile center manifold koordinatlarını tanımlayabiliriz.

X , L_{n_μ} operatörünün tanım kümesi olsun. $X^C := \{zq + \bar{z}\bar{q} \mid z \in \mathbb{C}\}$, $X^S := \{w \in X \mid \langle q^*, w \rangle = 0\}$ olmak üzere X bu iki kümenin direk toplamı olarak yazılabilir, yani her $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$ için $z \in \mathbb{C}$ ve $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in X^S$ vardır öyle ki

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = zq + \bar{z}\bar{q} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

dir. Sistem (3.45), (z, w) center manifold koordinatlarında $\mu = 0$ iken

$$\begin{aligned}
\langle q^*, F_0 \rangle &= \bar{q}^*(0) \cdot F_0, \quad H(z, \bar{z}, \theta) = F_0 - \langle q^*, F_0 \rangle q - \langle \bar{q}^*, F_0 \rangle \bar{q} \\
F_0 &:= F(zq + \bar{z}\bar{q} + w, 0)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

olmak üzere aşağıdaki sisteme dönüşür:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = i\omega_n z + \langle q^*, F_0 \rangle = i\omega_n z + g(z, \bar{z}) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = A(0)w + H(z, \bar{z}, \theta). \end{cases} \tag{3.68}$$

Öncelikle, sayfa 46'de yer alan (3.40)'den

$$\begin{aligned} F_0 &= F(zq + \bar{z}\bar{q} + w, 0) = F(U_t, 0) \\ &= \left(\begin{array}{c} \frac{4\alpha(3-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}u_t(0)^2 + \frac{4(\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^2}u_t(0)v_t(-1) + YMT \\ \frac{\alpha\sigma b(3-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}u_t(0)^2 + \frac{\sigma b(\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^2}u_t(0)v_t(-1) + YMT \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

olarak elde edilir.

w 'nin Taylor polinomuna açılımı, $w(z, \bar{z}) = \sum \frac{1}{i!j!}w_{ij}(z)^i(\bar{z})^j$ ile ifade edilip (3.66)'de yerine konarak ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$U_t(\theta) = zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) + w_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta)z\bar{z} + w_{02}(\theta)\frac{(\bar{z})^2}{2} + YMT. \quad (3.70)$$

$u_t(0)$ 'i elde etmek için denklem (3.70)'de $\theta = 0$ alınır:

$$u_t(0) = z + \bar{z} + w_{20_1}(0)\frac{z^2}{2} + w_{11_1}(0)z\bar{z} + w_{02_1}(0)\frac{(\bar{z})^2}{2} + YMT.$$

$v_t(-1)$ 'i elde etmek için denklem (3.70)'de $\theta = -1$ alınır:

$$v_t(-1) = z + \bar{z} + w_{20_2}(-1)\frac{z^2}{2} + w_{11_2}(-1)z\bar{z} + w_{02_2}(-1)\frac{(\bar{z})^2}{2} + YMT.$$

Elde edilen $u_t(0)$ ve $v_t(-1)$ ifadeleri (3.69)'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_0 &= F(zq + \bar{z}\bar{q} + w, 0) \\ &= \left(\begin{array}{c} F_{0_1} \\ F_{0_2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} K_{20}z^2 + K_{11}z\bar{z} + K_{02}(\bar{z})^2 + K_{21}z^2\bar{z} \\ \frac{\sigma b}{4} \left(K_{20}z^2 + K_{11}z\bar{z} + K_{02}(\bar{z})^2 + K_{21}z^2\bar{z} \right) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki ifadede

$$\begin{aligned} K_{20} &= p + rce^{-i\omega_n}, \quad K_{02} = p + r\bar{c}e^{i\omega_n}, \quad K_{11} = 2p + r\bar{c}e^{i\omega_n} + rce^{-i\omega_n} \\ K_{21} &= 2pw_{11_1}(0) + pw_{20_1}(0) + 2rw_{11_2}(-1) + rw_{20_2}(-1) \\ &\quad + r\bar{c}e^{i\omega_n}w_{20_1}(0) + 2rce^{-i\omega_n}w_{11_1}(0) \end{aligned} \quad (3.72)$$

ve

$$p = \frac{4\alpha(3-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}, \quad r = \frac{4(\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^2} \quad (3.73)$$

dir. (3.68)'dan $g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) \cdot F_0(z, \bar{z}) = \sum \frac{1}{i!j!} g_{ij}(z)^i (\bar{z})^j$ olduğu için, F_{01}, F_0 'ın birinci satırını göstermek üzere

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{i!j!} g_{ij}(z)^i (\bar{z})^j &= \bar{q}^*(0) \cdot F_0(z, \bar{z}) \\ &= \bar{E} \begin{bmatrix} \bar{c}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{01} \\ \frac{\sigma b}{4} F_{01} \end{bmatrix} \\ &= \bar{E} \bar{c}^* F_{01} + \bar{E} \frac{\sigma b}{4} F_{01}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

eşitliği elde edilir. Çatallanmanın yönünü tespit edebilmek için aşağıda verilen Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretini bulmamız gerekir:

$$c_1(\tau_n) = \frac{i}{2\omega_n} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} \quad (3.75)$$

(3.74)'ten ise

$$\begin{cases} g_{20} = 2\bar{E}(\bar{c}^* + \frac{\sigma b}{4})K_{20}, & g_{11} = \bar{E}(\bar{c}^* + \frac{\sigma b}{4})K_{11} \\ g_{02} = 2\bar{E}(\bar{c}^* + \frac{\sigma b}{4})K_{02}, & g_{21} = \bar{E}(\bar{c}^* + \frac{\sigma b}{4})K_{21} \end{cases} \quad (3.76)$$

olduğunu bilmekteyiz. g_{20}, g_{11} ve g_{02} elimizdeki bilgilerle hesaplanabilirken g_{21} 'i hesaplamak için w 'nun Taylor polinom katsayıları olan w_{20} ve w_{11} 'in hesaplanması gerekir. Elimizde

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = A(0)w + H(z, \bar{z}, \theta) \\ H(z, \bar{z}, \theta) = F_0 - \langle q^*, F_0 \rangle q - \langle \bar{q}^*, F_0 \rangle \bar{q} \end{cases} \quad (3.77)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \\ w(z, \bar{z}, \theta) &= \sum \frac{1}{i!j!} w_{ij}(\theta)(z)^i (\bar{z})^j \\ H(z, \bar{z}, \theta) &= \frac{1}{i!j!} H_{ij}(\theta)(z)^i (\bar{z})^j \end{aligned} \quad (3.78)$$

eşitlikleri mevcut olup; (3.77), (3.78)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} H_{20} &= (2i\omega_n - A)w_{20} \\ H_{11} &= (-A(0))w_{11} \\ w_{02} &= \bar{w}_{20} \end{aligned} \quad (3.79)$$

elde edilir.

Şimdi w_{20} 'ı bulalım. (3.77)'den H_{20} aşağıdaki ifadeye eşittir:

$$H_{20}(\theta) = F_0 - g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta). \quad (3.80)$$

Durum 1: Eğer $\theta \in [-1, 0)$ ise, $A(\theta)$ 'nin tanımından dolayı (3.79) aşağıdaki ifadeye dönüşür

$$H_{20}(\theta) = 2i\omega_n w_{20}(\theta) - \frac{dw_{20}(\theta)}{d\theta}. \quad (3.81)$$

(3.79) ve (3.81)'deki ifadelerden

$$\frac{dw_{20}(\theta)}{d\theta} - 2i\omega_n w_{20}(\theta) = g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta) \quad (3.82)$$

diferensiyel denklemini elde edilir. (3.82) diferensiyel denkleminin integral çarpanı metodu ile çözülmesi ile

$$w_{20}(\theta) = -\frac{1}{i\omega_n}q(0)e^{i\omega_n\theta}g_{20} - \frac{1}{3i\omega_n}\bar{q}(0)e^{-i\omega_n\theta}\bar{g}_{02} + Fe^{2i\omega_n\theta} \quad (3.83)$$

elde edilir. Şimdi F 'yi bulalım.

Durum 2: Eğer $\theta = 0$ ise, (3.80)'den

$$H_{20}(0) = 2K_{20} \left(\frac{1}{\frac{\sigma b}{4}} \right) - g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) \quad (3.84)$$

elde edilir. (3.79) ve (3.84) birlikte şu sonucu verir:

$$A(0)w_{20}(0) = 2i\omega_n w_{20}(0) + g_{20}q(0) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(0) - 2K_{20} \left(\frac{1}{\frac{\sigma b}{4}} \right). \quad (3.85)$$

$A(0)$ operatörünün tanımından ve (3.83)'ten

$$\begin{aligned} A(0)w_{20}(0) &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)w_{20}(\theta) \\ &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \left(-\frac{1}{i\omega_n}q(0)e^{i\omega_n\theta}g_{20} - \frac{1}{3i\omega_n}\bar{q}(0)e^{-i\omega_n\theta}\bar{g}_{02} + Fe^{2i\omega_n\theta} \right) \\ &= -g_{20}q(0) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(0) + F \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)e^{2i\omega_n\theta} \end{aligned} \quad (3.86)$$

elde edilir ve sonuç olarak (3.85) ve (3.86)'den

$$\begin{aligned}
A(0)w_{20}(0) &= -g_{20}q(0) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(0) + F \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)e^{2i\omega_n\theta} \\
&= 2i\omega_n w_{20}(0) + g_{20}q(0) + \bar{g}_{02}\bar{q}(0) - 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

elde edilir.

Durum 1'de $w_{20}(\theta)$ için (3.83) formülü elde edilmişti. Bu formülden elde edilen $w_{20}(0)$, (3.87)'de yerine konursa

$$\begin{aligned}
A(0)w_{20}(0) &= -g_{20}q(0) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(0) + F \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)e^{2i\omega_n\theta} \\
&= 2i\omega_n \left(-\frac{1}{i\omega_n}q(0)g_{20} - \frac{1}{3i\omega_n}\bar{q}(0)\bar{g}_{02} + F \right) \\
&\quad + g_{20}q(0) + \bar{g}_{02}\bar{q}(0) - 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \\
&= -2g_{20}q(0) - \frac{2}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2i\omega_n F + g_{20}q(0) \\
&\quad + \bar{g}_{02}\bar{q}(0) - 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \\
&= -g_{20}q(0) + \frac{1}{3}\bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2i\omega_n F - 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

olup bu ifadeden ise F 'yi elde edeceğimiz aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$F \left(2i\omega_n - \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)e^{2i\omega_n\theta} \right) = 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}. \tag{3.89}$$

Öncelikle, son ifadedeki integrali hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) e^{2i\omega_n\theta} &= \int_{-1}^0 \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta) e^{2i\omega_n\theta} d\theta \\
&+ \int_{-1}^0 \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1) e^{2i\omega_n\theta} d\theta \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta) e^{2i\omega_n\theta} d\theta \\
&+ \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta + 1) e^{2i\omega_n\theta} d\theta \quad (3.90) \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} e^{-2i\omega_n} \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & g e^{-2i\omega_n} \\ f & (-k - d_2 n^2) e^{-2i\omega_n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

İntegral (3.89)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F \left(2i\omega_n - \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & g e^{-2i\omega_n} \\ f & (-k - d_2 n^2) e^{-2i\omega_n} \end{bmatrix} \right) &= 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \\
F \left(\begin{bmatrix} 2i\omega_n - \tau_n (m - d_1 n^2) & \tau_n g e^{-2i\omega_n} \\ \tau_n f & 2i\omega_n + \tau_n (k + d_2 n^2) e^{-2i\omega_n} \end{bmatrix} \right) &= 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ve sonuçta F aşağıda verilen ifadeye eşittir:

$$F = \left(\begin{bmatrix} 2i\omega_n - \tau_n (m - d_1 n^2) & \tau_n g e^{-2i\omega_n} \\ \tau_n f & 2i\omega_n + \tau_n (k + d_2 n^2) e^{-2i\omega_n} \end{bmatrix} \right)^{-1} 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

Şimdi aynı yöntemle w_{11} 'i hesaplayalım. (3.77)'den H_{11} aşağıdaki ifadeye eşittir:

$$H_{11}(\theta) = F_0 - g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \quad (3.92)$$

Durum 1: Eğer $\theta \in [-1, 0)$ ise, $A(\theta)$ operatörünün tanımından dolayı eşitlik (3.79) aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$H_{11}(\theta) = -\frac{dw_{11}(\theta)}{d\theta}. \quad (3.93)$$

(3.79) ve (3.93)'ten

$$\frac{dw_{11}(\theta)}{d\theta} = g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta) \quad (3.94)$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözülerek

$$w_{11}(\theta) = \frac{1}{i\omega_n}q(0)e^{i\omega_n\theta}g_{11} - \frac{1}{i\omega_n}\bar{q}(0)e^{-i\omega_n\theta}\bar{g}_{11} + G \quad (3.95)$$

ifadesi elde edilir.

Durum 2: Eğer $\theta = 0$ ise, (3.92)'den

$$H_{11}(0) = g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) - K_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

elde edilir. (3.79) ve (3.93)'ten ise

$$A(0)w_{11}(0) = g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) - K_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

eşitliği elde edilir.

$A(0)$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} A(0)w_{11}(0) &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)w_{11}(\theta) \\ &= \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \left(\frac{1}{i\omega_n}q(0)e^{i\omega_n\theta}g_{11} - \frac{1}{i\omega_n}\bar{q}(0)e^{-i\omega_n\theta}\bar{g}_{11} + G \right) \\ &= g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + G \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \end{aligned} \quad (3.98)$$

olup sonuç olarak (3.95) ve (3.98)'den

$$\begin{aligned} A(0)w_{11}(0) &= g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + G \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \\ &= g_{11}q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0) - K_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.99)$$

elde edilir.

Durum 1'de $w_{11}(\theta)$ için (3.95) formülü elde edilmişti. Bu formülden elde edilen $w_{11}(0)$, (3.99)'de yerine yazılırsa G 'yi elde edeceğimiz

$$G \left(\int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \right) = K_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

eşitliğine ulaşırız. Öncelikle, bu ifadedeki integrali hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) &= \int_{-1}^0 \tau_n \left(\begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta) + \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1) \right) d\theta \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta) d\theta \\
&\quad + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \int_{-1}^0 \delta(\theta + 1) d\theta \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} + \tau_n \begin{bmatrix} 0 & g \\ 0 & -k - d_2 n^2 \end{bmatrix} \\
&= \tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & g \\ f & (-k - d_2 n^2) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

İntegral (3.100)'de yerine yazılırsa

$$G\tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & g \\ f & (-k - d_2 n^2) \end{bmatrix} = K_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}$$

ifadesi elde edilir ve sonuç olarak G aşağıda verilen ifadeye eşittir:

$$G = \left(\tau_n \begin{bmatrix} m - d_1 n^2 & g \\ f & (-k - d_2 n^2) \end{bmatrix} \right)^{-1} K_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}. \tag{3.102}$$

Bu terimler aşağıdaki ifadede yerine yazılarak, çatallanmanın yönünün tespiti için gerekli olan Lyapunov katsayısının reel kısmının işareti belirlenir:

$$Re(c_1)(\tau_n) = Re\left(\frac{g_{21}}{2}\right) - \frac{1}{2\omega_n} (Reg_{20}Img_{11} + Img_{20}Reg_{11}). \tag{3.103}$$

Elde edilen bu bilgiler aşağıdaki teoremden yararlanılarak sistemin Hopf çatallanma analizi tamamlanır.

Teorem 3.1.2 1. $0 \in \mathbb{R}$ 'yi içeren bir \mathbb{I} açık aralığında $F(0, \mu) = 0$ ve $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ F 'nin bir izole denge noktası,

2. $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$ ve $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ olmak üzere $L_{n,\mu} = D_U F(U, \mu)$ operatörü $\lambda(\mu)$ ve $\bar{\lambda}(\mu)$ basit kompleks eşlenik özdeğerlere sahip,

3. L_{n_0} matrisinin geriye kalan tüm özdeğerlerinin reel kısımları sıfırdan farklı ise

bu takdirde (3.45) sisteminde $\mu = 0$ çatallanma değerinde Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

4. Ayrıca,

(a) $\frac{1}{\alpha'(0)} \text{Re}(c_1)(0) < 0$ ise çatallanmanın yönü süperkritiktir,

(b) $\frac{1}{\alpha'(0)} \text{Re}(c_1)(0) > 0$ ise çatallanmanın yönü subkritiktir.

5. L_{n_0} matrisinin geriye kalan tüm özdeğerlerinin reel kısımları negatif ve

(a) $\text{Re}(c_1)(0) < 0$ ise periyodik çözümler kararlı,

(b) $\text{Re}(c_1)(0) > 0$ ise periyodik çözümler kararsızdır.

3.2 $n = 0$ iken Hopf Çatallanma Analizi

$n = 0$ iken ($k = 0$ alınarak), sistem (3.45)

$$L_{0,\mu}(\tau) = \begin{pmatrix} \left(\frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2} \right) & \left(-\frac{4\alpha}{1 + \alpha^2} \right) e^{-\lambda\tau} \\ \left(\frac{2\sigma b\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) & \left(-\frac{\sigma b\alpha}{1 + \alpha^2} \right) e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_{0,\mu} U_t + F(U, \mu) \quad (3.105)$$

sistemine dönüşür. Karakteristik denklem (3.12) ise

$$A = -m, \quad B = 5k, \quad C = k \quad (3.106)$$

ve

$$m = \frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2}, \quad k = \frac{\sigma b\alpha}{1 + \alpha^2} \quad (3.107)$$

olmak üzere aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\lambda^2 + A\lambda + B e^{-\lambda\tau} + C\lambda e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (3.108)$$

Karakteristik denklem (3.108)'da $\lambda = i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ yerine konursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\omega_0^4 + (A^2 - C^2)\omega_0^2 - B^2 = 0. \quad (3.109)$$

$X_0 = (A^2 - C^2)$ ve $Y_0 = -B^2$ olmak üzere (3.109)'den

$$\omega_0^2 = \frac{-X_0 \pm \sqrt{X_0^2 - 4Y_0}}{2} \quad (3.110)$$

elde edilir.

Sayfa 35'deki Teorem 3.1.1 gereğince, *2c, 3a, 3d, 3e* ve *3f* durumlarında sistem (3.105)'te Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar. Şimdi, bu durumları tek tek ele alalım.

2c Durumu: $X_0^2 - 4Y_0 = 0$ ve $X_n < 0$ olması durumunda, $Y_0 = -B^2$ ve $X_0^2 - 4Y_0 = 0$ olduğu için $(A^2 - C^2)^2 + 4B^2 = 0$ 'dır. Buradan (3.107)'den $B = 5k = 0$ sonucu elde edilir. $k = 0$ olması, (3.107)'den σ, b veya α 'dan en az birinin sıfır olmasını gerektirir. Bu ise problemin şartlarını sağlamaz. Sonuç olarak $n = 0$ iken sistem (3.105)'da *2c* durumunda Hopf çatallanma oluşmaz.

3a Durumu: $X_0^2 - 4Y_0 > 0$, $X_0 = 0$ ve $Y_0 < 0$ olması durumunda, (3.110)'den

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{\sqrt{-4Y_0}}{2}} = \sqrt{B} = \sqrt{5k} \quad (3.111)$$

olmak üzere, tek bir pozitif reel kök vardır.

3d Durumu: $X_0^2 - 4Y_0 > 0$, $X_0 > 0$ ve $Y_0 < 0$ olması durumunda, (3.110)'den

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-X_0 \pm \sqrt{X_0^2 - 4Y_0}}{2}} \quad (3.112)$$

olmak üzere, tek bir pozitif reel kök vardır.

3e Durumu: $X_0^2 - 4Y_0 > 0$, $X_0 < 0$ ve $Y_0 < 0$ olması durumunda, (3.110)'den

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-X_0 \pm \sqrt{X_0^2 - 4Y_0}}{2}} \quad (3.113)$$

olmak üzere, tek bir pozitif reel kök vardır.

3f Durumu: $X_0^2 - 4Y_0 > 0$, $X_0 < 0$ ve $Y_0 = 0$ olması durumunda, $Y_0 = 0$, olduğu için $B = 5k = 0$ 'dır. $k = 0$ olması, (3.107)'den σ , b veya α 'dan en az birinin sıfır olmasını gerektirir. Bu ise problemin şartlarını sağlamaz. Sonuç olarak $n = 0$ iken sistem (3.105)'te 3f durumunda Hopf çatallanma oluşmaz.

Sonuç olarak, $n = 0$ iken sistem (3.105)'de 3a, 3d ve 3e durumlarında $\mu = 0$ iken Hopf çatallanma oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar.

$n = 0$ iken oluşan bu Hopf çatallanmanın yön analizi için (3.103) Lyapunov katsayısının reel kısmının işaretini belirlemek için g_{20} , g_{11} ve g_{21} terimlerinin $n = 0$ için hesaplanması gerekir.

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{\left(\bar{c}^* + c + \tau_0 g e^{-i\omega_0} c \bar{c}^* - \tau_0 k e^{-i\omega_0} c\right)} \\ c^* &= \left(\frac{-\tau_0 f}{\tau_0 m + i\omega_0}\right), \quad c = \left(\frac{i\omega_0 - \tau_0 m}{\tau_0 g e^{-i\omega_0}}\right) \\ K_{20} &= p + r c e^{-i\omega_0}, \quad p = \frac{4\alpha(3 - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2}, \quad r = \frac{4(\alpha^2 - 1)}{(1 + \alpha^2)^2} \\ m &= \frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2}, \quad f = \frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad g = \frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad k = \frac{\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2}\end{aligned}$$

olmak üzere, (3.76)'den

$$g_{20} = 2\bar{E}\left(\bar{c}^* + \frac{\sigma b}{4}\right)K_{20} \quad (3.114)$$

dir. Yine,

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{\left(\bar{c}^* + c + \tau_0 g e^{-i\omega_0} c \bar{c}^* - \tau_0 k e^{-i\omega_0} c\right)} \\ c^* &= \left(\frac{-\tau_0 f}{\tau_0 m + i\omega_0}\right), \quad c = \left(\frac{i\omega_0 - \tau_0 m}{\tau_0 g e^{-i\omega_0}}\right) \\ K_{11} &= 2p + r \bar{c} e^{i\omega_n} + r c e^{-i\omega_n}, \quad p = \frac{4\alpha(3 - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2}, \quad r = \frac{4(\alpha^2 - 1)}{(1 + \alpha^2)^2} \\ m &= \frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2}, \quad f = \frac{2\sigma b \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad g = \frac{-4\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad k = \frac{\sigma b \alpha}{1 + \alpha^2}\end{aligned}$$

olmak üzere, (3.76)'den

$$g_{11} = \bar{E}\left(\bar{c}^* + \frac{\sigma b}{4}\right)K_{11} \quad (3.115)$$

dir. Son olarak

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{\left(\bar{c}^* + c + \tau_0 g e^{-i\omega_0} c \bar{c}^* - \tau_0 k e^{-i\omega_0} c\right)} \\ c^* &= \left(\frac{-\tau_0 f}{\tau_0 m + i\omega_0}\right), c = \left(\frac{i\omega_0 - \tau_0 m}{\tau_0 g e^{-i\omega_0}}\right) \\ K_{21} &= 2pw_{11_1}(0) + pw_{20_1}(0) + 2rw_{11_2}(-1) + rw_{20_2}(-1) \\ &\quad + r\bar{c}e^{i\omega_0}w_{20_1}(0) + 2rce^{-i\omega_0}w_{11_1}(0) \\ p &= \frac{4\alpha(3-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}, r = \frac{4(\alpha^2-1)}{(1+\alpha^2)^2} \\ m &= \frac{3\alpha^2-5}{1+\alpha^2}, f = \frac{2\sigma b\alpha^2}{1+\alpha^2}, g = \frac{-4\alpha}{1+\alpha^2}, k = \frac{\sigma b\alpha}{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}w_{20}(\theta) &= -\frac{1}{i\omega_0}q(0)e^{i\omega_0\theta}g_{20} - \frac{1}{3i\omega_0}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\theta}\bar{g}_{02} + Fe^{2i\omega_0\theta} \\ F &= \left(\begin{bmatrix} 2i\omega_0 - \tau_0 m & \tau_0 g e^{-2i\omega_0} \\ \tau_0 f & 2i\omega_0 + \tau_0 k e^{-2i\omega_0} \end{bmatrix}\right)^{-1} 2K_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve de

$$\begin{aligned}w_{11}(\theta) &= \frac{1}{i\omega_0}q(0)e^{i\omega_0\theta}g_{11} - \frac{1}{i\omega_0}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\theta}\bar{g}_{11} + G \\ G &= \left(\tau_0 \begin{bmatrix} m & g \\ f & -k \end{bmatrix}\right)^{-1} K_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma b}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olmak üzere, (3.76)'den

$$g_{21} = \bar{E} \left(\bar{c}^* + \frac{\sigma b}{4} \right) K_{21} \quad (3.116)$$

dir. Bu formüllerle bulunan değerler (3.103)'te yerine konarak işaret tespiti yapılır. Bu şekilde Hopf çatallanma analizi tamamlanır.

4. SONUÇ

Öneminden Bölüm 1.2’de bahsedilen Lengyel-Epstein modeli, birçok yönü ile çalışılmış bir modeldir. Bu çalışmalardan [20]’de modele difüzyon terimi eklemenin, sistemde ortaya çıkan Hopf çatallanmayı nasıl etkilediği incelenmiştir. Bu çalışmada sistemin parametrelerinden $b > 0$ çatallanma parametresi olarak alınmıştır. Difüzyon terimi içermeyen sistemde $b = b_0 = \frac{3\alpha^2 - 5}{1 + \alpha^2}$ çatallanma değerinde Hopf çatallanma meydana gelirken, sistemin tek pozitif denge noktası (u^*, v^*) $b < b_0$ iken kararsız, $b > b_0$ iken kararlı olduğu ifade edilmiştir. Sisteme difüzyon teriminin eklenmesi ile denge noktasının kararlılık yapısında değişiklik olduğu, sistemin denge noktası $b > b_0$ iken [20]’de Teorem 3.1’de verilen şart altında kararsızlaştığı ifade edilmiştir.

Daha önce yapılan birçok çalışmada, modellere gecikme terimi dahil etmenin öneminden bahsedilmiştir ([14], [23], [5], [16], [25], [26], [27]). Bu önem gözönüne alınarak Çelik, C. ve Merdan, H, tarafından [16]’da modele gecikme terimi eklenerek elde edilen Gecikmeli Lengyel-Epstein sisteminde Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır. Geniş bir Hopf çatallanma analizinin yapıldığı bu çalışmada çatallanma parametresi $\tau = \tau_n$, $n = 0, 1, 2..$ değerlerinden geçerken sistemde Hopf çatallanmanın meydana geldiği ve reel değerli periyodik çözümlerin ortaya çıktığı gösterilmiş ve bu teorik çalışmalar nümerik simülasyonlarla desteklenmiştir.

Bu tezde ise [16]’daki çalışmaya ek olarak gecikme terimi içeren Lengyel-Epstein sistemine difüzyon terimi eklenerek oluşan Hopf çatallanmada ne gibi değişiklikler olduğu incelenmiştir. Çalışma sonucu Teorem 3.1.1’de verilen şartlar altında, d_1 ve d_2 difüzyon terimlerini içeren (3.23)’te verilen $\tau = \tau_n$ değerlerinde Hopf çatallanmanın meydana geldiği ve reel değerli periyodik çözümlerin ortaya çıktığı

gösterilmiştir. Bu değerlerde ortaya çıkan Hopf çatallanmanın yönünün ve oluşan periyodik çözümlerin kararlılık yapılarının tespit edilmesi için Poincaré Normal Form Teorisi ve Center Manifold Teoremi kullanılarak gerekli terimler hesaplanmıştır. Difüzyon teriminin sisteme eklenmesi sonsuz çoklukta özdeğerde Hopf çatallanmanın ortaya çıkmasına neden olmuştur. [16]'da ele alınan sistemde $m = \frac{3\alpha^2-5}{1+\alpha^2}$ ve $k = \frac{\sigma b\alpha}{1+\alpha^2}$ olmak üzere $\omega = \sqrt{\frac{k^2-m^2+\sqrt{(m^2-k^2)^2+100k^2}}{2}}$ özdeğeri için [16]'da verilen $\tau = \tau_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ değerlerinde Hopf çatallanması oluşur ve reel değerli periyodik çözümler ortaya çıkar. Fakat gecikmeli reaksiyon-difüzyon sisteminde, Bölüm 3.1'de verildiği üzere, $A = (d_1 + d_2)n^2 - m$, $B = 5k + kd_1n^2$, $C = k$ ve $D = d_1d_2n^4 - md_2n^2$ olmak üzere $X_n = (A^2 - C^2 - 2D)$, $Y_n = (D^2 - B^2)$ olarak alınırsa özdeğer $\omega_n = \sqrt{\frac{-X_n \pm \sqrt{X_n^2 - 4Y_n}}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olarak elde edilir ve bu özdeğerler için (3.23)'te verilen $\tau = \tau_n$ değerlerinde Hopf çatallanmanın meydana gelir ve reel değerli periyodik çözümlerin ortaya çıkar. Bu açıklamadan anlaşılacağı üzere [16]'daki çalışmada tek bir özdeğer için $\tau = \tau_n$ değerlerinde Hopf çatallanma meydana gelirken, bu tezde çalışılan problemde sonsuz çoklukta özdeğerler için (3.23)'te verilen $\tau = \tau_n$ değerlerinde Hopf çatallanma meydana gelir. Ayrıca, [16]'da incelenen sistemde $\tau = \tau_0 = \frac{1}{\omega} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{(5+m)\omega^2}{(25+\omega^2)k} \right) \right\}$ iken Hopf çatallanmanın meydana gelmesi için gerek ve yeter koşul olarak $k > m$ olduğu ifade edilirken, difüzyon terimi eklenmiş bu tezde incelenen problem için $n = 0$ alınarak difüzyon terimlerinin etkisinin kaldırılması ile elde edilen sistemde $\tau = \tau_0$ iken Hopf çatallanmanın meydana gelmesi için gerek ve yeter koşul olarak Bölüm 3.2'de verilen 3a, 3d ve 3e şartlarının sağlanması gerektiği gösterilmiştir. Bu durumlardan 3d, [16]'da çalışılan durumla örtüşmektedir. Bu açıklamalar göstermektedir ki sisteme difüzyon teriminin eklenmesi, Hopf çatallanmanın oluşması için gerekli şartları değiştirmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] "Matematiksel Modelleme", erişim adresi: <http://www.bilkent.edu.tr/~kadir/mat/mat.donem.odev/aykutaydin.matematiksekmodelleme.pdf>, erişim tarihi: 30 Nisan 2012
- [2] Sharpe, F.R., Lotka, A.J., A problem in age distribution, *Philosophical Magazine*, 8, 21-435, 1911.
- [3] Kierstead, H., Slobodkin, L.B., Spatial heterogeneity and population stability, *Journal of Marina Research*, 12, 141, 1953.
- [4] Skellam, J.G., Random dispersal in theoretical populations, *Biometrika*, 38, 196-218, 1951.
- [5] Allen, L.J.S., *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson-Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2007.
- [6] Turing, A. M., The chemical basis of morphogenesis, *Philos. Trans. R. Soc., Ser. B*, 237, 37-72, 1952.
- [7] Villasana, M., Radunskaya, A., A delay differential equation model for tumor growth, *J. Math. Biol.*, 47, 270-294, 2003.
- [8] Günel, K., 2006, *Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın.
- [9] De Kepper, P., Castets, V., Dulos, E., Boissonade, J., Turing-type chemical patterns in the chlorite-iodide-malonic acid reaction, *Physica D*, 49, 161-169, 1991.

- [10] Epstein, I.R., Pojman, J.A., An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [11] Lengyel, I., Epstein, I.R., Modeling of Turing structure in the Chlorite-iodide-malonic acid-starch reaction system, *Science*, 251, 650-652, 1991.
- [12] Lengyel, I., Epstein, I.R., A chemical approach to designing Turing patterns in reaction-diffusion system, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 89, 3977-3979, 1992.
- [13] Kuznetsov, Y.A., Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [14] Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D., Wan, Y.-H., Theory and Application of Hopf Bifurcation, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [15] Yi, F.Q., Wei, J.J., Shi, J.P., Bifurcation and spatiotemporal patterns in a homogeneous diffusive predator-prey system, *Journal of Differential Equations*, 246, 1944-1977, 2009.
- [16] Çelik, C., Merdan, H., Hopf bifurcation analysis of a system of coupled delayed-differential equations, TOBB University of Economics and Technology. (incelemede)
- [17] Jang, J., Ni, W.M., Tang, M., Global bifurcation and structure of Turing patterns in the 1-D Lengyel-Epstein model, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol. 16, No. 2, 2004.
- [18] Du, L., Wang, M., Hopf bifurcation analysis in the 1-D Lengyel-Epstein reaction-diffusion model, *J. Math. Anal. Appl.*, 366, 473-485, 2010.
- [19] Ni, W.M., Tang, M., Turing Patterns in the Lengyel-Epstein System for the CIMA reaction, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Volume 357, Number 10, 3953-3969, 2005.
- [20] Yi, F.Q., Wei, J.J., Shi, J.P., Diffusion-driven instability and bifurcation in the Lengyel-Epstein system, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 9 (3), 1038-1051, 2008.

- [21] Yi, F.Q., Wei, J.J., Shi, J.P., Global asymptotical behavior of the Lengyel-Epstein reaction-diffusion system, *Appl. Math. Lett.*, 22 (1), 52-55, 2009.
- [22] Yi, F.Q., Wei, J.J., Shi, J.P., Jin, J., Bifurcations of patterned solutions in diffusive Lengyel-Epstein system of CIMA chemical reaction. (incelemede)
- [23] Murray, J.D., *Mathematical Biology*, Springer, New York, 2002.
- [24] Li, B., Wang, M., Diffusion-driven instability and Hopf bifurcation in Brusselator system, *App. Math. and Mech.*, 29, 825-832, 2008.
- [25] Chafee, N., A bifurcation problem for functional differential equation of finitely retarded type, *J. Math. Anal. and Appl.*, 35, 312-348, 1971.
- [26] Balachandran, B., Kalmar-Nagy, T., Gilsinn, D.E., *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, Springer, New York, 2009.
- [27] Akkocaoğlu, H., Merdan, H., Çelik., C., Hopf bifurcation analysis of a general non-linear differential equation with delay. *J. Comput. Appl. Math.* (2012), doi:10.1016/j.cam.2012.06.029.
- [28] Rovinsky, A., Menzinger, M., Interaction of Turing and Hopf bifurcations in chemical systems, *Phys. Rev. A*, (3), 46 (10), 6315-6322, 1998.

EKLER

A. Terim Sözlüğü

Türkçe terim	İngilizce Terim
çatallanma	bifurcation
denge noktası	equilibrium point
düzgün	smooth
gecikme	delay
kararlılık	stability
karakteristik	characteristic
kuadratik	quadratic
kubik	cubic
lineer	linear
normalizasyon	normalization
özdeğer	eigenvalue
özvektör	eigenvector
subkritik	subcritic
superkritik	supercritic
yön	direction
tek katlı (basit)	simple

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : BİLAZEROĞLU, Şeyma
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 30.05.1987 Kayseri
Medeni hali : Bekar
Telefon : (0312)2924128
Faks : (0312)2924121
e-mail : sbilazeroglu@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Y. Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2012
Lisans	ODTÜ	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-2012	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (Çok iyi)

Yayımlar

Merdan, H., Bilazeroğlu, Ş., Hopf Bifurcation in Lengyel-Epstein Reaction-Diffusion System with Delay. (incelemede)